На правах рукописи

Беркович Лев Мейлихович

ФАКТОРИЗАЦИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ:

МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2003

Работа выполнена в Самарском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор А.Д. Брюно,
доктор физико-математических наук
профессор В.В. Веденяпин,
доктор физико-математических наук
профессор В.А. Кондратьев

Ведущая организация:

Институт проблем механики
Российской академии наук

Защита состоится 23.10 2003 г. в час. на заседании диссертационного совета Д 002.024.02 при Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

Автореферат разослан 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук Уст- Г.В.Устюгова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена аналитическому и алгебраическому исследованию проблемы интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и некоторым ее применениям к задачам математической физики и механики. К указанной проблеме издавна существовало два подхода, один из которых связан с заменами переменных, а другой - с использованием алгебраических аналогий. Однако применение подстановок, как правило, носило эвристический характер, а такое мощное средство, как факторизация, с трудом переносилось на дифференциальные уравнения, да и то лишь на линейные, и притом носило неэффективный характер. Много ожиданий связывалось с применением теории групп Ли и алгебр Ли к дифференциальным уравнениям (групповой анализ). Однако даже огромные возможности указанной теории не позволяют полностью "закрыть" проблему интегрируемости.

Актуальность проблемы интегрируемости ДУ связана не только с необходимостью получения точных решений для новых математических моделей, но и с необходимостью тестирования новых численных и аналитических алгоритмов. В связи с этим укажем на локальный метод нелинейного анализа, т.н. метод степенной геометрии, разрабатываемый для алгебраических дифференциальных уравнений.

Интегрируемые уравнения (особенно нелинейные) и методы их решения к началу XXI века раздвинули горизонты в естествознании (прежде всего в математической физике). Стимулирующее влияние оказывают при этом задачи теоретической и прикладной механики, небесной механики, теоретической и прикладной физики. С другой стороны, ширится понимание того, что интегрируемость ДУ является **междисциплинарной областью знаний:** различные аспекты ее способствовали успешному развитию фундаментальных математических наук: **алгебры, геометрии и анализа.**

Однако указанные достижения не исключают необходимости вновь и вновь возвращаться к такой неисчерпаемой проблеме, каковой является проблема интегрируемости ДУ.

Занимаясь ею, автор пришел к выводу, что ключ к ее пониманию заключен в неразрывности слов: **факторизация и преобразования,** в осознании необходимости совместного использования факторизации и преобразований, т.к. суммарный результат превышает влияние, оказываемое каждым подходом в отдельности (синергетический эффект).

Целью проводимых автором исследований является создание эффективных методов и алгоритмов интегрирования ОДУ, а также их редукция к соответствующим каноническим формам. В результате оказывается возможным не только построить новые классы интегрируемых уравнений, но и раскрыть немало "чудес" интегрируемости, которые ранее находили лишь эвристическое объяснение. Построение алгоритмов для нахождения **лиувиллевых и эйлеровых** (точных) решений есть главная цель любой эффективной теории ОДУ. Явные формулы имеют непреходящую ценность и сосредоточивают всю возможную информацию об уравнениях. Они необходимы для развития математической и физической интуиции, а также для сравнения различных теорий, включая границы их применимости.

Методы исследования. В работе используются методы группового анализа и дифференциальной алгебры, а также развитые автором методы **факторизации, автономизации и точной линеаризации.** Впервые метод факторизации дифференциальных операторов в связи с теорией преобразований систематически был представлен автором еще в 1967 г. [1]. В настоящей работе этот метод получил свое дальнейшее логическое развитие, связанное прежде всего с созданием эффективных алгоритмов поиска преобразований, а также с распространением факторизации на нелинейные уравнения.

Методы автономизации и точной линеаризации непосредственно связаны со следующей концепцией принципа нелинейной суперпозиции (ПНС), которая широко используется в работе.

Определение принципа нелинейной суперпозиции (ПНС). Будем говорить, что для ОДУ $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ система функций $\{Y_1(X), \dots, Y_m(X)\}$ является фундаментальной системой решений (ФСР), если его общее решение $y(x)$ можно представить в виде функции Φ (конкретной или произвольной)

$$y(x) = \Phi(Y_1, \dots, Y_m; c_1, \dots, c_n), \tag{1}$$

где $c_1, \dots, c_n$ - произвольные постоянные. ФСР состоит либо из частных функционально независимых решений данного уравнения, либо образует ФСР для присоединенного линейного уравнения

$$Y^{(m)}(X) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(X) Y^{(k)}(X) = 0, \tag{2}$$

либо состоит из частных функционально независимых решений присоединенного нелинейного уравнения $F(X, Y, Y', \dots, Y^{(m)}) = 0$. При этом новые переменные X, Y связаны со старыми x, y точечными или неточечными преобразованиями.

[1] Беркович Л.М Метод факторизации дифференциальных операторов и его применение к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. автореферат дис. к.ф.-м.н., Уральский университет, Свердловск,

Выражение (1) будем называть принципом (законом, правилом) нелинейной суперпозиции (ПНС).

Это определение охватывает определение ПНС, данное С.Ли (см. [2]). Если известны одновременно ФСР и ПНС, то можно построить соответствующее нелинейное уравнение. В данной работе, как правило, под присоединенным уравнением рассматривается линейное уравнение (2). Иными словами, указать ПНС - это значит указать нелинейные преобразования переменных, сводящие данные нелинейные уравнения к линейным.

Совместное использование факторизации и преобразований позволило создать целостную картину, объединяющую линейные и нелинейные уравнения, и оказалось возможным приступить к систематическому исследованию **нестационарных и нелинейных** задач.

Характеризуя содержащиеся в работе результаты, автор условно их разбивает на три категории: **впервые** полученные (В); дополняющие и усиливающие известные результаты до такой степени, что они в определенном смысле являются **неулучшаемыми** (Н); наконец, приведены известные примеры, для исследования которых применены более **эффективные** методы (Э).

Научную новизну составляют следующие основные результаты, выдвигаемые на защиту.

I. Развита дифференциальная алгебра дифференциальных операторов. При этом построены факторизации операторов как в основном дифференциальном поле, так и в его алгебраическом и трансцендентном расширениях. Найден критерий совместности системы ЛОДУ. Впервые осуществлена факторизация нелинейных дифференциальных операторов.

II. Предложена новая алгоритмичная процедура (основанная на использовании преобразования Куммера–Лиувилля) построения последовательности линейных уравнений 2-го порядка, интегрируемых в терминах исходного уравнения. Построены новые операторные тождества, связанные с "размножением" уравнений с помощью преобразования Эйлера-Имшенецкого–Дарбу.

Решены задачи Альфана об эквивалентности и классификации ЛОДУ n-го ($n > 2$) порядка (ЛОДУ–n). При этом дан новый способ построения их инвариантов. Установлены новые критерии приводимости ЛОДУ–n.

III. Построен самый общий класс нелинейных уравнений n–го порядка, допускающий автономизацию с помощью преобразования Куммера-Лиувилля. Построены обобщенные уравнения Ермакова, обобщенные динамические системы Ермакова, а также обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера, допускающие точечные симметрии Ли. Использовав теоретико-

[2] S. Lie. Vorlesungen über continuirliche gruppen mit geometrishen und anderen anwendungen. Bearbeited und herausgegeben von Dr. G.Scheffers. Teubner, Leipzig. 1893.

групповой подход, найдены все математические законы изменения массы для классической задачи Гильдена-Мещерского, обобщающие законы Мещерского и Эддингтона–Джинса. Для различных постановок обобщенной нестационарной задачи небесной механики двух тел (точек) получены зависимости переменных масс тел от сопротивляющейся и гравитирующей среды.

IV. Установлен общий вид нелинейных автономных уравнений n-го порядка (п > 2), допускающий точную линеаризацию Проведена линеаризация обобщенной лиувиллевой динамической системы Осуществлено построение преобразования Бэклунда, основанное на факторизации нелинейных дифференциальных операторов

V Найдены все инвариантные решения типа "бегущей волны" для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. Указан унифицированный подход к квазилинейным уравнениям параболического типа, описывающих т.н. режим с "обострением". Построен новый класс нелинейных эволюционных уравнений n-го порядка, для которого справедлив принцип нелинейной суперпозиции

Апробация работы. Результаты, составившие диссертацию, докладывались и обсуждались на международных конгрессах, всесоюзных и всероссийских съездах, международных и всероссийских конференциях, а также на научных семинарах по дифференциальным уравнениям, прикладной математике, по математической физике, теоретической и прикладной механике, а также по дифференциальной и компьютерной алгебре. Вот список важнейших из них, начиная с 1998 г

Международные конгрессы математиков Berlin, 1998, Bejing, 2002, "Нелинейный динамический анализ и его приложения", Москва, 1998 2002 The third world congress of nonlinear analysts Catania 2000

VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001

Международные конференции "Солитоны, топология и геометрия", посвященная 60-летию С П Новикова, Москва 1998, посвященная 90-летию Л С Понтрягина Москва, 1998, "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения", посвященная 80-летию А Д Мышкиса, Воронеж 2000 "Дифференциальные уравнения и смежные темы", посвященная 100-летию со дня рождения И Г Петровского Москва, 2001, "Прогресс в нелинейной науке" посвященная 100 летию со дня рождения А А Андронова, Нижний Новгород, 2001, "Современная теория динамических систем и приложения к теоретической небесной механике", посвященная памяти и 70-летию со дня рождения В М Алексеева Москва 2002 "Колмогоров и современная математика' , Москва, 2003

Международные конференции по применению компьютерной алгебры IMACS ACA Прага 1998 С -Петербург 2000, "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics' , Киев 1999, Дифференциальные и функциональные уравнения' , Москва 1999 "Устойчивость и управление для нелинейных трансформирующихся систем", Москва 2000, "Современный групповой анализ для нового тысячелетия MOGRAN 2000, Уфа, 2000

Международные симпозиумы "Symbolic and Algebraic Computations, ISSAC 98 Rostock Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред" Москва 1999, "Теория уравнений с частными производными и специальные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений' посвященный 150-летию со дня рождения С В Ковалевской, С -Петербург, 2000, Arbeitstagung, Max Planck-Institut fur Mathematik, Bonn 2001, VIII International workshop on advanced computing and analysis techniques in physics research, ACAT'2002, Moscow

Всероссийские конференции по качественной теории дифференциальных уравнений, Рязань, 2001 по дифференциальным и функциональным уравнениям, посвященная 80 летию Н В Азбелева Ижевск

2002 IX Всероссийское совещание по проблемам построения сеток для решения задач математической физики посвященное памяти А Ф Сидорова XIV Всероссийская конференция ' Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики' , посвященная памяти К И Бабенко, Дюрсо 2002

Научные семинары Совместные заседания семинара им И Г Петровского и Московскою Математического Общества Москва 1998 Объединенный институт ядерных исследований Дубна 2001 2003 Институт прикладной математики им М В Келдыша РАН, 1998, 2001, 2003 Институт проблем механики РАН Москва 2003

Достоверность полученных результатов вытекает из примененных автором эффективных методов доказательств, их алгоритмичности, а также их использования другими авторами

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер Однако ее результаты уже находят применение и в механике тел переменной массы, и при исследовании процессов, описываемых нелинейными эволюционными уравнениями, а также в компьютерной алгебре и в некоторых других областях

Структура и объем работы. Все содержание работы представляет монография [1], в которой использованы материалы учебного пособия [2], монографии [3], публикаций [4-36] В монографии имеется введение и 7 глав, каждая из которых сопровождается примечаниями, список литературы насчитывает свыше 460 наименований даны именной и предметный указатели, рис 14, табл 21, 463 с

Содержание работы

В главе 1 систематически представлен метод **факторизации дифференциальных операторов** n-го порядка через дифференциальные операторы первого порядка Рассмотрены его применения к исследованию на совместность системы линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению решений уравнений в квадратурах Результаты этой главы широко используются на протяжении всей работы

Определение 1.1. Дифференциальное поле F_0 - это пара (F, δ), состоящая из поля F т дифференцирования δ Пусть K является числовым полем характеристики 0 (поле констант F) Оно может быть алгебраически замкнутым, хотя и не обязательно Производную элемента $a \in F$ будем обозначать $\delta a = a'$ F_0 при дифференцировании переходит в себя $a \in F_0 \Rightarrow a' \in F_0$, а из $c \in K \Rightarrow c' = 0$

Существуют различные виды дифференцирования Но в нашей работе, как правило будем рассматривать обычное дифференцирование $\delta = D$, где $D = d/dx$

Примером F_0 может служить пара $(K(x), D)$, где $K(x)$ - поле рациональных функций, имеющее своим полем констант K числовое поле R или поле C

Кольцо $F_0[D]$ линейных обыкновенных дифференциальных операторов (ЛОДО) состоит из операторов вида $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$, $a_i \in FQ$. Таким образом, в дальнейшем под основным дифференциальным полем F_0 будем подразумевать поле, порожденное коэффициентами a_i оператора L. Операция "умножения" в кольце $F_0[D]$ определяется формулой Лейбница: $D^i b = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b^{(i-k)} D^k$.

Кольцо $F_0[D]$ - ассоциативное, но не является коммутативным. $F_0[D]$ – кольцо главных идеалов и является евклидовым, т.е. в нем имеет место деление с остатком согласно дифференциальному алгоритму Евклида. По аналогии с кольцом алгебраических многочленов $K[x]$ находятся наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) дифференциальных операторов. В силу некоммутативности кольца $F_0[D]$ рассматриваются правое и левое деления.

Определение 1.2. Оператор L называется *факторизуемым (разложимым) в* F_0, если он допускает представление в виде произведения операторов более низкого порядка с коэффициентами из F_0, причем, если исходное числовое поле было K, то при факторизации оно может быть расширено до алгебраически замкнутого поля $\overline{K}$. В противном случае оператор L называется *нефакторизуемым* в F_0. (В данной работе в качестве поля K обычно выступает поле R, а в качестве алгебраически замкнутого - поле C).

Эквивалентным является следующее

Определение 1.3. Уравнение $Ly = 0$ порядка n является *факторизуемым* в F_0, если оно имеет общий нетривиальный интеграл с другим уравнением $My = 0$ порядка меньше п с коэффициентами из F_0. В противном случае $Ly = 0$ называется *нефакторизуемым* в F_0.

Если уравнение $Ly = 0$ имеет общий интеграл с уравнением $My = 0$, а ПНОД$(L, M) = L_1$, то $L = L_2L_1$. В этом случае уравнение $Ly = 0$ допускает понижение порядка подстановкой $L_1 y = z$, вследствие чего придем к уравнению $L_2 z = 0$.

Рассматривается факторизация в $F_0[D]$ через операторы 1-го порядка Получены правый и левый дифференциальные аналоги теоремы Безу. Построены также правый и левый дифференциальные аналоги схемы Горнера.

В кольце $F_0[D]$ было рассмотрено **операторное уравнение**

$$X_1 L_1 + X_2 L_2 + \cdots + X_q L_q = 0, \quad L_j = \sum_{k=0}^{n_j} a_{kj} D^k, \ j \in \overline{1,q}, \ n_j = ord\, L_j, \quad (1.1)$$

где искомые операторы $X_j = \sum_{k=0}^{s_j} x_{jk} D^k$ имеют порядки $n^1 + n^m - n_j - 1$, а $n^1 = \max_j(n_j)$, $n^m = \min_j(n_j)$. Для построения правой дифференциально-результантной матрицы (ДРМ) нужно последовательно умножать операторы L_j слева на $1, D, \ldots, D^{n^1+n^m-n_j-1}$, а для построения левой ДРМ нужно последовательно умножать слева сопряженные операторы L_j^* на те же операторы Эквивалентное определение ДРМ дано в [3] Найдено решение уравнения (1 1) в операторах X_j, а также исследована на совместность система ОДУ

$$L_j y = f_j(x),\ j = \overline{1,q},\ n_j - ord L_j \tag{1 2}$$

Теорема 1.6.2 (В) *Система (1 2) совместна в том и только в том случае, когда выполняется неравенство* $\bar{n}^1 + \bar{n}^m - r > n^1 + n^m - r$, *где* $\bar{n}^1, \bar{n}^m$ *соответственно наибольший и наименьший порядки уравнений, входящих в присоединенную однородную систему*

$$\bar{L}_j y = (D - f_j'/f_j) L_j y = 0, \tag{1 3}$$

а r *и* $\bar{r}$ *- ранги ДРМ систем (1 2) и (1 3) соответственно*

Используемое в работе понятие точного (лиувиллева или эйлерова) решения ЛОДУ основывается на следующем определении

Определение 1.4. Будем говорить, что Л является *обобщенным лиувиллевым (эйлеровым)* расширением дифференциального поля F_0, если существует башня полей $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = Л$ такая, что выполнено одно из условий

1) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где F_{i-1} является полем рациональных функций от a с коэффициентами из F_{i-1}, причем $\alpha' \in F_{i-1}$ (т е F_i получено из F_{i-1} присоединением интеграла от элемента поля F_{i-1}),

2) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где $a \neq 0$ и $\frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$ (т е F_i получено из F_{i-1} присоединением экспоненты интеграла от элемента поля F_{i-1}) ,

3) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где a - алгебраический над F_{i-1} элемент (т е a удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $n \geq 2$ с коэффициентами из поля F_{i-1}),

4) $F_i = F_{i-1}(y_1, y_2)$, где y_1, y_2 - линейно независимые решения уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,\ a_1,\ a_0 \in F_{i-1} \tag{1 4}$$

Если выполняются условия 1), 2), 3), имеем *лиувиллево* расширение Λ_0 поля F_0, а если выполняются условия 1) - 4), то имеем *эйлерово (обобщенное лиувиллево)* расширение Л поля F_0 Таким образом, Л включает в себя Λ_0

Вместо термина *обобщенное лиувиллево* расширение употребляется также термин *трансцендентное лиувиллево* расширение

Определение 1.5. Расширением Пикара-Вессио *PV* для уравнения

$$Ly \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s y^{(s)} = 0,\ a_s \in F_0 \tag{1 5}$$

---

[3] Беркович Л М Цирулик В Г //Дифференц Уравн 1986, т 22 с 750-757

называется содержащее алгебраически замкнутое поле констант характеристики нуль дифференциальное поле $F_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (1.5).

Определение 1.6. Уравнение (1.5) интегрируется в конечном виде в квадратурах, если расширение $PV \subset \Lambda_0$.

Определение 1.7. Уравнение (1.5) имеет эйлерово решение (интегрируется в терминах (1.4)), если расширение $PV \subset Л$.

Если удается осуществить факторизацию уравнения (1.5) в F_0 или в его лиувиллевом расширении через операторы 1-го порядка, а именно

$$Ly = \prod_{k=n}^{1} (D - \alpha_k) y = 0, \tag{1.6}$$

то его расширение $PV \in \Lambda_0$, причем ФСР уравнения (1.5) находится по формулам:

$$y_i = e^{\int \alpha_1 dx} \int e^{\int (\alpha_2 - \alpha_1) dx} dx \cdots \int e^{\int (\alpha_i - \alpha_{i-1}) dx} dx, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если уравнение (1.5) имеет эйлерово решение, то его факторизация осуществляется через операторы 1-го и 2-го порядков.

Заметим, что сам факт существования факторизации (1.6) используется в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [4],[5],[6]).

В работе также рассматриваются уравнения, основное дифференциальное поле которых порождено эллиптическими функциями Вейерштрасса, т.е. являющимися обращениями решений нелинейного дифференциального уравнения $y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$, g_2, g_3 — $const$. Используя дифференциальный результант, доказана совместность системы уравнений Ламе–Альфана

$$\begin{cases} y'' - (2\wp(x) + \lambda) y & = 0, \quad \lambda = \wp(\epsilon), \\ y''' - 3\wp(x) y' - (\frac{3}{2}\wp'(x) + \mu) y & = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}\wp'(\alpha), \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\wp(x)$ – эллиптическая пи-функция Вейерштрасса. Найдена ее собственная функция $\psi(x, \lambda, \mu) = \tilde{\psi}(x, a)$ как в общем случае, так и в вырожденных случаях, когда коэффициентами уравнений являются рациональные, тригонометрические и гиперболические функции. Совместность (1.7) эквивалентна условию коммутативности пары соответствующих дифференциальных операторов 2-го и 3-го порядков $L = D^2 + u(x)$, A — $D^3 + 3A_2(x)D + A_3(x)$, которое приводит к стационарному уравнению Кортевега–де Фриза $u''' + 6uu' + 12c_1 u = 0$, $c_1 = const$.

[4] Mammana G. //Math. Zeit., 1931. vol 33. p. 186-231.

[5] Кондратьев В.А. //Труды Московск. Мат. общ., 19G1, т. 10, с. 419-430

[6] Скоробогатько В.Я. Исследование по качественной теории уравнений с частными производными, Львов, 1961.

Полученные в гл. 1 результаты нашли применение в теории дифференциальных уравнений, дифференциальной и компьютерной алгебре, а также в вычислительной математике (см., например, [7], [8], [9], [10] и др.).

Примечание 1.1. Точные результаты по факторизации дифференциальных уравнений, как полагает автор, могут использоваться при решении краевых задач для них методом прогонки.

Замечание 1.1. Применение в качестве единственного метода интегрирования ОДУ метода факторизации (без использования преобразования переменных) значительно снижает его эффективность. Поэтому в дальнейшем метод факторизации используется совместно с методом преобразований переменных, что гораздо более результативно, чем применение каждого из указанных методов в отдельности.

В главе 2 рассматриваются т.н. **родственные** линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Куммер [11] и Лиувилль [12] рассмотрели задачу о приведении ЛОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами к ЛОДУ 2-го порядка наперед заданного вида, иными словами, задачу об эквивалентности ЛОДУ-2.

Постановка задачи Куммера. Пусть даны уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,\ \ a_1(x) \in \mathrm{C}^1(I), a_0(x) \in \mathrm{C}(I),\ I = \{x | a < x < b\}, \tag{2.1}$$

$$\ddot{z} + b_1(t)\dot{z} + b_0(t)z = 0,\ b_1(t) \in \mathrm{C}^1(J),\ b_0(t) \in \mathrm{C}(J),\ \mathrm{J} = \{t | \alpha < t < \beta\}. \tag{2.2}$$

где I и J – открытые (конечные или бесконечные) интервалы, а также преобразование Куммера-Лиувилля (КЛ)

$$y = v(x)z,\ \ dt = u(x)dx, v, u \in \mathrm{C}^2(I_0),\ uv \neq 0,\ \forall x \in I_0 \subset I. \tag{2.3}$$

Задача эквивалентности Куммера состоит в нахождении всего множества локальных преобразований КЛ (2.3), приводящих (2.1) к (2.2). Ее решение дано автором данной работы. причем особое внимание уделено эффективному нахождению преобразований. Отметим, что используемое преобразование КЛ является наиболее общим точечным преобразованием, сохраняющим линейность и порядок уравнений [13]. (Постановка

---

[7] Zwillinger D Handbook of Differential Equations Academic Press, 1989.

[8] Ziming Li // Proc of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation Rostock 1998 p 132-139

[9] Carra Ferro G.. Marotta V //Computer Algebra in scientific computing, Berlin. Springer, 2001, p 107-121

[10] Улитин В В Итерационные алгоритмы решения краевых задач механики на ЭВМ Изд С-Петербург ун. 1991

[11] Kummer C C // Abdruck aus dem Program des evangelishen Königl und Stadtgymnasiums in Liegnitz von Jahre, 1834 (перепечатка J. Reine Angew Math., 1887, vol. 100, p. 1-9)

[12] Liouville J.// J Math Pures et Appl., 1837, vol 2, p. 16 36

[13] Stackel P. //J. Reine Angew Math., 1893. t. 111, p. 290-302.

и решение аналогичной задачи для глобальных преобразований КЛ дано Борувкой [14]) Решение задачи Куммера не только позволяет строить уравнения модифицированных специальных функций, но и, как показано в работе, может служить основой для таких приближенных аналитических методов, как метод ВКБ (независимо открытый А А Андроновым, Л И Мандельштамом, М А Леонтовичем) и метод А Н Крылова

Создана программа для факторизации и нахождения лиувиллевых решений ЛОДУ-2 с переменными коэффициентами, исходя из возможности их преобразования в ЛОДУ-2 с постоянными коэффициентами, реализованная в системе компьютерной алгебры REDUCE [15]

Особо отметим новую процедуру "размножения" линейных уравнений интегрируемых в терминах произвольного эталонного уравнения

$$y'' + a_0(x)y = 0 \tag{2 4}$$

с коэффициентом a_0, которое будем обозначать также через (a_0)

Предложение 2.10.1 (В) *Уравнение (a_0) порождает последовательность родственных уравнений (a_k)*

$$y_k'' + a_k y_k = 0, \tag{2 5}$$

$$a_k = a_0 - \sum_{s=1}^{k} b_{0s} u_s^2, \quad b_{0s} = const \neq 0, \quad a_k = a_{k-1} - b_{0k} u_k^2,$$

где функции $u_s(x)$ удовлетворяют последовательности уравнений Куммера-Шварца 2-го порядка (КШ-2)

$$\frac{1}{2}\frac{u_s''}{u_s} - \frac{3}{4}\left(\frac{u_s'}{u_s}\right)^2 - \frac{1}{4}\delta_s u_s^2 = a_{s-1},$$

при этом $\delta_s = b_{1s}^2 - 4b_{0s}$ являются дискриминантами характеристических уравнений $r_s^2 \pm b_{1s} r_s + b_{0s} = 0$ Тогда линейно независимые решения $y_{k(1}2)$ имеют вид

$$y_{k(1,2)} = u_k^{-1/2} \exp(\pm 1/2 b_{1k} \int u_k dx), \; b_{1l} \neq 0,$$

$$y_{k1} = |u_k|^{-1/2}, \quad y_{k2} = |u_k|^{-1/2} \int u_k dx, \; b_{1k} = 0,$$

где $u_k(x)$ выражаются явным образом через решения уравнения (a_{l-1}) В конце концов решения уравнения (a_k) выражаются явным образом через решения уравнения (a_0)

---

[14]Borůvka O Lineare Differentialtransformation 2 Ordnung Berlin, 19C7

[15]Беркович Л М , Беркович Ф Л //Сб Современный групповой анализ и задачи математического моделирования, Самарский университет, Самара 1993 с 38-45

В этой же главе рассматривается и другая процедура "размножения" уравнений, связанная с задачей Эйлера.

Постановка задачи Эйлера. Пусть дано уравнение (a_0), a_0 £ $C(I)$. Требуется привести его к наперед заданному виду

$$z'' + b_0(x)z = 0,\ b_0 \in C(I) \tag{b_0}$$

обратимым преобразованием Эйлера–Имшенецкого–Дарбу (ЭИД) (см. [16], [17], [18]):

$$z = \beta(x)y' - \alpha(x)y,\ \beta(x),\ \ \alpha(x) \in \mathbf{C}^2(I),\ \beta \neq 0. \tag{2.6}$$

Мы будем называть *родственными* как уравнения (2.5), в построении которых участвует преобразование КЛ, так и линейные уравнения, связанные между собою преобразованием ЭИД (2.6).

Введем следующие дифференциальные операторы:

$$A = D^2 + a_0,\ A_k = D^2 + a_k,\ \ L_k = \prod_{s=1}^{k} (D - \alpha_{s-1}), \tag{2.7}$$

$$a_k = a_0 + 2\sum_{s=1}^{k} \alpha'_{s-1} = a_0 + 2\sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\tilde{y}'_{s-1}}{\tilde{y}_{s-1}}\right)^2 \tag{2.8}$$

$$\alpha'_{s-1} + \alpha^2_{s-1} + a_{s-1} = \lambda_{s-1}, \tag{2.9}$$

где $\tilde{y}_{s-1}$ - собственная функция уравнения

$$y''_{s-1} + (a_{s-1} - \lambda)y_{s-1} = 0,$$

отвечающая собственному значению $\lambda = \lambda_{s-1}$.

Теорема 2.14.2 (В). *Решениями операторных уравнений $X_kA = A_kX_k$, $k = 1, 2, \ldots$, являются операторы $X_k = L_k$; решениями уравнений $A_ky = 0$ являются функции $y_k(x) = L_ky_0(x)$, где $y_0(x)$ - решение уравнения $Ay = 0$, а операторы A, Ak, L_k вычисляются по формулам* (2 7)-(2.9)

Для представления решения уравнения Шрёдингера при некоторых потенциалах использовано операторное тождество

$$\prod_{k=n}^{0} [D - k(\ln \tilde{y}_0)'] = \tilde{y}_0^{n+1}(\tilde{y}_0^{-1}D)^{n+1}.$$

Теорема 2.15.1 (В). *Для того чтобы уравнение (2.1) преобразовывалось в себя, т.е. приводилось к виду* $z'' + a_1(x)z' + a_0(x)z = 0$. $a_1(x) \in$

---

[16]Euleri Leonhardi // S -P Academiae exhibit aie 13 Ianuarii 1780, Institutiones calculi integralis 4, 1794, p 533-543

[17]Имшенецкий В Г // Записки император академии наук, С -Петербург, 1882, т 42 с 1-21

[18]Darboux G //C R Acad. Sci., 1882, Paris, t. 94, p 1456-1459

$\mathbf{C}^1(I)$, $a_0(x) \in \mathbf{C}(I)$ *преобразованием (2.6), где* $\alpha'\beta - \alpha\beta' + \alpha^2 + a_0\beta^2 + a_1\alpha\beta = C \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta(x) = u^{-1}(x)$, $\alpha(x) = v'v^{-1}u^{-1}$, *где* $u(x)$ *и* $v(x)$ *участвуют в преобразовании КЛ, приводящем (2.1)* к *уравнению с постоянными коэффициентами* $\dot z \pm b_1 z + b_0 z = 0$.

В главе *3* даются решения классических **задач Альфана** об эквивалентности и приводимости линейных уравнений n-го порядка $(n > 2)$ За свою работу Альфан [19] был удостоен Grand Prix Парижской академии наук. В ней были классифицированы линейные уравнения 3-го и 4-го порядков. Однако на протяжении длительного времени после этого классификация линейных уравнений более высокого порядка не была произведена.

Автор дает классификацию уравнений произвольного порядка.

Пусть дано ЛОДУ-n (п > 2)

$$L_n y = y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} = 0,\ a_k \in \mathbf{C}^{n-k}(\imath) \tag{3 1}$$

(г - открытый (конечный или бесконечный) интервал действительной оси x). От него всегда можно перейти к полуканонической форме

$$L_n y \equiv y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A_k y^{(n-k)} = 0,\ A_k \in \mathbf{C}^{n-k}(\imath) \tag{3.2}$$

путем подстановки $y = \exp(-\int a_1 dx) z$ и последующей замены z на y. $(A_k$ являются полуинвариантами (3.1) относительно преобразования зависимой переменной $y = X(x)Y)$.

Будем рассматривать также уравнение

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k(t) z^{(n-k)}(t) = 0,\ b_k(t) \in \mathbf{C}^{n-k}(\jmath) \tag{3 3}$$

($\jmath$- открытый (конечный или бесконечный) интервал действительной оси t). Введем преобразование КЛ для ЛОДУ-n:

$$y(x) = v(x)z,\ dt — u(x)dx,\ vu \neq 0,\ \forall x \in \imath_0 \subset \imath,\ v, u \in \mathbf{C}^n(\imath_0) \tag{3 4}$$

Если соотношение

$$y(x) = v(x)z(t) \tag{3.5}$$

выполняется *локально,* то и уравнения (3.1) и (3.3) *локально* преобразуются друг в друга Уравнения (3.1), (3.2), (3.3) будем обозначать также соответственно через $(a(x))$, $(A(x))$,$(b(t))$.

---

[19] G -H Halphen Mémoire sur la reduction des equations linéaires différentielles aux formes integrables // Mémoires presentes par divers savants a l'Acad des So de l'Inst mat de France, 1884, T 23, N 1, 301 P

Уравнения $(a(x))$ и $(b(t))$ будем называть *эквивалентными,* если существует преобразование КЛ g такое, что (a) $\xrightarrow{\hat{}}$ (b) *Инвариантом* уравнения $(a(x))$ будем называть такое отображение коэффициентов $(a(x))$ которое постоянно на классах эквивалентности ЛОДУ относительно преобразований типа КЛ [20] Уравнения (3 1) и (3 3) *глобально* (см [21]) переходят друг в друга при преобразовании КЛ, если соотношение (3 5) выполняется на полных интервалах $\imath$ и $\jmath$

С именем Г Альфана связаны следующие две задачи (см [19])

Задача 1 Найти необходимые и достаточные условия эквивалентности уравнений (a(x)) и (b(t)), используя их инварианты

Задача 2 Дать классификацию уравнений (3 1), описывая их с помощью канонических форм [22]

Теорема 3.6.2 (B) *Для эквивалентности уравнений (3 1) и (3 3) необходимо и достаточно, чтобы между их инвариантами выполнялись* $n-2$ *соотношения*

$$I_0(A)= u^3 I_0(B),\ J_{n,1}(A)= u^4 J_{n,1}(B),\ J_{n,2}(A) = u^5 J_{n,2}(B), \quad ,$$

$$J_{n,n-3}(A)= u^n J_{n,n-3}(B), \tag{3 6}$$

где $\int u(x)dx = t(x)$ *удовлетворяет также уравнению Куммера-Шварца 3-го порядка (КШ-3)*

$$\{t,x\} + \frac{3}{n+1}B_2 t'^2 = \frac{3}{n+1}A_2 \quad \{t,x\} = \frac{1}{2}\frac{t'''}{t'} - \frac{3}{4}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2 \tag{3 7}$$

- *производная Шварца, а*

$$I_0(A) = A_3 - \frac{3}{2}A_2', \quad I_0(B) = B_3 - \frac{3}{2}B_2 = b_3 - 3b_1b_2 + 2b_1^3 + 3b_1b_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{3}{2}b_2,$$

$$J_{n,1}(A) = A_1 - 2A_3' + \frac{6}{5}A_2'' - \frac{3(5n+7)}{5(n+1)}A_2^2,$$

$$J_{n,2}(A) = A_5 - \frac{5}{2}A_4' + \frac{15}{7}A_3'' - \frac{5}{7}A_2''' - \frac{10(7n+13)}{7(n+1)}A_2 I_0(A), \quad ,$$

где I_0 - *инвариант Лагерра,* $J_{n,l}$ - *псевдоинварианты Альфана*

Для последующего понадобятся также условные инварианты

$$I_{n,k}(A, A', \quad) = J_{n,k}(A, A', \quad)|_{J=J_{n,1}= \ =J_{n,k-1}=0}$$

---

[20] Forsyth A R //Phylosophical Trans of the Royal Society of London 1888 A, T 179 p 377 489

[21] Neuman F Global properties of linear differential equations Kluwer Acad Publ Academia Dordrecht Boston-London Praha 1991

[22] Впрочем сам Альфан рассматривал лишь задачу 2

Теорема 3.6.3 (Н) (классификационная) *Множество уравнений (3 2) распадается на n — 1 класс согласно таблице 1*

Таблица 1

Класс	Инварианты	Преобразование $y = u_k^{-\frac{n-1}{2}}$ г, $dt = u_k dx$	Канонические формы Альфана
Y_0	$I_0 \neq 0$	$u_0 = \sqrt[3]{I_0}$	Основная (H_{n0}), зависит от $n - 2$ параметров
Y_k, $k = \overline{1, n-3}$	$I_0 = I_{n1} = \quad = I_{n\,k-1} = 0$, $I_{n\,k} = J_{n\,k} \neq 0$	$u_k = \sqrt[k+3]{I_{n\,k}}$	Вырожденная (H_{nk}), зависит от $n - k - 2$ параметров
Y_{n-2}	$I_0 = I_{n\,1} = \quad = \quad = I_{n\,n-3} = 0$	$\frac{1}{2}\frac{u''_{n-2}}{u_{n-2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'_{n-2}}{u_{n-2}}\right)^2 = \frac{3}{n+1}A_2$	Простейшая вырожденная (H_{nn-2}) $z^{(n)}(t) = 0$

Теорема 3.6.5 (Н) (классификационная) *Множество уравнений (3 2) распадается на n — 1 класс согласно таблице 2*

Таблица 2

Класс	Инварианты	Преобразование $y = u^{-\frac{n-1}{2}} z$, rfi $= u dx$	Канонические формы Форсайта
Y_0	$I_0 \neq 0$		Основная (F_{n0}), **зависит** от п — 2 параметров
Y_k, $k = \overline{1, n-3}$	$I_0 = I_{n\,1} = \quad = I_{n\,k-1} = 0$, $I_{n\,k} = J_{n\,k} \neq 0$	$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{3}{n+1}A_2$	Вырожденная (F_{nk}) зависит от п — k — 2 параметров
Y_{n-2}	$I_0 = I_{n\,1} = \quad = I_{n\,n-3} = 0$		Простейшая вырожденная (F_{nn-2}) $z^{(n)}(t) = 0$

Канонические формы Форсайта можно представить в виде [23]:

$$F_{nk}z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{s=k+3}^{n} \binom{n}{s} f_{ks}(t) z^{(n-k)}(t) = 0, \; k = \overline{0, n-3}; \; F_{nn-2}z = 0. \tag{3.8}$$

Определение 3.1. Уравнение (3.1) будем называть *локально приводимым* (по Альфану), если оно преобразованием КЛ (3.4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) = 0, \; b_k = const. \tag{3.9}$$

Теорема 3.8.1 (Н). *Следующие условия равносильны:*

а) уравнение (3.1) приводимо;

б) уравнение (3.1) допускает некоммутативную факторизацию

$$L_n y \equiv \prod_{k=n}^{1} [D - \frac{v'}{v} - (k-1)\frac{u'}{u} - r_k u] y = 0$$

через операторы 1-го порядка, где

$$v = |u|^{-\frac{n-1}{2}} \exp(-\int a_1 dx + b_1 \int u dx), \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{3}{n+1} B_2 u^2 = \frac{3}{n+1} A_2(x). \; B_2 = b_2 - b_1^2 = const, \tag{3.11}$$

$A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1'$, *а* r_k *суть корни характеристического уравнения*

$$M_n(r) \equiv r^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k r^{n-k} = 0. \tag{312}$$

При этом общее решение уравнения (3.11) имеет вид

$$u(x) = (AY_2^2 + BY_1Y_2 + CY_1^2)^{-1}, \; \delta = B^2 - 4AC = -12/(n+1)B_2, \tag{3.13}$$

где Y_1, $Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ *есть ФСР линейного уравнения*

$$Y'' + \frac{3}{n+1} A_2 Y = 0, \tag{3.14}$$

причем $v(x)$ *и* $u(x)$ *удовлетворяют также уравнению*

$$v^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k(x) v^{(n-k)} - b_n u^n v = 0; \tag{3.15}$$

[23] Ранее применялась лишь единственная каноническая форма, а именно F_{n0}, называемая формой Лагерра-Форсайта.

в) уравнение (3.1) допускает коммутативную факторизацию с весом u^{-n}.

$$\frac{1}{u^n} L_n y \equiv \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} - r_k \right) y = 0;$$

г) существуют четыре функции Ω, w, λ, μ, *связанные соотношениями* $\Omega = v^{-1}u^{1-n}$, $w = v^{-1}u^{-n}$, $\lambda = u^{-1}$, $\mu = -v'v^{-1}u^{-1}$ *такими, что* $\Omega L_n(\lambda D + \mu) = D[w L_n]$;

д) если $y(x)$ *– решение уравнения (3 1), то и функция*

$$Y(x) = \frac{1}{u} y' - \frac{v'}{vu} y \tag{3 16}$$

также является решением уравнения (3.1) (иными словами, уравнение (3.1) допускает преобразование ЭИД, или автопреобразование Бэклунда (3.16)),

е) инвариант Лагерра I_0 *и псевдоинварианты* $J_{n,k}$ *связаны между собой n — 1 соотношениями типа (3.6), где* $I_0(b)$, $J_{n,k}(b)$ *— const,*

ж) абсолютные инварианты Альфана $h_{n,k} =$ *const;*

з) уравнение (3.1) допускает однопараметрические группы симметрии Ли с операторами вида

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y = u^{-1}\partial_x + v'(uv)^{-1}\partial_y, \tag{3.17}$$

где $u(x)$ *является решением уравнения (3 11), а* $v(x)$ *удовлетворяет соотношению (3.10), а также уравнению (3.15).*

Замечание 3.1. Теорема 3 8.1 подытоживает многолетние исследования математиков. Условие в) обобщает теорему Cayley [24] и соответствующие результаты Floquet [25] и Mammana [4], а также связывает факторизацию с приводимостью, условие г) дает критерий Fayet [26]; условие д) дает критерий Kakeya [27], условие ж) принадлежит Альфану, и, наконец, условие з) устанавливает связь между подходами Ли и Альфана, а именно между точечными однопараметрическими группами и точечными преобразованиями КЛ Условия б), в), е) и з) принадлежат автору Заметим также, что Wittich [28] использовал условие автора б) в аналитической теории дифференциальных уравнений. Условия б), в), е), ж) и з) являются конструктивными

[24] Cayley A // Quarterly J of Math , 1886, p 331-335

[25] Floquet G // Ann Sci dt l'Ec Norm , 1879, T 8, Supplement, 2 ser p 132

[26] Fayet J Invariants de quelques equations differentielles et reduction du celle-ci a des equations a coefficients constants These, Paris, 1937, 81 P

[27] Kakeya S // Proc Phys Math Soc Japan, 1938, T 20 N 4, p 365

[28] Wittich H // Math Nachr 1969, T 39 N 4-G, s 363-372

Предложение 3.9.1. *Общее решение приводимого уравнения (3 1) можно представить в виде*

$$y = v \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(r_k U), \; U = \int u dx, \tag{3 18}$$

где r_k - простые корни характеристического уравнения (3 12), и в виде

$$y = v \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{s=1}^{l_k} \frac{1}{(s-1)!} U^{s-1} \exp(r_k U), \; \sum_{k=1}^{m_1} l_k = n \tag{3 19}$$

где r_k - кратные характеристические корни (3 12), а v(x) и u(x) удовлетворяют уравнениям (3 10),(3 11),(3 13)

Укажем теперь некоторые классы нелинейных уравнений от 2 го до n–го порядков, порожденные приводимыми линейными уравнениями, для которых имеет место ПНС

Теорема 3.9.1 (B) *Если уравнение (3 1) является приводимым, то семейства присоединенных нелинейных уравнений типа Куммера-Шварца и его обобщений*

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{3}{n+1}B_2 u^2 = \frac{3}{n+1}A_2,$$

$$\frac{u'''}{u} - 6\frac{u''u'}{u^2} + 6\left(\frac{u'}{u}\right)^3 + \frac{12}{n+1}A_2\frac{u'}{u} + \frac{4}{n+1}B_3 u^3 = \frac{4}{n+1}A_3,$$

$$\frac{u^{(iv)}}{u} - 10\frac{u'''u'}{u^2} - \frac{5}{18}(n+23)\left(\frac{u''}{u}\right)^2 + \frac{5}{6}(n+59)\frac{u'^2u''}{u^3} - \frac{5}{8}(n+59)\left(\frac{u'}{u}\right)^4 -$$

$$-\frac{5(n+11)}{n+1}A_2\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{10}{3}\frac{n+5}{n+1}A_2\frac{u''}{u} + \frac{20}{n+1}A_3\frac{u'}{u} + \frac{10}{3(n+1)}B_4 u^4 = \frac{10}{3(n+1)}A_4 \tag{3 20}$$

$$[u^{\frac{1-n}{2}}]^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A_k [u^{\frac{1-n}{2}}]^{(n-k)} - B_n u^{\frac{n+1}{2}} = 0$$

одновременно допускают решения вида (3 13), где $A_k, k = \overline{2,n}$, суть полуинварианты уравнения (3 1), а Y_1, $Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$- ФСР уравнения (3 14) Условиями совместности (3 20) служат соотношения (3 6) между инвариантами эквивалентных линейных уравнений

Теорема 3.9.2 (B) *Если уравнение (3 1) является приводимым, то семейства присоединенных нелинейных уравнений относительно $v(x)$ типа обобщенных уравнений Ермакова*

$$v'' - \frac{n-2}{n-1}\frac{v'^2}{v} + 3\frac{n-1}{n+1}A_2 v - 3\frac{n-1}{n+1}B_2 v^{\frac{n-5}{n-1}} = 0,$$

$$v''' - 3\frac{n-3}{n-1}\frac{v'v''}{v} + 2\frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2}\frac{v'^3}{v^2} +$$
$$+\frac{12}{n+1}A_2 v' + 2\frac{n-1}{n+1}A_3 v - 2\frac{n-1}{n+1}B_3 v^{\frac{n-7}{n-1}} = 0;$$
$$v^{iv} - 4\frac{n-4}{n-1}\frac{v'v'''}{v} - \frac{22}{9}\frac{n-4}{n-1}\frac{v''^2}{v} + \frac{2}{9}\frac{(49n-125)(n-4)}{(n-1)^2}\frac{v'^2 v''}{v^2} -$$
$$-\frac{(49n-125)(n-2)(n-4)}{9(n-1)^3}\frac{v'^4}{v^3} - -\frac{10}{3}\frac{(n-4)(n+7)}{(n-1)(n+1)}A_2\frac{v'^2}{v} +$$
$$+\frac{10}{3}\frac{n+5}{n+1}A_2 v'' + \frac{20}{n+1}A_3 v' + \frac{5}{3}\frac{n-1}{n+1}A_4 v - \frac{5}{3}\frac{n-1}{n+1}B_4 v^{\frac{n-9}{n-1}} = 0;$$
$$\ldots \qquad (3.21)$$
$$v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}A_k v^{(n-k)} - B_n v^{-\frac{n+1}{n-1}} = 0$$

одновременно допускают решения вида

$$v(x) = (AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2)^{\frac{n-1}{2}}, \; B^2 - 4AC = const,$$

где Y_1, $Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2}dx$ – ФСР уравнения (3.14). Условиями совместности (3.21) служат соотношения (3.6) между инвариантами эквивалентных линейных уравнений.

Глава 4 посвящена **методу автономизации.** Нестационарные задачи относятся к числу важнейших задач, которые выдвигает современная наука. Не подлежит сомнению, что их роль еще более возрастет, если будут развиты методы их редукции к менее сложным стационарным задачам. Весьма эффективным является групповой анализ дифференциальных уравнений [29], [30].Однако трудности, возникающие при практическом применении алгоритма С.Ли для нахождения точечных симметрии, побуждают к поиску альтернативных подходов. В данной главе представлен один из таких подходов – метод автономизации ОДУ - с использованием класса точечных преобразований КЛ. Хотя область его применения уже, чем з" группового анализа, однако он является не менее эффективным средством исследования нестационарных задач в тех случаях, когда он применим.

Широкий класс ОДУ, имеющий как теоретическое, так и прикладное значение, образуют **нелинейные уравнения с приводимой** линейной **частью.** Их можно представить в виде

$$(NLNA)y \equiv L_n y = F(x, y, y', \ldots, y^{(m)}), \; (') = d/dx, \qquad (4.1)$$

[29]Овсянников Л.В **Групповой анализ дифференциальных уравнений М . Наука, 1978**

[30]Ибрагимов Н.Х.// **Успехи математических наук, 1992. Т. 47, N 4, с. 83-144**

где линейное уравнение $L_n y = 0$ (см (3 1)) приводимо

Теорема 4.1.1 (В) *Для приведения (4 1) к автономному виду*

$$(NLA) z \equiv M_n z = a\Phi(z, z'(t), \quad , z^{(m)}(t)), \; a = const \tag{4 2}$$

где $M_n z = 0$ (см (3 9)) - линейное уравнение с постоянными коэффициентами, преобразованием КЛ (3 4), необходимо и достаточно, чтобы нелинейная часть F могла быть представлена в виде

$$F(x, y, y', \quad , y^{(m)}) = a u^n v \Phi\left[\frac{y}{v}, \frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{vu}\right) y, \quad , \frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{vu}\right)^m y\right], \tag{4 3}$$

где $(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{vu})^k y$ - k-я итерация дифференциального выражения $(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{vu})y$ При этом (4 1) допускает частные решения вида $y = \rho v(\tau)$, $b_n \rho$ — $a\Phi(\rho, 0, \quad , 0)$, где $v(x)$ находится, исходя из (3 10), (3 11), т е удовлетворяет уравнению (3 15)

Уравнение (4 1) допускает точечную симметрию с оператором (3 17), если она удовлетворяет *определяющему уравнению Ли*

$$\underset{n}{X} \Psi|_{\Psi=0} = 0, \quad \Psi = L_n y - F, \tag{4 4}$$

где $\underset{n}{X}$ есть n-е продолжение оператора X

$$\underset{n}{X} = X + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \partial_{y^{(k)}}, \quad \eta_k = D\eta_{k-1} - y^{(k)} D\xi, \; D = d/dx \tag{4 5}$$

Выражения

$$J_k(x, y, y', \quad , y^{(k)}) = \frac{1}{v}(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{uv})^k y, \; k = \overline{0, m} \tag{4 6}$$

являются дифференциальными инвариантами (4 1) порядка k, т е функционально независимыми решениями уравнения $\underset{n}{X}\Psi = 0$

Таким образом, метод автономизации можно рассматривать как конструктивную альтернативу к теории точечных симметрии С Ли т к он приводит к тем же результатам, но позволяет оперировать только с ОДУ (3 11) и конечным уравнением (3 10) Однако метод автономизации (по крайней мере в том виде, как он представлен в работе) имеет и ограничения Он дает возможность найти лишь подалгебру алгебры Ли точечных симметрии, допускаемых уравнением (4 1), операторы которых имеют вид

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(x) y \partial_y, \; и \text{ (или) вид} \tag{4 7}$$

$$X = \xi(x)\partial_x + [\eta_1(x) y + \eta_2(x)]\partial_y, \; \eta_2(x) \neq 0 \tag{4 8}$$

Случаю *общего положения* соответствует оператор (4 7) *Особым* назовем случай, соответствующий оператору (4 8)

ТЕСТ АВТОНОМИЗАЦИИ 1° С помощью любого из критериев приводимости (теорема 3 8 1) проверить, является ли приводимым линейное уравнение $L_n y = 0$, присоединенное к нелинейному уравнению (4 1)

2° Убедившись, что уравнение $L_n y = 0$ приводимо (а для $n = 2$ это всегда выполняется), представить его общее решение согласно предложению 3 9 1, т е в виде формул (3 18) и (или) (3 19)

3° Проверить, можно ли неавтономность нелинейного члена $\Phi(x, y, y', \quad, y^{(m)})$ "уравновесить" с помощью выражения $v(x)u^n(x)$ и при утвердительном ответе попытаться представить его в виде (4 3)

Теорема 4.2.1 (Н) *Законы изменения $f(x)$, при которых каноническое обобщенное уравнение Эмдена -Фаулера (КОУЭФ)*

$$y'' + f(x)y^n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1 \tag{4 9}$$

с *помощью преобразования (2 3) приводится к автономной форме* [31]

$$z \pm b_1 z + b_0 z + cz^n = 0, \; b_1, b_0, c = const, \; n \neq 0, 1 \tag{4 10}$$

(что соответствует случаю общего положения), имеют вид

$$f_1(x) = (\alpha_1 x + \beta_1)^{-\frac{3+n}{2} \pm \frac{b_1(1-n)}{2\sqrt{\delta_1}}} (\alpha_2 x + \beta_2)^{-\frac{3+n}{2} \mp \frac{b_1(1-n)}{2\sqrt{\delta_1}}}, \; \delta_1 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0,$$

$$f_2(x) = (Ax^2 + Bx + C)^{-\frac{3+n}{2}} \exp\left[\pm\frac{(1-n)b_1}{\sqrt{-\delta_2}} arctg \frac{2Ax + B}{\sqrt{-\delta_2}}\right], \delta_2 = B^2 - 4AC < 0$$

$$f_3(x) = (\alpha x + \beta)^{-(n+3)} \exp\left[\pm\frac{(1-n)b_1}{2\alpha(\alpha x + \beta)}\right], \; \delta_3 = 0, \; \alpha \neq 0, \tag{4 11}$$

$$f_4(x) = (\alpha x + \beta)^{-\frac{n+3}{2} \pm b_1 \frac{1-n}{2\alpha}}, \; \delta_4 = \alpha^2 > 0,$$

$$f_5(x) = C \exp(\pm\frac{1-n}{2} b_1 x), \; \delta_5 = 0$$

Замечание 4.1. Законы изменения $f(x)$ (4 11) не могут быть при вещественных значениях параметров *ни периодическими, ни колеблющимися* функциями от x

Теорема 4.2.4 (В) *Интегрирование КОУЭФ (4 9),(4 11) можно свести к интегрированию (4 9) при условии, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$f'(x) = kf^m(x), \; m \in [1, (5+n)/(3+n)] \tag{4 12}$$

В работе рассмотрен также особый случай КОУЭФ $y'' + f(x)y^2 = 0$

[31] Интегрирование уравнения (4 10) рассмотрено в предложении (5 12 1) и теореме 7 1 2

Заметим, что к уравнению Эмдена-Фаулера $y'' + ax^{-1}y' + bx^m y^n = 0$ и к его обобщению $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x)y^n = 0$, $n \neq 0, 1$, сводятся немало других нелинейных уравнений теоретической и математической физики (см., например, [32])

В заключение главы рассматриваются обобщенное уравнение Ермакова и обобщенные системы Ермакова. Уравнение Ермакова имеет вид

$$y'' + a_0(x)y - b_0 y^{-3} = 0, \ b_0 = const \tag{4.13}$$

Его общее решение

$$y(x) = \sqrt{AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2}, \quad B^2 - 4AC = -4b_0, \tag{4.14}$$

где Y_1, $Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ - ФСР присоединенного линейного уравнения $Y'' + a_0(x)Y = 0$, является ПНС для (4.13) (Приоритет Ермакова относительно (4.13) и (4.14) был впервые установлен в работе [33])

Теорема 4.5.4 (B) *1) Если линейное уравнение*

$$L_n y \equiv y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a_k(x) y^{(n-k)} = 0$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами (3.9) преобразованием КЛ вида (3.4), то обобщенное уравнение Ермакова

$$L_n y - b_n y^{\frac{1+n}{1-n}} = 0, \ b_n = const, \tag{4.15}$$

имеет двухпараметрическое семейство решений $y = p(AY_1^2 + BY_1Y_2 + CY_2^2)^{\frac{n-1}{2}}$, *где* $B^2 - 4AC = q$, *(p, q - фиксированные постоянные), Y_1, Y_2 образуют ФСР присоединенного линейного уравнения (3.Ц)*

2) При этом уравнение (4.15) допускает алгебру Ли с генераторами

$$X_1 = Y_1^2(x)\partial_x + (n-1)Y_1(x)Y_1'(x)y\partial_y, \quad X_3 = Y_2^2(x)\partial_x + (n-1)Y_2(x)Y_2'(x)y\partial_y$$

$$X_2 = Y_1(x)Y_2(x)\partial_x + \frac{n-1}{2}(Y_1(x)Y_2'(x) + Y_2(x)Y_1'(x))y\partial_y,$$

коммутаторы которых удовлетворяют условиям $[X_1, X_2] = X_1$, $[X_2, X_3] = X_3$, $[X_3, X_1] = -2X_2$, *соответствующим алгебре Ли* $sl(2, R)$ *(см. также тип $G_3 - VIII$ по классификации Ли-Бианки)*

Под системой Ермакова понимается система уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_0(t)x = 0 \\ \ddot{y} + a_0(t)y = b_0 y^{-3}, \end{cases}$$

[32] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова Думка, 1989

[33] Беркович Л.М., Розов Н.Х. // Дифференц. Уравн. 1972. Т. 8. N 11. с. 2076-2079

которая имеет первый интеграл (инвариант) вида
$1/2(\dot{x}y - \dot{y}x)^2 + 1/2b_0(x/y)^2 = C$.

Теорема 4.6.1 (Н). *Дана неавтономная система*

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = af(t)x^m y^n F(\frac{x}{v(t)}, \frac{y}{v(t)}), \ a = const, \\ \ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = bf(t)x^n y^m G(\frac{x}{v(t)}, \frac{y}{v(t)}), \ b = const. \end{cases} \tag{4.16}$$

Пусть присоединенная линейная система (получающаяся из (4.16) при $a = b = 0$) приводима преобразованием КЛ $x = v(t)X$, $y = v(t)Y$, $dT = u(t)dt$ к автономному виду $X''(T) + b_0X = 0$, $Y''(T) + b_0Y = 0$, причем $F = F\left(\frac{Y}{X}\right)$, $G = G\left(\frac{X}{Y}\right)$, а $f(t)$ удовлетворяет соотношению $f(t) = v^{1-m-n}u^2$, ($m = -n - 3$), то (4.16) имеет первый интеграл (инвариант)

$$I = \frac{1}{2}\varphi^2(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \int^{x/y} u^{n+1}F(u)du + b\int^{y/x} u^{n+1}G(u)du, \varphi = \exp(\int a_1(t)dt)$$

Система (4.16) охватывает полученные ранее обобщения с использованием [33] (см., например, [34]).

Заметим, что уравнение Ермакова и его обобщения, а также системы Ермакова и их обобщения встречаются как в классической, так и квантовой механике, а также в т.н. методе параболического уравнения в задачах дифракции коротких волн (см., например, [35]).

В заключение главы рассматриваются нелинейные ОДУ порядка $n > 2$ со степенной нелинейностью

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} + g(x)y^m = 0, \ a_k \in C^{n-k}(I). \tag{4.17}$$

Теорема 4.7.1 (В). *Множество уравнений (4.17) распадается на n-1 класс в соответствии с каноническими формами Альфана для ЛОДУ-n (см. теорему 3.6.3).*

$$H_{ns}z + g_{ns}(t)z^m = 0, \ s = 0, n-3; \quad H_{nn-2}z = z^{(n)} + g_{nn-2}(t)z^m = 0. \quad n > 2.$$

Теорема 4.7.2 (В) *Множество уравнений (4.17) распадается на n-1 класс в соответствии с каноническими формами Форсайта для ЛОДУ-n (см. теорему 3.6.5, формулы (3.8)):*

$$F_{ns}z + g_{ns}(t)z^m = 0, \ s = \overline{0, n-3}, \ F_{nn-2}z \equiv z^{(n)} + g_{nn-2}(t)z^m = 0, \ n > 2.$$

---

[34] Athorne C // Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, Proc of the 6th Intern Workshop, Dubna, 1990, p 100-103

[35] В М Бабич. В С Булдырев Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн Метод эталонных задач М Наука, 1972, с 432-434

Глава 5 посвящена **новому методу точной линеаризации** Различные виды точной линеаризации применялись классиками Так линса ризация при помощи преобразования зависимой переменной применялась в работах Пенлеве [36], а с помощью преобразования независимой перемен ной - Зундманом [37] и Чаплыгиным [38]

Автором еще в 1979 г [6] был подробно представлен метод точной линеаризации (МТЛ) для нелинейных автономных уравнений 2-го порядка путем нелинейной замены зависимой и независимой переменных Несколько позже В П Маслов с соавторами опубликовал работы [39], [40], в которых к некоторым конкретным нелинейным уравнениям были применены лине аризующие их замены переменных Здесь представлен МТЛ нелинейных автономных уравнений n-го порядка, включающий в себя как точечные, так и неточечные преобразования зависимой и независимой переменных Он характеризуется следующими особенностями порядок уравнения не меняется, структура исследуемых классов определяется факторизациями через нелинейные дифференциальные операторы первою порядка

Теорема 5.1.3 (В) *Для того чтобы автономное уравнение*

$$y^{(n)} - F(y, y', \quad , y^{(n\ 1)}) = 0, \quad n \geq 3 \tag{5 1}$$

обратимым преобразованием [41]

$$y = v(y)z, \quad dt = u(y)dx, \tag{5 2}$$

сводилось к линейному уравнению

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) + c = 0, \ b_l \ \ c = const, \tag{5 3}$$

необходимо и достаточно, чтобы (5 1) могло быть представлено в фор ме факторизации

$$N_n y \equiv \prod_{k=n}^{1} \left[D - \left(\frac{1}{y} - \left(\ln \int \varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}} \exp(\int f dy) dy \right)^* + (k-1) \frac{\varphi^*}{\varphi} \right) y' - r_k \varphi \right] y +$$

$$+ \frac{c}{\beta} \varphi^{\frac{n^2+n-2}{2n}} \exp(-\int f dy) = 0, \quad (*) = d/dy, \tag{5 4}$$

---

[36] Painleve P // Acta Math 1902 vol 25 p 1 85

[37] Sundman K E // Acta Math 1912 vol 36 p 105 179

[38] Чаплыгин С А Избранные труды М Наука 1967 с 367 384

[39] Авдонин С М Белов В В Маслов В П Математические аспекты синтеза вычислительных сред - М МИЭМ 1984

[40] Волосов К А Данилов В Г , Маслов В П Математическое моделирование технологических процес сов изготовления больших интегральных схем М МИЭМ 1984

[41] Для автономных нелинейных уравнений как ранее для линейных неавтономных уравнении применяемые преобразования получены в явном виде

или в лексикографической форме

$$\overline{N}_n y \equiv \sum_{k_1+2k_2+\quad+nk_n=n} \Psi^{1\ 2\quad n}_{k_1 k_2\ \ k_n} y^{(1)k_1} y^{(2)k_2} \quad y^{(n)k_n} +$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m} b_m \varphi^m \left(\sum_{l_1+2l_2+\quad+(n-m)l_{n-m}=n-m} \Psi^{12\quad n-m}_{l_1 l_2\ \ l_{n-m}} y^{(1)l_1} y^{(2)l_2} \quad y^{(n\ \ m)l_{n-m}}\right)+$$

$$+\varphi^{\frac{n^2+n-2}{2n}} \exp(-\int f dy)\left(b_n \int \varphi^{\frac{n^2+n-2}{2n}} \exp(\int f dy) dy + \frac{c}{\beta}\right) = 0, \qquad (5\ 5)$$

где коэффициенты Ψ *зависят от* $f(y)$ *и* $\varphi(y)$, *причем*

$$\Psi^{12\quad n}_{00\quad 1} = 1, \quad \Psi^{12\quad n-m}_{00\quad 1} = 1, \quad \Psi^{12\quad n-1n}_{10\quad 10} = nf(y)$$

При этом имеем линеаризующее преобразование

$$z = \beta \int \varphi^{\frac{n^2\ \ n+2}{2n}} \exp(\int f(y) dy) dy, \ dt = \varphi(y) dx, \qquad (5\ 6)$$

$\beta = const \neq 0$ *- нормирующий множитель, а также (при с — 0) однопараметрические семейства решений*

$$\int \frac{\varphi^{\frac{n^2-3n+2}{2n}} \exp(\int f dy) dy}{\int \varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}} \exp(\int f dy) dy} = r_k x + C, \qquad (5\ 7)$$

где r_k *- различные корни характеристического уравнения (3 12), а С - постоянная интегрирования*

Теорема 5.1.4 (В) *Для уравнения (5 1),(5 4) ПНС примет параметрический вид*

$$\int \varphi^{\frac{n^2\ \ n+2}{2n}} \exp(\int f(y) dy) dy = \sum_{l=1}^{n} c_k z_k(t) + \tilde{z}, \quad dt = \varphi(y) dx, \ n \geq 3, \qquad (5\ 8)$$

где $\tilde{z}(t)$ *- частное решение линейного неоднородного уравнения (5 3), а* $z_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, *образуют ФСР линейного однородного уравнения (3 9), соответствующего* (5 3)

В данной работе МТЛ подробно реализован для уравнений 2-го и 3-го порядков

Теорема 5.2.1 (В) *Для того чтобы уравнение*

$$y'' + f(y) y'^2 + b_1 \varphi(y) y' + \psi(y) = 0 \quad (') = d/dx, \ b_1 = const, \qquad (5\ 9)$$

могно быть линеаризовано преобразованием (5 2), т е приведено к

$$\ddot{z} + b_1 \dot{z} + b_0 z + c = 0, \ (\dot{}) = d/dt, \ b_1, \ b_0, c = const, \qquad (5\ 10)$$

необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде

$$y''+fy'^2+b_1\varphi y'+\varphi\exp(-\int f(y)dy)[b_0\int\varphi\exp(\int f(y)dy)dy+\frac{c}{\beta}]=0, \quad (5.11)$$

(β — const - нормирующий множитель). При этом преобразование (5.2) примет явный вид $z=\beta\int\varphi\exp(\int f dy)dy$, $dt=\varphi(y)dx$, а при $c=0$ уравнение (5.11) допускает следующие однопараметрические семейства решений

$$r_k x+C=\int\frac{\exp(\int f dy)dy}{\int\varphi\exp(\int f dy)dy},$$

где r_k - простые корни характеристического уравнения $r^2+b_1r+b_0=0$.

Пример 5.1 (Э). Дан нелинейный осциллятор

$$y''+f(y)y'^2+a\psi(y)=0. \quad (5.12)$$

Преобразованием $z=\sqrt{2\int\psi\exp(2\int f dy)dy}$, $dt=z^{-1}\psi\exp(\int f dy)dx$ уравнение (5.12) линеаризуется в $\ddot{z}+az=0$; имеет первые интегралы и однопараметрические семейства решений соответственно:

$$y'^2=a^2(C\mp 2\int\psi\exp(2\int f dy)dy)\exp(-2\int f dy),$$

$$\int\frac{\exp(2\int f dy)dy}{z}=\pm\sqrt{a}x+C.$$

Теорема 5.6.1 (В). *Связанная система*

$$y_i''+(k\frac{f_i^{*_i}}{f_i}y_i'+\frac{m}{g}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_j}y_j')y_i'+$$

$$+r_{i1}f_i^{-k}g^{-m}\varphi_i y_i'+f_i^{-2k}g^{-2m}\varphi_i(r_{i0}\int\varphi_i dy_i+\frac{c_i}{\beta_i})=0,\ (*_i)=d/dy_i,\ i=\overline{1,n}, \quad (5.13)$$

где $f_i=f_i(y_i)$, $g(y)=g(y_1,\dots,y_n)$, $\varphi_i=\varphi_i(y_i)$, $(')=d/dx$, k,m,r_{i1},r_{i0}, $c_i,\beta_i=const$, преобразованиями

$$z_i=\beta_i\int\varphi_i(y_i)dy_i,\quad dt_i=f_i^{-k}(y_i)g^{-m}(y)\varphi_i(y_i)dx,\ i=\overline{1,n} \quad (5.14)$$

приводится к линейной несвязанной системе

$$\ddot{z}_i+r_{i1}\dot{z}_i+r_{i0}z_i+c_i=0,\quad (\dot{})=d/dt_i,\ i=\overline{1,n} \quad (5.15)$$

Заметим, что система (5.13) обобщает динамическую *систему Лиувилля*, которую в лагранжевой форме можно представить в виде

$$\ddot{q}_i+\left(\frac{1}{2}\frac{a_i^{*_i}}{a_i}\dot{q}_i+\frac{\dot{b}}{b}\right)\dot{q}_i-\frac{1}{b^2a_i}\frac{d}{dq_i}[b_i(h-d_i)]=0,\ (*_i)=\frac{d}{dq_i},\ b(q)=\sum_{i=1}^{n}b_i(q_i). \quad (5.16)$$

В силу теоремы 5 6.1 лиувиллева система (5.16) линеаризуется преобразованием (Э)

$$Q_i = \sqrt{2(hb_i - d_i)}, \quad ds_i = -a_i^{-1/2} b^{-1} (\sqrt{2(hb_i - d_i)})^{*} dt$$

в несвязанную системv вида $Q_i''(s_i) - Q_i(s_i) = 0$, $\text{г} = 1, n$.

Теорема 5.7.2 (В). *Для* того *чтобы уравнение*

$$y''' + f_5(y)y'y'' + f_4(y)y'' + f_3(y)y'^3 + f_2(y)y'^2 + f_1(y)y' + f_0(y) = 0 \quad (5\ 17)$$

могло быть линеаризовано преобразованием (5.2) в уравнение

$$z + 3b_1\dot{z} + 3b_2\dot{z} + b_3 z + c = 0, \quad b_1, b_2, b_3, c = const, \quad (5\ 18)$$

необходимо и достаточно, чтобы (5.17) было представимо в виде

$$y''' + 3f(y)y'y'' + \left(\frac{1}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{5}{9}\frac{\varphi^{*2}}{\varphi^2} - \frac{1}{3}f\frac{\varphi^*}{\varphi} + f^2 + f^*\right)y'^3 + 3b_1\varphi[y'' + (f + \frac{1}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi})y'^2] +$$

$$+3b_2\varphi^2 y' + \varphi^{5/3}(b_3 \int \varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy + \frac{c}{\beta})exp(-\int f dy) = 0 \quad (5\ 19)$$

Уравнение (5.19) приводится к (5.18) преобразованием $z = \beta \int \varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy$, $dt = \varphi(y)dx$ *Если* $c = 0$, *уравнение (5 19) допускает однопараметрические решения*

$$r_k x + C = \int \frac{\varphi^{1/3}\exp(\int f dy)dy}{\int \varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy},$$

где r_k *- простые корни характеристического уравнения* $r^3 + 3b_1 r^2 + 3b_2 r + b_3 = 0$.

МТЛ позволяет с новых позиций (Э) рассмотреть классический **случай Эйлера-Пуансо** в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки Как известно, он описывается системой

$$Ap-(B-C)qr = 0, \ Bq-(C-A)rp = 0, Cr-(A-B)pq = 0, \ A, \ B, \ C = const \quad (5.20)$$

Исключая переменные q.r, придем к следующему уравнению 3-го порядка, где $t \to x$, $p \to y$, $(\ ) \to (')$.

$$y''' - y^{-1}y'y'' + by'y^2 = 0, \ b = 4(B - A)(C - A)/(BC). \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) принадлежит к частному случаю класса (5 19) Преобразованием

$$z = y^2, \quad dt = ydx \quad (5\ 22)$$

уравнение (5.21) линеаризуется: $z + bz — O$

Примечание 5.1. Как известно, случай Эйлера-Пуансо используется в качестве первого приближения при изучении вращательного и поступательно-вращательного движения искусственного спутника в гравитационном поле планеты [42], [43]. Не исключено, что полученная линеаризация уравнений Эйлера (5.20) откроет новую возможность для изучения указанных задач

Такая возможность может быть предоставлена и для систем гидродинамического типа (СГТ) (см. [44]). Квадратично-нелинейные системы ОДУ, к которым сводятся решения ряда задач теоретической физики и гидродинамики, обнаруживают много общего и часто оказываются просто эквивалентными Так, например, уравнения триплета, простейшей СГТ (сложные СГТ являются являются суперпозициями триплетов), эквивалентны уравнениям Эйлера

$$\dot{u}_1 = pu_2u_3, \ \dot{u}_2 = qu_3u_1, \ \dot{u}_3 = ru_1u_2, \ p + q + r = 0. \tag{5.23}$$

Связанная система (5.23) исключением переменных сводится к несвязанной: $u_1 — u_1^{-1}\dot{u}_1\dot{u}_1 - 4qru_1^2\dot{u}_1 = O$, $u_2 - u_2^{-1}\dot{u}_2\dot{u}_2 - 4pru_2^2\dot{u}_2 — O$, $u_3 - u_3^{-1}u_3u_3 - 4pqu_3^2\dot{u}_3 — 0$, применив к которой преобразования $u_i^2 = z_i$, $d\tau_i = u_i dt$, придем к следующей системе линейных уравнений $z_1'''(\tau_1) - 4qrz_1'(\tau_1) = O$, $z_2'''(\tau_2) - 4rpz_2'(\tau_2) = O$, $z_3'''(\tau_3) - 4pqz_3'(\tau_3) = O$

Примечание 5.2. Приведя классическое решение системы (5 20), в [45] указывается: "... точный результат можно использовать для оценки точности конечно-разностных методов ”

Предложение 5.10.2 (В). *Пусть уравнение (5 1) допускает факторизацию*

$$\prod_{k=n}^{1} [\gamma_k(y)D - \beta_k(y)y' - \alpha_k(y)]y = 0 \tag{5 24}$$

Для того чтобы она была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы (без ограничения общности) $\gamma_k — \gamma$, $\beta_k = \beta$, $\alpha_k — o + r_k$, r_k — *const* В результате факторизация (5 24) примет вид

$$\prod_{k=n}^{1} [\gamma(y)D - \beta(y)y' - \alpha(y) - r_k]y = 0. \tag{5 25}$$

---

[42] Белецкий В В Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле Изд МГУ, 1975

[43] Дубошин Г Н Небесная механика Основные задачи и методы М Наука, 1975

[44] Обухов А М Турбулентность и динамика атмосферы - Ленинград Гидрометеоиздат, 1988

[45] Ф Д Томпсон Неэйлеровы методы интегрирования //Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды Ленинград Гидрометеоиздат 1969, с 167-182

Заметим, что к уравнению (5 25) может быть применено преобразование Бэклунда, представленное в виде

$$y = \exp\left(\int(\alpha + \beta y')\gamma^{-1}dx\right)z, dt = \gamma^{-1}dx \qquad (5\ 26)$$

Преобразование (5 26) сводит уравнение (5 25) к линейному уравнению (3 9) Пусть a — 0 Положив $\gamma = 1/u$, $\beta = v'/(vu)$, получим преобразование точной линеаризации (5 2)

В заключение главы рассмотрены некоторые важные нелинейные урав нения второго порядка, встречающиеся как в качественной, так и в аналитической теориях ОДУ, а также в различных приложениях, например, в теории нелинейных колебаний, в математической и теоретической физике Для них методами факторизации и точной линеаризации были найдены новые интегрируемые случаи Речь идет об уравнении Миттаг-Леффлера (см [46])

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y', A, B, C, D, E, F = const, \qquad (5\ 27)$$

и уравнении Баутина (см [47])

$$y'' - \gamma y'^2 - \beta yy' - \alpha y' + y - \delta y^2 = 0, \qquad (5\ 28)$$

которое описывает движение автоколебательной системы в предположении, что ее характеристики аппроксимируются полиномами степени не выше второй

Предложение 5.12.1 (ВН) *Уравнение*

$$y'' + b_1 y' + b_0 y + by^n = 0, \qquad (5\ 29)$$

описывающее ангармонический осциллятор, допускает (в дополнение к случаю $b_1 = 0$) однопараметрическое семейство элементарных решений, когда выполняется условие факторизации

$$(n+3)^2 b_0 = 2(n+1)b_1^2 \qquad (5\ 30)$$

Факторизация имеет вид $(D - r_2 - k_2 y^{\frac{n-1}{2}})(D - r_1 - k_1 y^{\frac{n-1}{2}})y = 0$, *где*

$$r_1 = -\frac{2b_1}{n+3}, \ r_2 = -\frac{n+1}{n+3}{}_1, \ k_1 = \pm\sqrt{-\frac{2b}{n+1}}, \ k_2 = \mp\sqrt{-\frac{b(n+1)}{2}}$$

Частный случай (п — 3) рассмотрен в работе [48] (см также [49], с 283) с помощью теста Ковалевской–Пенлеве

[46] Mittag Leffler G //Acta Math 1894 vol 18 p 233 246

[47] Баутин Н // Ж Тех Физ 1939 Т 9 N 7 с 601-611

[48] Euler N Steeb W -H Curus K //J Phys Math Gen 1989 Т 22 L195 L199

[49] Табор М Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике М Эдиториал УРСС 2001

В данной работе дано также описание в терминах факторизации нелинейных неавтономных ОДУ

$$Fy = y^{(n)} - f(x, y. y', \quad , y^{(n-1)}) = 0, \qquad (531)$$

которые суперпозицией преобразования КЛ (3 4) и преобразования точной линеаризации (5 2), а именно преобразованием

$$y = v_1(x)v_2(y/v_1(x))z, \ dt = u_1(x)u_2(y/v_1(x))dx \qquad (5\ 32)$$

приводятся к линейному уравнению (3 9)

Теорема 5.1.2 (В) *Для того чтобы уравнение (5.31) преобразованием (5 32) приводилось к уравнению (3 9), необходимо и достаточно, чтобы имела место некоммутативная факторизация*

$$\prod_{k=n}^{1}\left[D - \frac{v_1'}{v_1} - (k-1)\frac{u_1'}{u_1} - \frac{v_2^*}{v_2}Y' - (k-1)\frac{u_2^*}{u_2}Y' - r_k u_1 v_2\right] y = 0$$

Примечание 5.3. В том случае, когда уравнение (5 31) описывает класс алгебраических дифференциальных уравнений, допускающих в качестве группы симметрии группу растяжения, то к нему, как показал А.Д Брюно, может успешно применяться локальный метод нелинейного анализа (метод степенной геометрии) (см. [50], [51]) Полученные в данной работе точные решения ОДУ, по мнению автора, могут быть использованы при тестировании алгоритмов метода степенной геометрии

В главе 6 проводится **исследование нестационарных задач небесной механики** и находятся **законы изменения массы** Небесная механика всегда служила полигоном для испытания новых математичес ких методов Однако от теоретического решения небесномеханической задачи до его практического использования порой проходит немало времени Т І К, например, решенная еще в XVIII в Л Эйлером задача двух неподвижных центров нашла свое применение лишь в начале 60-х гг XX-го столетия для приближенного описания движения искусственных спутников сплюснутых планет, если неподвижные центры поместить в мнимые точки [52], (см также [53])

Процесс эволюции звездных систем, в том числе Солнечной системы, на длительных интервалах времени должен изучаться с учетом переменности масс небесных тел Данная глава посвящена применению метода

[50] Брюно А Д //Успехи Мат Наук, 2000, т 55 вып G с 3-44

[51] Bruno A D Power Geometry in algebraic and differential equations 2000 Elsevier Amsterdam

[52] Аксенов Е П Гребеников Е А , Демин В Г //Сб Искусственные спутники Земли М 1961 вып 8 с 64

[53] Белецкии В В Очерки о движении космических тел М Наука, 1972, Очерк второй

автономизации к нестационарным задачам. Одной из простейших является задача двух тел переменной массы - задача Гильдена-Мещерского (ГМ).

Определение 6.1. Под задачей ГМ будем понимать нестационарную задачу 2 тел, уравнение относительного движения которых в плоскости орбиты имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu(t)\frac{\mathbf{r}}{r^3},\ \mathbf{r} = (x, y)^T,\ |\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6.1}$$

Преобразованием Нехвила (так называют в небесной механике преобразование КЛ) .

$$\mathbf{r} = v(t)\mathbf{R},\ dr = u(t)dt,\ \mathrm{R} = (\xi, \eta)^T \tag{6.2}$$

(6.1) приводится к автономному виду

$$\mathrm{R}'' \pm b_1\mathbf{R}' + b_0\mathbf{R} = -\mu_0\mathbf{R}/R^3, |\mathrm{R}| = \text{Л} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\ (') = d/d\tau. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.1) соответствует также нестационарной кеплеровой задаче, если принять во внимание гипотезу Дирака о переменности гравитационной постоянной.

Теорема 6.5.1 (ВН). *В задаче ГМ законы изменения массы $\mu(t)$ представляют собою решения следующих нелинейных дифференциального и интегро-дифференциального уравнений*

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + b_0\mu^5 = 0, \tag{6.4}$$

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + \frac{(b_0 \pm 2b_1^2)\mu^5}{(k \pm 3b_1 \int \mu^2 dt)^2} = 0,\ b_1 \neq 0, \tag{6.5}$$

и *описываются конечными формулами*

$$\begin{gathered}
\mu_1(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}(\alpha_2 t + \beta_2)^{\frac{1}{2} \mp \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}},\ \delta_1 > 0; \\
\mu_2(t) = (At^2 + Bt + C)^{-1/2} \exp\left(\pm\frac{3b_1}{\sqrt{-\delta_2}} \arctan\frac{2At + B}{\sqrt{-\delta_2}}\right),\ \delta_2 < 0; \\
\mu_3(t) = (\alpha t + \beta)^{-1} \exp\left(\mp\frac{3b_1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha t + \beta}\right),\ \delta_3 = 0,\ \alpha \neq 0; \\
\mu_4(t) = (\alpha t + \beta)^{\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\alpha}},\ \delta_4 = \alpha^2 > 0; \\
\mu_5(t) = \exp(\pm\frac{3b_1}{2}t),\ \delta_5 = 0,\ \alpha = 0.
\end{gathered} \tag{6.6}$$

Задача ГМ допускает также прямолинейные движения $r = \mu^{-1}(t)\mathbf{R}_0$, $b_0 = R_0^{-3}$, $|\mathbf{R}_0| - R_0$, *инвариантные относительно действия однопараметрической группы с генератором* $X = u^{-1}\partial_t + (uv)^{-1}v(x\partial_x + y\partial_y)$

Замечание 6.1. Законы изменения массы (6.6) обобщают законы Мещерского [54] $\mu = (\alpha t + \beta)^{-1}$, $\mu = 1/\sqrt{\alpha t + \beta}$, $\mu = 1/\sqrt{At^2 + Bt + C}$, дифференциальный закон Эддингтона-Джинса $\dot\mu = -k\mu^\nu$, $-\infty < \nu < +\infty$, а также закон Б.Е.Гельфгата $\mu - (a + bt)(1 + ct)^{-2}$

В работе Г.Н.Дубошина [55] дан качественный анализ траекторий движения задачи ГМ при различных предположениях о переменной массе, включающих также возможность ее периодического изменения. Как показывают полученные в теореме 6.5.1 формулы, законы изменения массы естественных небесных тел таковы, что они не могут быть (при вещественных параметрах) ни периодическими, ни колеблющимися функциями времени.

Теорема 6.5.2 (ВН). *Интегрирование задачи (6.1)-(6.4)-(65) сводится к интегрированию задачи (6.1), где μ изменяется согласно закону Эддингтона-Джинса при ограничениях на показатель* ν
$\dot\mu = -k\mu^\nu$, $1 \leq \nu \leq 3$.

Редукция к задаче ГМ . Не приуменьшая собственной важной роли задачи ГМ, основное ее предназначение автор видит в том, чтобы быть канонической формой для более реалистичных постановок нестационарной задачи двух тел. Пусть уравнение относительного движения имеет вид $\ddot r = -\mu_0\mathbf{r}/r^3 - a\mathbf{r}$, $\mu_0, a = const$. Им можно описывать (см [56]) стационарную задачу движения спутника в поле притяжения Земли-шара под действием сопротивления однородной атмосферы, пропорциональное скорости спутника A уравнением $\ddot r = -\mu_0\mathbf{r}/r^3 - 2a\dot{\mathbf{r}} - 6r$, μ_0, a, $b = const$ можно описывать движение спутника бесконечно малой постоянной массы вокруг неподвижного центра переменной массы, окруженного достаточно протяженной гравитирующей средой переменной плотности, которая оказывает сопротивление движению, пропорциональное скорости спутника Астрономические аспекты последней задачи см в [57]

Теорема 6.6.1 (В) *Для того чтобы ОНЗ двух тел*

$$\ddot{\mathbf{r}} + a_1(t)\dot{\mathbf{r}} + a_0(t)\mathbf{r} = -\mu(t)\mathbf{r}/r^3, \ \mathbf{r} = (x, y)^T \tag{6 7}$$

преобразованием Нехвила (6.2) приводилась к задаче ГМ вида (6.1),(6.4), (6.5), а именно к $\mathbf{R}'' = -\mu_0(\tau)\mathbf{R}/R^3$, *где* $\mu_0(\tau)$ *удовлетворяет либо уравнению вида (6.4), либо уравнению (6.5) (при* $\mu \to \mu_0$, $(\dot{}) \to (')$, $t \to \tau$*).*

[54] Мещерский И В Работы по механике тел переменной массы - М -Л ГИТТЛ, 1949

[55] Дубошин Г Н //Астроном журнал 1930, Т 7, N 3-4, с 153-172

[56] Niţa, M M Teoria zborului spatial Bucureşti, Ed Acad rep soc Romania, 1973

[57] Радзиевский В В Задачи фотогравитационной небесной механики Небесная механика излучающих тел Докторская дис Гос Астрон Обсерв , Ленинград 1954

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(t)$ $a_1(t)$ *и* $a_0(t)$ *удовлетворяли уравнениям*

$$\ddot\mu - 2\frac{\dot\mu^2}{\mu} - 3a_1\dot\mu - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot a_1)\mu + b_0\mu^5\exp(6\int a_1 dt) = 0 \qquad (6\ 8)$$

$$\ddot\mu - 2\frac{\dot\mu^2}{\mu} - 3a_1\dot\mu - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot a_1)\mu + \frac{(b_0 + 2b_1^2)\mu^5\exp(6\int a_1 dt)}{(k \pm 3b_1\int\exp(3\int a_1 dt)\mu^2 dt)^2} = 0 \quad (6\ 9)$$

Теорема 6.7.2 (B) *Интегрирование задачи (6 7)-(6 9) сводится к интегрированию задачи (6 7), где* $\mu(t)$ *подчиняется закону*

$$\dot\mu = -(2a_1 + x_1^{-1}\dot x_1)\mu + k\exp((2\nu-3)\int a_1 dt)x_1^{\nu-3}\mu^\nu,\ 1 \le \nu \le 3, \qquad (6\ 10)$$

$k = -a/(1-\nu)$, *если* $\nu \neq 1$ *и* $k = \mp 3/2b_1$, *если* $\nu = 1$

Замечание 6.2. Полученные результаты автора по задаче ГМ и методу автономизации нашли применение в докторской диссертации [58] Возможности указанного метода не ограничиваются применением к ОНЗ двух тел с законом Ньютона как законом гравитации Открыты перспективы для исследования нестационарных задач небесной механики самого общего вида как двух, так и n тел, учитывающих не только переменность масс небесных тел, но и весьма произвольные силы взаимодействия между ними и со средой, а также обобщенных стационарных задач На важность таких постановок задач указывал Г Н Дубошин (см , например [59]) Систематическое применение метода преобразований к нестационарным задачам n тел впервые было дано в совместной работе автором и Б Е Гельфгатом [60], а в настоящее время продолжено автором (см [61])

Глава 7 посвящена **прямым** методам **нахождения инвариантных решений нелинейных эволюционных уравнений** Для нахождения инвариантных решений (типа бегущей волны и автомодельных) нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) в настоящее время применяются различные методы метод обратной задачи рассеяния, метод L-A пар Лакса, алгебро-геометрический метод, а также т н прямой метод Хироты и ряд других методов (см , например, [62], [63], [64], [65]) Что касается мето

---

[58] Беков А А Нестационарные задачи небесной механики Автореферат дис д ф м н М МГУ ГАИШ 1995

[59] Дубошин Г Н Небесная механика Аналитические и качественные методы М Наука 1975

[60] Беркович Л М Гельфгат Б Е // Сб Проблемы аналит механики теории устойчивости и управления М Наука 1975 (54 01

[61] Berkovich L M // Non stationary Dynamical Problems in Astronomy ed by Tuken B Omarov Published by NOVA Science Publishers Inc New York 2002 p 55 100

[62] Захаров В Е Манаков С В Новиков С П Питаевский Л П Теория солитонов Метод обратной задачи (под редакцией С П Новикова) М Наука 1980

[63] Калоджеро Ф Дегасперис А Спектральные преобразования и солитоны Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений М Мир 1985

[64] Абловиц М Сигур Х Солитоны и метод обратной задачи М Мир 1987

[65] Хирота Р //Сб ' Солитоны Ред Р Буллаф Ф Кодри (перевод с англ под ред С П Новикова)

да Хироты, то можно согласиться со следующей его оценкой, имеющейся в [66] " это исключительно мощный инструмент слово метод в данном случае не совсем подходит, потому что при использовании он очень сильно опирается на опытность и интуицию исследователя"

Поскольку эволюционные уравнения при этом приводятся к ОДУ то для нахождения точных решений были сделаны успешные попытки применения теста Ковалевской-Пенлеве В своей работе автор применил групповой анализ ОДУ в сочетании с методами автономизации и точной линеаризации, а также методом факторизации нелинейных дифференциальных операторов

Сначала рассматривается уравнение **Колмогорова-Петровского-Пискунова** (КПП), которое является нелинейным уравнением диффузии вида

$$u_t = ku_{xx} + F(u), \quad k = \text{const}, \tag{7 1}$$

где нелинейная функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0,\ F(u) > 0,\ F'(0) = Q > 0\ \ F'(u) < a \quad 0 < u < 1 \tag{7 2}$$

Оно встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, био логии и экологии Оно исследовалось в [67] в связи с задачей нахождения инвариантных решений типа **бегущей волны** $u(x,t) = u(\tau)$, $m = a\tau + bt$

Представителями этого класса являются уравнение

$$u_t = ku_{xx} + \alpha u(1-v)^2 \tag{7 3}$$

и уравнение Фишера (КППФ)

$$u_t = v_{xx} + u(1-u) \tag{74}$$

Эти уравнения важны для математической генетики

Уравнение (7 1), не связанное ограничениями (7 2) будем называть обобщенным уравнением КПП В работе произведена групповая классификация полулинейного ОДУ соответствующего (7 1) и представленною в виде

$$y'' + b_1 y' + \Phi(y) = O \tag{75}$$

Теорема 7.1.1 (Н) *Для того чтобы уравнение (7 5) допускало точечную симметрию $X \neq \partial/\partial x$, необходимо и достаточно, чтобы* $\Phi(y)$ и

М Мир 1983 с 175 192

[66] Додд Р Эилбек Дж Гиббон Дж Моррис Х Солитоны и нелинейные волновые уравнения М Мир 1988 с 105

[67] Колмогоров А Н Петровский И Г Пискунов Н С // Бюлл Московск гос ун та сер Мат Мех 1937 (1938) Т 1 N С с 1 26

X приняли один из следующих видов соответственно:

1^o. $\Phi(y) = b_0F(y) = r_1r_2\left(y^* + \frac{s}{r_1r_2}y^{*(2r_2-r_1)/r_1}\right)$, $X = e^{(r_1-r_2)x}(\partial_x + r_1y^*\partial_y)$,

2^o. $\Phi(y) = b_0F(y) = r_1r_2\left(y^* + \frac{s}{r_1r_2}y^{*(2r_1-r_2)/r_2}\right)$, $X = e^{(r_2-r_1)x}(\partial_x + r_2y^*\partial_y)$,

где $y^* = y + q/(r_1r_2)$;

3^o. $\Phi(y) = q+s\exp(2b_1^2y/q)$, $q \neq 0$, $X = e^{b_1x}(\partial_x - \frac{q}{b_1}\partial_y)$, $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$;

4^o.
$$\Phi(y) = s(y+q)^{-1}, \quad X = e^{-b_1x}(\partial x - b_1(y+q)\partial_y); \qquad (7.6)$$

5^o.
$$\Phi(y) = b_0F(y) = b_0[(y+\frac{q}{b_0}) + \frac{s}{b_0}(y+\frac{q}{b_0})^{-3}],\ b_1 = 0,\ b_0 \neq 0;$$
$$X_{1,3} = \exp(\mp 2\sqrt{-b_0}x)\left[\partial_x + \left(\mp\frac{q}{\sqrt{-b_0}} \mp \sqrt{-b_0}y\right)\partial_y\right];$$

6^o.
$$\Phi(y) = b_0y + \frac{1}{4s}(b_0^2 - \frac{36}{625}b_1^4) + sy^2,$$
$$X = \exp(\frac{b_1}{5}x)\{\partial_x - [\frac{2}{5}b_1y - \frac{1}{5s}b_1(b_0 - \frac{6}{25}b_1^2)]\partial_y\},$$

где r_1 *и* r_2 *удовлетворяют уравнению* $r^2 + b_1r + b_0 = 0$.

Теорема 7.1.2 (НЭ). *Уравнение (7.5),(7.6) интегрируется в квадратурах; при этом соответствующие замены переменных и преобразованные уравнения имеют следующий вид:*

1) $y = e^{r_1x}z - q/b_0$, $dt = e^{(r_2-r_1)x}dx$, $\ddot z + sz^{(2r_2-r_1)/r_1} = 0$,
2) $y = e^{r_2x}z - q/b_0$, $dt = e^{(r_1-r_2)x}dx$, $\ddot z + sz^{(2r_1-r_2)/r_2} = 0$;
3) $y = z - q/b_1x$, $dt = e^{-b_1x}dx$, $\ddot z + se^{2b_1^2z/q} = 0$;
4) $y = e^{-b_1x}z - q$, $dt = e^{b_1x}dx$, $\ddot z + s/z = 0$;
5) $y = e^{\pm\sqrt{-b_0}x}z - q/b_0$, $dt = e^{\mp 2\sqrt{-b_0}x}dx$, $\ddot z + s/z^3 = 0$;
6) $y = e^{-2b_1/5x}z + \frac{1}{2s}(-b_0 + \frac{6}{25}b_1^2)$, $dt = e^{-b_1/5x}dx$, $\ddot z + sz^2 = 0$.

Примечание 7.1. Теорема 7.1.1 дает полную групповую классификацию уравнения (7.5). Менее полная классификация содержится в [68]. А согласно теореме 7.1.2 более эффективно по сравнению с [68] проведено сведение уравнений (7.5),(7.6) к интегрируемому в квадратурах виду Получены также точные элементарные однопараметрические решения уравнений (7.5),(7.6) для найденных законов изменения $\Phi(y)$.

Теорема 7.1.4 (НЭ). *1) Решение краевой задачи для уравнения КПП*

$$u_t - u_{xx} - (u - u^{\frac{2r_2-r_1}{r_1}}) = 0,\ r_1 < r_2;\ u|_{x\to-\infty} \to 0,\ u|_{x\to+\infty} \to 1,\ 0 < u < 1,$$

[68] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики Ред. Виноградов А М . Красильщик И С - М Факториал, 1997 с 57

имеет вид $u(\tau) = (\mp 1 + c\exp(r_1 - r_2)\tau)^{\frac{r_1}{1-r}}$, *где* $\tau = ax + bt$, $a^2 = 1/(r_1 r_2)$, $b = (r_1 + r_2)/(r_1 r_2)$,

2) Решение краевой задачи $u_t - u_{xx} + (u - u^2) = 0$, $u|_{x\to-\infty} \to 1$ $u|_{x\to+\infty} \to 0$, $0 \le u \le 1$, *имеет вид (при* $\tau = ax + bt$*)*

$$u(\tau) = \frac{1 + 2c\exp(-b_1/5\tau)}{(c\exp(-b_1/5\tau) + 1)^2}, \text{ где } b/a^2 = b_1,\ 1/a^2 = 6/25b_1^2,\ b_1 < 0$$

Получены также комплексные решения для уравнения Фишера

Эта теорема усиливает соответствующие результаты, содержащиеся в монографии [69] и полученные более громоздким путем с помощью метода Хироты Она также дополняет результаты работы [70] о точных решениях уравнения (7 4)

Отметим, что автором установлена связь между уравнениями КПП и Эмдена-Фаулера, а также связь между полуэмпирическими уравнениями **Семенова и Зельдовича,** играющими важную роль в теории цепных реакций и теории горения и взрыва соответственно, и уравнением КПП

Для нахождения инвариантных решений может быть применен метод факторизации

Теорема 7.2.5 (В) *Полулинейное уравнение КПП*

$$u''(\tau) - (r_1 + r_2)u'(\tau) + r_1 r_2 u - r_1 r_2 u^{\frac{2r_2 - r_1}{r_1}} = 0,\ 0 < r_1 < r_2 \qquad (7\ 7)$$

допускает факторизацию

$$\left(D - r_2 \mp r_2 u^{\frac{r_2 - r_1}{r_1}}\right)\left(D - r_1 \pm r_1 u^{\frac{r_2 - r_1}{r_1}}\right) u = 0,\ D = d/d\tau \qquad (7\ 8)$$

Коэффициенты уравнения (7 7), а также показатели их нелинейности связаны соотношением (5 30)

В работе рассматриваются также квазилинейные параболические уравнения 2-го порядка которые лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в природе

В [71] для квазилинейного параболическою уравнения

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1} \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \qquad (7\ 9)$$

описывающего процесс горения, найдено следующее *автомодельное не ограниченное решение*

$$u(t,x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma}\left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\frac{\pi x}{L_s}\right]^{1/\sigma},\ |x| < L_s/2,\ L_s = \frac{2\pi\sqrt{\sigma+1}}{\sigma} \qquad (7\ 10)$$

---

[69] Маслов В П Данилов В Г Волосов К А Математическое моделирование процессов тепло и массопереноса М Наука 1987 с 184

[70] Ablowitz M J Zeppetella A // Bull Math Biol 1979 Т 41 p 835 840

[71] Самарский А А Галактионов В А Курдюмов С П Михаилов А П Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений М Наука 1987

Процесс горения лежит целиком в ограниченной области $|x| < L_s/2$, где L_s – фундаментальная длина S-режима. Вне ее, т.е. при $|x| \geq L_s/2$, в течение всего времени существования режима с обострением $(t \in (0, T_0))$ имеем $u = 0$.

Автор в данной работе унифицировал подход для построения класса автомодельных решений, характеризующего локализацию процесса горения При этом проведена точная линеаризация нелинейного ОДУ, описывающего указанное автомодельное решение. Нахождение решения (7.9) вида $u(t,x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} y(x)$, $0 < t < T_0 < \infty$, $x \in \mathbf{R}$, где $y(x)$ удовлетворяет ОДУ

$$y'' + \frac{\sigma}{y} y'^2 + y - \frac{1}{\sigma} y^{1-\sigma} = 0, \quad (\sigma \neq 0,\ \sigma \neq -1,\ \sigma \neq -2), \qquad (7\ 11)$$

привело к следуюшим результатам:

Предложение 7.3.1 (НЭ). *Для уравнения (7.11) справедливы утверждения: 1) преобразованием*

$$Y = y^{\sigma+1}\sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}}, \quad dt = \frac{1 - \frac{1}{\sigma} y^{-\sigma}}{\sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}}} dx$$

оно линеаризуется: $\ddot{Y} + Y = 0$, $\dot{()} = d/dt$;

2) обладает первыми интегралами·

$$y'^2 = a^2[Cy^{-2\sigma} - y^2(-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1})],$$

и, кроме того, 3) имеет однопараметрические семейства решений:

$$y^{-\sigma} = \frac{2c\sigma(\sigma+2)}{\sigma+1} \frac{\exp(\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}} x)}{(1 + c\exp(\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}} x))^2}, (\sigma \neq 0,\ \sigma < -1,\ \sigma \neq -2), \text{ или } (c = 1)$$

$$y = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \begin{cases} \left(\cos^2(\frac{\sigma}{2\sqrt{\sigma+1}} x + c^*)\right)^{1/\sigma}, \sigma > -1,\ \sigma \neq 0, \\ \left(\cosh^2(\frac{\sigma}{2\sqrt{-\sigma-1}} x + c^*)\right)^{1/\sigma}, \sigma < -1,\ \sigma \neq -2 \end{cases}$$

Рассмотрены также особые случаи *а — — 1 к а* $= -2$

Как уже отмечалось, в [71] было указанолишь элементарное неограниченное решение (7.10).

В настоящее время встречаются различные классы нелинейных эволюционных уравнений высших порядков (см., например, [72], [73], [74]).

[72]Лакс П Д // Математика Период сб переводов иностр статей, 1969, Т 13, N 5, с 128 150

[73]Новиков С П // Функц Анализ и Прил , 1974, Т 8, N 3, с 54-66

[74]Веденяпин В.В Кинетические уравнения Больцмана и Власова Москва, Физматлит, 2001, с 74-81

В работе построен новый класс нелинейных эволюционных уравнений НЭУ n-го порядка. зависящий от двух произвольных функций и п параметров, для решений которого справедлив соответствующий принцип нелинейной суперпозиции (ПНС). Построение осуществляется на основе МТЛ.

Теорема 7.4.1 (Н) *Для того чтобы НЭУ*

$$y_t = F(y, y', \ldots, y^{(n)}), \ y = y(t, x) \tag{7 12}$$

нелинейной подстановкой вида $y - v(y)z$ *приводилось к линейному эволюционному уравнению (ЛЭУ)*

$$z_t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(x). \tag{7 13}$$

необходимо и достаточно. чтобы (7.12) могло быть представлено в форме факторизации

$$\frac{\exp(\int f dy) y}{\int \exp(\int f dy) dy} \frac{\partial y}{\partial t} = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{y} - \frac{\exp(\int f dy)}{\int \exp(\int f dy) dy} \right) \frac{\partial y}{\partial x} - r_k \right], \tag{7 14}$$

где r_k *- корни характеристического уравнения (3.12). При этом линеаризующая подстановка имеет явный вид* $z = \beta \int \exp(\int f dy) dy$ $\beta = const \neq 0$.

Для уравнения (7.12), (7 14) справедлив принцип нелинейной суперпозиции (ПНС)

$$\int \exp\left(\int f dy\right) dy = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k(t, x),$$

где c_k - произвольные постоянные, а $z_k(t, x)$ линейно независимые частные решения ЛЭУ (7 13).

Примечание 7.2. В идемпотентном анализе (см., например, [75]) принцип соответствия (в смысле Маслова) является ПНС

При нахождении решений НЭУ типа бегущей волны могут получаться ОДУ. относящиеся к классу линеаризуемых уравнений

Теорема 7.4.2 (В) *Для того чтобы НЭУ (7.12) допускало решение типа бегущей волны* $y(\tau) = y(x - bt)$ *и при этом соответствующее ОДУ линеаризующим преобразованием*

$$y = v(y)z, \quad ds = u(y)d\tau, \ m = x - bt \tag{7 15}$$

[75] В П Маслов, В Н Колокольцов Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении М ФИМЛ, 1994

приводилось к виду

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k z^{(n-k)}(s)+bz'(s)=0,\ b_0=1,\ (')=d/ds, \tag{7 16}$$

необходимо и достаточно, чтобы (7 12) было представимо в виде

$$\frac{\varphi^{\frac{3n^2-3n+2}{2n}}\exp(\int f dy)y}{\int\varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}}\exp(\int f dy)dy}\frac{\partial y}{\partial t}=N_n y, \tag{7 17}$$

где $N_n y$ *является левой частью уравнения (5 4), а* r_k, A" $=\overline{1,n}$, *- корни характеристического уравнения (3 12), или* е *лексикографической форме*

$$\varphi^{n-1}y_t=\overline{N}_n y, \tag{7 18}$$

где $\overline{N}_n y$ *является левой частью уравнения (5 5) При этом подстановка (7 15), приводящая к линейному ОДУ (7 16), имеет вид*

$$z=\beta\int\varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}}\exp(\int f dy)dy,\ ds=\varphi d\tau,\ \tau=x-bt$$

Теорема 7.4.3 (В) *Пусть* $z_1(s)$, , $z_n(s)$ *- частные линейно независимые решения уравнения (7 16) Тогда общий интеграл (7 18) есть* $z=c_1z_1(s)+\quad+c_nz_n(s)$, *где* c_1, , c_n *- произвольные постоянные, и эта формула есть принцип линейной суперпозиции (ПЛС) Мы получим ПНС для (7 12),(7 17) согласно формулам*

$$\int\varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}}\exp(\int f dy)dy=\sum_{k=1}^{n}c_k z_k(s),\ ds=\varphi d\tau\quad \tau=x-bt$$

Общий вид НЭУ 2-го порядка, для которого выполняются условия теоремы 7 4 2, есть

$$\varphi y_t=y_{xx}+fy_x^2+2b_1\varphi y_x+b_2\varphi\exp(-\int f dy)\int\varphi\exp(\int f dy)dy \tag{7 19}$$

Подстановка $z=\beta\int\varphi\exp(\int f dy)dy$, $ds=\varphi d\tau$, $\tau=x-bt$ приводит (7 19) к линейному уравнению $z''(s)+(2b_1+b)z'(s)+b_2z(s)=0$

Общий вид НЭУ порядка $n=3$, принадлежащий к классу (7 18), есть

$$\varphi^2y_t=y_{xxx}+3fy_xy_{xx}+(\frac{1}{3}\frac{\varphi_{yy}}{\varphi}-\frac{5}{9}\frac{\varphi_y^2}{\varphi^2}-\frac{1}{3}f\frac{\varphi_y}{\varphi}+f^2+f_y)y_x^3+$$

$$+3b_1\varphi[y_{xx}+(f+\frac{1}{3}\frac{\varphi_y}{\varphi})y_x^2]+3b_2\varphi^2y_x+b_3\varphi^{5/3}\exp(-\int f dy)\int\varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy \tag{7 20}$$

Подстановка $z=\beta\int\varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy$, $ds=\varphi d\tau$, $\tau=x-bt$ приводит (7 20) к линейному уравнению $z'''(s)+3b_1z''(s)+(3b_2+b)z'(s)+b_3z(s)=0$

Заключение.

Подведем некоторые итоги проделанной работы, открывающие перспективы дальнейших исследований. На всем ее протяжении широко использовался метод факторизации дифференциальных оператоов, развитый автором в конструктивном духе. Факторизации линейных дифференциальных операторов проводятся не только в основном дифференциальном поле, но и в его алгебраическом и трансцендентном расширениях. В результате этого удалось значительно продвинуть теорию интегрируемости линейных ОДУ, особенно высших порядков. Само понятие интегрируемости в конечном виде было расширено благодаря включению в него не только элементарных функций и решений в квадратурах, но и решений в терминах наперед заданного эталонного уравнения.

Область применения классического метода точечных симметрии С.Ли была расширена, а благодаря использованию метода автономизации удалось во многих важных случаях сделать процесс нахождения симметрии гораздо более эффективным по сравнению с традиционным.

Принципиально важным является открытие факторизации нелинейных дифференциальных операторов, что дало возможность по-новому взглянуть на проблему интегрирования нелинейных уравнений. Новый метод точной линеаризации, позволивший сводить нелинейные уравнения к линейным, привел к обобщению классического (хотя и мало известного) принципа нелинейной суперпозиции.

Полученные результаты находят применение не только в теории дифференциальных уравнений, но и в таких областях науки как теория параметрических и нелинейных колебаний, небесная механика, механика тел переменной массы, теория динамических систем, нелинейная математическая физика, компьютерная алгебра.

В заключение отметим, что, по мнению автора, дальнейшая разработка и применение развиваемой теории позволит пролить новый свет как на многие уже решенные, так и на нерешенные пока задачи естествознания [76]

[76] Так, состоявшееся в ИПМ им М.В.Келдыша РАН плодотворное обсуждение работы стимулировало автора к нахождению новых инвариантных решений нелинейных уравнений диффузии и теплопроводности.

Библиография

[1] Беркович Л М Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений Методы в приложения - Москва НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 463 с

[2] Беркович Л М Преобразование обыкновенных линейных диффренциальных уравнений Куйбышевский ун -т, Куйбышев, 1978, 92 с

[3] Беркович Л М Факторизация и преобразования обыкновенных диффренциальных уравнений Изд Саратовск ун , Саратов, 1989, 192 с

[4] Беркович Л М Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений //Дифференц Уравн , 1971, Т 7, N 2, 353-356

[5] Беркович Л М Метод точой линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка //Прикл Матем Мех , 1979, Т 43, N 4, 629-638

[6] Беркович Л М Задача Гильдена-Мещерского и законы изменения массы //Докл АН *СССР,* 1980, Т 250, N 5, 1088-1091

[7] Беркович Л М Преобразование задачи Гильдена-Мещерского к стационарному виду и законы изменения массы //Прикл Матем Мех , 1980, Т 44, N 2, 354-357

[8] Berkovich L M Gylden-Meshcherskii problem //Celestial Mechanics, 1981, Т 24, 407-429

[9] Беркович Л М Об интегрируемости задачи Гильдена-Мешерского //Прикл Матем Мех , 1982, Т 46, N 1, 165-167

[10] Berkovich L M Transformations and factorization of ordinary nonlinear differential equations// EQUADIFF 5, Bratislava, 1981, Teubner Texte zur Math , Leipzig 1982, Т 47, 41-44

[11] Беркович Л М О преобразовании дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля //Функц Анализ и его Прил , 1982, Т 16, N 3, 42-44

[12] Беркович Л М Задача Альфана об эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных уравнений //Успехи Матем Наук, 1986, Т 41, N 1, 183-184

[13] Беркович Л М Абсолютные инварианты и уравнение Кортевега - де Фриза //Сб "Теоретико-групповые методы в физике", Т 1, М Наука, 1986, 505 513

[14] Беркович Л М Приводимые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения третьего порядка //Дифференц Уравн , 1987, Т 23, N 5, 887 890

[15] Беркович Л М Родственные линейные дифференциальные уравнения второго порядка //Дифференц Уравн , 1989, Т 7, N 2, 191-201

[16] Беркович Л М Преобразования переменных как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения *Колмогорова-Петровского-Пискунова* и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности //Докл РАН, 1992, Т 322, N 4, 635-640

[17] Беркович Л М Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова и связанных с ним уравнений Семенова и Зельдовича //Докл РАН, 1992, Т 322, N 5, 823-827

[18] Berkovich L M Direct methods of finding exact invariant solutions of KPP equation and some other nonlinear heat and diffusion equations //Lie groups and their applications, 1994, Т 1 N 1, 27-37

[19] Berkovich L M The method of an exact linearization of n^{th} order ordinary differential equations //J Nonlin Math Phys , 1996, Т 3, N 3-4, 341 350

[20] Беркович Л М Уравнение Эмдена Фаулера и его обобщения групповой анализ и точные решения Материалы междунар конф "Чебышевские чтения, посв 175 летию со дня рождения П Л Чебышева" Т 1, Изд МГУ, 1996, 57-62
[21] Berkovich L M The generalized Emden Fowler equation //Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, 1997, T 1, 155 163
[22] Беркович Л М Об элементарных инвариантных решениях типа бегущей волны для уравнения Колмогорова Петровского-Пискунова //Докл РАН, 1998, Т 359, N 6 731-734
[23] Беркович Л М Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и инвариантные решения уравнений математической физики //Совместные заседания семинара им И Г Петровского и Моск Мат общ , Успехи Мат Наук, 1998, Т 54, N 4, с 208
[24] Berkovich L M Factorization of nonlinear ordinary differential equations and linearization //International Congress of Mathematics, Berlin, 1998, Plenary and Invited Lectures, 48 49
[25] Беркович Л М Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация //Докл РАН, 1999, Т 368, N 5, 604 608
[26] Berkovich L M Transformations of ordinary differential equations local and nonlocal symmetries //Proc of Inst of Math of NAS of Ukraine, 2000, T 30 Part 1, 25 34
[27] Беркович Л М Точная линеаризация нелинейных обыкновенных автономных дифференциальных уравнении //Программирование, 2000, Т 26, N 1, 25-27
[28] Berkovich L M The integration of ordinary differential equations factorization and transformations // Mathematics and Computers in Simulations, 2001, T 57, 175 195
[29] Berkovich L M On a method of exact linearization of ordinary differential equations and on a new class of higher order nonlinear evolutionary equations //Max Planck-Institut fur Mathematik, Bonn Preprint Series 2001 (50), 9 P
[30] Berkovich L M On the method of exact linearization of autonomous ordinary differential equations //Max-Planck Institut fur Mathematik, Bonn Preprint Series 2001 (73), 24 P
[31] Berkovich L M Classification of n^{th} order ordinary differential equations with power nonlinearity //Актуальные проблемы математики Математические модели современного естествознания Уфа 2002, 174 184
[32] Berkovich L M On methods of factorization and exact linearization of ordinary differential equations //"Progress in Nonlinear Science" Proceedings of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary A A Andronov, Vol 1, Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics, Nizhny Novgorod, Inst of Applied Physics RAS, University of Nizhny Novgorod, 2002, 190-195
[33] Berkovich L M Research of non stationary problems of celestial mechanics transformation to autonomous forme //Non stationary Dynamical Problems in Astronomy, ed by Tuken B Omarov, Published by NOVA Science Publishers, Inc , New York, 2002, 55-106
[34] Berkovich L M On the method of exact linearization and on new class of higher order nonlinear evolutionary equations // International Congress of Mathematics Bejing 2002, August 20 28 Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, 282-283
[35] Беркович Л М Новый класс нелинейных эволюционных уравнений // Докл РАН, 2003, Т 390, N 5
[36] Беркович Л М Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений //Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия 2003, спецвыпуск, 5 70

Подписано в печать 29 05 2003 г
Формат 60 x 84 Бумага офсетная Печать оперативная
Тираж 100 экз Заказ N 50
443011 г Самара ул Академика Павлова, 1
Отпечатано ООО «Универс-групп»