З. З. Ризванов, Э. И. Фазлеева
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
rizvanov.zemfir@mail.ru, elmira.fazleeva@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Функциональный метод, основанный на использовании свойств функций, позволяет решать многие задачи математики, в том числе уравнения и неравенства. В отличие от графического метода, знание свойств функций позволяет находить точные корни уравнения (неравенства), при этом не требуется построения графиков функций. Использование свойств функций способствует рационализации решений уравнений и неравенств.

Можно выделить следующие способы использования функционального метода при решении уравнений и неравенств: использование понятия области определения функции; использование понятия области значений функции; использование свойства монотонности функции; использование свойств четности или нечетности функций; использование свойства периодичности функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = (\sqrt{2})^{2x^2+12x+17}$.

Решение. 1. $x^2+6x+13=(x+3)^2+4, \quad (x+3)^2+4 \geqslant 4$,

$$0 < \frac{\pi}{(x+3)^2+4} \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \sin\frac{\pi}{(x+3)^2+4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Графиком функции $f(x)=2x^2+12x+17$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Координаты вершины:

$x_0 = -3, f(x_0) = -1$. Следовательно, $f(x) \geqslant -1$. Тогда, в силу возрастания показательной функции, имеем:

$$(\sqrt{2})^{2x^2+12x+17} \geqslant (\sqrt{2})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Равенство достигается, если

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ (\sqrt{2})^{2x^2+12x+17} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

4. Решением системы и, следовательно, нашего уравнения является $x = -3$.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить неравенство: $\log_2(8-x) \leqslant 3x - 10$.

Решение. 1. ОДЗ: $x < 8$.

2. При $x = 4$ левая и правая части равны.

3. Так как левая часть – строго убывающая функция, а правая – строго возрастающая, то неравенству удовлетворяют $x \geqslant 4$.

4. С учетом ОДЗ имеем: $4 \leqslant x < 8$.

Ответ: $x \in [4; 8)$.

Пример 3. Решить неравенство: $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

Решение. Эквивалентными преобразованиями придем к неравенству $\cos 4x - \cos 12x < 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \cos 4x - \cos 12x = 2 \sin 8x \sin 4x.$$

Ее период $T = \pi/2$. Следовательно, решение неравенства достаточно найти на промежутке $[-\pi/4; \pi/4]$. Так как функция четная, то решения достаточно найти лишь на отрезке $[0; \pi/4]$. Функция на данном промежутке имеет два корня: $0, \pi/8$, которые разбивают промежуток $[0; \pi/4]$ на два интервала знакопостоянства: $(0; \pi/8)$, $(\pi/8; \pi/4)$. Неравенство выполняется для всех $x \in (\pi/8; \pi/4)$. Но тогда оно будет выполняться и для $x \in (-\pi/4; -\pi/8)$.

Учитывая периодичность функции, запишем общее решение неравенства

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}<x<-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \quad \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \quad k\in \boldsymbol{Z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалева Г. И., Конкина Е. В. *Функциональный метод решения уравнений и неравенств.* – М.: Чистые пруды, 2008. – 32 с.

2. Лысенко Ф. Ф., Калашников В. Ю., Неймарк А. Б., Давыдов Б. Е. *Математика. Подготовка к ЕГЭ, подготовка к вступительным экзаменам.* – Ростов-на-Дону: Сфинкс, 2004. – 400 с.

М. С. Рогозина

Сибирский федеральный университет,

rogozina.marina@mail.ru

О КОРРЕКТНОСТИ НЕЯВНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Теория разностных схем – раздел вычислительной математики, изучающий методы приближенного решения дифференциальных уравнений путем их замены конечноразностными уравнениями (разностными схемами) (см., например, [1]). Одна из важных задач теории разностных схем – *исследование корректности разностных задач.*

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть δ_1 – оператор сдвига по переменной x, т. е. $\delta_1 f(x,y) = f(x+1,y)$, а δ_2 – оператор сдвига по переменной y, т. е.