На правах рукописи

Васильева Оксана Владимировна

НЕГОЛОНОМНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ И ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2007

Работа выполнена на кафедре геометрии
Томского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Онищук Надежда Максимовна.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Столяров Алексей Васильевич;

кандидат физико-математических наук, доцент
Фомин Виктор Егорович.

Ведущая организация: Тверской государственный университет

Защита состоится 31 мая 2007 г. в 16.00 в ауд. 217 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 Казанского государственного университета по адресу: 420008, г.Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета (Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан ______________ 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,

доцент **М. А. Малахальцев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Неголономная геометрия [17] в современном понимании – это геометрия гладкого n-мерного многообразия M_n, на котором задано k-мерное гладкое распределение, т.е. гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in M_n$ k-мерную касательную плоскость. Такое k-мерное распределение задают $(n-k)$ независимыми уравнениями Пфаффа. Распределение называется голономным, если система уравнений Пфаффа вполне интегрируема [12], т.е если через любую точку $x \in M_n$ проходит k-мерное интегральное многообразие [9], которое в каждой своей точке касается плоскости распределения. В этом случае на M_n возникает k-мерное слоение [8], т.е через каждую точку $x \in M_n$ проходит одно (и только одно) k-мерное подмногообразие многообразия M_n. Если же система из $(n-k)$ уравнений Пфаффа, задающая распределение, не является вполне интегрируемой, т.е. не имеет интегральных многообразий размерности k, то распределение называется неголономным [21].

Что касается термина "неголономная поверхность", то его ввел Э.Бортолотти [18], [19] для обозначения совокупности интегральных кривых уравнения Пфаффа, заданного в аффинном пространстве.

Важнейшая область применения неголономной геометрии – это динамика механических систем с неголономными связями. Например, при описании качения твердого тела по поверхности другого тела с учетом трения возникают не вполне интегрируемые уравнения. В механике решению такого вида задач уделяется большое внимание.

Кроме того, в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ неголономная геометрия тесно связана с геометрией векторного поля [2], [14]. Векторные же поля естественным образом появляются как поля скоростей потоков жидкостей, а также в теории относительности. Векторные поля постоянной длины используются при описании жидких кристаллов.

Серьезные математические работы по неголономной геометрии, появившиеся в 20-40-х годах 20-го столетия [5], [6], [7], [20], [22], описывают в основном общие схемы геометрических исследований.

Начиная с шестидесятых годов прошлого столетия появилось большое количество работ по неголономной геометрии с конкретным содержанием. Среди них — работы по неголономной геометрии линейчатых многообразий. Достаточный перечень последних содержится в [17].

В семидесятых годах появились серьезные работы по распределениям в аффинном, проективном пространствах и в пространствах с заданной связностью [1], [3], [4], [10], [11], [15].

Как геометрия поверхностей не могла бы хотя бы в какой-то мере считаться законченной, если бы не были исследованы конкретные виды поверхностей, так и теория "неголономных поверхностей" (почти не имеющая конкретных примеров) не должна ограничиваться результатами только общего характера.

Таким образом, все вышеизложенное позволяет считать задачу геометрического исследования конкретных неголономных поверхностей актуальной проблемой неголономной геометрии.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование геометрии неголономных гиперповерхностей вращения в 3-х и 4-хмерном евклидовых пространствах, в частности, выявление основных инвариантов и исследование свойств линий кривизны 1-го и 2-го рода, асимптотических, эквидирекционных и геодезических линий, также доказательство существования наиболее важных неголономных поверхностей вращения. Кроме того, одна из поставленных в данной работе задач – сравнение свойств кривых неголономной гиперповерхности вращения, проходящих через заданную точку, со свойствами обычной поверхности вращения в голономном случае.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

- Дано определение неголономной поверхности вращения (НПВ) в 3-хмерном евклидовом пространстве.
- Доказано, что для НПВ главные кривизны 2-го рода – вещественные различные числа.
- Найдены условия на инварианты, определяющие НПВ.
- Даны определения параллелей и меридианов НПВ в 3-хмерном пространстве и изучены их свойства.
- Доказано существование некоторых подклассов НПВ, в частности, существование единственной (с точностью до постоянной) неголономной гиперповерхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода, все параллели которой являются геодезическими прямейшими. Для нее найдено уравнение Пфаффа в некоторой неподвижной декартовой системе координат и интегральные кривые этого уравнения, являющиеся линиями кривизны 2-го рода.
- Рассмотрены два вида неголономных гиперповерхностей вращения в 4-хмерном евклидовом пространстве: 1) сферические неголономные гиперповерхности вращения (СНПВ), 2) неголономные гиперповерхности двойного вращения (НПДВ).
- Доказано, что все три главные кривизны 2-го рода СНПВ – вещественные числа, из них две совпадающие.
- Получены условия на инварианты, определяющие СНПВ.

- Доказано, что для НПДВ также все главные кривизны 2-го рода – вещественные числа. При этом НПДВ делятся на два класса: а) НПДВ, для которых все три главные кривизны 2-го рода – различные числа, б) НПДВ, для которых имеется двукратная главная кривизна 2-го рода.

- Получены условия на инварианты, определяющие НПДВ.

- Даны определения параллелей и меридианов данных неголономных гиперповерхностей вращения в 4-хмерном пространстве и изучены их свойства.

- Доказаны теоремы существования некоторых частных классов неголономных гиперповерхностей вращения в 4-мерном евклидовом пространстве.

- Исследованы их геометрические свойства.

Методика исследования. Работа выполнена методом внешних форм Картана [16] с использованием подвижного репера.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Могут быть использованы при исследовании векторных полей и в задачах, приводящих к не вполне интегрируемым уравнениям Пфаффа, например, при изучении динамических систем с неголономными связями частного вида, а также при изучении поля скоростей потоков жидкостей и при описании жидких кристаллов и ферромагнетиков.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Основные результаты диссертации доказаны с использованием методов локальной дифференциальной геометрии. Достоверность утверждений обосновывается полными математическими доказательствами, а также сравнением полученных результатов с результатами других авторов.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Понятие неголономной гиперповерхности вращения в 3-хмерном евклидовом пространстве.

2. Особенности инвариантов и инвариантных линий для неголономных гиперповерхностей вращения в 3-хмерном евклидовом пространстве.

3. Теоремы существования некоторых частных классов неголономных гиперповерхностей вращения в 3-хмерном евклидовом пространстве.

4. Понятия неголономной сферической гиперповерхности вращения и неголономной гиперповерхности двойного вращения в 4-хмерном евклидовом пространстве.

5. Результаты исследования свойств различных инвариантных линий для неголономных гиперповерхностей вращения обоих видов в 4-хмерном евклидовом пространстве.

Личный вклад автора. Постановка задач в работе принадлежит научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту Онищук Н. М. Все результаты, приведенные автором в тексте диссертации, получены им самостоятельно.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на VII Всеросс. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование"(Томск, 2003 г.); Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.); на III Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения"(Казань, 2003 г.); на XLII и XLIII Международных научных студенческих конференциях "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2004 г. и 2005 г.); на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, 2004 г.); на XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(Москва, 2006 г.); на семинаре по геометрии и анализу в Кемеровском государственном университете (2006 г.); на краевом геометрическом семинаре в Барнаульском государственном педагогическом университете (2006 г.); на семинаре по геометрии в Казанском государственном университете (2006 г.). Кроме того, все основные результаты докладывались и неоднократно обсуждались на семинарах кафедры геометрии Томского государственного университета. По теме диссертации имеется 12 публикаций.

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, предварительных сведений, трех глав, списка литературы и приложения. Первая глава содержит восемь параграфов, вторая глава – пять параграфов, третья глава – семь параграфов. Полный объем диссертации составляет 127 страниц.

Содержание диссертации

Во введении формулируется актуальность работы, цель и задачи исследования, излагается краткое содержание работы по главам. Вкратце дана историческая справка развития неголономной геометрии, к которой относится данное исследование. Излагаются основные результаты, полученные в диссертационной работе. Обозначен вклад автора в исследования по данной теме, отражена научная новизна работы, практическая и теоретическая ценность полученных результатов.

В разделе **“Предварительные сведения“** изложен общий подход к исследованию гиперраспределения на $\mathbb{E}_n$, присущий методу внешних форм с применением подвижного репера. Введено понятие основного линейного оператора, инварианты которого являются важнейшими инвариантами исследуемого геометрического образа. Это дает возможность в евклидовом пространстве любого числа измерений, на котором задано гиперраспределение, с общей точки зрения ввести такие понятия как главные кривизны 1-го и 2-го рода, полные и средние кривизны 1-го и 2-го рода, тензор неголономности.

Первая глава посвящена исследованию неголономных поверхностей вращения в 3-мерном евклидовом пространстве. Поверхность вращения в $\mathbb{E}_3$ обладает тем свойством, что все ее нормали пересекают одну неподвижную прямую, называемую осью вращения. Это свойство мы положили в основу для определения неголономной поверхности вращения.

В первом параграфе дается геометрическая характеристика линий кривизны 2-го рода и эквидирекционных линий для неголономной поверхности.

Во втором параграфе дано определение неголономной поверхности вращения и найдены условия на инварианты, определяющие ее.

Неголономной поверхностью вращения (НПВ) называется распределение, все нормали которого пересекают одну неподвижную прямую пространства.

Теорема. *Неголономная поверхность будет неголономной поверхностью вращения тогда и только тогда, когда ее главные кривизны 2-го рода* k_1, k_2 *являются вещественными различными числами, инварианты* a, b, ρ, k_1, k_2 *связаны соотношением* $a(k_1 - k_2) = b\rho$, *а дифференциалы инвариантов – соотношениями*

$$dk_1 = \alpha\omega^2 + \left((k_1)^2 + \frac{\alpha b}{k_1 - k_2}\right)\omega^3,$$

$$\frac{d\rho + (k_1 - k_2)\omega_2^1 - \dfrac{\alpha}{k_1}(-k_1\omega^1 + \rho\omega^2 + a\omega^3)}{\rho} =$$

$$= \frac{-\rho\omega_2^1 + d(k_1 - k_2) - \dfrac{\alpha}{k_1}(-k_2\omega^2 + b\omega^3)}{k_1 - k_2} =$$

$$= \frac{-\rho(-k_1\omega^1 + \rho\omega^2 + a\omega^3) - (k_1 - k_2)(-k_2\omega^2 + b\omega^3) - \dfrac{d\alpha}{k_1} + \alpha\dfrac{\alpha\omega^2 + \beta\omega^3}{{k_1}^2}}{-\dfrac{\alpha}{k_1}}$$

В третьем параграфе даны определения меридиана и параллели НПВ. Доказано, что для НПВ через каждую точку $M \in G$ проходят две линии кривизны 2-го рода, одна из которых — плоская линия, лежащая в плоскости, проходящей через ось вращения; в точках второй линии нормали описывают некоторый конус с вершиной на оси вращения. Первую из них естественно было назвать *меридианом*, вторую — *параллелью*. В этом же параграфе изучены их свойства. Доказано, что:

1) параллели являются линиями, лежащими на сфере, центр которой принадлежит оси вращения (в общем случае параллели не являются плоскими линиями);

2) меридианы НПВ являются геодезическими прямейшими (линия неголономной поверхности является геодезической прямейшей тогда и только тогда, когда ее соприкасающаяся плоскость в каждой точке проходит через нормаль неголономной поверхности). Это свойство верно и в голономном случае.

Основными результатами четвертого параграфа являются следующие:

1) Показано, что длина отрезка нормали неголономной поверхности вращения, заключенного между точкой M и осью вращения, равна абсолютной величине одного из радиусов кривизны 2-го рода.

2) Найден угол ψ между меридианом и параллелью, он

вычисляется по формуле

$$\cos\psi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (k_1 - k_2)^2}},$$

где ρ — скаляр неголономности, k_1, $k_2\,(k_1 \neq k_2)$ — главные кривизны 2-го рода.

3) Показано, что параллель не ортогональна оси вращения и образует угол φ, вычисляемый по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (k_1 - k_2)^2 + \dfrac{\alpha^2}{(k_1)^2}}}.$$

4) Доказано, что линии тока векторного поля (линии, вдоль которых касательные к ним векторы в каждой точке совпадают с векторами поля) нормалей НПВ представляют собой плоские линии, лежащие в плоскостях меридианов.

5) Найдены условия, при которых через каждую точку $M \in G$ проходит одна эквидирекционная линия либо эквидирекционная поверхность.

В четвертом параграфе получено выражение главных кривизн 1-го рода через главные кривизны 2-го рода. Доказано, что главные кривизны 1-го рода являются вещественными различными числами.

В пятом параграфе рассматриваются минимальные неголономные поверхности вращения.

Доказана *теорема существования* минимальных НПВ, т.е. НПВ нулевой средней кривизны. Широта класса всех таких неголономных поверхностей — одна функция двух аргументов.

Показано, что вдоль параллели минимальной НПВ полная кривизна 2-го рода постоянна.

Также доказана *теорема существования* минимальных НПВ, для которых линии тока векторного поля нормалей являются окружностями. Произвол таких минимальных НПВ — две функции одного аргумента.

В шестом параграфе рассматриваются НПВ, у которых всякая параллель является геодезической прямейшей

Доказана *теорема существования* НПВ, у которых всякая параллель является геодезической прямейшей. Произвол данного класса НПВ — две функции двух аргументов.

Также доказано, что все параллели неголономной поверхности вращения являются геодезическими прямейшими тогда и только тогда, когда они — окружности. В голономном случае всякая параллель поверхности вращения есть окружность. Из них геодезическими линиями (прямейшими и кратчайшими) являются лишь те параллели, в каждой точке которой касательные векторы к меридиану параллельны оси вращения.

В седьмом параграфе первой главы исследуются НПВ нулевой полной кривизны 2-го рода. Доказана *теорема существования* таких НПВ, а также *теорема существования* единственной (с точностью до постоянной) НПВ нулевой полной кривизны 2-го рода, все параллели которой являются геодезическими прямейшими. Уравнение Пфаффа для такого распределения имеет вид

$$(c_1y - x)dx + (c_2y - z)dz = 0,$$

где $(c_1)^2 + (c_2)^2 \neq 0$ (уравнение дано в некоторой неподвижной декартовой системе координат).

Прямая

$$x = c_1y,$$
$$z = c_2y$$

есть ось вращения. Скаляр неголономности

$$\rho = \frac{c_2x - c_1z}{(x - c_1y)^2 + (-z + c_2y)^2}.$$

Меридианы определяются системой уравнений:

$$m_1 x - z + m_2 = 0,$$
$$x - (c_1 + c_2 m_1) y + m_1 z = 0,$$

т.е. меридианы — прямые линии. Параллель определяется уравнениями

$$y = c,$$
$$(x - cc_1)^2 + (z - cc_2)^2 = c^2({c_1}^2 + {c_2}^2) + c_3,$$

т.е. всякая параллель представляет собой окружность, лежащую в плоскости, не ортогональной оси вращения.

В заключение отмечаются некоторые свойства НПВ последнего класса.

В последнем, восьмом, параграфе первой главы приводится сравнительная характеристика инвариантных кривых поверхностей вращения и неголономных поверхностей вращения в 3-хмерном пространстве.

Во второй главе исследованы сферические неголономные гиперповерхности вращения (СНПВ) в 4-мерном евклидовом пространстве.

В начале второй главы рассматриваются виды вращений в $\mathbb{E}_4$, дается понятие сферической гиперповерхности в $\mathbb{E}_4$ и определяется сферическая *неголономная* гиперповерхность вращения, также выбирается канонический подвижной репер.

Пусть $G \subset \mathbb{E}_4$ – некоторая область, в которой задано гладкое трехмерное распределение, не имеющее особых точек. *Сферической неголономной гиперповерхностью вращения (СНПВ) называется такое неголономное гиперраспределение, все нормали которого пересекают неподвижную прямую (ось вращения).*

В первом параграфе исследуются главные кривизны 2-го рода. А также найдены условия на инварианты, определяющие СНПВ.

Теорема. *Неголономная гиперповерхность является сферической неголономной гиперповерхностью вращения тогда и только тогда, когда все три главные кривизны 2-го рода в каждой точке $M \in G$ – вещественные числа, при этом две из них совпадают ($k_2 = k_3$), а третья k_1 не равна им. Кроме того, для дифференциала кратной кривизны k имеет место равенство*

$$dk = \alpha_{12}\left((k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3\right) + (k^2 - a\alpha_{12})\omega^4,$$

а для форм ω_1^2, ω_1^3 и $d\alpha_{12}$ выполняются условия

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2 = \alpha_{12}\omega^2,\\
&\omega_1^3 = \alpha_{12}\omega^3,\\
&d\alpha_{12} = -k(k_1\omega^1 + 2\rho\omega^3 - a\omega^4) + \frac{\alpha_{12}}{k}\left(\alpha_{12}(k_1 - 2k) + 1\right)\omega^1.
\end{aligned}$$

Второй параграф посвящен исследованию линий кривизны 2-го рода, здесь даны определения параллелей и меридианов СНПВ:

1) Доказано, что линии кривизны 2-го рода, соответствующие некратной главной кривизне 2-го рода k_1, лежат в двумерных плоскостях, проходящих через ось вращения. Эти линии кривизны 2-го рода мы называем *меридианами.*

2) Показано, что линии кривизны 2-го рода, соответствующие кратной главной кривизне 2-го рода k заполняют двумерные поверхности, лежащие на трехмерных сферах с центрами на оси вращения. Эти двумерные поверхности назовем *параллелями* СНПВ.

4) Нормали сферической неголономной поверхности вращения во всех точках параллели пересекаются в одной точке, лежащей на оси вращения.

5) Справедливо утверждение: кратная главная кривизна 2-го рода постоянна в точках параллели.

6) Меридианы и параллели сферической неголономной гиперповерхности вращения не ортогональны.

Найден угол β между касательной плоскостью к параллели и касательной к меридиану в точке их пересечения. Он определяется по формуле

$$\sin\beta = \frac{k_1 - k}{\sqrt{(k_1 - k)^2 + 4\rho^2}},$$

где ρ — скаляр неголономности.

7) Найден угол φ, который всякая параллель образует с осью вращения. Показано, что он вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{2\rho k}{\sqrt{(k^2 + \alpha_{12}^2)(4\rho^2 + (k_1 - k)^2)}}.$$

8) Доказано, что линия тока векторного поля нормалей в точке M лежит в одной двумерной плоскости с осью вращения и с меридианом и ортогональна последнему.

В конце второго параграфа найдены уравнения асимптотических линий.

В третьем параграфе изучаются СНПВ нулевой полной кривизны 2-го рода. Основные результаты третьего параграфа:

1) Доказано, что меридианы являются прямыми линиями лишь тогда, когда полная кривизна 2-го рода K_2 равна нулю.

2) Доказано утверждение: если $K_2 = 0$, то в каждой точке $M \in G$ касательные к асимптотическим линиям СНПВ образуют действительный конус 2-го порядка. Меридиан при этом является прямой линией и одной из образующих этого конуса.

Четвертый параграф посвящен исследованию главных кривизн 1-го рода:

1) Доказано, что все три главные кривизны 1-го рода сферической СНПВ различны, одна из них совпадает с кратной кривизной 2-го рода.

2) Показано, что если полная кривизна 1-го рода K_1 равна нулю, то всего лишь одна из главных кривизн 1-го рода обращается в нуль.

3) Справедливо утверждение: если $K_1 = 0$, то через каждую точку $M \in G$ проходит лишь одна асимптотическая линия, совпадающая с одной из линий кривизны 1-го рода.

4) Главное направление 1-го рода, соответствующее ненулевой главной кривизне 1-го рода $k_1^{(1)} = k$, взаимно сопряжено относительно оператора A^* с другими главными направлениями 1-го рода.

5) Главные направления 1-го рода, ортогональные направлению $\vec{e}_2$, взаимно сопряжены лишь в голономном случае.

Последний параграф содержит сравнительную характеристику сферических гиперповерхностей вращения и сферических неголономных гиперповерхностей вращения.

Третья глава посвящена исследованию неголономных гиперповерхностей двойного вращения (НПДВ).

В начале третьей главы определяется неголономная гиперповерхность двойного вращения. *Неголономной гиперповерхностью двойного вращения (НПДВ) называется такое неголономное гиперраспределение, все нормали которого пересекают две неподвижные взаимноперпендикулярные двумерные плоскости, пересекающиеся в одной точке.*

Неподвижные двумерные плоскости называются *двумерными осями вращения,* а точка их пересечения – *центром вращения.* Предполагается также, что каждая нормаль пересекает каждую двумерную ось вращения в одной точке, не совпадающей с центром вращения.

В первом параграфе данной главы выбран ортонормированный подвижной репер и исследованы главные кривизны 2-го рода и линии кривизны 2-го рода. Также получены условия на инварианты, определяющие НПДВ.

Теорема. *Неголономная гиперповерхность является неголономной гиперповерхностью вращения тогда и только тогда,* *когда выполняются следующие условия:*

1) в каждой точке все три главные кривизны 2-го рода k_1, k_2, k_3 *– вещественные числа, причем два из них не совпадающие* ($k_2 \neq k_3$)*;*

2) дифференциалы функций k_2, k_3 *выражаются формулами*

$$dk_2 = \beta_1\left((k_1 - k_2)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4\right) + (k_2)^2\omega^4,$$
$$dk_3 = \alpha\left((k_3 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4\right) + (k_3)^2\omega^4,$$

в которых ρ^2, ρ^3, a *– координаты векторов* $\vec{\rho} = \rho^2\vec{e}_2 + \rho^3\vec{e}_3$ *(вектор неголономности) и* $a\vec{e}_1$ *(вектор кривизны линии тока), а дифференциал функции* α_1 *определяется формулой*

$$d\alpha_1 = ((\alpha_1)^2 + k_1k_3)\omega^1 - 2\rho^3k_3\omega^2 + 2\rho^2k_3\omega^3 + k_3(\alpha_1 - a)\omega^4;$$

3) инварианты k_2, k_3, α_1, β_1 *связаны зависимостью*

$$k_2k_3 + \alpha_1\beta_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k_3 \neq 0, \alpha_1 \neq 0,\ \beta_1 \neq 0,$$

$$\beta_1k_3 - \alpha_1k_2 \neq 0.$$

Во втором параграфе рассматриваются различные виды НПДВ и изучаются свойства их линий кривизны 2-го рода. Даны определения меридианов и параллелей для каждого из видов НПДВ.

Существуют два типа НПДВ:

I. НПДВ, для которых все главные кривизны различны. Для них доказаны следующие теоремы.

Теорема. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизнам* k_2 *и* k_3*, лежат на двумерных сферах с центрами на двумерных осях вращения.*

Эти линии кривизны 2-го рода назовем *параллелями* НПДВ.

Теорема. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизне* k_1*, лежат в двумерных плоскостях, проходящих через нормаль НПДВ.*

Такие линии кривизны 2-го рода назовем *меридианами НПДВ.*

Получены следующие свойства:

1) Меридиан НПДВ является геодезической прямейшей линией (т.е. линией, в каждой точке которой ее двумерная соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль НПДВ).

2) Вдоль каждой параллели одна из главных кривизн 2-го рода постоянна.

2) Линия тока векторного поля нормалей НПДВ лежит в одной двумерной плоскости с меридианом и ортогональна ему.

4) Длины отрезков нормалей, заключенных между точкой НПДВ и двумерными осями вращения, равны абсолютным величинам тех радиусов кривизны 2-го рода, которые соответствуют параллелям.

5) Найдены углы между каждой параллелью и меридианом:

$$\cos\varphi_2 = \frac{2\rho^3}{\sqrt{(4(\rho^3)^2 + (k_2 - k_1)^2)}},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{2\rho^2}{\sqrt{(4(\rho^2)^2 + (k_3 - k_1)^2)}},$$

где k_1, k_2, k_3 — главные кривизны 2-го рода, $\vec{\rho}\{\rho^1, \rho^2, \rho^3\}$ — вектор неголономности.

6) Угол между двумя параллелями НПДВ, проходящими через точку $M \in G$, определяется формулой

$$\cos\varphi_1 = \frac{4\rho^2\rho^3}{\sqrt{(4(\rho^3)^2 + (k_2 - k_1)^2)(4(\rho^2)^2 + (k_3 - k_1)^2)}}.$$

II. НПДВ, для которых $k_2 \neq k_3$, $k_1 = k_2$. Этот класс, в свою очередь, делится на два подкласса:

1) В случае $\rho^3 \neq 0$, $k_1 = k_2$ через каждую точку $M \in G$ проходят только две линии кривизны 2-го рода. Кривизне k_3 соответствует *параллель* – кривая, лежащая на двумерной сфере. Кратной главной кривизне 2-го рода $k_1 = k_2$ сооответствует одна линия кривизны

2-го рода (вторая параллель, совпадающая с меридианом). Она обладает свойствами, присущими как меридиану (лежит в двумерной плоскости), так и параллели (является окружностью, вдоль которой нормали образуют пучок с центром на двумерной оси вращения P_2.)

2) В случае $\rho^3 = 0$, $k_1 = k_2$ через каждую точку $M \in G$ проходит одна линия кривизны 2-го рода, лежащая на двумерной сфере (параллель), и одна двумерная поверхность, лежащая в трехмерной плоскости (двумерный меридиан).

Третий параграф третьей главы посвящен исследованию эквидирекционных линий для НПДВ. *Линия (поверхность) называется эквидирекционной линией (поверхностью) векторного поля, если вдоль нее векторы поля параллельны.* Основным результатом этого параграфа является теорема:

Теорема. Через каждую точку $M \in G$ проходит либо одна эквидирекционная линия, либо двумерная эквидирекционная поверхность.

В четвертом параграфе изучаются главные кривизны 1-го рода НПДВ.

Теорема. *Пусть для НПДВ все три главные кривизны 2-го рода различны. Тогда линией кривизны 1-го рода может быть лишь одна из параллелей НПДВ и эта параллель ортогональна меридиану.*

Теорема. *Пусть для НПДВ $k_1 = k_2$. Тогда кратная кривизна 2-го рода ($k_1 = k_2$) может быть главной кривизной 1-го рода лишь в том случае, когда $\rho^3 = 0$, то есть когда меридиан является двумерной поверхностью. При этом соответствующая линия кривизны 1-го рода принадлежит меридиану, а касательные к двум другим линиям кривизны 1-го рода лежат в одной плоскости с касательной к той линии кривизны 2-го рода, которая соответствует некратной кривизне 2-го рода (k_3).*

Теорема. *Если кратная главная кривизна 2-го рода ($k_1 = k_2$)*

НПДВ является также и главной кривизной 1-го рода, то некратная главная кривизна 2-го рода (k_3) не может быть главной кривизной 1-го рода.

В пятом параграфе изучаются НПДВ нулевой полной кривизны 2-го рода. Основные результаты параграфа:

1) Доказано, что меридиан НПДВ является прямой тогда и только тогда, когда полная кривизна 2-го рода равна нулю.

2) Доказана *теорема существования*: с произволом в одну функцию двух аргументов существует НПДВ нулевой полной кривизны 2-го рода, для которой одна из параллелей перпендикулярна меридиану.

3) Показано, что если $k_1 = \rho^3 = 0$, то одна из параллелей является окружностью.

4) Верно утверждение: если $k_1 = \rho^3 = 0$, то касательные к асимптотическим линиям в каждой точке НПДВ образуют действительный конус 2-го порядка. Меридиан при этом является асимптотической линией.

Шестой параграф посвящен исследованию НПДВ нулевой полной кривизны 1-го рода. Доказано, что если полная кривизна 1-го рода K_1 равна нулю, то лишь одна из главных кривизн 1-го рода НПДВ равна нулю.

Доказана **теорема**: пусть $K_1 = 0$ и l — линия пересечения плоскостей, на которые распадается конус касательных к асимптотическим линиям НПДВ. Тогда в каждой точке $M \in G$ линия кривизны 1-го рода, соответствующая нулевой главной кривизне 1-го рода, совпадает с той асимптотической линией, которая касается прямой l.

И в последнем параграфе третьей главы приводится сравнительная характеристика гиперповерхностей двойного вращения и неголономных гиперповерхностей двойного вращения.

Список литературы содержит 52 наименования.

Приложения представляют собой иллюстрации:

1) строение элементов НПВ в некоторой точке $M \in G$;

2) строение элементов НПВ нулевой полной кривизны 2-го рода (1.6.16), для которой всякая параллель является геодезической прямейшей, в точке $M(0,0,1)$;

3) строение параллели и меридиана НПВ (1.6.16) в точках $(0,0,1), (0,0,2), (0,0,3)$.

Литература

1. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве. // Тр. геометр. семинара. – ВИНИТИ АН СССР. – 1974. – Т.5. – С.169-193.

2. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. — М.: Наука, 1990. — 206 с.

3. Близникас В.И. Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства. //Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб. – 1971. – Т.11. – №1. -С.63-74.

4. Близникас В.И. О неголономной поверхности трехмерного пространства проективной связности. //Тр. геометр. семинара. – ВИНИТИ АН СССР. – 1971. – Т.3. – С.115-124.

5. Вагнер В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий// VIII-ой Международный конкурс на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (1937). Отчет. Казань: Казанское физ.-мат. общество. 1940.

6. Вагнер В.В. Геометрическая интерпретация неголономных динамических систем// Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. — ОГИЗ, 1941. Вып. V. С. 301-327.

7. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве //Тр. семин. по векторн. и

тензорн. анализу. – МГУ, 1941. – Вып.5. – С. 173-225.

8. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения - М.: Наука, 1979. — С. 683.

9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: В 2-х т. — М., 1981. Т.1. — 347 с.

10. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр.семинара. – ВИНИТИ АН СССР. – 1971. – Т.3. – С.49-94.

11. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. //Тр. геометр. семинара – ВИНИТИ АН СССР. – 1973. – Т.4. – С.71-120.

12. Рашевский П.К. Тензорная дифференциальная геометрия// Математика в СССР за 30 лет. 1917-1947. — М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. С. 883-918.

13. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. — Киев: Вища школа, 1972. — 296 с.

14. Слухаев В. В. Геометрия векторных полей. – Томск, 1982. – 96 с.

15. Столяров А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. I // Известия вузов. Матем. – 1980. – №1. – С.79-82; II // Известия вузов. Матем. – 1980. – №2. – С.84-87.

16. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.

17. Щербаков Р.Н., Щербаков Н. Р. Неголономная геометрия. — Томск: Томский университет, 2005. — 115 с.

18. Bortolotti E. Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonome // Atti dei Congresso dell' Unione Matem. Italiana. Firenze.1937. P. 305-311.

19. Bortolotti E. Duale Verwandschaften anholonomen Flächen im projektiven und im affinen Raume // Jahresberichte der Deutsch. Math. Ver.

1941. №51 P. 151-169.

20. Synge J.-L. Geodesics in non-holonomic geometry// Math. Ann. 1928. №99. P. 738-751.

21. Voss A. Geometrische Interpretation der Differentialgleichung // Math. Ann. 1880. №16. S. 556-570.

22. Vrănceanu G. Les espases non holonomes et leurs applications mechaniques // Met. sci. math. 1936. №76. P. 1-70.

Работы автора по теме диссертации

1. Васильева О. В. Поверхности вращения в четырехмерном евклидовом пространстве.// VII Всеросс. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование— Томск, 2003. Т. 1. — С. 21-27.

2. Онищук Н.М., Васильева О.В. Неголономные поверхности вращения.// Международная конференция по математике и механике: Избр. доклады. Томск, 2003. С. 69-82.

3. Васильева О.В. Неголономные поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода.// Международная конференция по математике и механике. - Томск: ТГУ, 2003. С. 62.

4. Васильева О.В. О сферических неголономных поверхностях вращения в $\mathbb{E}_4$.// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань, 2003. Т. 21. С. 88.

5. Васильева О.В. Неголономные поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода.// Вестник Томского государственного университета. — 2003. — №280. — С. 12-16.

6. Васильева О.В. Об интегральных многообразиях не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа частного вида в $\mathbb{E}_4$.// Материалы XLII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. — Новосибирск, 2004. С. 39-40.

7. Васильева О.В. Сферические неголономные поверхности вращения в $\mathbb{E}_4$.// Вестник Томского государственного университета. — 2004. — №284. — С. 13-17.

8. Васильева О.В. О неголономных поверхностях вращения в четырехмерном евклидовом пространстве. //Международная школа-конференция по анализу и геометрии, посв. 75-летию акад. Ю.Г. Решетняка. — Новосибирск, 2004. С. 75.

9. Васильева О.В. Интегральные многообразия некоторых не вполне интегрируемых уравнений Пфаффа. //Материалы XLIII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. — Новосибирск, 2005. С. 34.

10. Васильева О.В. О неголономных гиперповерхностях вращения в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_4$.// Известия Томского политехнического университета. — 2005. — Т. 308. — №4. — С. 10-14.

11. Васильева О.В. Минимальные неголономные поверхности вращения.// Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Том IV. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – С. 72-73.

12. Васильева О.В. Неголономные поверхности двойного вращения в четырехмерном евклидовом пространстве.// Изв. вузов. Математика. — 2006. — №6 (529). — С. 3-13.