ственную проектируемую линейную связность.

По аналогии с [3] мы называем построеные расслоения $\pi^K : \mathcal{R}^K \to M$ и $\pi^V : \mathcal{R}^V \to M$ естественными слоеными расслоениями картанова слоения (M, F).

ЛИТЕРАТУРА

1. Blumenthal R. *Cartan submersions and Cartan foliations* // Illinois J. Math. – 1987. – V. 31. – P. 327–343.

2. Жукова Н. И. *Минимальные множества картановых слоений* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. – 2007. – Т. 256. – С. 115–147.

3. Cap A., Slovak J. *Parabolic geometries. I. Background and general theory.* – Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society, Providence, RI. – 2009. – 628 p.

Ю. Ю. Багдерина

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа,

yulya@mail.rb.ru

ОТДЕЛИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная работа является продолжением статьи [1], где рассматривалась задача полного разделения уравнений в системе

$$\begin{aligned} x_j'' = K_j + 2L_j x_j' + 2M_j x_k' + P_j x_j'^2 + 2S_j x_1' x_2' + Q_j x_k'^2 + \\ + x_j'(V_1 x_1'^2 + 2V_0 x_1' x_2' + V_2 x_2'^2), \quad j = 1, 2, \quad k = 3 - j, \end{aligned} \tag{1}$$

в результате точечного преобразования общего вида и вида

$$\bar{t} = \theta(t), \qquad \bar{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, x_2), \qquad \bar{x}_2 = \varphi_2(t, x_1, x_2). \tag{2}$$

Здесь получены критерии приводимости системы (1) к виду

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1'' = P(\bar{t},\bar{x}_1) + 3Q(\bar{t},\bar{x}_1)\bar{x}_1' + 3R(\bar{t},\bar{x}_1)\bar{x}_1'^2 + S(\bar{t},\bar{x}_1)\bar{x}_1'^3, \qquad (3)\\
&\bar{x}_2'' = \bar{K}_2 + 2\bar{L}_2\bar{x}_2' + 2\bar{M}_2\bar{x}_1' + \bar{P}_2\bar{x}_2'^2 + 2\bar{S}_2\bar{x}_1'\bar{x}_2' + \bar{Q}_2\bar{x}_1'^2 + S(\bar{t},\bar{x}_1)\bar{x}_1'^2\bar{x}_2'.
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Система (1) с V_0, V_1, $V_2 \neq 0$ преобразованием (2) приводится к виду (3) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}
&V_0^2 = V_1V_2, \quad a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0, \quad V_1A_{l1} + V_0A_{l2} + V_2A_{l3} = 0,\\
&V_1B_{i1} + V_0B_{i2} = 0,\ V_0B_{i1} + V_2B_{i2} = 0,\ l = 1,\dots,6,\ i = 1,\dots,13.
\end{aligned}$$

Величины a_{ji}, c_{ji} и A_{lm}, $l = 1, \dots, 5$ приведены в [1, с. 38–40][1],

$$\begin{aligned}
&B_{11} = a_{11}, \quad B_{12} = -a_{22}, \quad B_{21} = a_{12}, \quad B_{22} = -a_{21},\\
&B_{31} = a_{14} - a_{15},\ B_{32} = a_{25} - a_{24},\ B_{41} = e_{10},\ B_{42} = -e_{21},\\
&B_{51} = e_{11}, \quad B_{52} = -e_{20}, \quad B_{61} = e_{12}, \quad B_{62} = -e_{22},\\
&B_{71} = c_{12} - c_{11} + 3e_{13}, \quad B_{72} = c_{21} - c_{22} - 3e_{23},
\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
&A_{61} = c_{14},\ A_{62} = c_{15} + c_{25},\ A_{63} = c_{24},\ B_{81} = V_{2x_1},\ B_{82} = -V_{1x_2},\\
&B_{91} = V_{1x_2} - 2V_{0x_1}, B_{92} = V_{1x_1}, B_{10,1} = V_{2x_2}, B_{10,2} = V_{2x_1} - 2V_{0x_2},\\
&B_{11,1} = \varepsilon + V_{0t},\ B_{11,2} = -V_{1t},\ B_{12,1} = V_{2t},\ B_{12,2} = \varepsilon - V_{0t},\\
&\text{где} \quad \varepsilon = M_1V_1 + (L_2 - L_1)V_0 - M_2V_2 \quad \text{и}\\
&B_{13,1} = c_{14}, \quad B_{13,2} = c_{15} \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0,\\
&B_{13,j} = c_{j4}\varepsilon_{x_j} + c_{k5}\varepsilon_{x_k} + \varepsilon[P_jc_{j4} + S_j(c_{15} + c_{25}) + Q_jc_{k4} -\\
&\qquad -c_{j4,x_j} - c_{k5,x_k}], \quad j = 1,2, \quad k = 3 - j, \quad \text{при} \quad \varepsilon \neq 0.
\end{aligned}$$

Здесь
$$\begin{aligned}
&e_{j0} = a_{j5,x_j} - a_{k6,x_k} + Q_1a_{23} + Q_2a_{13} - S_ja_{k4} - S_ka_{j5} +\\
&\quad + 3(M_kV_{kt} - M_jV_{jt}) + \tfrac{3}{2}((3L_j - L_k)V_{0t} - V_jM_{jt} + V_kM_{kt} +\\
&+ V_0(L_{jt} - L_{kt})),\ e_{j2} = a_{j7,x_j} - a_{j8,x_k} + Q_ja_{k7} + S_j(a_{j8} - a_{k8}) -\\
&- P_ja_{j7} - M_ja_{k6} + L_ja_{j4} - L_ka_{j5} + M_ka_{j3} + \tfrac{3}{2}(K_jV_{0t} + K_kV_{kt}),\\
&e_{j1} = a_{j3,x_j} - a_{j4,x_k} + Q_j(a_{k5} - a_{k6}) + (2S_j - P_k)a_{j4} - S_ja_{j6} +\\
&+ (S_k - P_j)a_{j3} + \tfrac{3}{2}(L_1 + L_2)V_{kt}, \qquad e_{j3} = \tfrac{3}{2}(K_jV_{0t} + K_kV_{kt}) +\\
&\quad + V_0(K_{jt}/2 + K_jL_j + K_kM_j) + V_k(K_{kt}/2 + K_jM_k + K_kL_k).
\end{aligned}$$

[1] В [1, с. 39] имеется опечатка в аналоге формулы $e_{j0} = 0$.

Лемма 2. *Система (1) с* $V_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, *преобразованием (2) приводится к виду (3) с* $S = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} B < 2, \quad \operatorname{rank} A < 3, \quad B_{i2}^2 A_{k1} - B_{i1} B_{i2} A_{k2} + B_{i1}^2 A_{k3} = 0,$$
$$(A_{k1}A_{l3} - A_{l1}A_{k3})^2 + (A_{k2}A_{l1} - A_{l2}A_{k1})(A_{k2}A_{l3} - A_{l2}A_{k3}) = 0.$$

Первые 20 строк 65×3 матрицы A приведены в [1, с. 39–40],

$$A_{l+15,1} = (A_{l1})_t - 2L_1A_{l1} - M_1A_{l2},\ A_{l+15,2} = (A_{l2})_t - 2M_2A_{l1}$$
$$-(L_1 + L_2)A_{l2} - 2M_1A_{l3},\ A_{l+15,3} = (A_{l3})_t - M_2A_{l2} - 2L_2A_{l3},$$
$$A_{l+30,1} = (A_{l1})_{x_1} - 2P_1A_{l1} - S_1A_{l2},\ A_{l+30,2} = (A_{l2})_{x_1} - 2Q_2A_{l1}$$
$$-(P_1 + S_2)A_{l2} - 2S_1A_{l3},\ A_{l+30,3} = (A_{l3})_{x_1} - Q_2A_{l2} - 2S_2A_{l3},$$
$$A_{l+45,1} = (A_{l1})_{x_2} - 2S_1A_{l1} - Q_1A_{l2},\ A_{l+45,2} = (A_{l2})_{x_2} - 2S_2A_{l1}$$
$$-(S_1 + P_2)A_{l2} - 2Q_1A_{l3},\ A_{l+45,3} = (A_{l3})_{x_2} - S_2A_{l2} - 2P_2A_{l3},$$

$l = 6, \ldots, 20$. Элементы 36×2 матрицы B определяются (4) и

$$B_{81} = c_{25} - 2M_1c_{29} + 2(L_1 - L_2)c_{18} + 2M_2c_{17},$$
$$B_{82} = c_{24} - 2M_1c_{26} + 2(L_1 - L_2)c_{27} + 2M_2c_{28},$$
$$B_{91} = c_{14} - 2M_2c_{16} + 2(L_2 - L_1)c_{17} + 2M_1c_{18},$$
$$B_{92} = c_{15} - 2M_2c_{19} + 2(L_2 - L_1)c_{28} + 2M_1c_{27},$$
$$B_{9+i,j} = (B_{ij})_t - L_jB_{ij} - M_jB_{ik}, \qquad j = 1, 2,$$
$$B_{9(j+1)+i,j} = (B_{ij})_{x_j} - P_jB_{ij} - S_jB_{ik}, \quad k = 3 - j,$$
$$B_{9(4-j)+i,j} = (B_{ij})_{x_k} - S_jB_{ij} - Q_jB_{ik}, \quad i = 1, \ldots, 9.$$

Работа выполнена при поддержке грантов МК-8247.2010.1, РФФИ 10-01-00186-а, 11-01-91330-ННИО-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдерина Ю. Ю. *Разделение уравнений в системах двух ОДУ второго порядка* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2010. – Т. 40. – С. 37–45.