На правах рукописи

[signature]

КОЛЕСНИКОВА Наталья Юрьевна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2009

Работа выполнена в Южно-Уральским государственном университете на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель – доктор физико–математических наук, профессор ТАНАНА Виталий Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор МЕНИХЕС Леонид Давидович
доктор физико-математических наук, профессор ХАЧАЙ Юрий Васильевич.

Ведущая организация – Государственный ракетный центр "КБ им. акад. В.П. Макеева ".

Защита состоится 18 ноября 2009 года, в 12 ч 00 мн., на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южно–Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 15 октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.- м. н., профессор СОКОЛИНСКИЙ Л.Б.

Общая характеристика работы

Объект исследования. Диссертация посвящена численному моделированию обратных граничных задач теплопроводности.

Актуальность темы. При математическом моделировании многих процессов и явлений, происходящих в природе и обществе, приходится сталкиваться с задачами, не удовлетворяющими требованиям корректности, сформулированных Адамаром. Для решения таких задач необходимо привлечение методов теории условно-корректных задач, основы которой заложены в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и чл.-кор. РАН В.К. Иванова.

К настоящему моменту теория некорректно поставленных задач стала одним из основных направлений современной прикладной математики, которое бурно развиваясь, находит все новые и новые приложения в естествознании и технике. Для приближенных решений, соответствующих задач, необходимо получение точных гарантированных оценок. Построением оптимальных методов и получением оценок погрешности занимались такие математики, как В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев, В.Н. Страхов, В.В. Васин, А.Л. Агеев, А.Б. Бакушинский, В.А. Морозов, А.С. Леонов, В.П. Танана, Г.В. Хромова, А.Г. Ягола и др.

Исследованию оптимальности различных методов решения обратных задач и получению точных оценок погрешности этих методов посвящены работы В.П. Тананы.

Настоящая работа представляет собой продолжение исследований в этом нраправлении для метода проекционной регуляризации.

Цель работы. Решение широкого класса обратных задач тепловой диагностики методом проекционной регуляризации и получение точных по порядку оценок погрешности этого метода.

Доказательство оптимальности метода М.М. Лаврентьева и получение точных оценок погрешности этого метода для широкого класса обратных и некорректно поставленных задач. Решение методом М.М. Лаврентьева некоторых обратных граничных задач теплопроводности.

Разработка программ на основе указанных методов и численное решение обратных граничных задач тепловой диагностики.

Методы исследования. В работе используются методы теории функций и функционального анализа, методы теории некорректных задач.

Научная новизна. В работе доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева и получены точные оценки погрешности этого метода для решения широкого класса некорректно поставленных задач. Приложение метода М.М. Лаврентьева для решения обратной граничной задачи тепловой диагностики для уравнения с постоянными коэффициентами.

Дано решение методом проекционной регуляризации обратной граничной задачи для дифференциального уравнения параболического типа с переменным коэффициентом и получена точная по порядку оценка погрешности метода проекционной регуляризации и доказана оптимальность по порядку этого метода.

Разработан и реализован алгоритм численного решения обратной задачи тепловой диагностики.

Теоретическая значимость. Разработаны методы получения точных оценок погрешности при решении граничных обратных задач для параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева при решение операторных уравнений первого рода и получены точные оценки погрешности этого метода.

Практическая значимость. При планировании стендовых испытаний ракетных двигателей, а также проектировании литейно - прокатных модулей и в других технических и естественных задачах важную роль играет точность решения обратных задач тепловой диагностики.

Для приближенных решений, соответствующих задач, необходимо получение точных гарантированных оценок.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на 60-й юбилейной научной конференции ЮУрГУ (апрель 2008 года), на конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач.

Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения В.К. Иванова"(Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 года), на "Первой конференции аспирантов ЮУрГУ"(апрель 2009 года), на международной конференции "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики"(8–12 октября 2007 г., Тамбов), на научных семинарах кафедры вычислительной математики ЮУрГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–10], список которых приведен в конце автореферата. Статьи [1, 2] опубликованы в научных журналах "Известия вузов. Математика."и "Системы управления и информационные технологии" , включенных ВАК в перечень журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук. В работах [1, 4, 5, 9] В. П. Танане принадлежит постановка задачи, Н. Ю. Колесниковой принадлежат все полученные результаты.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, изложена на 120 страницах. Библиографический список содержит 130 наименований.

Содержание работы

Введение содержит обзор основных публикаций и монографий, посвященных некорректным задачам и методам их решения. В этом разделе приводится обоснование актуальности выбранной области, сделан краткий обзор результатов, полученных другими авторами в области некорректных задач. Обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и излагаются основные результаты исследования, показана научная новизна работы.

В главе 1 рассмотрено линейное операторное уравнение

$$Au = f; \; u \in \mathbb{U}, \; f \in \mathbb{F}. \tag{1}$$

где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{F}$ – гильбертовы пространства, A – линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathbb{U}$ в $\mathbb{F}$ такой, что существует A^{-1} и $||A^{-1}|| = \infty$.

Для исследования уравнения (1) в работе введены понятия класса корректности и модуля непрерывности обратного оператора A^{-1}, а также сформулированы и доказаны основные свойства модуля непрерывности обратного оператора.

Поставим условно – корректную задачу приближенного решения уравнения (1), для этого предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит некоторому классу $M \subset \mathbb{U}$, но точное значение правой части f_0 нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta \in \mathbb{F}$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется по исходным данным задачи M, f_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|$ на классе M.

Определение 1. Множество M будем называть классом корректности для уравнения (1), если сужение A_N^{-1} оператора A^{-1} на множество N равномерно непрерывно.

Функцию $\omega(\tau, M)$, определяемую формулой

$$\omega(\tau, M) = sup\{\|u\| : u \in M, \|Au\| \leq \tau\} \tag{2}$$

будем называть модулем непрерывности в нуле оператора A^{-1} на множестве $N = AM$.

Множество $M \subset \mathbb{U}$ является классом корректности для уравнения (1) тогда и только тогда, когда

$$\omega(\tau, M) \to 0 \text{ при } \tau \to 0.$$

Определение 2. Семейство операторов $\{T_\delta : \ 0 < \delta \leq \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) , на классе корректности M, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство $\mathbb{F}$ в $\mathbb{U}$ и

$$T_\delta f_\delta \to u_0 \ \text{ при } \ \delta \to 0$$

равномерно на множестве M при условии, что $\|f_\delta - Au_0\| \leq \delta$.

Введем количественную характеристику точности метода $\{T_\delta\}$ на множестве M

$$\Delta(T_\delta) = \sup_{u, f_\delta}\{\|u - T_\delta f_\delta\| : \ u \in M, \ \|Au - f_\delta\| \le \delta\}. \tag{3}$$

Пусть в дальнейшем $\mathbb{U} = \mathbb{F} = \mathbb{H}$, а $C(\mathbb{H})$ множество всех операторов P непрерывно отображающих $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. Рассмотрим величину Δ_δ^{opt}, определяемую формулой

$$\Delta_\delta^{opt} = \inf\{\Delta_\delta(P) : P \in C(\mathbb{H})\},$$

где

$$\Delta_\delta(P) = \sup_{u, f_\delta}\{||u - Pf_\delta|| : u \in M, ||f_\delta - Au|| \le \delta\}.$$

Определение 3. Метод $\{T_\delta^{opt} : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным на классе M, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta(T_\delta^{opt}) = \Delta_\delta^{opt}.$$

Определение 4. Метод $\{\overline{T}_\delta : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на классе M, если существует число k такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta(\overline{T}_\delta) \le k\Delta_\delta^{opt}.$$

Далее в работе исследован метод М.М. Лаврентьева, который использует регуляризующее семейство операторов $\{R_\alpha : \ 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ определяемых формулой

$$R_\alpha = \overline{B}(\overline{C} + \alpha E)^{-1}Q^*, \ \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{4}$$

где $\overline{B} = \sqrt{BB^*}$, B – линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathbb{U}$ в $\mathbb{U}$, $\overline{C} = \overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{A} = \sqrt{A^*A}$, E – тождественный оператор, а Q унитарный оператор, определяемый формулой

$$A = Q\overline{A}, \tag{5}$$

а Q^* оператор сопряженный Q.

Предположим, что $M = M_r = B\overline{S}_r$, $\overline{S}_r = \{v : v \in \mathbb{U}, ||v|| \leq r\}$, а

$$\overline{B} = G(\overline{A}), \tag{6}$$

где спектр $Sp(\overline{A}) = [0, ||A||]$, $G(\sigma)$ непрерывна на $[0, ||A||]$ $G(0) = 0$ и для любого $\sigma \in (0, ||A||)$ $G'(\sigma) > 0$.

Приближенное решение u_δ^α уравнения (1) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = R_\alpha f_\delta, \tag{7}$$

в котором зависимость $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ определим формулой

$$\overline{\alpha}(\delta) = \frac{G^2(\overline{\sigma})}{G'(\overline{\sigma})} \tag{8}$$

а $\overline{\sigma}(\delta)$ является решением уравнения

$$rG(\sigma)\sigma = \delta. \tag{9}$$

Теорема 1. *Если функция* $\frac{G^2(\sigma)}{G'(\sigma)}$ *возрастает на отрезке* $[0, ||A||]$ *то метод М.М. Лаврентьева* $\{R_{\overline{\alpha}(\delta)}\}$ *определяемый формулами* $(4)-(9)$, *оптимален на* M_r *и для него имеет место точная оценка погрешности*

$$\Delta(R_{\overline{\alpha}(\delta)}) = rG(\overline{\sigma}(\delta)).$$

Далее рассматривается метод проекционной регуляризации решения уравнения (1). Доказана оптимальность по порядку этого метода и получены точные по порядку оценки его погрешности.

Глава 2 посвящена решению обратных задач тепловой диагностики и получению точных оценок погрешности.

В первой части главы дана постановка обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, зависящими от состояния исследуемой системы. Для получения приближенного решения этой задачи использован метод М.М. Лаврентьева и получены ассимптотически точные оценки погрешности соответствующего приближенного решения. Особо примечательным является зависимость оценки от точки x_0 в которой замеряется температурное поле системы.

Далее рассмотрена обратная граничная задача для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a(x)u(x,t), \tag{10}$$

в котором $x \in [0,1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0,1]$. Предполагается, что

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{11}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{12}$$

и

$$u(x_0,t) = f(t); \quad 0 < x_0 < 1, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

а граничное значение $u(1,t)$ функции $u(x,t)$ требуется определить. Так как задача (10) – (13) некорректно поставленна, то предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, где $f_0 \in L_2[0,\infty)$, существует точное решение $u_0(1,t) \not\equiv 0$ задачи (10) – (13), которое принадлежит пространству $C^1[0,\infty)$, и удовлетворяет следующим условиям $u_0(1,0) = 0$ и существует число $T > 0$ такое, что для любого $t \geq T$

$$u_0(1,t) = 0,$$

кроме того, $u_0(1,t) \in M_r$, где

$$M_r = \{u_0 : \; u_0 \in C^1[0,\infty), \; \|u_0\|^2_{L_2} + \|u_0'\|^2_{L_2} \leq r^2\},$$

где $u_0'(1,t)$ - производная от функции $u_0(1,t)$ по t, но точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta.$$

Требуется, используя исходные данные f_δ, δ и M_r задачи , построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(1,t)$.

Данная задача решена методом проекционной регуляризации и основной результат этой главы может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия сформылированные в постановке задачи* (10)-(13) *и* $u_\delta(t)$ *приближенное решение этой задачи, полученное методом проекционной регуляризации* $\{P_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$. *Тогда точная по порядку оценка погрешности этого метода определяется формулой*

$$\Delta(P_\delta) \le C \ln^{-2} \delta,$$

где C *некоторая константи.*

Как приложение этого результата рассмотрено решение обратной граничной задачи для кольца.

Далее в главе рассматривается обратная граничная задача для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, которое может быть описано системой уравнений

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2};\ 0 \le x \le x_1,\ t \ge 0,\ x_1 > 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = æ\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2};\ x_1 \le x \le 1,\ t \ge 0, \tag{15}$$

где $æ \ne 1$ - некоторая известная положительная константа.

Предположим, что решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x,0) = 0;\ 0 \le x \le x_1, \tag{16}$$

$$u_2(x,0) = 0;\ x_1 \le x \le 1, \tag{17}$$

а также граничным условиям

$$u_1(0,t) = f(t);\ t \ge 0, \tag{18}$$

$$u_1(x_1,t) = g(t);\ t \ge 0, \tag{19}$$

и условиям согласования

$$u_1(x_1,t) = u_2(x_1,t);\ t \ge 0, \tag{20}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_1,t)}{\partial x};\ t \ge 0, \tag{21}$$

Функции $u_2(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$ требуется определить.

Предположим, что при некоторых значениях $f(t)$, $g(t) \in L_2[0,\infty)$ существуют решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ задачи (14) – (21) такие, что для любого $x \in [0,x_1]$ интеграл $\int\limits_0^\infty |u_1(x,t)|dt$ сходится, а для любого $x \in (x_1,1)$ сходится интеграл $\int\limits_0^\infty |u_2(x,t)|dt$. Кроме того, интеграл $\int\limits_0^\infty |\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}|dt$ сходится равномерно на $[0,x_1]$, а интеграл $\int\limits_0^\infty |\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}|dt$ сходится равномерно на $[x_1,1]$, а интегралы $\int\limits_0^\infty |\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}|dt$ и $\int\limits_0^\infty |\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}|dt$ сходятся локально равномерно на $[0,x_1)$ и $(x_1,1]$ соответственно.

Пусть $u_2(1,t)$ и $\frac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$ принадлежит множеству M_r

$$M_r = \{\psi(t) : \psi(t) \in W_2^1[0,\infty),\ ||\psi||^2_{L_2} + ||\psi'||^2_{L_2} \le r^2\},$$

а вместо функций $f(t)$ и $g(t)$ нам известны некоторые приближения $f_\delta(t)$, $g_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень их погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$||f - f_\delta|| \le \delta \text{ и } ||g - g_\delta|| \le \delta.$$

Требуется, определить приближенное решение $u_{2\delta}(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_{2\delta}(1,t)}{\partial x}$ задачи (14) - (21) и оценить их уклонения от точных решений $u_2(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$.

Используя интегральные преобразования F_c - косинус и F_s - синус, задачу (14) – (21) сведем к следующей

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = æ\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2};\ x_1 \le x \le 1,\ t \ge 0, \tag{22}$$

$$u_2(x,0) = 0;\ x \in [x_1,1], \tag{23}$$

$$u_2(x_1,t) = g_\delta(t);\ t \ge 0, \tag{24}$$

и

$$\frac{\partial u_2(x_1,t)}{\partial x} = h_\varepsilon(t);\ t \ge 0 \tag{25}$$

где $\varepsilon = \sqrt{2} r^{\frac{1}{3}} \mu^{\frac{2}{3}} + \frac{4\delta}{\sqrt{2} x_1}$, $\mu = \frac{\left(1+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1}\right)^2}{1-e^{-\sqrt{2}x_1}}\delta$, а $h_\varepsilon \in L_2[0,\infty)$, а также

$$||h_\varepsilon - h|| \le \varepsilon,\ \text{ а } ||g - g_\delta|| \le \delta.$$

Далее, используя F_c - косинус и F_s – синус преобразования Фурье сводим задачу (22) – (25) к задаче Коши для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, решая которую методом проекционной регуляризации, получим приближенные решения $u_{2\delta}(1,t)$ и $\frac{\partial u_{2\delta}(1,t)}{\partial x}$ задачи (22) – (25). Кроме того, для этих приближенных решений получена оценка погрешности

$$\left[||u_{2\delta}(1,t) - u_2(1,t)||^2 + ||\frac{\partial u_{2\delta}(1,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}||^2\right]^{\frac{1}{2}} \le C\ln^{-2}\delta.$$

В **главе 3** приведено численное решение обратной задачи теплопроводности методом проекционной регуляризации в среде программирования MatLab. К получению приближенного решения применяется метод проекционной регуляризации. Получено графическое изображение приближенного решения. На графике видно отклонение приближенного решения от точного. Программа позволяет выбрать параметр регуляризации так, чтобы приближенное решение было очень близко к точному. Тепловой процесс опишем системой уравнений:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \tag{26}$$

$$u(x,0) = 0;\ 0 \le x \le 1, \tag{27}$$

$$u(0,t) = 0;\ t \ge 0, \tag{28}$$

$$u(x_0,t) = f(t);\ 0 < x_0 < 1, \tag{29}$$

а значение

$$u(1,t) = u(t);\ t \ge 0. \tag{30}$$

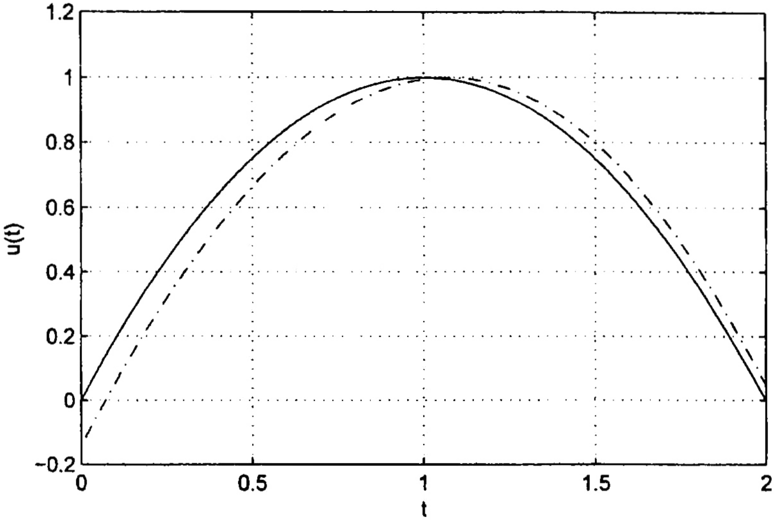
требуется определить.

Так как задача (26) – (30) некорректная, то предположим, что при $f_0(t) \in L_2[0,\infty)$ существует ее точное решение $u_0(t)$ принадлежащее пространству $W_2^1[0,\infty)$. Но точное значение правой части $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$||f_\delta - f_0||_{L_2} \le \delta.$$

Требуется по исходным данным x_0, f_δ и $\delta > 0$ определить приближенное решение $u_\delta(x_0, t)$ минимально уклоняющееся от точного. Параметр регуляризации λ_δ подбирается в файл - функции mainer.m и наилучший результат получается при $\lambda_\delta = 2.01$, как видно на рисунке.

На рисунке изображены графики точного и приближенного решения задачи. Значение $x_0 = \frac{1}{2}$, $t \in [0, 2]$



Пунктирной линией изображено приближенное решение, непрерывной линией точное решение.

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты

1. В работе доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева и получены точные оценки погрешности этого метода для решения широкого класса задач.

2. Получена точная по порядку оценка погрешности приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения с переменным коэффициентом. Ранее никогда не делались оценки такого класса задач.

3. В работе разработан и реализован алгоритм численного решения одной обратной задачи тепловой диагностики.

4. В работе решена обратная задача тепловой диагностики оптимальным методом М.М. Лаврентьева и выведена константа, позволяющая судить о скорости сходимости приближенного решения к точному, зависящая от положения точки x_0.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК

1. Танана В.П., Колесникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2009. № 9. С. 46 52.

2. Колесникова Н.Ю. О точной оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1.2(35). С. 268–272.

Другие публикации

3. Танана В.П., Колесникова Н.Ю. Об оптимальном методе решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Вестник Тамбовского университета. Материалы международной конференции "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики."Серия: Естественные и технические науки. 2007. Т. 12. № 4. С. 531.

4. Танана В.П., Колесникова Н.Ю. Об оптимальном методе решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, физика, химия. 2007. Выпуск 9. № 19(91). С. 48–54.

5. Танана В.П., Колесвникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Известия Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. № 58. С. 155–162.

6. Колесникова Н.Ю. Оптимальный метод решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Наука ЮУрГУ: материалы 60-й юбилейной

научной конференции. Челябинск. Изд-во ЮУрГУ. 2008. Т. 2. С. 138-140.

7. Колесникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи // Информационные технологии моделирования и управления. 2009. № 2(54). С. 199-207.

8. Колесникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова. Екатеринбург. 2008. С. 132-133.

9. Танана В.П., Колесникова Н.Ю. Об оптимальном методе приближенного решения операторных уравнений с возмущенным оператором // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2008. Вып. 4(42). URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru/

10. Колесникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2008. Вып. 1(39). URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru

1С =

Подписано в печать 15.09.09.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Бумага офесная. Тираж 100 экз.
Издательство Южно-Уральского государственного университета
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76