

На правах рукописи

Демидов Денис Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ РАЗНОПЛОТНОСТНОЙ
ЖИДКОСТИ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2006

Работа выполнена в Отделении механики Научно-исследовательского института математики и механики им Н. Г. Чеботарева государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Егоров Андрей Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Бадриев Ильдар Бурханович

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Беляев Алексей Юрьевич

Ведущая организация: Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук

Защита состоится 13 апреля 2006 г. в 14 ч. 30 мин. в аудитории 217 2-го корпуса на заседании Диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 13 марта 2006 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

О. А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Подземные каменно-соляные формации традиционно рассматриваются в качестве объектов, перспективных для расположения в них хранилищ радиоактивных отходов. Во-первых, каменная соль почти непроницаема в силу своих пластических свойств и отсутствия трещиноватой пористости. Вследствие этого внутри каменно-соляных формаций практически отсутствует циркуляция подземных вод. Во-вторых, высокая теплопроводность соли позволяет рассеивать тепло, порождаемое высокорadioактивными отходами.

В случае утечки из такого хранилища наиболее вероятным механизмом доставки загрязнений к поверхности является перенос подземными водами. Следовательно, для каждого потенциального места захоронения должна быть проведена оценка последствий возможного выброса изотопов. Такая оценка должна учитывать тот факт, что в подземных водах вблизи соляных формаций наблюдаются высокие концентрации соли (вплоть до предела насыщения NaCl), соответствующие большим значениям плотности (до 1200 кг/м^3). Наличие возникающих при этом больших градиентов концентрации вызывает вопрос о применимости в рассматриваемой ситуации классических линейных реологических соотношений, лежащих в основе стандартных моделей фильтрационного переноса примеси: закона Дарси, связывающего скорость фильтрации и градиент давления, и зависимости Фика между дисперсионным потоком примеси и градиентом концентрации.

Цель диссертации заключается в выводе макроскопических уравнений, адекватно описывающих процессы массопереноса при фильтрации разноплотностной жидкости в условиях ее устойчивой стратификации. Выделяются два этапа такого исследования. На первом этапе необходимо провести осреднение базовых уравнений с масштаба пор до масштаба лабораторного эксперимента. Второй этап исследования предполагает осреднение уравнений фильтрации и массопереноса с масштаба лабораторных экспериментов (однородные пористые среды) до масштаба полевых испытаний (микронеоднородные среды).

Научная новизна работы состоит в

1. последовательном применении методов теории гомогенизации к выводу новых макроскопических уравнений, описывающих процессы переноса разноплотностной жидкости в однородных и микронеоднородных пористых средах;
2. вычислении коэффициентных зависимостей этих уравнений для модельных пористых сред различной периодической и стохастической структуры;
3. верификации указанных моделей на основе известных лабораторных и вычислительных экспериментов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых математических моделей гидромеханики и строгостью используемого математического аппарата, а также верификацией полученных макроскопических моделей путем сравнения с результатами натуральных и вычислительных экспериментов.

Практическая ценность. Полученные в работе математические модели нелинейных процессов массопереноса при фильтрации разноплотностной жидкости могут использоваться для оценки экологических рисков создания подземных хранилищ радиоактивных отходов в каменно-соляных формациях и при прогнозировании засоления водоносных пластов в результате интрузии морской воды, утечки высокоминерализованных попутных вод разрабатываемых нефтяных месторождений и т.п.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на XVI сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 2002); на семинаре отделения Hydrology and Ecology; Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University of Technology (Delft, 2003); на XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 2004); на Международной конференции Gordon Research Conference on Flow and Transport in Permeable Media (Oxford, 2004); на Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2004); на международной конференции American Geophysical Union Fall Meeting (San Francisco, 2005); на IV сессии

молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2005); на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета; на семинарах отделения механики НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 7 статьях и тезисах, список которых приведен в конце автореферата.

Содержание, структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка использованных источников, содержит 137 страниц сквозной нумерации, в том числе 30 рисунков, 2 таблицы. Список использованной литературы насчитывает 77 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, дается обзор литературных источников по изучаемой тематике. На основании этого формулируются цели исследования. Кратко излагается содержание работы и формулируются выносимые на защиту положения.

Первая глава работы посвящена осреднению с масштаба пор до масштаба лабораторного эксперимента базовых уравнений, описывающих фильтрационное движение и массоперенос на уровне пор. Рассматривается два типа процессов, реализуемых в лабораторных экспериментах при нахождении продольных (вдоль направления потока) и поперечных коэффициентов фильтрации и массопереноса. В первой группе экспериментов организуется одномерное вертикальное движение горизонтального фронта между пресной водой и высококонцентрированным рассолом и проводится наблюдение за динамикой размазывания этого фронта (рис. 1(a)). Соответствующую задачу далее будем называть продольной; коэффициенты соответствующих макроскопических уравнений снабжать индексом \parallel . Во второй группе экспериментов изучается горизонтальный стационарный пограничный слой (рис. 1(b)) между смешивающимися жидкостями различной плотности (поперечная задача; индекс \perp). В обоих случаях рассматривается устойчивая ситуация $\partial\rho/\partial z > 0$ расположения менее плотной жидкости над более плотной.

Базовые уравнения в этом случае представляют собой связанную си-

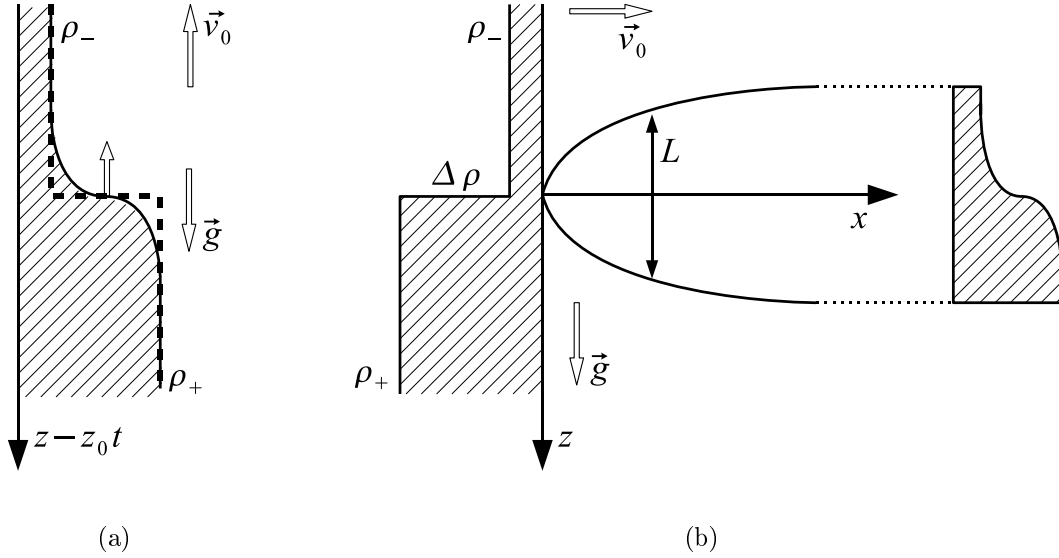


Рис. 1. Макроскопическая схема рассматриваемых в данной работе процессов. (a) вертикальное движение концентрационного фронта; (b) горизонтальный стационарный пограничный слой между смешивающимися жидкостями различной плотности.

стему уравнений Стокса и уравнения конвективно-диффузионного массопереноса. Постановка соответствующей задачи, анализ размерностей и схематизация исследуемых процессов приведены в **параграфе 1.1**. В результате анализа размерностей выделены управляющие параметры — число Релея и число Пекле — изучаемого процесса

$$\text{Ra} = \frac{g\Delta\rho l^4}{\mu d L}, \quad \text{Pe} = \frac{v_0 l}{d}.$$

Здесь g — ускорение свободного падения, $\Delta\rho$ — характерное изменение плотности, μ — вязкость жидкости, d — коэффициент молекулярной диффузии, v_0 — характерная скорость движения жидкости, величины l и L определяют соответственно характерные масштабы пор и процесса.

В **параграфе 1.2** проводится процедура гомогенизации базовых (микроскопических) уравнений, состоящая в их асимптотическом анализе при стремлении к нулю малого параметра $\varepsilon = l/L$. Результатом этой процедуры является взаимосвязанная система нелинейных макроскопических уравнений фильтрации и массопереноса. В отличие от классических моделей, коэффициенты этой системы — тензоры фильтрации и дисперсии

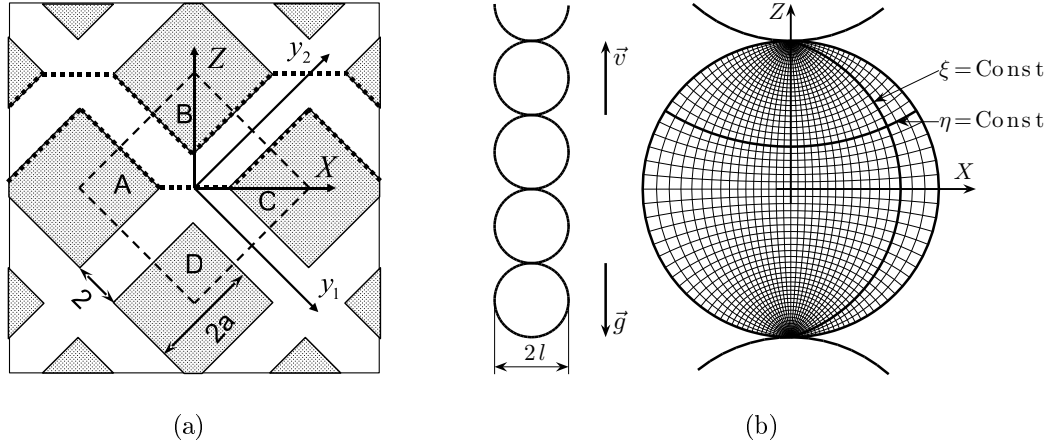


Рис. 2. Модели пористой среды, используемые для определения эффективного коэффициента дисперсии \mathcal{D}_{\parallel} . (a) — решетчатая модель, (b) — модель идеального перемешивания.

оказываются функциями локальных чисел Пекле и Релея

$$\text{Pe}_l = \frac{\langle v \rangle l}{d}, \quad \text{Ra}_l = \frac{gl^4}{\mu d} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}.$$

Здесь через z обозначена вертикальная координата, а угловые скобки означают операцию осреднения. Показано, что в предельных случаях $\text{Pe}_l \rightarrow 0$ и $\text{Ra}_l \rightarrow 0$ полученная макроскопическая модель переходит в известные модели. Для вычисления зависимости тензоров фильтрации и дисперсии от Pe_l, Ra_l в результате процедуры гомогенизации оказываются сформулированными так называемые задачи на ячейке. В следующих трех параграфах эти задачи конкретизируются и решаются для различных типов пористых сред.

В **параграфе 1.3** рассмотрены простейшие модельные пористые среды в виде связки одинаковых вертикально расположенных капилляров щелевидной или круглой формы. Такие модели позволяют явно вычислить эффективный коэффициент дисперсии \mathcal{D}_{\parallel} в продольной задаче в виде

$$\mathcal{D}_{\parallel}(\text{Pe}_l, \text{Ra}_l) = d \left(\zeta + \mathcal{D}_{\parallel}^0(\text{Pe}_l) f_{\parallel}(\tilde{\text{Ra}}_l) \right), \quad \tilde{\text{Ra}}_l = \text{Ra}_l \frac{\mathcal{D}_{\parallel}^0(\text{Pe}_l)}{\text{Pe}_l^2}. \quad (1)$$

Здесь ζ — постоянный коэффициент извилистости, $\mathcal{D}_{\parallel}^0(\text{Pe}_l)$ — коэффициент дисперсии трассера, вычисленный в пренебрежении плотностными эффектами, $f_{\parallel}(\tilde{\text{Ra}}_l)$ представляет собой поправочный на действие гравитации

множитель. Монотонно убывающая функция $f_{\parallel}(\tilde{\text{Ra}}_l)$ принимает значение 1 (0) при $\tilde{\text{Ra}}_l = 0$ (∞).

В **параграфе 1.4** рассмотрена более реалистичная решетчатая модель пористой среды (рис. 2(a)). Задачи на ячейке в этом случае двумерны; они решались численно с помощью специально разработанной вычислительной процедуры. Реализовывался итерационный метод расчета с последовательным решением гидродинамической (записанной в терминах функция тока — завихренность) подзадачи на заданном поле плотности и концентрационной подзадачи на заданном поле скоростей. Эта процедура позволяет рассчитать коэффициенты дисперсии и фильтрации не только для продольной, но и для поперечной задачи (\mathcal{D}_{\perp} и \mathcal{K}_{\perp}).

Из общих соображений и качественного анализа лабораторных данных следовало ожидать уменьшения \mathcal{D}_{\perp} и \mathcal{K}_{\perp} с ростом числа Релея. Априори, однако, было неясно, какие физические процессы лежат в основе этой закономерности и лишь расчеты обнаружили весьма специфичный механизм ее реализации. Оказалось, что с ростом Ra_l происходит существенная перестройка внутрипорового течения с образованием и развитием зон возвратных течений. Динамика их развития показана на рис. 3 для умеренных ($\text{Pe} = 10$) значений критерия Пекле. Именно они, с одной стороны, сужают живое сечение поровых каналов, а с другой стороны, препятствуют эффективному массообмену в жидкости. Результаты расчетов $\mathcal{K}_{\perp}(\text{Pe}_l, \text{Ra}_l)$, $\mathcal{D}_{\perp}(\text{Pe}_l, \text{Ra}_l)$ в наиболее интересном диапазоне больших значений Pe_l оказалось возможным аппроксимировать простыми зависимостями, аналогичными (1):

$$\mathcal{K}_{\perp} = \mathcal{K}_{\perp}^0 f_k(\text{G}), \quad (2)$$

$$\mathcal{D}_{\perp} = \zeta_{\perp} + \mathcal{D}_{\perp}^0 f_{\perp}(\tilde{\text{G}}) + \mathcal{D}_{\perp}^{\infty} \left(1 - f_{\perp}(\tilde{\text{G}})\right), \quad (3)$$

$$\text{G} = \frac{\text{Ra}_l}{\text{Pe}_l}, \quad \tilde{\text{G}} = \frac{\text{G}}{\mathcal{D}_{\perp}^0}. \quad (4)$$

Как и раньше, поправочные на действие гравитации множители f_{\perp} , f_k монотонно уменьшаются от 1 до 0 с ростом числа Релея. Как видно из рис. 4, в широком диапазоне изменения Pe , G расчетные данные группируются

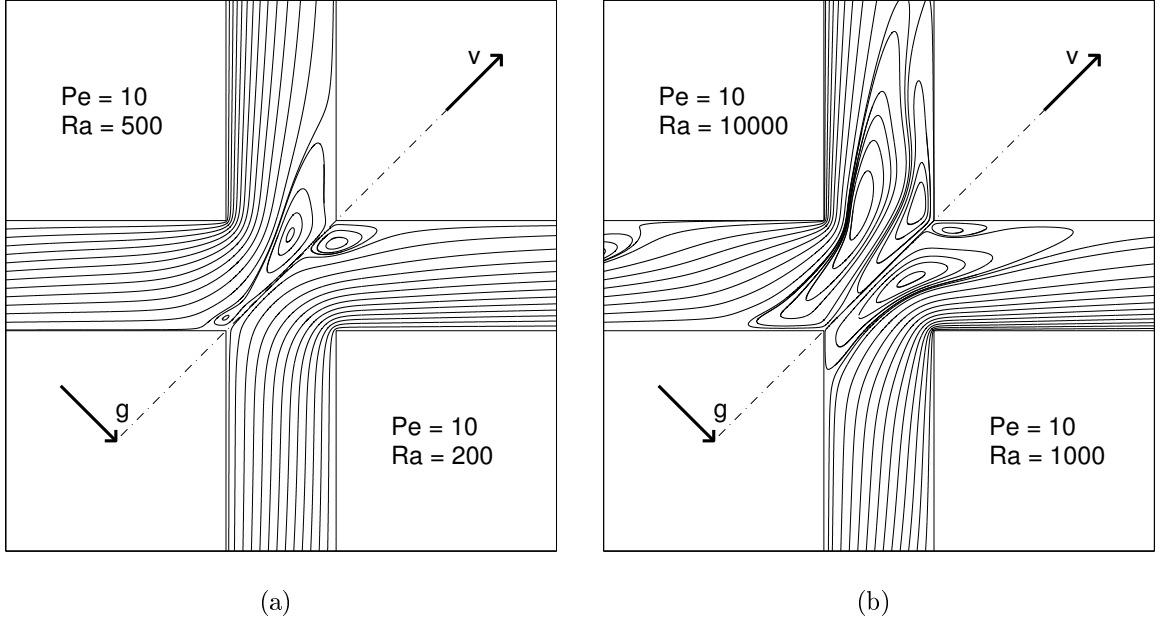


Рис. 3. Линии тока для поперечной задачи при умеренных ($Pe = 10$) значениях критерия Пекле.

вблизи общих кривых, которые могут быть аппроксимированы формулами

$$f_k = \frac{1 + 0.08G}{1 + 0.09G + 0.05G^{3/2}}, \quad (5)$$

$$f_{\perp} = \frac{1 + 0.1\tilde{G}}{1 + 0.25\tilde{G}^{3/2}}. \quad (6)$$

Аналогичные аппроксимации коэффициента дисперсии в продольной задаче привели к результату, полностью аналогичному (1). Более того, как коэффициент дисперсии трассера $\mathcal{D}_{\parallel}^0(Pe_l)$, так и поправочный на действие гравитации множитель $f_{\parallel}(\tilde{Ra}_l)$ оказались практически теми же самыми, что и в одномерном случае. Зависимость $f_{\parallel}(Ra)$ может быть аппроксимирована формулой

$$f_{\parallel} = \frac{1 + 3.4 \cdot 10^{-6} Ra^2}{1 + 4 \cdot 10^{-3} Ra + 10^{-7} Ra^{11/4}}. \quad (7)$$

Сравнение зависимостей $f_{\parallel}(Ra)$ для одномерных и для решетчатой моделей представлено на рис. 5.

Хорошее согласование коэффициентных зависимостей для одномерных и решетчатой моделей объясняется однотипностью этих моделей в части продольного массопереноса. Однотипность находит свое отражение, в частности, в одинаковом, тейлоровском, поведении коэффициента диспер-

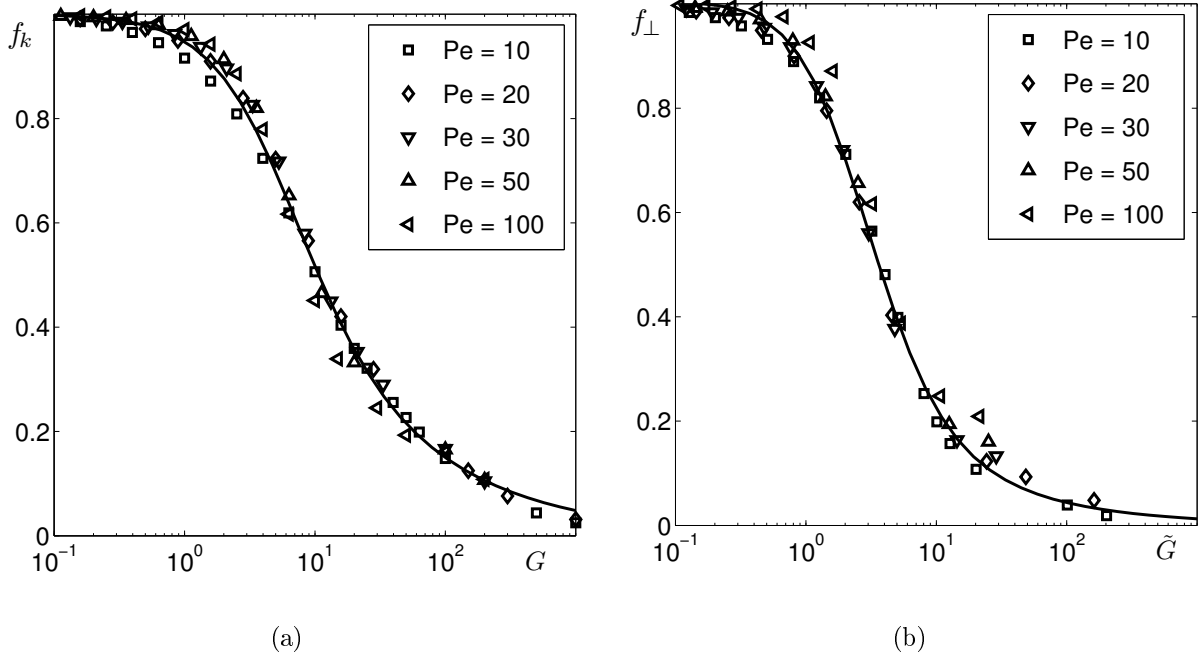


Рис. 4. Зависимости $f_k(G)$ и $f_{\perp}(\tilde{G})$ при фиксированных значениях Pe . Сплошные линии соответствуют аппроксимационным формулам (5) и (6).

сии трассера при больших значениях критерия Пекле ($\mathcal{D}_{\parallel}^0(Pe) \propto Pe^2$). Известно, что в реальных пористых засыпках наблюдается иной закон роста коэффициента дисперсии трассера $\mathcal{D}_{\parallel}^0 \propto Pe^{\alpha}$, $1 < \alpha < 1.2$. Возникает вопрос о степени универсальности найденной зависимости $f_{\parallel}(\tilde{Ra}_l)$.

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, в **параграфе 1.5** рассматривается принципиально иная модель пористой среды в виде «цепочки бусинок» (рис. 2(b)). Эта модель отличается наличием зон идеального перемешивания в точках контакта бусинок и обладает «реальным» ($\mathcal{D}_{\parallel}^0 \propto Pe \ln Pe$), а не тейлоровским видом зависимости коэффициента дисперсии трассера от средней скорости фильтрации. Численные расчеты, проведенные для этой модели, показали, что и в этом случае продольный коэффициент дисперсии может быть представлен в виде (1); поправочный множитель f_{\parallel} при этом начинает существенно отличаться от вычисленного ранее лишь при $f_{\parallel} \lesssim 0.3$. Последнее является следствием различного характера затухания $f_{\parallel}(Ra)$ с ростом \tilde{Ra}_l : $f_{\parallel} \propto \tilde{Ra}_l^{-3/4}$ для одномерных и решетчатой моделей, и $f_{\parallel} \propto Ra^{-2/3}$ для модели бусинок.

Для проверки адекватности построенных макроскопических моделей в **параграфе 1.6** проводится сравнение полученных с их помощью ре-

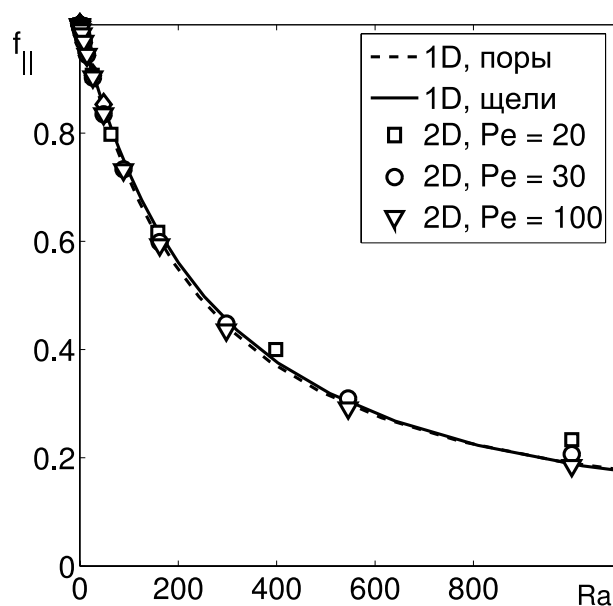


Рис. 5. Зависимость $f_{||}(Ra)$ для одномерных и решетчатой моделей.

зультатов с данными лабораторных экспериментов С. Ватсон и др. по одномерному замещению пресной воды концентрированным рассолом. При этом для всех типов моделей коэффициент извилистости и коэффициент дисперсии трассера брались из экспериментов. Единственным параметром для согласования экспериментальных кривых с теоретическими был характерный размер l пор, участвующий в определении безразмерного градиента концентрации \tilde{Ra}_l . На рис. 6 представлены результаты сравнения экспериментальных и теоретических (полученных для моделей тейлоровского типа) кривых изменения концентрации. Оказалось, что оба класса моделей, как «тейлоровские», так и модель идеального перемешивания, вполне удовлетворительно согласуются с экспериментами. Это объясняется тем, что эксперименты были проведены в области малых и средних градиентов плотности, там, где обе модели дают практически одинаковые результаты. Окончательный выбор, очевидно, требует дополнительных экспериментов в области больших \tilde{Ra}_l . В то же время отмечается, что преимуществом модели идеального перемешивания является ее хорошее согласование с экспериментами также и в части зависимости эффективного коэффициента дисперсии трассера от критерия Пекле.

Наконец, в **параграфе 1.7** проводится обсуждение развиваемой теории и намечаются перспективы дальнейших исследований.

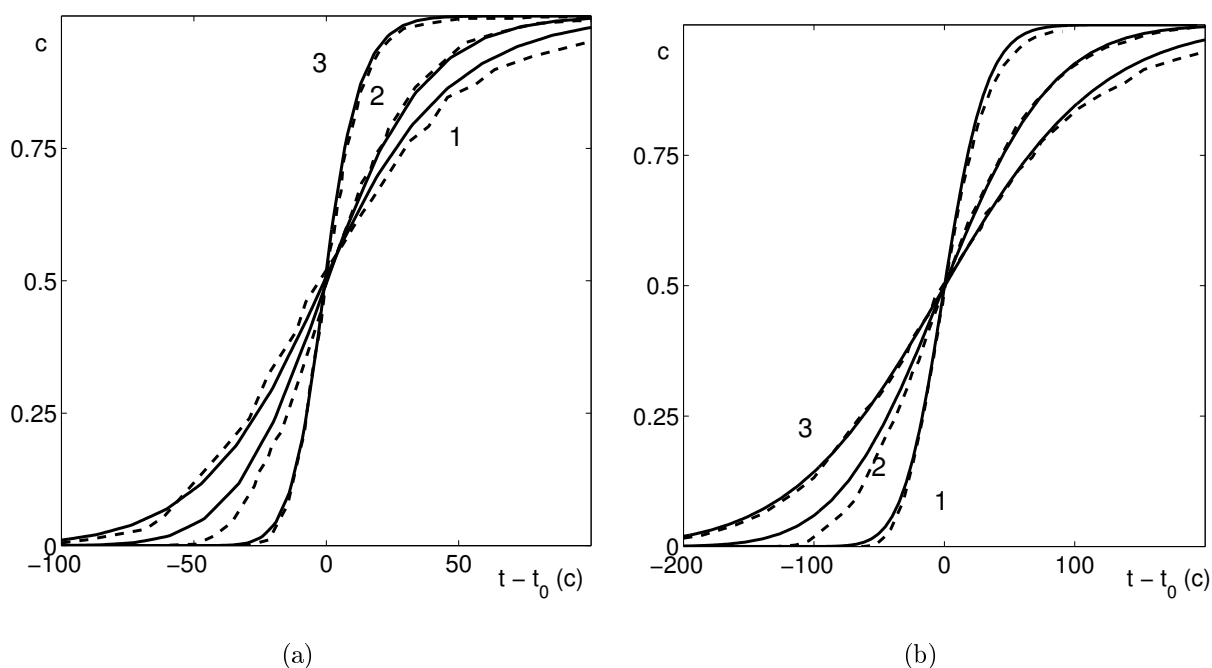


Рис. 6. Сравнение теоретических (сплошные линии) и экспериментальных (пунктир) кривых изменения безразмерной концентрации со временем в датчиках, расположенных на малом (а) и большом (б) расстоянии от точки входа. Кривые 1–3 отвечают различным экспериментам.

Вторая глава диссертационной работы посвящена осреднению уравнений фильтрации и массопереноса с масштаба лабораторных экспериментов (однородные пористые среды) до масштаба полевых испытаний (микронеоднородные среды).

В **параграфе 2.1** проводится постановка соответствующей задачи. Базовыми уравнениями выступают закон сохранения массы в приближении Буссинеска, закон Дарси для описания фильтрации рассола и уравнение конвективно-дисперсионного переноса примеси. Управляющими параметрами по-прежнему являются числа Пекле и Релея, построенные на этот раз по характерному размеру неоднородностей l . Последние считаются связанными с пространственным масштабом флуктуаций проницаемости и малыми по сравнению с характерным пространственным масштабом L изучаемого процесса. Здесь же в предположении малости параметра $\varepsilon = l/L$ проводится процедура гомогенизации базовых уравнений. Результатом ее является макроскопическое уравнение типа конвективной диффузии для описания процессов переноса примеси. Коэффициент дисперсии, как и в

	$\mathcal{R}(Y) = \exp(- Y)$	$\mathcal{R}(Y) = \exp(- Y ^2)$
$n = 3$		
$\mathcal{R}(\hat{r})$	$2\sqrt{2/\pi} (1+r^2)^{-2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \exp(-\frac{r^2}{4})$
$f_{\parallel}(\text{Ra})$	$\frac{(1 - \text{Ra} + \text{Ra} \ln \text{Ra})}{(1 - \text{Ra})^2}$	$1 - \frac{\text{Ra}}{4} \exp(\text{Ra}/4) \text{Ei}(\text{Ra}/4)$
$n = 2$		
$\mathcal{R}(\hat{r})$	$(1+r^2)^{-3/2}$	$\frac{1}{2} \exp(-r^2/4)$
$f_{\parallel}(\text{Ra})$	$\frac{1 - \frac{\sqrt{\text{Ra}}}{\sqrt{1-\text{Ra}}} \text{arctg} \frac{\sqrt{1-\text{Ra}}}{\sqrt{\text{Ra}}}}{1 - \text{Ra}}$	$1 - \frac{\sqrt{\pi \text{Ra}}}{2} \exp(\text{Ra}/4) \text{erfc} \frac{\sqrt{\text{Ra}}}{2}$

Таблица 1. Расчетные соотношения для экспоненциальной и гауссовской корреляционных функций; n указывает на размерность пространства.

предыдущей главе, оказывается функцией безразмерного градиента плотности Ra_l . Для определения вида этой функциональной зависимости формулируем задачи на ячейке.

В параграфе 2.2 эти задачи конкретизируются и решаются для двух- и трехмерных слабонеоднородных сред. Для этого привлекается техника, развитая Л. Гелхар при изучении массопереноса трассера. В результате коэффициент продольной дисперсии оказывается возможным представить в том же универсальном виде (1), но с иными функциями $\mathcal{D}_{\parallel}^0(\text{Pe}_l)$ и $f_{\parallel}(\text{Ra}_l)$. Коэффициент дисперсии трассера $\mathcal{D}_{\parallel}^0$ линейно зависит от критерия Пекле, а поправочный на действие гравитации множитель $f_{\parallel}(\text{Ra})$ ($f_{\parallel}(0) = 1$) определяется как

$$f_{\parallel}(\text{Ra}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{d_0} \int_0^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{R}}(r) r^3 dr}{\text{Ra} + r^2}. \quad (8)$$

Здесь $\hat{\mathcal{R}}$ — образ Фурье корреляционной функции \mathcal{R} поля проницаемости \mathcal{K}

$$\mathcal{R}(Y' - Y'') = \langle \mathcal{K}(Y - Y') \mathcal{K}(Y - Y'') \rangle_Y.$$

На практике чаще всего используют экспоненциальную либо гауссовскую корреляционные функции. Для них интеграл (8) может быть подсчитан явно. Соответствующие зависимости $f_{\parallel}(\text{Ra})$ приведены в таб. 1.

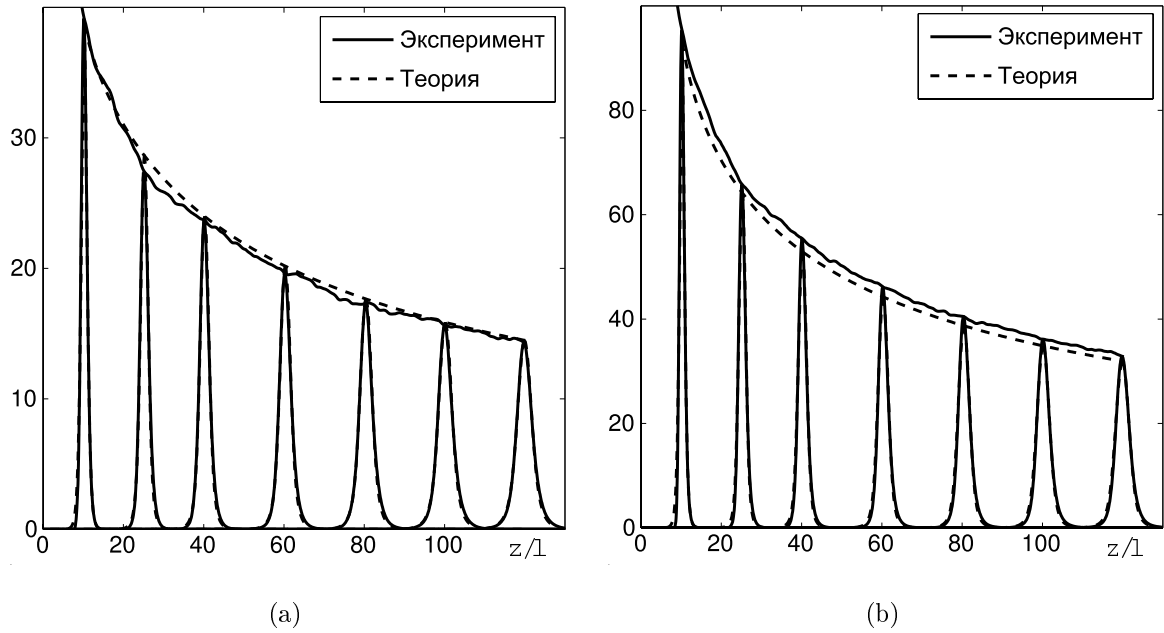


Рис. 7. Теоретические (пунктирные линии) и экспериментальные (сплошные линии) профили градиента плотности $\partial\rho/\partial z$ и их огибающие. Результаты представлены для значений разности плотностей пресной воды и рассола $\Delta\rho = 100 \text{ кг/м}^3$ (а) и $\Delta\rho = 200 \text{ кг/м}^3$ (б).

Для проверки адекватности выведенной в предыдущих параграфах этой главы макроскопической модели в **параграфе 2.3** проводится сравнение полученных на ее основе результатов с результатами тщательно проведенных А. Дж. Ландман вычислительных экспериментов. Показано, что теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются друг с другом (рис. 7).

В завершающем вторую главу **параграфе 2.4** обсуждается возможность практического использования полученных теоретических результатов и заостряется внимание на трудностях, которые могут возникнуть при переходе от рассмотрения слабонеоднородных сред к общему случаю. Наиболее существенная из них заключается в том, что дисперсионный потенциал $F(\text{Ra}_l) = \mathcal{D}_{\parallel}^0(\text{Ra}_l)\text{Ra}_l$ может оказаться на некотором интервале изменения Ra_l убывающей функцией безразмерного градиента плотности Ra_l . Вследствие этого задача, поставленная на основе полученного макроскопического уравнения, окажется некорректной. При этом встает проблема физически обоснованной регуляризации макроскопического уравнения. Вы-

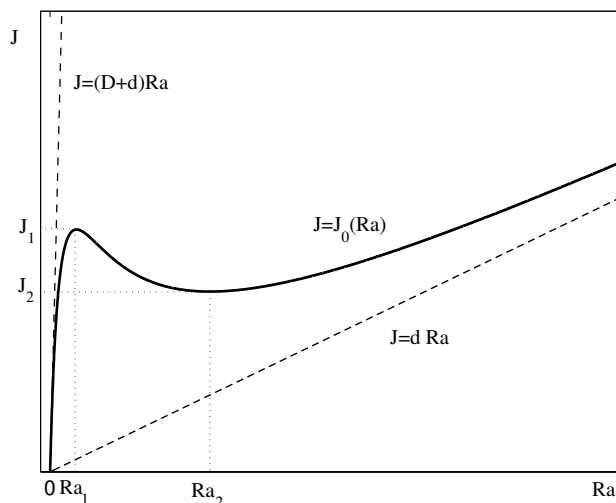


Рис. 8. Зависимость J от Ra для простейшего реологического соотношения. Здесь d и D — коэффициенты молекулярной диффузии и дисперсии для случая трассера.

сказывается предположение о том, что следующие по порядку малости ε члены, отброшенные при выводе макроскопического уравнения, окажутся его естественными регуляризаторами.

Для проверки этого предположения в **третьей главе**, завершающей диссертацию, рассматривается специальный случай одномерных слабонеоднородных сред, когда, во-первых, немонотонность дисперсионного потенциала $F(Ra_l)$ заведомо имеет место, а, во-вторых, регуляризационные члены могут быть вычислены в явном виде.

В **параграфе 3.1** формулируется исходная постановка задачи, строится макроскопическое уравнение общего вида и ставятся задачи на ячейке, определяющие коэффициенты этого уравнения.

В **параграфе 3.2** демонстрируется, что удержание лишь главных по ε членов в макроскопическом реологическом соотношении, связывающем средний поток примеси со средним градиентом концентрации, приводит к немонотонной по Ra_l равновесной зависимости $J = J_0(Ra_l)$ (рис. 8). Учет следующих по порядку величины ε членов в указанном реологическом соотношении позволяет регуляризовать его, приводя при этом к нелокальной как по времени, так и по пространству связи J с Ra_l

$$J - J_0 + \left[\varepsilon \left(\alpha_1 \frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial Ra_l}{\partial t} \right) \right] + \left\{ \varepsilon f_1(Ra_l) \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_2(Ra_l) \right\} = 0. \quad (9)$$

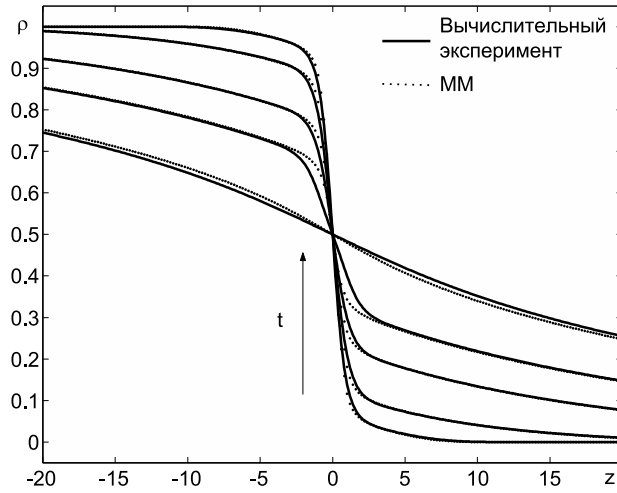


Рис. 9. Эволюция профиля плотности со временем для одномерной слабо-неоднородной пористой среды. Профили представлены для безразмерных времен $\tau = 1, 5, 20, 40, 75$; z — подвижная координата.

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, f_1 > 0$, f_2 — монотонно возрастает. Для коэффициентов α_1, α_2 и для функций f_1, f_2 получены явные выражения. Соотношение (9), совместно с уравнением сохранения примеси, составляет систему нелинейных уравнений, аналогичную той, что используется в так называемой теории фазового поля. Последняя активно развивается в последнее время и применяется для описания процессов солидификации/плавления, задач типа Хеле-Шоу, задач обработки изображений и т.д.

Для проверки работоспособности полученной регуляризованной модели массопереноса в **параграфе 3.3** проводится сравнение полученных на ее основе результатов с результатами специально проведенного вычислительного эксперимента. Сравнение в целом указывает на адекватность описания полученной макроскопической моделью исследуемых процессов (рис. 9).

Далее, в **параграфе 3.4** аналогия между макроскопической моделью массопереноса при фильтрации разноплотностной жидкости в слоистой среде и моделями теории фазового поля обсуждается более детально. В частности, выводится упрощенная модель эволюции концентрационного фронта, соотносящаяся с исходной так же, как соотносятся между собой упрощенная стефановская модель фазового перехода с общими уравнениями фазового поля.

В заключительном **параграфе 3.5** очерчивается круг применимости полученных результатов, обсуждается возможность их обобщения и демонстрируется плодотворность отмеченной аналогии между построенной макроскопической моделью и уравнениями фазового поля. В частности, обнаруживается аналог известного в теории обработки изображений парадокса Перона-Малика состоящий в обострении со временем изначально гладкого концентрационного фронта.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Построены макроскопические математические модели массопереноса при фильтрации разноплотностной жидкости в однородной пористой среде. Показано хорошее согласование полученных моделей с результатами известных лабораторных экспериментов.
2. Найдены коэффициентные зависимости этих моделей от управляющих параметров процесса. Показано, что их вид слабо зависит от внутренней структуры порового пространства.
3. Построены макроскопические математические модели массопереноса при фильтрации разноплотностной жидкости в микронеоднородной пористой среде. Коэффициент продольной дисперсии представлен в аналитической интегральной форме и явно вычислен для случайно-неоднородных сред с различными корреляционными функциями поля проницаемости. Показано хорошее согласование полученных моделей с результатами известных и специально проведенных вычислительных экспериментов.
4. Предложена процедура регуляризации немонотонной реологической зависимости дисперсионного потока от градиента концентрации. Показана аналогия получающейся таким образом макроскопической модели массопереноса известным уравнениям фазового поля.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] *Демидов, Д. Е.* Осреднение уравнений фильтрации рассолов в микронеоднородных пористых средах / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров // Труды

Математического центра имени Н. И. Лобачевского. — Т. 16. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2002. — С. 163–174.

- [2] *Демидов, Д. Е.* Обобщение закона Фика для фильтрации рассола при наличии высоких градиентов плотности / Д. Е. Демидов // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. — Т. 25. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2004. — С. 100–101.
- [3] *Демидов, Д. Е.* Влияние гравитационных сил на дисперсионное размазывание фронтов при фильтрации рассола в микронеоднородной пористой среде / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. — Т. 27. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2004. — С. 107–114.
- [4] *Egorov, A. G.* On the interaction between gravity forces and dispersive brine fronts in micro-heterogeneous porous media / A. G. Egorov, D. E. Demidov, R. J. Schotting // *Advances in Water Resources*. — 2005. — January. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 55–68.
- [5] On the interaction between gravity forces and hydrodynamic dispersion in heterogeneous porous media / R. Schotting, A. Landman, A. Egorov, D. Demidov // *Eos Trans. AGU*. — 2005. — Vol. 86, no. 52. — Fall Meet. Suppl., Abstract H51F-0436.
- [6] *Демидов, Д. Е.* Макроскопическая модель фильтрации и массопереноса в однородных пористых средах / Д. Е. Демидов // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. — Т. 31. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2005. — С. 53–54.
- [7] *Демидов, Д. Е.* Осредненное описание процессов разноплотностной фильтрации и массопереноса. 1. Уровень пор / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров // *Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки*. — 2005. — Т. 147, № 3. — С. 91–112.