На правах рукописи

ТАЮПОВ Шамиль Ильдусович

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2009

Работа выполнена
в государственном образовательном учреждении
высшего профессионального образования
"Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, доцент Тимербаев Марат Равилевич
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Копысов Сергей Петрович
	Доктор физико-математических наук, профессор Лапин Александр Васильевич
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Защита состоится 19 ноября 2009г. в 17 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу:
420008, г.Казань, ул. Кремлевская 18, корп.2, ауд. 218.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «   » октября 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   О.А. Задворнов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Метод конечных элементов (МКЭ) является эффективным методом решения краевых задач математической физики. Теория метода хорошо развита для задач, входные данные которых регулярны, т.е. когда коэффициенты уравнения, правая часть и граница области достаточно гладкие. Известны оценки в нормах пространств Соболева решений таких задач, которые позволяют строить оптимальные схемы МКЭ.

Практический интерес также представляют краевые задачи с особенностями во входных данных. Для таких задач стандартный МКЭ, не учитывающий сингулярного поведения решения в окрестности особых точек, является неэффективным, что подтверждается теоретическим анализом и результатами расчетов. Поэтому актуальной проблемой является построение оптимальных методов решения таких задач.

Важным классом задач с особенностями являются краевые задачи для дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами. Решения таких задач имеют неограниченный градиент вблизи точек вырождения, что существенно затрудняет их численное решение. Одной из первых работ, посвященных построению сеточных методов для вырождающихся на границе краевых задач была работа Ю.А.Гусмана и Л.А.Оганесяна (1965 г.), в которой для уравнения с оператором типа Трикоми в прямоугольной области рассматривалась разностная схема первого порядка точности. Д.Марини и П.Пиетра исследовали смешанный метод конечных элементов для задачи с сингулярными коэффициентами в прямоугольнике. Большое число работ было посвящено численному решению двухточечной краевой задачи с вырождением на границе. Так П.Сьярле, Ф.Наттерер и Р.Варга использовали L-сплайны в методе Ритца-Галеркина; Р.Шрейбер представил приближение Галеркина в виде произведения кусочно-полиномиальной функции на специальный вес. М.Р. Тимербаевым были построены оптимальные схемы численного решения краевых задач для уравнений в частных производных с вырождением на границе.

Более сложной проблемой является численное решение эллиптической краевой задачи с коэффициентами вырождающимися внутри области.

Целью работы является построение оптимальных схем МКЭ для краевых задач с вырождением внутри области.

Методы исследования. Для исследования вырождающихся краевых задач применяется аппарат функционального анализа, теория дифференциальных уравнений, теоремы вложения пространств Соболева с весом, теория метода конечных элементов.

Научная новизна работы. Все результаты настоящей диссертационной работы являются новыми. Предложены проекционно-сеточные схемы для решения краевой задачи с внутренним вырождением на основе метода декомпозиции области и с помощью мультипликативного выделения особенности. Построен оператор продолжения граничных значений в область, с помощью которого вырождающаяся задача с неоднородными краевыми условиями сводится к однородным. Исследована схема с численным интегрированием для двухточечной вырождающейся задачи.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Построение оператора продолжения граничных значений в область, с помощью которого задача с неоднородными краевыми условиями сводится к однородным.

2. Доказательство оценок решений двухточечных краевых задач с вырождением на границе и внутри области в нормах весовых пространств Соболева.

3. Доказательство оценок точности схем МКЭ с мультипликативным выделением особенности для двухточечной краевой задачи с вырождением. Исследование влияния численного интегрирования на погрешность таких схем.

4. Доказательство сходимости метода декомпозиции области для краевой задачи с внутренним вырождением.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при разработке эффективных методов решения краевых эллиптических задач с вырождением на границе и внутри области.

Достоверность научных результатов. Все результаты диссертации строго математически доказаны. Результаты численных экспериментов согласуются с теоретическими выводами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на шестом и седьмом Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (Казань, 1-4 октября 2005г., 21-24 сентября 2007г.), на шестой

Всероссийской молодежной школе-конференции "Численные методы решения задач математической физики" (Казань, 26 июня – 1 июля 2006г.), на четвертой-шестой Всероссийских конференциях с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 29-31 мая 2007г., 29-31 мая 2008 г., 1-4 июня 2009г.), на всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2007 (Новосибирск, 18-20 июня 2007г.), на международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений" (Москва, 30 марта - 2 апреля 2009г.), на шестнадцатой международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 25-31 мая 2009г.), на научных семинарах кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета, на научном семинаре в Институте прикладной механики УрО РАН (Ижевск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[11], из которых одна — в журнале, входящем в перечень ВАК РФ. Результаты во всех работах принадлежат авторам в равной степени.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 93 наименования. Общий объем составляет 116 страниц, включая 2 рисунка и 3 таблицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00814, 09-01-97015).

Содержание работы

Остановимся подробнее на содержании диссертации. Во **введении** диссертации формулируется цель исследования, приводится обзор работ по схожей тематике и обоснование актуальности проблемы.

Первая глава посвящена исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождением. Особенностью таких задач является то, что в окрестности точки вырождения решение имеет неограниченную производную. По этой причине для их решения неэффективно использовать стандартный метод конечных элементов.

В **первом параграфе** главы приводятся вспомогательные результаты. Формулируется теорема вложения пространств Соболева с весом. Для произвольного вещественного μ определяется интегральный оператор Харди

$$K_\mu u(x) = x^{\mu-1} \int\limits_0^x y^{-\mu} u(y) dy.$$

Доказывается теорема о его непрерывности.

Для гильбертова пространства X и интервала $T = (0,1)$ через $L_{2,\gamma}(T;X)$ будем обозначать пространство функций $u : T \to X$ с конечной нормой

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}(T;X)} = (\int\limits_T t^{2\gamma} |u|_X^2 dt)^{1/2}.$$

В обозначениях норм $\gamma = 0$ и $X = R^1$ будем опускать. Пространство $H^s_\gamma(T;X)$ — множество функций, для которых в $L_{2,\gamma}(T;X)$ существует обобщенная X-значная производная порядка s. В качестве нормы будем использовать

$$\|u\|^2_{H^s_\gamma(T;X)} = \|u\|^2_{L_2(\Delta;X)} + \|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}(T;X)},$$

где $\Delta \subset \Omega$ — компакт ненулевой меры, отделенный от нуля.

Второй параграф посвящен исследованию задачи Дирихле для уравнения с вырождением на границе

$$-D(x^\alpha a(x) Du(x)) + x^\alpha b(x) u(x) = f(x), \;\; x \in \Omega = (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = g, \;\; u(1) = 0. \tag{2}$$

Символом $D\cdot$ обозначается обобщенная производная. Относительно коэффициентов будем предполагать, что $a(x) \geq c > 0$, $b(x) \geq 0$, $\alpha < 1$.

Определение 1 *Вещественная функция $\varphi(x)$, определенная на Ω, называется функцией продолжения для класса правых частей $H^s_\gamma(\Omega)$ задачи (1), (2), если $A\varphi$ принадлежит пространству $H^s_\gamma(\Omega)$ и выполнены граничные условия $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.*

Приведем один из способов построения функции продолжения, предполагая, что производные порядка $s+1$ коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ ограничены. Фиксируем $\delta \in (0,1)$. На отрезке $[0,\delta]$ будем искать $\varphi(x)$ как решение задачи Коши

$$\tilde{A}\varphi \equiv -D(x^\alpha T_a(x) D\varphi(x)) + x^\alpha T_b(x) \varphi(x) = \sum_{i=s+1}^{2s+2} c_i x^{i+\alpha}, \;\; x \in (0,\delta), \tag{3}$$

$$\varphi(0)=1,\ \ x^{\alpha}D\varphi(x)|_{x=0}=0. \tag{4}$$

Здесь $T_a(x)=\sum\limits_{i=0}^{s}a_ix^i=\sum\limits_{i=0}^{s}\frac{D^ia(0)}{i!}x^i$,$T_b(x)=\sum\limits_{i=0}^{s}b_ix^i=\sum\limits_{i=0}^{s}\frac{D^ib(0)}{i!}x^i$ – разложение Тейлора порядка s функций $a(x)$ и $b(x)$. Коэффициенты c_j подбираются таким образом, чтобы решение задачи (3), (4) было представимо в виде суммы $\sum\limits_{k=0}^{s+2}\varphi_kx^k$. В силу громоздкости соотношений, которым удовлетворяют коэффициенты φ_k и c_j, мы здесь их не приводим. Имеет место

Теорема 1 *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ имеют ограниченные производные порядка $s+1$, $\gamma<1/2$ и $\varphi(x)$ – функция продолжения для класса правых частей $H^s_{\gamma}(\Omega)$ задачи* (1), (2). *Тогда если $\alpha-s-3/2<\gamma<1/2$, то для любой правой части $f\in H^s_{\gamma}(\Omega)$ решение задачи* (1), (2) *существует, единственно и представимо в виде $u(x)=g\varphi(x)+x^{1-\alpha}\hat{u}(x)$, где $\hat{u}\in H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\cap\dot{H}^1_{\gamma}(\Omega)$ и $\|\hat{u}\|_{H^{s+2}_{\gamma-1}}\le c(\|f\|_{H^s_{\gamma}}+|g|)$.*

В **параграфе 1.3** рассматривается уравнение (1) с граничными условиями

$$x^{\alpha}a(x)Du(x)|_{x=0}=p,\ \ u(1)=0. \tag{5}$$

Справедлива

Теорема 2 *Пусть $\max(-1/2,\alpha/2-1)-s<\gamma<1/2$, $-1<\alpha<2$, $\alpha\neq1$, $f\in H^s_{\gamma}(\Omega)$, $a\in W^{s+1}_{\infty}(\Omega)$, $xb\in W^s_{\infty}(\Omega)$. Тогда решение задачи* (1), (5) *представимо в виде $u(x)=p\psi(x)+u_0\varphi(x)+x^{2-\alpha}\hat{u}(x)$, где $\hat{u}\in U_{\gamma}(\Omega)=\{v\in H^{s+2}_{\gamma-2}(\Omega),v(1)=0\}$, и справедлива оценка $\|\hat{u}\|_{U_{\gamma}}\le c(\|f\|_{H^s_{\gamma}}+|p|)$. Здесь*

$$\psi(x)=\begin{cases} p\frac{x^{1-\alpha}}{a(0)(1-\alpha)}, & 0\le x<\delta\\ d(x), & \delta\le x\le1.\end{cases}$$

Замечание 1 *При $\alpha=1$ полагаем $\psi(x)=\ln x$ и теорема остается справедливой при условии $x\ln x\in H^s_{\gamma}(\Omega)$.*

Параграф 1.4 посвящен получению оценок погрешности интерполяции в весовых пространствах Соболева. Основной результат этого параграфа содержит

Теорема 3 *Если $\alpha<1/2$ и $m+\beta-\alpha>0$, то для любой функции $u\in H^{m+1}_{\beta}(\Omega)$ справедливы оценки*

$$\|D^s(u-\pi_ku)\|_{L_{2,\alpha}(e_k)}\le\ c_1h_k^{m+1-s}x_k^{\beta-\alpha}\|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(e_k)}\quad(k=1,2,\dots,n),$$

$$\|D^s(u-\Pi_h u)\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \leq \ c_2 h^\theta \|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(\Omega)},$$

где $s=0,1$ *и* $\theta=\min(m+1-s, m+1+\beta-\alpha-s)$, π_k *— оператор интерполяции на конечном элементе* e_k, Π_h *— оператор кусочно-полиномиальной интерполяции в области* Ω.

Параграф 1.5 посвящен построению схем МКЭ для задач Дирихле и Неймана. Для задачи Дирихле предложена схема на основе мультипликативного выделения особенности. В качестве аппроксимирующего пространства мы используем кусочно-полиномиальные функции степени m с весом $x^{1-\alpha}$. В следующей теореме содержится оценка погрешности в энергетической норме этой схемы.

Теорема 4 *Пусть* $\alpha/2-m<\gamma<1/2$, $a,b\in W^m_\infty(\Omega)$. *Тогда для* $f\in H^{m-1}_\gamma(\Omega)$ *справедливы оценки погрешности* $\|u-u_h\|_{H^1_{-\alpha/2}} \leq ch^\theta(\|f\|_{H^{m-1}_\gamma} + |g|)$, *где*
$\theta=\min(m, m+\gamma-\alpha/2)$.

Для задачи Неймана используется схема МКЭ с мультипликативным и аддитивным выделением особенности. Здесь в качестве аппроксимирующего пространства применяются кусочно-полиномиальные функции с весом $x^{2-\alpha}$ и функция продолжения $\varphi(x)$. Для оценки погрешности справедлива

Теорема 5 *Пусть* $f\in H^{m-1}_\gamma(\Omega)$, $\max(1/2,\alpha/2)-m<\gamma<1/2$, $-1<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, $a\in W^m_\infty(\Omega)$, $xb\in W^{m-1}_\infty(\Omega)$. *Тогда имеет место следующая оценка погрешности:*$\|D(u_h-u)\|_{L_{2,-\alpha/2}} \leq ch^\theta(\|f\|_{H^{m-1}_\gamma}+|p|)$, *где* $\theta=\min(m,m+\gamma-\alpha/2)$.

Параграфы 1.6 и **1.7** посвящены построению и исследованию сходимости схемы с численным интегрированием для однородной задачи Дирихле с вырождением на границе. Введем дополнительные обозначения. Пусть $\Delta\subset\bar{\Omega}$ — произвольный интервал. Для приближенного вычисления интегралов вида $\int\limits_\Delta x^\beta v(x)dx$ будем использовать квадратурную формулу с весом x^β — $Q_{\Delta,\beta}(v)$, точную на полиномах заданной степени. Назовем схемой с численным интегрированием схему МКЭ, в которой интегралы заменяются квадратурными формулами. Имеет место

Теорема 6 *Пусть для каждого конечного элемента e квадратурные формулы $Q_{e,2-\alpha}$, Q_e точны на полиномах степени $2m-2$, квадратура $Q_{e,1-\alpha}$ точна на полиномах степени $2m-1$, коэффициенты этих квадратур положительные. Тогда справедлива следующая оценка точности схемы с численным интегрированием:*

$$|u-u_h|_{H^1_{-\alpha/2}(\Omega)} \le ch^m(\|f\|_{C^m(\Omega)} + \max\{\|a\|_{C^m(\Omega)}, \|\bar{b}\|_{C^m(\Omega)}\}).$$

В **параграфе 1.8** для $\Omega = (-1,1)$ дается определение пространства $H^1_\beta(\Omega)$. Положим $\Omega_1 = (-1,0)$, $\Omega_2 = (0,1)$. Пространство $H^1_\beta(\Omega)$ состоит из таких функций $u(x)$, для которых $u|_{\Omega_i} \in H^1_\beta(\Omega_i)$ и при $\beta > -1/2$ выполняется условие $u(0-) = u(0+)$.

Параграф 1.9 посвящен исследованию задачи с внутренним вырождением:

$$-D(|x|^\alpha a(x)Du(x)) + |x|^\alpha b(x)u(x) = f(x), \;\; x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \tag{7}$$

Основными результатами здесь являются теорема гладкости решения задачи.

Теорема 7 *Пусть $f|_{\Omega_i} \in H^s_\gamma(\Omega_i)$, $\alpha - s - 3/2 < \gamma < 1/2$, $a \in W^{s+1}_\infty(\Omega)$, $xb \in W^s_\infty(\Omega)$. Тогда решение задачи* (6), (7) *представимо в виде $u(x) = c\varphi(x) + \mathrm{sgn}(x)|x|^{1-\alpha}\hat{u}(x)$ и $\hat{u}_i \in H^{s+2}_\gamma(\Omega_i) \cap \dot{H}^1_\gamma(\Omega_i)$, $i = 1,2$. Здесь сужение $\varphi(x)$ на Ω_i является функцией продолжения класса $H^s_\gamma(\Omega_i)$.*

Для оценки скорости сходимости МКЭ на основе мультипликативного и аддитивного выделения особенности имеет место

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда справедлива оценка погрешности в энергетической норме $\|u-u_h\|_a \le ch^\theta(\|f\|_{H^{m-1}_\gamma(\Omega_1)} + \|f\|_{H^{m-1}_\gamma(\Omega_2)})$, $\theta = \min(m, m+\gamma-\alpha/2)$.*

Глава 2 посвящена вырождающимся уравнениям в частных производных. В **первом параграфе** рассматривается уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\alpha a_1(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right) - x_1^\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_2(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right) = f(x), \;\; u|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0, \tag{8}$$

где $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, $\Gamma = \{0\}\times(0,1)$. На Γ рассматриваются отдельно граничное условие Дирихле (для $\alpha < 1$)

$$u = g \tag{9}$$

и Неймана (для $\alpha > -1$)

$$-x_1^\alpha a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} = p. \tag{10}$$

Приводятся теоремы гладкости для решений этих задач.

Положим $T = (0,1)$, $X = L_2(0,1)$, $X_1 = H^2(0,1) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$. Для $t \in T$ через $u(t)$ обозначим функцию $u(t,\cdot) \in X_1$: $u : T \to X_1$, $Du(t) = \frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial x_2}$. Аналогично $f(t) = f(t,\cdot)$ — элемент пространства X. Формулой $a(t)u = a_1(t,\cdot)u(t)$ при каждом t определим оператор $a(t)$ действующий в X. Оператор $b(t) : X_1 \to X$ определим формулой $(b(t)u)(x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2}(a_2(t,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}(t,x_2))$. Уравнение (8) и граничные условия (9), (10) в новых обозначениях перепишутся следующим образом:

$$Au \equiv -D(t^\alpha a(t)Du(t)) + t^\alpha b(t)u(t) = f(t), \;\; u(1) = 0, \tag{11}$$

$$u(0) = g, \tag{12}$$

$$-t^\alpha a(t)Du(t)|_{t=0} = p. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение промежуточные пространства. Пусть $S : X_1 \to X$ — неограниченный самосопряженный положительный оператор, удовлетворяющий условию $\|u\|_{X_1} = \|Su\|_X$ для всех u из X_1. С помощью спектрального разложения можно определить степени S^θ оператора S. Через X_θ обозначим область определения S^θ. В обозначениях теории интерполяции функций $X_\theta = [X, X_1]_\theta$. За норму в X_θ примем норму графика S^θ $\|u\|_{X_\theta} = \|u\|_X + \|S^\theta u\|_X$.

Параграф 2.2 посвящен построению функций продолжения граничных значений с Γ в Ω. Для условий Дирихле функция продолжение выбирается как решение задачи на интервале в гильбертовом пространстве

$$A_1 u \equiv -D(t^\alpha Du) + t^\alpha bu(t) = 0 \text{ для } t \in T_\delta = (0,\delta), \tag{14}$$

$$u(0) = g, \;\; t^\alpha Du|_{t=0} = 0, \tag{15}$$

гладко продолженное на отрезок $[\delta, 1]$ с соблюдение граничного условия в $t = 1$. Здесь оператор b задается формулой $bu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Для условий Неймана функция продолжения — есть решение задачи

$$A_1 u(t) = 0 \;\; t \in T, \tag{16}$$

$$-t^\alpha Du|_{t=0} = p, u(1) = 0. \tag{17}$$

В **параграфе 2.3** исследуется уравнение в частных производных, вырождающееся внутри области. В прямоугольной области $\Omega = (-1,1)\times(0,1)$ рассмотрим следующее уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(|x_1|^\alpha a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - |x_1|^\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = f(x) \tag{18}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{19}$$

Так же как в праграфе 2.2 перепишем эту задачу как задачу в гильбертовом пространстве на интервале $T = (-1,1)$.

$$Lu \equiv -D(|t|^\alpha a(t)Du(t)) + |t|^\alpha b(t)u(t) = f(t)\ \ t\in T, \tag{20}$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \tag{21}$$

Эта задача, в свою очередь, эквивалентна задаче об отыскании u_1 и u_2, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{cases} L_1u_1 \equiv -D(|t|^\alpha a(t)Du_1(t)) + |t|^\alpha b(t)u_1(t) = f(t),\ \ t\in T_1 = (-1,0), \\ u_1(0) = u_2(0), \\ |t|^\alpha a(t)Du_1(t)|_{t=0-0} = t^\alpha a(t)Du_2(t)|_{t=0+0}, \\ L_2u_2 \equiv -D(t^\alpha a(t)Du_2(t)) + t^\alpha b(t)u_2(t) = f(t),\ \ t\in T_2 = (0,1). \end{cases} \tag{22}$$

Полагая $u|_{\Omega_i} = u_i$ получим решение исходной задачи. Данное представление будет использовано нами при формулировке метода декомпозиции области.

Обозначим через $U_\gamma(T_i)$ пространство функций, для которых норма

$$\|u\|_{U_\gamma} = \|D^2(|t|^{\alpha-1}u)\|_{L_{2,\gamma-1}(T_i;X)} + \|D(|t|^{\alpha-1}u)\|_{L_{2,\gamma}(T_i;X)} + \|u\|_{L_{2,\gamma-\alpha}(T_i;X_1)}$$

является конечной. Справедлива

Теорема 9 *Пусть $f\in L_{2,\gamma}(T;X)$, $\alpha-3/2<\gamma<\min(1/2,\alpha+1/2)$. Тогда для решения задачи* (20), (21) *справедливо представление $u(t) = u^0(t)+\varphi_g(t)$, $u^0|_{\Omega_i} = u_i^0 \in U_\gamma(T_i)$, $\varphi_g|_{\Omega_i} = \varphi_{i,g}^D$, $\varphi_{i,g}^D$ — функция продолжения граничных условий Дирихле, $g = u(0)$.*

Введем дополнительные обозначения. Пусть u_i^0 — решение однородного уравнения с ненулевым граничным условием в нуле:

$$L_iu_i^0 = 0 \text{ на } T_i,\ \ u_i^0(0) = \lambda,\ \ u_i^0|_{\partial T_i/\{0\}} = 0,$$

а u_i^* — решение задачи с однородными условиями Дирихле

$$L_i u_i^* = f \text{ на } T_i,\ u_i^*|_{\partial T_i} = 0.$$

Для u_i^0 будем использовать обозначение $H_i\lambda$, а u_i^* положим равным $G_i f$. Заметим что $w_i = u_i^0 + u_i^*$ является решением задачи

$$L_i w_i = f \text{ на } T_i,\ w_i(0) = \lambda,\ \ w_i|_{\partial T/\{0\}} = 0.$$

Очевидно, что $w_i = u_i$ тогда и только тогда, когда
$|t|^\alpha a(t)Dw_1(t)|_{t=0-0} = t^\alpha a(t)Dw_2(t)|_{t=0+0}$. Последнее равенство, записанное в виде

$$S\lambda = \chi, \tag{23}$$

где $\chi \equiv -D_\alpha(G_1 f)(0) - D_\alpha(G_2 f)(0)$, $S\eta \equiv D_\alpha(H_1\eta)(0) + D_\alpha(H_2\eta)(0)$, известно как уравнение Стеклова-Пуанкаре. Здесь $D_\alpha u(t) = |t|^\alpha a(t)Du(t)$. Оператор S называется оператором Стеклова-Пуанкаре.

Параграф 2.4 посвящен построению схем метода конечных элементов для задачи (22). Пусть $\mathcal{T}_h$ — семейство регулярных триангуляций области $\Omega = (-1,1)\times(0,1)$ на прямоугольные конечные элементы e, $h = \max\limits_{e\in\mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(e)$, $\operatorname{diam}(e)$ — диаметр конечного элемента. Будем предполагать, что для любого $e \in \mathcal{T}_h$ пересечение $\Gamma \cap e$ — либо пусто, либо является вершиной или стороной конечного элемента e. При этом допущении триангуляция $\mathcal{T}_h$ индуцирует две триангуляции $\mathcal{T}_{1,h}$ и $\mathcal{T}_{2,h}$ в Ω_1 и Ω_2 соответственно. Для $m \geq 1$, $i = \overline{0,2}$ через $S_{i,h}^m$ обозначим множество $\{v_h \in C(\bar{\Omega}_i) : v_h|_e \in Q_m(e), e \in \mathcal{T}_{i,h}\}$, где $Q_m(e)$ — пространство полиномов степени не выше m по каждой переменной, здесь и далее полагаем $S_{0,h}^m \equiv S_h^m$, $\mathcal{T}_{0,h} \equiv \mathcal{T}_h$.

Введем дополнительные обозначения. Положим $V_{i,h}^D = \{v_h : v_h = |x_1|^{1-\alpha}\hat{v}_h,$ $\hat{v}_h \in S_{i,h}^m, \hat{v}_h|_{\partial\Omega_i/\Gamma} = 0\}$ — множество кусочно-полиномиальных функций с весом $|x_1|^{1-\alpha}$, $V_{i,h}^N = \{v_h : v_h \in S_{i,h}^m,\ \ v_h|_{\partial\Omega_i/\Gamma} = 0\}$, Λ_h — множество сужений функций S_h^m на Γ.

Метод конечных элементов для задачи (22) состоит в отыскании таких $u_{1,h}$

и $u_{2,h}$, что

$$\begin{cases} u_{1,h} = u^0_{1,h} + \varphi^D_{g_h} \\ u^0_{1,h} \in V^D_{1,h} : a_1(u^0_{1,h}, v_{1,h}) = f_1(v_{1,h}) - a_1(\varphi^D_{g_h}, v_{1,h}) \;\; \forall v_{1,h} \in V^D_{1,h} \\ u_{1,h} = u_{2,h} \text{ на } \Gamma \\ u_{2,h} = u^0_{2,h} + \varphi^N_{p_h} \\ u^0_{2,h} \in V^N_{2,h} : a_2(u^0_{2,h}, v_{2,h}) = f_2(v_{2,h}) - a_2(\varphi^N_p, v_{2,h}) \;\; \forall v_{2,h} \in V^N_{2,h} \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $g_h = u_{1,h}|_\Gamma$, $p_h = x_1^\alpha a_1(x)\frac{\partial u_{2,h}(x)}{\partial x_1}|_\Gamma$, φ^D_g, φ^N_p — функции продолжения граничных значений Дирихле и Неймана соответственно,

$$a_i(u,v) = \int\limits_{\Omega_i} |x_1|^\alpha a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + |x_1|^\alpha a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}dx.$$

$$f_i(v) = \int\limits_{\Omega_i} f(x)v(x)dx.$$

Далее опишем конечноэлементную аппроксимацию уравнения Стеклова-Пуанкаре (23). Пусть для $\eta_h \in \Lambda_h$ $H_{i,h}\eta_h = u^0_h + \varphi^D_{\eta_h}$, где u^0_h — решение задачи

$$\begin{cases} u^0_h \in V^D_{i,h} : \\ a_i(u^0_h, v_{i,h}) = -a_i(\varphi^D_{\eta_h}, v_{i,h}) \;\; \forall v_{i,h} \in V^D_{i,h}. \end{cases}$$

То есть $H_{i,h}\eta_h$ — аппроксимация решения однородной задачи (уравнения с нулевой правой частью), равное η_h на Γ и нулю на $\partial\Omega_i/\Gamma$. $G_{i,h}f$ определим как решение задачи

$$G_{i,h}f \in V^D_{i,h} : a_i(G_{i,h}f, v_{i,h}) = f_i(v_{i,h}) \;\; \forall v_{i,h} \in V^D_{i,h}.$$

В итоге получаем конечноэлементную аппроксимацию уравнения (23)

$$S_h\lambda_h = \chi_h \text{ на } \Gamma.$$

Здесь $\chi_h = -D_\alpha G_{1,h}f + D_\alpha G_{2,h}f$, $S_h\eta_h = S_{1,h}\eta_h + S_{2,h}\eta_h$, $S_{1,h}\eta_h = -D_\alpha H_{1,h}\eta_h$, $S_{2,h}\eta_h = D_\alpha H_{2,h}\eta_h$.

В **главе 3** исследуется метод декомпозиции области. Получены оценки скорости сходимости. В **первом параграфе** главы дается формулировка метода. Рассмотрим алгоритм Дирихле-Нейман. Пусть u^0_1, u^0_2 — заданные начальные приближения и $\lambda^0 = u^0_1(0)$, u^k_1, u^k_2 — значения последовательности на шаге итерации с номером k. Значения на $k+1$ шаге получаются как решения следующих задач:

$$\begin{cases} L_1 u_1^{k+1} = f \text{ на } T_1 \\ u_1^{k+1}(-1) = 0 \\ u_1^{k+1}(0) = \lambda^k \end{cases} \tag{25}$$

и

$$\begin{cases} L_2 u_2^{k+1} = f \text{ на } T_2 \\ u_2^{k+1}(-1) = 0 \\ t^\alpha a(t) D u_2^{k+1}(t)|_{t=0} = -|t|^\alpha a(t) D u_1^{k+1}(t)|_{t=0}, \end{cases} \tag{26}$$

$$\lambda^{k+1} = \tau u_2^{k+1}(0) + (1-\tau)\lambda^k. \tag{27}$$

Используя операторы Стеклова-Пуанкаре запишем итерационный процесс в каноническом виде:

$$\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} = S_2^{-1}(-S\lambda^k + \chi). \tag{28}$$

Аналогично для дискретных операторов Стеклова-Пуанкаре

$$\lambda_h^{k+1} = \lambda_h^k + \tau S_{2,h}^{-1}(-S_h \lambda^k + \chi_h). \tag{29}$$

Далее сформулируем метод Нейман-Нейман. Пусть u_i^0 — заданное начальное приближение, $\lambda^0 = u_1(0)$. Тогда на $k+1$ шаге итерации u_i^{k+1} находится как решение задачи

$$\begin{cases} L_i u_i^{k+1} = f \text{ на } T \\ u_i^{k+1}(0) = \lambda^k \\ u_i^{k+1}|_{\partial T_i/\{0\}} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Далее для вычисления λ^{k+1} находим решения задач

$$\begin{cases} L_i \psi_i = 0 \text{ на } T_i \\ \psi_i|_{\partial T_i/\{0\}} = 0 \\ D_\alpha \psi_i(0) = D_\alpha u_1^{k+1}(0) - D_\alpha u_2^{k+1}(0) \end{cases} \tag{31}$$

и полагаем $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \tau(\sigma_1 \psi_1(0) - \sigma_2 \psi_2(0))$.

В каноническом виде итерационный процесс записывается следующим образом:

$$\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} = (\sigma_1 S_1^{-1} + \sigma_2 S_2^{-1})(\chi - S\lambda^k). \tag{32}$$

И в конечномерном случае

$$\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} = (\sigma_1 S_{1,h}^{-1} + \sigma_2 S_{2,h}^{-1})(\chi - S_h\lambda^k). \tag{33}$$

В **параграфе 3.2** исследуются свойства операторов Стеклова-Пуанкаре и их дискретных аналогов. Здесь и далее будем использовать обозначение $\Lambda = [X_1, X_{1/2}]_\theta$, $\theta = \frac{1-\alpha}{2}$. Устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 10 *Операторы S_1 и S_2 являются симметричными, непрерывными и положительно определенными на Λ и имеет место двусторонняя оценка с независимыми постоянными k_1 и k_2*

$$K_1(S_1\eta, \eta)_X \le (S_2\eta, \eta)_X \le K_2(S_1\eta, \eta)_X \ \ \forall \eta \in \Lambda,$$

которая означает, что операторы S_1 и S_2 являются спектрально эквивалентными.

Теорема 11 *Операторы $S_{1,h}$ и $S_{2,h}$ являются самосопряженными, непрерывными и положительно определенными равномерно по h в Λ_h и имеет место двусторонняя оценка с независящими от h постоянными k_1 и k_2*

$$k_1(S_{1,h}\eta_h, \eta_h)_X \le (S_{2,h}\eta_h, \eta_h)_X \le k_2(S_{1,h}\eta_h, \eta_h)_X \ \ \forall \eta_h \in \Lambda_h,$$

В **третьем параграфе** главы приводятся доказательства сходимости методов декомпозиции.

Пусть H — гильбертово пространство. Операторы Q_1, Q_2 являются линейными операторами, действующими из H в сопряженное H', $Q = Q_1 + Q_2$, $G \in H'$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственное произведение. Рассмотрим уравнение

$$Q\lambda = G. \tag{34}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 12 *Пусть операторы Q_1 и Q_2 удовлетворяют следующим условиям:*

1. Существуют положительные константы α_2 и β_2, для которых

$$\langle Q_2\eta, \mu\rangle \le \beta_2\|\eta\|_H\|\mu\|_H \ \ \forall \eta, \mu \in H,$$

$$\langle Q_2\eta, \eta\rangle \ge \alpha_2\|\eta\|_H^2 \ \ \forall \eta \in H.$$

2. Оператор Q_1 ограничен с константой $\beta_1 > 0$, т.е.

$$\langle Q_1\eta, \mu\rangle \le \beta_1\|\eta\|_H\|\mu\|_H \ \ \forall \eta, \mu \in H.$$

3. Существует положительная константа k, для которой

$$\langle Q_2\eta, Q_2^{-1}Q\eta\rangle + \langle Q\eta,\eta\rangle \geq k\|\eta\|_H^2 \ \ \forall\eta\in H.$$

Тогда для любого $\lambda^0\in H$ и τ, удовлетворяющего условию $0<\tau<\tau_{\max}$, где

$$\tau_{\max} = \frac{k\alpha_2^2}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)^2},$$

последовательность

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau Q_2^{-1}(G - Q\lambda^k)$$

сходится к решению уравнения (34) и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\lambda^{k+1}-\lambda\|_{Q_2}^2 \leq q_\tau\|\lambda^k-\lambda\|_{Q_2}^2,$$

где $\|\eta\|_{Q_2}^2 = \frac{1}{2}(\langle Q_2\eta,\eta\rangle + \langle Q_2\eta,\eta\rangle)$, $q_\tau = 1+\tau^2\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\alpha_2^2} - \tau\frac{k}{\beta_2}$.

Теорема 13 *Пусть Q_1 и Q_2 являются непрерывными и положительно определенными, т. е. существуют положительные константы α_i и β_i, $i=1,2$, для которых выполняются неравенства*

1. $\langle Q_i\eta,\mu\rangle \leq \beta_i\|\eta\|_X\|\mu\|_X \ \ \forall\eta,\mu\in X$;

2. $\langle Q_i\eta,\eta\rangle \geq \alpha_i\|\eta\|_X^2 \ \ \forall\eta\in X$.

Будем также предполагать, что при любом выборе положительных параметров σ_1 и σ_2 оператор $\mathcal{N}\equiv(\sigma_1Q_1^{-1}+\sigma_2Q_2^{-1})^{-1}$ удовлетворяет условию

3. $\langle\mathcal{N}\eta,\mathcal{N}^{-1}Q\eta\rangle + \langle Q\eta,\eta\rangle \geq k^*\|\eta\|_X^2 \ \ \forall\eta\in X$.

Тогда существует такое $\tau_0>0$, что для всех $\tau\in(0,\tau_0)$ и для любого $\lambda^0\in X$ последовательность

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau N^{-1}(G - Q\lambda^k)$$

сходится в H к решению уравнения (34) и справедлива оценка

$$\|\lambda^{k+1}-\lambda\|_{\mathcal{N}} \leq K_\tau\|\lambda^k-\lambda\|_{\mathcal{N}},$$

где $K_\tau = 1+\tau^2\left(\frac{\sigma_1}{\alpha_1}+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\right)(\beta_1+\beta_2)^2 - \tau\frac{k^*}{\beta_{\mathcal{N}}}$, $\|\eta\|_{\mathcal{N}}^2 = \frac{1}{2}(\langle\mathcal{N}\eta,\eta\rangle + \langle\mathcal{N}\eta,\eta\rangle)$

Непосредственным следствием теорем 10, 11, 12 и 13 является сходимость итерационных процессов (28), (29), (32) и (33). Причем итерационные процессы (29) и (33), как видно из оценок в теоремах 12 и 13, сходятся со скоростью, независящей от шага сетки h.

В **параграфе 3.4** приводятся результаты численных экспериментов.

Основные результаты диссертации:

1. Построен оператор продолжения граничных значений в область, позволяющий свести задачу с неоднородными краевыми условиями к однородным.

2. Получены оценки решений двухточечных краевых задач с вырождением на границе и внутри области в нормах весовых пространств Соболева.

3. Получены оценки точности схем МКЭ с мультипликативным выделением особенности для двухточечной краевой задачи с вырождением. Исследовано влияние численного интегрирования на погрешность таких схем.

4. Доказана сходимость метода декомпозиции области для краевой задачи с внутренним вырождением.

Автор искренне благодарен доктору физико-математических наук, доценту М.Р. Тимербаеву за предложенную тему и руководство работой.

Список публикаций по теме диссертации

1. Тимербаев М.Р., Таюпов Ш.И. Метод декомпозиции области для эллиптической задачи с внутренним вырождением коэффициентов // Материалы шестого всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань. – 2005г. – С.214-216.

2. Тимербаев М.Р., Таюпов Ш.И. О методе декомпозиции области для эллиптической задачи с вырождающимися внутри области коэффициентами // В сб. трудов 4-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи ", Самара, 29-31 мая 2007. – С.180-183.

3. Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. О методе конечных элементов высокого порядка точности для двухточечной неоднородной краевой задачи с вырождением // Материалы седьмого всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, – 2007. – С.280-283.

4. Таюпов Ш.И. О методе конечных элементов для эллиптической задачи с внутренним вырождением коэффициентов // Материалы седьмого всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, – 2007. - С.276-279.

5. Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. О схеме МКЭ для двухточечной вырождающейся краевой задачи с неоднородными граничными условиями Дирихле // В материалах XVI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 25-31 мая 2009г. – С.680-681.

6. Ляшко А.Д., Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. Схемы МКЭ высокого порядка точности для неоднородной двухточечной граничной задачи с вырождением // Ученые записки Казанского государственного университета. – 2006. N 4. – С.63-75.

7. Ляшко А.Д., Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. Схемы МКЭ высокого порядка точности для системы эллиптических уравнений с вырождающимися коэффициентами на интервале // Изв. Вузов. Математика. – 2009. – N 7. – С.22-34.

8. Таюпов Ш.И. Схемы МКЭ с численным интегрированием для вырождающейся задачи // В сб. трудов 5-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи ", Самара, 29-31 мая 2008 г. – С.167-169.

9. Таюпов Ш.И. Схема МКЭ для эллиптической задачи с внутренним вырождением коэффициентов // В сб. трудов 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи", Самара, 1-4 июня 2009 г. – С.213-216.

10. Ляшко А.Д., Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. Схемы МКЭ для двухточечной краевой задачи с вырождением // Труды международной конференции "Современные проблемы математики и механики", Москва, 30-31 марта 2009 г. – С.333.

11. Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. Схемы МКЭ высокого порядка точности для двухточечной неоднородной граничной задачи Дирихле для эллиптической системы уравнений с вырождением // В тез. докл. Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2007, Новосибирск, 18-20 июня 2007г. – С.82.