

*На правах рукописи*

Гончарова Галина Сергеевна

**Математическое моделирование массопереноса  
в неоднородно уплотняющихся пористых средах**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

**Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении  
высшего профессионального образования «Казанский государственный  
университет имени В.И. Ульянова-Ленина»,  
НИИММ им. Н. Г. Чеботарева.**

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Храмченков Максим Георгиевич

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор Якимов Николай Дмитриевич

доктор физико-математических наук,  
доцент по специальности  
Куштанова Галя Гатинишна

**Ведущая организация:** Институт экологического почвоведения МГУ  
им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 19 ноября 2009 г. в 14.30 на заседании диссертационного  
совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу:  
420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке  
им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета  
им. В.И. Ульянова-Ленина

Автореферат разослан «17» октября 2009 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.081.21  
д. ф.-м. н., доцент

Задворнов О.А.

## **Общая характеристика работы**

В диссертации построены модели массопереноса в неоднородно уплотняющихся пористых средах и решены некоторые задачи математического моделирования процессов массопереноса в таких средах для ряда практически важных случаев.

### **Основные задачи исследования**

- На основе методов физико-химической механики пористых сред разработать гидродинамическую модель притока воды к скважине из водоносного пласта с учетом влияния вышележащего глинистого слоя (рассматривается плоское радиальное течение при вертикальном отжиме воды из глины) и исследовать в рамках этой модели влияние различных факторов.
- Найти границу между зонами с разной проницаемостью в неоднородно уплотняющейся пористой среде в процессе отжима жидкости и рассмотреть возможные усадки дневной поверхности.
- Исследовать влияние дополнительного водопритока из глинистого слоя за счет образования зоны усадки в глине (в сравнение со случаем, когда этот эффект не учитывается) на концентрацию примеси в воде, поступающей в водоносный пласт.
- Разработать модель структурированных (агрегированных) пористых пород (сферическое течение в пористых шарообразных частицах). На базе полученной модели решить задачи о концентрации примеси в воде и усадке глинистого блока.
- Разработать модель влаго- и массопереноса в ненасыщенных агрегированных пористых средах.

### **Актуальность темы**

Уплотнение пористых материалов, происходящее в связи с отжимом поровой жидкости под действием внешней нагрузки, – широко распространенное явление в природных и технологических системах. Как правило, генерируемые нагрузкой напряжения в пористой матрице и давления в поровой жидкости

неоднородно распределены по объему пористой среды. Это приводит к появлению в пористом материале областей с разной степенью уплотненности. Задачи, возникающие в связи с необходимостью описания процесса фильтрации жидкости в ходе подобных процессов, традиционно являются объектом особого раздела механики насыщенных и ненасыщенных пористых сред – теории фильтрационной консолидации, давно и успешно развиваемой в казанской школе подземной гидромеханики. Эти задачи, особенно в приложении к реальным природным или технологическим системам, очень сложны, поэтому на практике часто используют различные приближения. В частности, одним из таких приближений является описание неоднородно уплотненной пористой среды как комбинации зон с разными коэффициентами фильтрации и подвижной границей между ними. Конкретными примерами такого рода систем являются, прежде всего, различные природные пористые среды, деформации которых приводят к заполнению порового пространства этих сред мелкодисперсными фракциями вещества пористой среды. Так, например, ведут себя в ходе консолидации глинистые горные породы. В биологических (живых) системах подобные процессы протекают в почках в ходе образования первичного фильтрата в капсуле Шумлянско-Боумана, а также в ходе газообмена в системе легочных альвеол. В технологии такие явления часто наблюдаются в ходе процессов жидкостной экстракции (в пищевой и фармакологической промышленности).

### **Научная новизна работы**

Результаты диссертации являются новыми. Среди новых результатов, полученных автором диссертации, наиболее значительными представляются следующие:

- Модель массопереноса в системе «пласт – вышележащий неоднородно уплотняющийся глинистый слой» (модифицированная схема Хантуша);
- Модель массопереноса в агрегированных неоднородно уплотняющихся пористых средах;
- Модель массопереноса в ненасыщенной агрегированной неоднородно уплотняющейся пористой среде.

**Достоверность научных результатов** обеспечивается применением при разработке физико-математических моделей общих законов и уравнений неравновесной термодинамики и механики сплошных сред. Проведенный сравнительный анализ решений полученных уравнений показывает качественное соответствие в частных случаях экспериментальным данным.

**Научно-практическое значение работы** заключается в построении упрощенной модели нахождения границы между относительно слабо и хорошо проницаемыми зонами неоднородно уплотняющейся пористой среды, а также модели массопереноса в неоднородно уплотняющемся слое глины, взаимодействующем с нижележащим водоносным пластом. Данная модель позволяет объяснить увеличенный срок эксплуатации скважины, возможные усадки и прогнозировать уровень загрязнений или содержания полезных компонентов в воде.

Предложенная в данной работе реологическая модель структурированных (агрегированных) насыщенных и ненасыщенных неоднородно уплотняющих пористых сред может быть использована для получения детального исследования свойств агрегатов в ходе процессов жидкостной экстракции (в пищевой и фармакологической промышленности).

### **Апробация работы**

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

- Итоговой научной конференции КГУ, секция математического моделирования и математической физики, Казань, 2004;
- Всероссийской научной конференции «Современные аспекты экологии и экологического образования», Казань, 2005.
- Международной научной конференции «Проблемы инженерной геодинамики и экологической геодинамики», Москва, 2006.
- Всероссийской научной конференции «Окружающая среда и устойчивое развитие регионов: новые методы и технологии исследований», Казань, 2009.

## Публикации

По теме диссертации опубликовано 9 работ, в том числе одна статья по специальности и две статьи по смежным специальностям в изданиях из списка ВАК.

## Структура и содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержащих одиннадцать параграфов, заключения и списка использованных источников, содержит 102 страницы сквозной нумерации, в том числе 42 рисунка; список литературы насчитывает 99 наименований, в том числе публикации автора по теме диссертации – 9 наименований.

**Во введении** обсуждается актуальность темы, формулируются цель и положения, выносимые на защиту. Приводится обзор работ, имеющих отношение к результатам автора. Дается анализ структуры и содержания диссертации.

**В первой главе** приведена специфика процессов массопереноса в неоднородно уплотняющихся средах. В качестве удобного объекта исследования была взята модель глины, которая является пористой средой со свойствами неоднородного уплотнения.

**Вторая глава** посвящена задаче о притоке воды к скважине из водоносного пласта с учетом влияния вышележащего глинистого слоя. Высокая пористость, которая получается в свежееотложившихся глинах и илах, указывает на крайнюю восприимчивость таких материалов к уплотнению. Для моделирования физико-механических свойств неоднородно уплотняющихся сред решается задача Н. Н. Веригина о фильтрации в неоднородно уплотненной среде, состоящей из двух зон с постоянными, но отличными друг от друга значениями коэффициента консолидации, и движущейся границей между зонами, а также используются результаты работ М. Г. Храмченкова по этому вопросу. Для решения данной задачи моделируется ситуация, когда в глинистом слое распределение давления заменяется кусочно-линейным профилем («ломаной»). Проводится сравнительный анализ полученных решений для классической постановки и новой, с «ломаной». Далее показана приемственность и целесообразность такой замены. Также, в данной части проведен анализ результатов, когда решается задача Веригина с подвижной

границей, и когда эффект «схлопывания пор» (т. е. образование двух зон в глине с разной проницаемостью) не учитывается. Показатели концентрации примеси в водоносном пласте за счет притока из глинистой толщи и усадки дневной поверхности, когда учитывается эффект «схлопывания пор», в сравнении с традиционной схемой (схема Хантуша), демонстрируют необходимость учета специфики процесса неоднородного уплотнения глины при откачках воды из нижележащего пласта.

Схема процесса приведена на рис. 1. Здесь  $R_k$  – радиус контура питания кругового водоносного пласта, при его толщине  $H$ . Для глинистой толщи  $z$  – координата высоты точки слоя.

Уравнение для фильтрации в пласте в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\chi_s \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \right) + j = 0, \quad j = - \frac{\chi_1}{H} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Здесь  $p = p(r, t)$  – давление в водоносном пласте,  $r$  – расстояние до добывающей скважины,  $\chi_s$  – коэффициент пьезопроводности пласта,  $\chi_1$  – коэффициент консолидации глины (в области «схлопнувшихся» пор),  $j$  – водоприток из глинистого слоя,  $w$  – давление в глинистом слое.

. Граничные и начальное условия имеют вид:

$$p(r_c, t) = p_c, \quad p(R_k, t) = p_k, \quad p(r, 0) = p_{\text{начальное}}, \quad (2)$$

где  $p_c$  – давление на скважине,  $p_k$  – давление на контуре.

Таким образом, в водоносном пласте решается задача о притоке воды к совершенной скважине, на которой задается давление. Давление также задается на контуре питания. Для нахождения источника уравнения (1) рассматривается задача Н. Н. Веригина о фильтрации в неоднородной среде, состоящей из двух зон с постоянными, но отличными друг от друга значениями коэффициента консолидации и движущейся границей между зонами  $\xi$  (на последней задано значение усадки):

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \chi_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z \leq \xi, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = \chi_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}, \quad \xi \leq z \leq l; \quad (3)$$

с граничными и начальными условиями:

$$w_1(0, r, t) = p; \quad w_2(l, r, t) = G, \quad G = const; \quad w_2(r, z, 0) = w_{\text{начальное}} \quad (4)$$

и условием на границе двух зон:

$$\chi_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \chi_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \Big|_{z=\xi}, \quad w_1(\xi, r, t) = w_2(\xi, r, t) = \alpha = const, \quad \xi(t=0) = 0. \quad (5)$$

Давление в глине  $w = w(z, r, t)$ . Здесь,  $w_1$  – давление в глине в зоне «схлопнувшихся» пор,  $w_2$  – давление в глине в зоне «транспортных» пор,  $\alpha$  – величина нормированного давления в глине, при котором происходит «схлопывание» пор,  $z$  – координата высоты глинистой толщи,  $\chi_2$  – коэффициент консолидации глины (в области «транспортных» пор),  $\xi$  – подвижная граница двух зон («схлопнувшихся» и «транспортных» пор) в глинистом слое,  $G$  – горное давление.

При эксплуатации водоносной скважины, в глинистом слое (который находится над водоносным пластом) в результате отдачи воды происходит усадка. Формула для усадки  $\theta$  глинистого слоя определяется движением границы  $\xi$ :

$$l \cdot \partial \theta / \partial t = \partial \xi / \partial t \quad (6)$$

Здесь  $l$  – начальная толщина слоя глины.

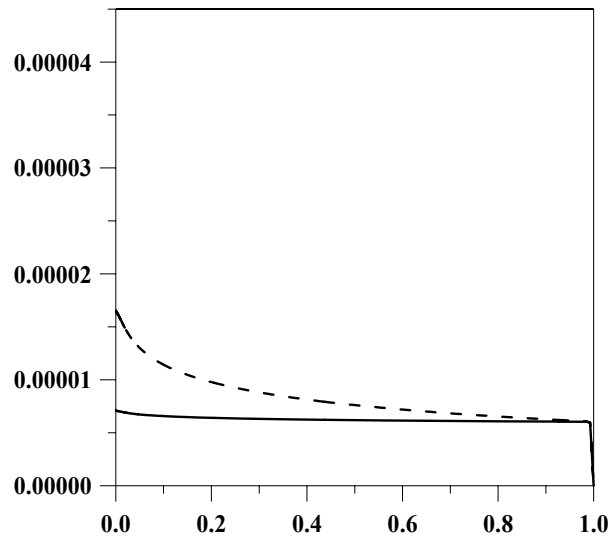
Обозначения  $D = l^2 / R_k^2$ ,  $E = \chi_1 l / (\chi_B H)$  и  $I = G \cdot \beta / m$  получим уравнение для концентрации  $\bar{c}$  примеси в пласте за счет перетока из глинистого слоя:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} - I \cdot D \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \bar{c} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \right) = I \cdot E \cdot \left( \alpha - \bar{p} + \frac{1 - \alpha}{\beta} \right). \quad (7)$$

Здесь  $\beta$  – сжимаемость пласта,  $m$  – пористость, черта соответствует безразмерным переменным,  $\tau$  – безразмерное время. Граничное и начальное условия имеют вид:  $\bar{c} \Big|_{r=1} = 0$ ,  $\bar{c}(\tau = 0) = 0$

Приведенные уравнения решались численно. Представляется интересным анализ концентрации примеси в водоносном пласте за счет перетока воды из вышележащего глинистого слоя. Из рис.2 видно, что пластовые значения концентрации примеси в случае неоднородной деформации слоя ниже, чем без учета этого эффекта. Это происходит из-за того, что при перетоке воды из глинистой толщи происходит образование зоны усадки с относительно меньшими значениями коэффициента фильтрации, обеспечивающее удержание примеси в этой части глинистого слоя. Тем самым, время выхода примеси из слоя увеличивается.





**Третья глава** диссертационной работы посвящена исследованию неоднородно уплотняющейся пористой среды со сферическим типовым пористым блоком (моделью агрегата, рис. 3). Рассматривается модель массопереноса для неоднородно уплотняющейся пористой породы со сферическим типовым блоком.

Уравнение для границы между зонами с разным уплотнением в агрегате в каждой точке слоя имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^2}{\partial \tau} = F \frac{\partial^2 \bar{\zeta}^2}{\partial y^2} - 2E\bar{\zeta}, \quad (8)$$

со следующими граничными и начальным условиями:  $\bar{\zeta}(0, \tau) = 0$ ,  $\bar{\zeta}(1, \tau) = \sqrt{2\alpha\gamma\tau}$ ,  $\bar{\zeta}(y, 0) = 0$ .

Здесь  $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$ ,  $\zeta \cdot a = \xi$ ,  $y \cdot H = x$ ,  $F = a^2 / H^2$ ,  $E = a \cdot \sigma \cdot \chi_2 / \chi_B$ ,  $\gamma = \chi_2 \cdot \beta \cdot G / \chi_B = const$ , где  $H$  – высота глинистой перемычки,  $a$  – радиус агрегата,  $\sigma$  – удельная поверхность,  $G$  – нагрузка.

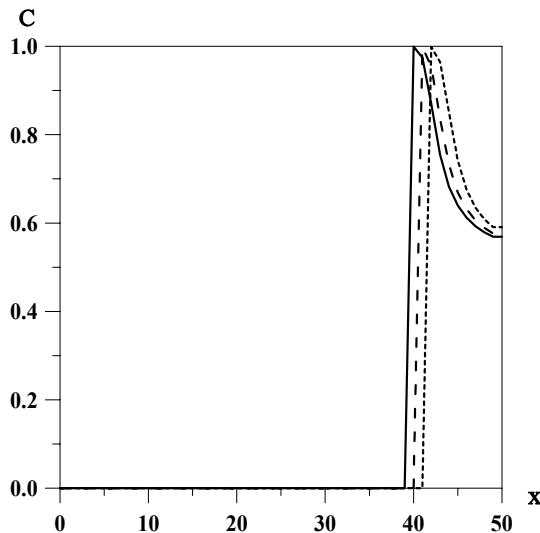
Уравнение для переноса концентрации  $\bar{C}$  в слое имеет вид:

$$m \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} - F \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{C} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = E \cdot \Gamma \cdot \frac{\alpha - p}{\zeta}, \quad \text{где } \Gamma = \beta \cdot G, \quad (9)$$

с граничным и начальным условиями:  $\partial \bar{C} / \partial y|_{y=0} = 0$ ,  $\bar{C}(y, 0) = 0$ .

Здесь  $p$  – давление в межагрегатном пространстве, черта соответствует безразмерным переменным,  $\tau$  – безразмерное время.

На рис. 4 отражена динамика движения фронта концентрации от подошвы межагрегатного пространства. Высота перемычки (от низа до верха) нумеруется соответственно от  $x=50$  до  $x=0$ . Неравномерный характер профилей концентрации говорит о неравномерной выработке глинистого слоя.



**Четвертая глава** посвящена моделированию массопереноса в ненасыщенных агрегированных пористых средах с учетом влияния усадки

агрегатов на процесс массопереноса влаги и примесей. Такие процессы характерны для почв и торфов.

Уравнение баланса влаги для агрегированных пористых сред в условиях неполного насыщения влагой имеет вид:

$$-\frac{\partial[m(1-S)]}{\partial t} + [1-m(1-S)] \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{q} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\theta$  – усадка почвы,  $\vec{q}$  – скорость фильтрации,  $m$  – межагрегатная пористость,  $S$  – водонасыщенность,  $t$  – время.

Для простоты мы будем предполагать, что агрегаты среды сохраняют сферическую форму в ходе всего процесса. Это позволяет считать пористость в уравнении (10) постоянной. Для связи усадки с капиллярным давлением запишем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \alpha_c \cdot p_c, |\theta| < \theta_c; \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= 0, |\theta| \geq \theta_c. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_c = const$  – константа скорости усадки,  $p_c$  – капиллярное давление,  $\theta_c$  – критическое значение усадки, обусловленное конечными запасами влаги в агрегатах.

Уравнение для концентрации примеси  $\bar{c}$  в почвенном слое имеет вид:

$$m \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial \tau} \cdot \bar{c} + S \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}_w \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} \cdot \bar{c} \right) = (c_0)^2 \cdot \bar{\alpha}_c \cdot \bar{\psi} + D \cdot m \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( S \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right); \quad (12)$$

$$\bar{q} = -\bar{k}_w \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} \right); \quad (13)$$

с граничным и начальным условиями:  $\left. \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \bar{c}(\tau = 0) = 0$ .

Здесь  $H = z - \psi$  – функция напора,  $\psi$  – высота всасывания,  $c_0$  – коэффициент сорбции,  $\bar{\alpha}_c$  – коэффициент адсорбции,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\bar{k}_w$  – коэффициент влагопереноса, черта соответствует безразмерным переменным,  $\tau$  – безразмерное время.

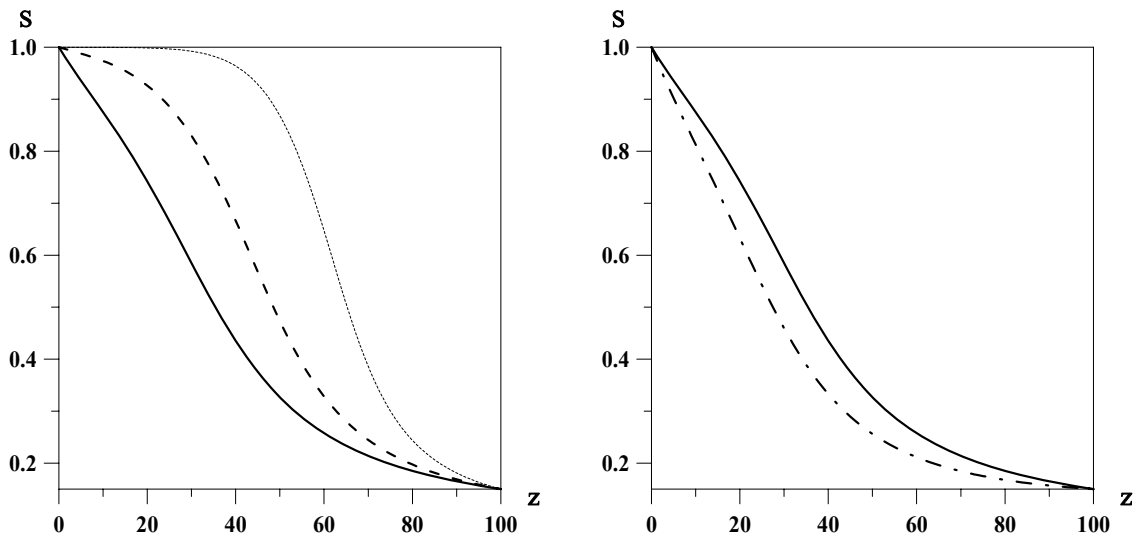
Для насыщенности  $S$  имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (14)$$

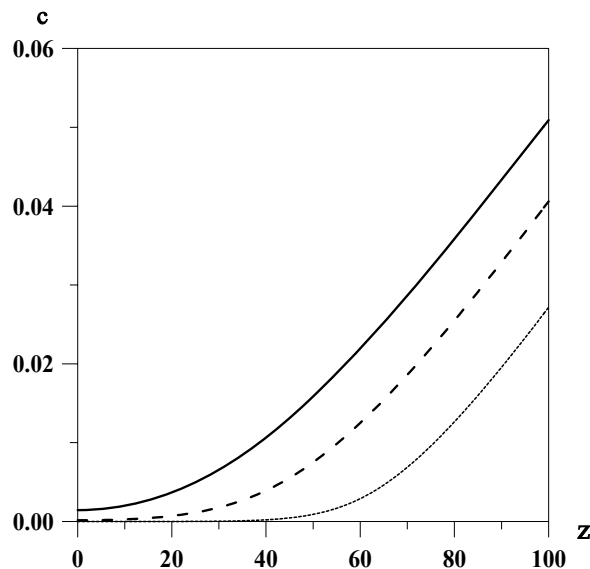
где  $\omega = -\partial S / \partial \psi$  – дифференциальная влагоемкость, определяемая по ОГХ:

$\bar{S} = \frac{S - S_0}{1 - S_0} = \exp(-f\psi)$ ,  $f = n / H_k$ . Здесь  $\bar{S}$  – относительное влагосодержание,  $S_0$  –

доля неподвижной влажности,  $H_k, n$  – некоторые характерные значения.



На рис. 5 приведено распределение водонасыщенности в слое (высота в глинистой перемычке отсчитывается снизу вверх), а на рис. 6 – распределение концентрации примеси, поступающей из агрегатов в поровое пространство почвы.



В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы

1. Предложена модель массопереноса в системе «пласт – вышележащий неоднородно уплотняющийся глинистый слой» (модифицированная схема Хантуша). Предложен численный метод решения этой задачи.
2. На основании решения предыдущей задачи была предложена упрощенная модель для процесса усадки глинистого слоя при эксплуатации водоносного пласта, где давление в глине (в областях с разной проницаемостью) заменено «ломаной». Проведены сравнения первой и второй задачи. На основании решения этой задачи проведен анализ процессов, протекающих вместе с фильтрацией (получены значения усадки, концентрации примеси в пласте). Предложена методика расчета, получены системы уравнений, разработан и реализован на ЭВМ дифференциально-разностный метод расчета. Проведенные расчеты показали, что учет свойств глин оказывает существенное влияние на водоотдачу из глинистой толщи, а также влияет на качество воды при эксплуатации водоносного пласта.
3. Построена модель массопереноса в агрегированных неоднородно уплотняющихся пористых средах; получены выражения для определения подвижной границы между зонами с двумя разными проницаемостями в агрегатах. Предложена расчетная схема процесса водоотдачи из

структурированной глины с учетом свойств структурированных (агрегированных) пористых сред.

4. Построена модель влаго- и массопереноса в ненасыщенной структурированной (агрегированной) неоднородно уплотняющейся пористой среде. Предложена расчетная схема процесса влагообмена и массопереноса в ненасыщенных структурированных (агрегированных) пористых средах.

### **Публикации по теме исследования:**

#### **а) Публикации в изданиях, вошедших в перечень ВАК:**

1. Гончарова Г.С. Влияние особенности проявления упругого режима на перетекание из глинистого слоя при откачке из скважины / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Геозэкология. – 2007. – №5. – С. 465 – 469.
2. Гончарова Г.С. Массоперенос в агрегированных пористых средах с нелинейной сжимаемостью / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Инженерно-физический журнал (Journal of engineering thermophysics). – 2008. – Т. 81. – № 4. – С. 646 – 651.
3. Гончарова Г.С. Моделирование процессов влагообмена в агрегированных природных пористых средах / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Вопросы атомной науки и техники. – Сер.: Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 3. – С. 70 – 73.

#### **б) Другие публикации:**

4. Гончарова Г.С. Моделирование отжима воды из глинистого слоя в водоносный горизонт / Г.С. Гончарова // Сб. тезисов итоговой научно-образовательной конференции студентов КГУ 2004 г. – Казань: Изд-во КГУ, 2004. – С. 64.
5. Гончарова Г.С. Математическая модель притока воды к скважине из водоносного пласта с учетом водоотдачи вышележащего глинистого слоя / Г.С. Гончарова // Математическое моделирование и математическая физика: сб. трудов Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2004. – Т. 29. – С. 13 – 21.
6. Гончарова Г.С. Влияние усадки глинистого слоя на гидрогеомеханику околоскважинной зоны / Г.С. Гончарова // Математическое моделирование и математическая физика: сб. трудов Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2004. – Т. 32. – С. 117 – 125.

7. Гончарова Г.С. Влияние усадки глинистого слоя на гидромеханику околоскважинной зоны / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Современные аспекты экологии и экологического образования: сб. трудов всерос. науч. конф. – Казань. – 2005. – С. 526 – 528.
8. Гончарова Г.С. Влияние откачек на экологическую геодинамику околоскважинной зоны / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Проблемы инженерной геодинамики и экологической геодинамики: сб. трудов междунар. науч. конф. – М.: Изд-во МГУ. – 2006. – С. 113 – 115.
9. Гончарова Г.С. Массоперенос в агрегированных неоднородно уплотненных пористых средах / Г.С. Гончарова, М.Г. Храмченков // Окружающая среда и устойчивое развитие регионов: новые методы и технологии исследований: сб. трудов всерос. науч. конф. – Казань: Изд-во КГУ. – 2009. – Т. 3. – С. 33 – 37.

Подписано в печать 12.10.09.  
Формат 60 x 84 1/16. Печать ризографическая.  
Печ. л. 0,23. Тираж 100 экз. Заказ 49/10

420008, ул. Профессора Нужина, 1/37  
тел.: 233-73-59, 292-65-60