Ордена Ленина институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша
Академия наук СССР

На правах рукописи

Аминова Ася Васильевна

ИНВАРИАНТНО - ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.03 - математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 1991

Работа выполнена в Казанском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И. Ульянова-Ленина.

Официальные оппоненты: Н.Х.Ибрагимов – доктор физико-математических наук,профессор;
А.С.Мищенко – доктор физико-математических наук,профессор;
А.П.Широков – доктор физико-математических наук,профессор.

Ведущая организация – Белорусский государственный университет имени В.И.Ленина

Защита состоится "____" X – XI ______ I99Iг. в ___ ч. на заседании специализированного Совета Д 002.40.03 при Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР по адресу: I25047, Москва, Миусская пл. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР.

Автореферат разослан "09" 09 I99Iг.

Ученый секретарь
специализированного Совета,
д-р физ.-мат. наук Е.И.Леванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность темы</u>. Проективное преобразование псевдоримановa многообразия M^n есть автоморфизм индуцированной римановой связностью проективной структуры, который переводит геодезические линии в M^n снова в геодезические. Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Достаточно упомянуть, что алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнений Кортевега - де Фриза является подалгеброй проективной (точнее, аффинной) алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать, по выражению Н.Х.Ибрагимова, как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой. Указанное обстоятельство получает свое объяснение, когда мы обнаруживаем, что наибольшей группой точечных симметрий уравнений динамики Ньютона является 24 - мерная проективная группа, действующая в 4 -мерном плоском пространстве-времени. Этот результат получен в рамках развитого в диссертации геометрического подхода, основанного на идеях С.Ли и Э.Картана. Создавая теорию пространств с проективной связностью, Э.Картан настойчиво подчеркивал её значение для исследования дифференциальных уравнений. Методы дифференциальной геометрии, в частности, методы теории Картана, дают систематический подход к определению локальных и нелокальных симметрий для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными и нахождению их решений.

Последние десятилетия отмечены бурным проникновением новейших геометрических методов в теоретическую физику. Это связано с развитием теории калибровочных полей, открытием суперсимметрии, появлением супергравитации, теории струн и суперструн, оживлением интереса к многомерным теориям Калуцы-Клейна. Наряду с имметриями важную роль в этих теориях играют расслоенные пространства, однако само понятие расслоенного пространства, испольуемого в теоретической физике, нуждается в группе преобразоваий для своего определения.

В основе перечисленных быстро развивающихся областей теореической физики лежит групповой подход, включающий рассмотрение окализованных групп внешних, т.е.пространственно-временных, симетрий (изометрической, гомотетической, конформной и аффинной групп), а также групп внутренних симметрий, имеющих $n^2 + 2n$-плетные представления (n = I - электрослабые взаимодействия , n = 2,3 - сильные взаимодействия, адроны, кварки, n = 4 - великое объединение), при этом генераторы присоединенных представлений и структурные константы алгебр Ли входят непосредственно в лагранжианы и определяют физические эффекты.

Ареной действия современных физических полевых теорий является многомерное искривленное лоренцево многообразие ("пространство-время"), геодезические линии которого определяют пути движения пробных тел - основного источника информации о структуре физических полей.

Теоремы А.З.Петрова о трех типах полей тяготения и разработанная им и учениками его школы классификация полей тяготения по группам симметрий в форме изометрических (А.З.Петров,В. Р.Кайгородов), конформных (Р.Ф.Билялов) и других преобразований стали основой программы поиска точных решений уравнений Эйнштейна в общей теории относительности и положили начало множеству работ, в которых физические свойства материальных систем, а также гравитационного, электромагнитного и других физических полей, переносящих взаимодействия, определялись группами автоморфизмов различных объектов геометрической или физической природы.

Принципиальное значение для нахождения решений полевых уравнений имеет выбор анзаца - общей конфигурации полевых потенциалов, устанавливаемой из теоретико-групповых соображений (анзац Виттена, процедура Форгача - Мантона систематического построения анзацев янг-миллсовских и хиггсовских полей для широкого класса пространственно-временных симметрий и т.д.).

С другой стороны, в соответствии с теоремой Э.Нётер пространственно-временные симметрии используются для построения законов сохранения, составляющих основу любой физической теории. Согласно теореме Э.Нётер и исследованиям В.Девиса, М.Мосса, Г.Катцина и Дж.Левина проективные и аффинные движения приводят к фундаментальным механическим и полевым законам сохранения. Главная трудность при построении таких законов заключается, по мнению авторов, в нахождении указанных движений.

Говоря о геометрическом аспекте проблемы определения алгебр Ли проективных и аффинных движений, уместно вспомнить замечание, сделанное Ш.Кобаяси и К.Номидзу во втором томе их монографии по дифференциальной геометрии:"Помимо того, что группа автоморфизмов есть группа Ли в случаях, перечисленных выше ... (т.е. в случаях изометрической, аффинной, конформной и др. групп)... известно очень мало о структуре таких групп Ли."

Впервые непрерывные (локальные) группы проективных преобразований римановых пространств M^n рассматривались С.Ли для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений в пространствах с линейной связностью связано с именами Э.Картана, Л.П. Эйзенхарта, М.С.Кнебельмана, Т.Томаса, И.А.Схоутена, К.Яно , И.П.Егорова, Г.Врэнчану, Ш.Кобаяси и др. Основы теории проективных, или геодезических отображений псевдоримановых многообразий заложены в трудах Е.Бельтрами, У.Дини, Т.Леви-Чивиты,Г. Фубини, Л.П.Эйзенхарта и П.А.Широкова. Важные результаты в этой области получены А.З.Петровым,Н.С.Синюковым,А.С.Солодовниковым,В.И.Голиковым и Г.И.Кручковичем.

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n , рассматриваемых в малом, максимальная проективная группа совпадает с проективной группой псевдоевклидова пространства,т.е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от n^2+2n параметров. В пространствах M^n непостоянной кривизны размерность максимальной проективной группы не превосходит число n^2-2n+5 (И.П.Егоров),причем в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) либо изометрий. В 1903г. в "Записках Туринской Академии наук" появилась работа Г.Фубини "О группах геодезических преобразований", которая положила начало систематическому определению и изучению римановых пространств, допускающих инфинитезимальные проективные преобразования. Спустя полвека А.С.Солодовников продолжил исследования Фубини и до конца решил поставленную им задачу,- в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация римановых пространств M^n, $n \geqslant 3$ по (локальным) группам проктивных преобразований, более широким, чем группы гомотетий. ыводы Г.Фубини и А.С.Солодовникова опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик.Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению.

Целью работы является развитие методов теории автоморфизмов геометрических структур и их приложение к групповому анализу дифференциальных уравнений математических моделей физики и механики.

В диссертации решаются три основные задачи:

I) определение всех псевдоримановых метрик с соответствующими геодезическими;

2) определение всех псевдоримановых многообразий сигнатуры (+ – ... –) (лоренцевых многообразий) размерности $n > 3$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них – максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры;

3) определение всех двумерных псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетические проективные движения, и для каждого из них – максимальных проективной и аффинной алгебр Ли (проблема Ли).

Первая задача есть классическая геометрическая проблема, возникшая в связи с задачей динамики о преобразованиях уравнений движения механических систем, сохраняющих траектории, и более I00 лет – со времен Бельтрами, Дини и Леви-Чивиты – стоявшая на повестке дня. Вторая и третья задачи, как отмечалось выше, берут свое начало в трудах Ли и, будучи тесно связанными с первой задачей, имеют важные и актуальные физические аспекты.

Научная новизна. В диссертации развит систематический геометрический подход к определению локальных и нелокальных симметрий для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными и нахождению их решений. Разработана техника интегрирования тензорных дифференциальных уравнений с неизвестной билинейной формой на псевдоримановых многообразиях произвольных сигнатуры и размерности. Получены следующие новые результаты.

I. Определены все проективно эквивалентные римановы связности.

2. Дано общее решение задачи определения всех псевдоримановых метрик с соответствующими геодезическими.

3. Получена классификация лоренцевых многообразий L^n

размерности $n > 3$ по максимальным негомотетическим проективным и аффинным алгебрам Ли.

4. Решена проблема Ли.

5. Доказано, что специальные конциркулярные векторные поля порождают алгебры Ли инфинитезимальных изометрических, конформных, аффинных и проективных преобразований с характерной цепной структурой.

Решена задача о проективных и аффинных движениях конциркулярного вида на псевдоримановых многообразиях $\mathcal{M}^n$.

6. Введено понятие о почти проективных движениях на многообразиях с аффинной (в частности, римановой) связностью и исследованы их свойства.

7. Проведен групповой анализ уравнений геодезических на многообразиях с аффинной (в частности, римановой) связностью.

Найдена размерность максимальной группы симметрий уравнений динамики Ньютона в $\mathbb{R}^N$ и показано, что эта группа совпадает с проективной группой (N+ I) - мерного плоского пространства-времени.

8. Получено обобщение на n -мерный случай теоремы Ли о размерности группы симметрий уравнений $d^2y/dx^2=f(x,y,dy/dx)$.

9. Установлена связь проективных преобразований псевдориманова многообразия $\mathcal{M}^n$ с симметриями гамильтоновых систем и преобразованиями Ли - Беклунда уравнений Гамильтона - Якоби с квадратичными гамильтонианами.

IO. Показано, что группы аффинных и проективных преобразований псевдоримановых многообразий $\mathcal{M}^n$ являются группами обобщенных движений Н.Х.Ибрагимова. Найдены границы дефектов многообразий $\mathcal{M}^n$ относительно этих групп.

II. Найдены волновые решения уравнений единых теорий поля Эйнштейна и Боннора в пространстве-времени с симметриями в форме проективных (аффинных) движений.

I2. С помощью системы аналитических вычислений REDUCE получены два класса решений уравнений Эйнштейна - Рариты - Швингера и уравнений Эйнштейна - Рариты - Швингера - Максвелла, описывающих поля гравитонов, гравитино и электромагнитное поле в рамках классической $\mathcal{N}$ = I супергравитации в пространстве - времени с плосковолновой метрикой.

Составлена программа для вычисления характеристики Сегре симметричной билинейной формы.

Практическая значимость работы. Существуют разные способы отождествления геодезических линий псевдоримановых многообразий с траекториями консервативных и неконсервативных динамических систем, которые открывают широкие возможности для приложения результатов исследования симметрий уравнений геодезических в механике.

Проективно эквивалентные метрики и связности (гл.2) могут использоваться для решения различных геометрических задач, например, проблемы определения симметрических и Риччи - симметрических пространств, исследования геодезических и т.д.

Успешное применение подвижного косонормального репера к решению классической задачи с более чем столетней историей наводит на мысль, что с использованием косореперов может быть связан дальнейший прогресс в решении старых и новых геометрических задач, включающих рассмотрение билинейных форм на псевдоримановых многообразиях, а также разнообразных задач общей теории относительности, единых теорий поля, супергравитации и других областей современной теоретической физики, где широко применяется метод подвижного репера.

Полученные в главах 3 -5 результаты могут использоваться для исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2 -го порядка, а также гамильтоновых систем и уравнений Гамильтона - Якоби с квадратичными гамильтонианами.

Определенные в гл.4 лоренцевы метрики могут служить анзацами при построении теоретико - полевых физических моделей, а допускаемые ими инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования - генераторами механических и полевых законов сохранения в этих теориях.

Структурные константы проективных и аффинных алгебр Ли и определенные с их помощью формы Киллинга можно использовать для определения лагранжианов калибровочных полей. Левоинвариантные метрики и левоинвариантные векторные поля на группах Ли, построенных по структурным константам с помощью стандартной процедуры, могут стать основой обобщенных теорий Калуцы - Клейна.

Первые интегралы уравнений геодезических, связанные с проективными движениями,могут использоваться для изучения геодезических, определяющих крупномасштабную структуру пространства - времени.

$\mathcal{K}$ - пространства могут найти применение в процедуре квантования полей в искривленном пространстве, а конциркулярные движения (гл.3)-при изучении равноускоренного движения частиц в гравитационном поле, описываемом теорией Эйнштейна.

Результаты исследования проблемы Ли (гл.5) могут использоваться в теории лагранжевых систем с одной степенью свободы, а также в теории струн, в конформных теориях поля, в двумерной гравитации, в теории солитонов и σ - моделей.

Найденные в гл.5 первые квадратичные интегралы уравнений геодезических можно использовать для изучения свойств геодезических и построения с помощью машинной графики двумерных моделей, подобных плоскости Лобачевского или модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Эти модели могут найти применение в технике при расчете элементов современных конструкций.

Рассмотрение почти проективных движений (гл. 6) открывает новые перспективы в исследовании проблемы моделирования физических полей (А.З.Петров) и может быть использовано для получения анзацев теоретико - полевых физических моделей.

Предложенный пакет программ для вычислений в $\mathcal{N} = 1$ супергравитации (гл. 7) можно использовать для физических и геометрических исследований. Программа для вычисления характеристики Сегре симметричной билинейной формы может использоваться для автоматизации геометрических вычислений, связанных с проективными и аффинными преобразованиями, а также для изучения физической структуры пространства - времени, определяемой типом тензора энергии - импульса.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли апробацию на

Ш Советской гравитационной конференции (Ереван, 1972), IУ Всесоюзной конференции "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации" (Москва, 1981), УI Советской гравитационной конференции (Москва, 1984), УП Всесоюзной конференции "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации" (Ереван, 1988), семинарах Института теоретической физики АН УССР (Киев, 1971, 1973);

У и УI Всесоюзных конференциях по современным проблемам геометрии (Самарканд, 1972, Вильнюс, 1975), Всесоюзной научной конференции по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского" (Казань, 1976), УШ Всесоюзной научной конференции по современным проблемам дифференциальной геометрии (Одесса, 1984), IX Всесоюзной геометрической конференции (Кишинев, 1988);

Международном симпозиуме "Теоретико - групповые методы в механике" (Новосибирск, 1978), 10 и 11 Международных конференциях по общей теории относительности и гравитации (Падуя,1983, Стокгольм, 1986), У Гроссмановской конференции (Западная Австралия, 1988);

Всесоюзном геометрическом семинаре им. Г.Ф.Лаптева (Москва, 1976, 1990), семинаре Московского государственного университета под руководством проф. Н.Х.Ибрагимова (Москва,1991), семинаре Московского государственного университета под руководством проф. А.С.Мищенко (Москва, 1991), семинаре Белорусского государственного университета под руководством проф. А.С.Феденко (Минск, 1991);

Семинаре ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР под руководством чл.-корр. АН СССР С.П.Курдюмова (Москва, 1991);

Всесоюзной школе-семинаре "Теоретико - групповые и компьютерно - алгебраические методы исследования нелинейных математических моделей динамических систем" (Рахов, 1989),Всесоюзной школе - совещании "Основания современной физики" (Сочи, 1991) и других семинарах, совещаниях и конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 50 работах, список которых приведен в конце автореферата. Общее число публикаций по теме диссертации - 75.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав (36 параграфов), заключения и списка литературы, включающего 490 названий. Общий объем диссертации - 390 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава (§§1 - 7) содержит предварительные сведения: о геодезических отображениях, проективной связности, проективных,аффинных и конформных преобразованиях. В ней приводится краткий исторический обзор результатов,относящихся к проблемам геодезических отображений и проективных преобразований псевдор мановых многообразий, рассматриваются их физические приложения.

В § 4 обсуждаются групповые свойства уравнений геодезических в пространстве $\mathcal{M}^n$ с аффинной (в частности, римановой) связностью ∇ (Γ^i_{jk}). Доказывается, что группа точечных симметрий уравнений геодезических, параметризованных одной из зависимых переменных, например, x^n ("параметризация Картана"):

$$\ddot{x}^\alpha + a_{\beta\gamma}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + b^\alpha_{\beta\gamma}(x)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + c^\alpha_\beta(x)\dot{x}^\beta + d^\alpha(x) = 0,$$

($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$) есть группа проективных преобразований в $\mathcal{M}^n$. Параметризация Картана позволяет исключить из уравнений геодезических с аффинной параметризацией:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

"лишнюю" переменную t и обеспечить действие группы симметрий в пространстве $\mathcal{M}^n$. В случае аффинной параметризации группа симметрий действует в расширенном пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{M}^n$, точнее, $T \times U$, где $T \subset \mathbb{R}$, а U – область карты в $\mathcal{M}^n$.

Симметрии уравнений геодезических с аффинной параметризацией порождаются специальными конциркулярными и параллельными векторными полями, а также аффинными и специальными проективными движениями (коллинеации кривизны) в $\mathcal{M}^n$.

Каждое инфинитезимальное проективное преобразование X в псевдоримановом многообразии ($\mathcal{M}^n$, g) порождает гамильтонову группу симметрий $\exp(\alpha\,\xi_{\mathcal{F}})$ с

$$\xi_{\mathcal{F}} = 2[g^{\kappa i} g^{\ell j} L_X g_{\kappa\ell} - 4\varphi g^{ij}]p_j(\partial/\partial x^i) -$$
$$- \{\partial_s[g^{\kappa i} g^{\ell j} L_X g_{\kappa\ell} - 4\varphi g^{ij}]\} p_i p_j (\partial/\partial p_s)$$

гамильтоновой системы

$$\dot{x}^i = \{x^i, \mathcal{H}\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\} \tag{I}$$

с квадратичным гамильтонианом $\mathcal{H}(x,p) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$.

Каждому проективному движению X в ($\mathcal{M}^n$, g) соответствует канонический оператор Ли – Беклунда

$$Y = (g^{\kappa i} g^{\ell j} L_X g_{\kappa\ell} - 4\varphi g^{ij})\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}(\partial/\partial S) \equiv \mathcal{F}(x, \frac{\partial S}{\partial x})(\partial/\partial S)$$

уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0$$

с гамильтонианом $\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ и I - параметрическая группа точечных симметрий уравнений Гамильтона, порождаемая векторным полем

$$Z = (\partial/\partial t) + (\partial \mathcal{F}(x,p)/\partial x^i)(\partial/\partial p_i) - (\partial \mathcal{F}(x,p)/\partial p_i)(\partial/\partial x^i)$$

и действующая в пространстве зависимых (x, p) и независимых (t) переменных гамильтоновой системы·(I).

В § 4 доказывается также, что размерность r группы симметрий системы

$$\ddot{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^{n-1}), \quad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с n -I неизвестными x^1, ... , x^{n-1} и независимой переменной x^n не превосходит число $n + 2n$. Наибольшее возможное значение r = $n^2 + 2n$ достигается для системы $\ddot{x}^\alpha = 0$, α = I,..., n - I. Соответствующая группа симметрий совпадает (локально) с проективной группой n - мерного плоского пространства, а её алгебра Ли определяется базисными векторными полями

$$Y_i = \partial_i, \quad Y_{ij} = x^i \partial_j, \quad Z_i = x^i x^j \partial_j, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

При n = 2 отсюда следует теорема Ли о размерности группы симметрий уравнения $d^2y/dx^2 = f(x, y, dy/dx)$.Отсюда следует также,что размерность группы симметрий динамических уравнений Ньютона

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{\mathcal{F}}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^N)$$

не превышает число $N^2 + 4N + 3$. Максимальная $N^2 + 4N + 3$ - мерная группа симметрий достигается в отсутствие "сил" ($\vec{\mathcal{F}} = 0$) и совпадает с проективной группой N + I - мерного плоского пространства - времени.

При N = 3 максимальная группа симметрий уравнений Ньютона имеет размерность 24 и содержит в качестве подгруппы группу Пуанкаре, лежащую в основе специальной теории относительности.

В § 5 проективные и аффинные преобразования рассматриваются как обобщенные движения Н.Х.Ибрагимова.

Пусть g_{ij} – компоненты метрического тензора псевдориманова многообразия $\mathcal{M}^n$ в локальных координатах x^i, $\mathcal{Y}$ – n-мерное многообразие в пространстве $X \times Y$ переменных $x^1, \ldots, x^n, y_{11}, \ldots, y_{nn}$, определенное уравнениями $y_{ij} \equiv y_{ji} = g_{ij}(x)$. Множество всех преобразований $\bar{x}^i = f^i(x)$ образует бесконечную локальную группу Ли G_∞, а преобразования

$$\bar{x}^i = f^i(x), \quad y_{ij} = \bar{y}_{kl}\, \partial_i f^k(x) \partial_j f^l(x)$$

– расширенную группу преобразований $\widetilde{G}_\infty$, изоморфную G_∞.

Пусть $G \subset G_\infty$. Орбита $\widetilde{G}(\mathcal{Y}) = \bigcup_{\widetilde{T} \in \widetilde{G}} \widetilde{T}(\mathcal{Y})$ многообразия $\mathcal{Y}$ является минимальным инвариантным многообразием группы $\widetilde{G}$, содержащим $\mathcal{Y}$ как подмногообразие коразмерности $\delta = dim\, \widetilde{G}(\mathcal{Y}) - n$, называемой дефектом $\delta(\mathcal{M}^n, G)$ пространства $\mathcal{M}^n$ относительно G. Если $\delta = 0$, то G есть группа изометрий в $\mathcal{M}^n$. В общем случае G называется группой обобщенных движений (Н.Х.Ибрагимов, 1969 г.)

В § 5 показано, что группы $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^n)$ и $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^n)$ аффинных и проективных преобразований в псевдоримановом многообразии $\mathcal{M}^n$ являются группами обобщенных движений Н.Х.Ибрагимова, и найдены границы дефектов $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^n, \hat{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^n))$, $\delta_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^n, \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^n))$. Наибольшее возможное значение, равное $n(n + 1)/2$, $\delta_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{P}}$ достигают в плоском пространстве $\mathcal{M}^n$.

Проективные и аффинные преобразования рассмотрены также в рамках понятия обобщенного движения, распространенного на многообразия с аффинной связностью.

Во второй главе (§§8 – 12) в рамках метода подвижного репера развивается техника косонормального репера, с помощью которой определяются все проективно эквивалентные римановы связности и все псевдоримановы метрики с общими геодезическими.

Решение проблемы геодезических отображений псевдоримановых многообразий сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla g'(Y,Z,W) = 2g'(Y,Z)W\psi + g'(Z,W)Y\psi + g'(Y,W)Z\psi, \quad (Y,Z,W \in T\mathcal{M}) \qquad (2)$$

на псевдоримановых многообразиях произвольных сигнатуры и размерности. Чаще всего задача ставится так: найти все псевдоримановы многообразия данной размерности или сигнатуры, которые допускают нетривиальные решения $g' \neq cg$ уравнения (2), и указать эти решения. При таком подходе все величины в уравнении (2) оказываются неизвестными, причем уравнение линейно по g' и нелинейно по g ввиду нелинейной зависимости ∇ от g. Общая идея решения этой задачи отчетливо выражена П.А. Широковым – тип тензора определяет тип пространства. Задав тип билинейной формы g', определяемый ее характеристикой Сегре, после длинных и нетривиальных выкладок, сводящихся к интегрированию систем нелинейных уравнений с частными производными вкупе с подходящими преобразованиями локальных координат, находят g, ψ и g'. Указанная задача была решена для n – мерных римановых пространств Т.Леви-Чивитой, для двумерных псевдоримановых пространств – У.Дини и П.А.Широковым, для трехмерных псевдоримановых пространств – А.З.Петровым и n – мерных лоренцевых пространств – В.И.Голиковым и Г.И.Кручковичем. Перечисленные случаи исчерпываются тремя основными типами характеристики Сегре $\chi_\nu = \{\nu\, \mathrm{I} \dots \mathrm{I}\}$, $\nu = \mathrm{I}, 2, 3$, билинейной формы g'. В псевдоримановых пространствах произвольной сигнатуры и размерности n основной тип билинейной формы задается набором $\{m_1 \dots m_r\}$ натуральных чисел, связанных единственным условием $m_1 + \dots + m_r = n$. Тормозом к решению задачи в общем случае являлась необходимость рассмотрения каждого типа в отдельности. Число разных типов с ростом n неограниченно возрастает, и задача становится неразрешимой.

Предложенная нами техника подвижного косонормального репера устранила указанное препятствие. Косонормальный репер является естественным обобщением ортогонального репера, однако, в отличие от последнего, он приспособлен к рассмотрению билинейной формы произвольной алгебраической структуры. Риманова геометрия в косонормальном репере развивается подобно римановой геометрии в ортогональном репере. Техника интегрирования в косорепере в принципе так же проста, как и в ортореперe. Это обстоятельство и делает в конечном итоге возможным интегрирование в общем виде ковариантных дифференциальных уравнений с неизвестной билинейной формой на псевдоримановых многообразиях произвольных сигнатуры и размерности.

Следующие две теоремы получены с помощью техники подвижного косонормального репера. Первая теорема содержит решение проблемы проективной эквивалентности римановых связностей.

Две аффинные связности без кручения ∇ и ∇', определенные формами связности ω и ω' на расслоении $\mathcal{P}^1(\mathcal{M})$ линейных реперов над $\mathcal{M}$, называются проективно эквивалентными, если существует I - форма ρ на $\mathcal{M}$ такая, что выполняется условие

$$\omega' - \omega = \theta\rho + (\rho\theta)\cdot id, \qquad (3)$$

где θ - каноническая форма на $\mathcal{P}^1(\mathcal{M})$. Связности ∇ и ∇' на $\mathcal{M}$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же проективной структуре и, следовательно, имеют общие геодезические. Если связности ∇ и ∇' римановы, то I - форма ρ - точная: $\rho = d\psi$.

Теорема. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ и $(\mathcal{M}, g')$ - два n-мерных псевдоримановых многообразия с общими геодезическими, а ω и ω' - формы их римановых связностей ∇ и ∇'. Пусть G и G' - матричные функции на $\mathcal{M}$, значения которых в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ совпадают с матрицами билинейных форм g и g' в некотором базисе в $T_x\mathcal{M}$. Если λ - матрица

$$e^{2\psi} G^T G'^{-1} G - \lambda G,$$

определенная с помощью $\mathcal{T}$ - преобразования Н.С.Синюкова, имеет в окрестности $\mathcal{V}$ произвольной точки $x \in \mathcal{M}$ характеристику Сегре

$$\chi = \{(\overset{1}{m}_1 \ldots \overset{1}{m}_{s_1}) \ldots (\overset{\kappa}{m}_1 \ldots \overset{\kappa}{m}_{s_\kappa})\} \qquad (4)$$

и собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_\kappa$, то существуют косонормальный репер $\{Y_i\}$ на $\mathcal{V}$ и сопряженный к нему корепер $\{\theta^i\}$, относительно которых компоненты ω^i_j формы $\omega = \omega^i_j E^j_i$ связности ∇ определены как явные функции параметров характеристики $\overset{\alpha}{m}_{s_\alpha}$ и собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_\kappa$. Форма ω' связности ∇' определяется равенством (3), где

$$\rho = d\psi = -\frac{1}{2} d \sum_{\alpha=1}^{\kappa} r_\alpha \ln|\lambda_\alpha|, \quad (r_\alpha = \overset{\alpha}{m}_1 + \cdots + \overset{\alpha}{m}_{s_\alpha}).$$

Если, в частности, $\psi = const$, то связности ∇ и ∇' совпадают. Наоборот, если в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{M}$ существует косонормальный репер, в котором выполняются перечисленные выше условия, то римановы связности ∇ и ∇' проективно эквивалентны.

Вторая теорема дает общее решение проблемы определения геодезически соответствующих псевдоримановых метрик.

<u>Теорема</u>. Пусть ($\mathcal{M}$, g) и ($\mathcal{M}$, g') – два n – мерных псевдоримановых многообразия с общими геодезическими, а G и G' – матричные функции на $\mathcal{M}$, определенные в предыдущей теореме. Если в каждой точке открытого связного множества $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ λ – матрица

$$G^T G'^{-1} G - \lambda G$$

имеет характеристику Сегре

$$\chi = \{\overset{1}{m}_1 \cdots \overset{\kappa_0}{m}_1 (\overset{\kappa_0+1}{m}_1 \cdots \overset{\kappa_0+1}{m}_{s_{\kappa_0+1}}) \cdots (\overset{\kappa}{m}_1 \cdots \overset{\kappa}{m}_{s_\kappa})\},$$

$$s_{\kappa_0+1}, \ldots, s_\kappa > 1,$$

то контравариантные метрические тензоры g_c и g_c' в $\mathcal{V}$ определяются равенствами

$$g_c|_{\mathcal{V}} = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \prod_{\beta=1}^{\kappa_0}{}' (f_\beta - f_\alpha)^{-r_\beta} \varphi_\alpha, \quad (r_\beta = \overset{\beta}{m}_1 + \cdots + \overset{\beta}{m}_{s_\beta}),$$

$$g_c'|_{\mathcal{V}} = \prod_{\gamma=1}^{\kappa} (f_\gamma)^{r_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \prod_{\beta=1}^{\kappa_0}{}' (f_\beta - f_\alpha)^{-r_\beta} (f_\alpha \varphi_\alpha + \Lambda_\alpha),$$

где f_α – попарно различные ненулевые функции, постоянные при $\alpha > \kappa_0$. Вокруг каждой точки $x \in \mathcal{V}$ существует каноническая карта, в которой компоненты тензорных полей φ_α и Λ_α определены рекуррентными соотношениями, а также , при $\alpha > \kappa_0$, – условием ковариантного постоянства тензорного поля Λ_α относительно φ_α . Ковариантные метрические тензоры определяются соответствующими формулами. Обратное также верно, причем условие (2) выполняется с функцией $\psi = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\kappa} \ln|f_\alpha|$.

Эта теорема сводит нахождение геодезически соответствующих метрик к задаче определения метрик, допускающих параллельные симметричные билинейные формы, общее решение которой было дано ранее П.А.Широковым, А.П.Широковым, Г.И.Кручковичем и А.С.Солодовниковым.

Важно подчеркнуть, что полученные результаты охватывают все, т.е. бесчисленное множество основных типов характеристи-

и Сегре, в отличие от предшествующих результатов, которые ,
ак отмечалось, исчерпывались тремя основными типами характе-
истики Сегре. Использование косорепера позволило не только
олучить решение уравнений геодезического отображения для лю-
ого набора элементарных делителей, но и записать его в общем
иде, по существу, в виде одной формулы, управляемой парамет-
ами характеристики, в отличие от предыдущих работ, где резуль-
аты получались для каждой характеристики в отдельности, так
то трудно было уловить что-либо общее в этих результатах и
сознать, что они могут быть выведены из одной формулы.

В конце второй главы рассматриваются псевдоримановы мет-
ики с общими связностями. С помощью техники подвижного косо-
ормального репера устанавливается ряд свойств параллельных
имметричных билинейных форм на псевдоримановых многообразиях,
водится понятие об индексе характеристики Сегре билинейной
ормы и дается его геометрическая интерпретация.

Два факта, установленных в § 4 , - проективный характер
имметрий уравнений геодезических и способность конциркуляр-
ых векторных полей частного вида порождать такие симметрии -
ежат в основе третьей главы (§§13 - 16), где вводится по-
ятие о конциркулярных движениях и исследуется их связь с про-
ктивными и аффинными движениями.

Конциркулярным отображением называется конформное отоб-
ажение одного псевдориманова многообразия на другое, которое
тображает кривые с постоянной первой и нулевой второй кривиз-
ой, называемые геодезическими окружностями, в геодезические
кружности (К.Яно, 1941 г.). Заметим, что геодезические окруж-
ости определяют в теории тяготения Эйнштейна траектории рав-
оускоренного движения. Укажем также на попытку Р.С.Сингатул-
ина дать инвариантное определение осевой симметрии в общей
еории относительности с помощью конциркулярных преобразова-
ий.

Назовем инфинитезимальное конциркулярное преобразование
онциркулярным движением. Нетрудно доказать, что уравнения кон-
иркулярных движений имеют вид

$$\mathcal{L}_X g = \psi g, \quad (5) \qquad \nabla^2 \psi = \varphi g \qquad (6)$$

и что множество всех конциркулярных движений в псевдоримановом многообразии $\mathcal{M}^n$ образует конечномерную алгебру Ли. Вследствие этого множество всех конциркулярных преобразований в $\mathcal{M}^n$ образует группу Ли, которую мы будем называть конциркулярной группой. Конформные группы в пространстве постоянной кривизны S^n ($n > 2$), в пространстве Эйнштейна $\mathcal{E}^n$ ($n > 2$) и в пространстве V_0 ($\mathcal{K}$) есть конциркулярные группы. Перечисленные пространства принадлежат к так называемым пространствам C^n ($\mathcal{K}$), каждое конформное движение (5) в которых удовлетворяет условию (6). Указанное свойство позволяет сделать независимо от метрической формы пространства C^n($\mathcal{K}$) важные выводы о характере и строении конформной группы в этом пространстве и в случае $\mathcal{K} \neq 0$ указать простой алгоритм для построения ее алгебры Ли.

Если псевдориманово многообразие $\mathcal{M}^n$ допускает τ независимых конциркулярных движений

$$D\psi_\alpha : \qquad \nabla^2\psi_\alpha + \mathcal{K}\psi_\alpha g = 0, \qquad (\alpha = 1, \dots, \tau), \tag{7}$$

то в касательном пространстве каждой точки $x \in \mathcal{M}^n$ возникают τ (τ - I)/2 параллелограммов, построенных на конциркулярных векторах $\psi_\alpha\, D\psi_\beta$. Стороны каждого из параллелограммов и одна из его диагоналей задают неаффинные проективные движения, а вторая диагональ - изометрию. Каждая геодезическая - траектория I - параметрической конциркулярной группы служит также траекторией τ I - параметрических проективных групп.

Более того, на многообразии $\mathcal{M}^n$ действуют изометрическая алгебра Ли размерности τ(τ - I)/2:

$$I_{\tau(\tau-1)/2} \supset I_{(\tau-1)(\tau-2)/2} \supset \dots \supset I_1,$$

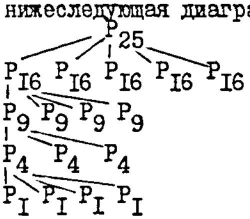
конциркулярная алгебра Ли размерности τ (τ + I)/2:

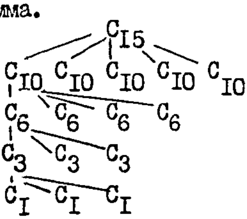
$$C_{\tau(\tau+1)/2} \supset C_{(\tau-1)\tau/2} \supset \dots \supset C_1,$$

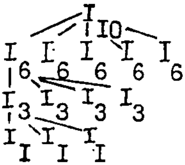
и проективная алгебра Ли размерности τ^2 :

$$\mathcal{P}_{\tau^2} \supset \mathcal{P}_{(\tau-1)^2} \supset \dots \supset \mathcal{P}_1,$$

каждая из которых имеет всего C_r^s различных нетривиальных подалгебр I_{r_s}, C_{r_s}, $\mathcal{P}_{r_s}$ размерностей $r_s = (r - s)(r - s - I)/2$, $r_s = (r - s)(r - s + I)/2$ и $r_s = (r - s)^2$ ($s = I,\ldots, r - 2$) соответственно. Характерное "цепное"строение рассматриваемых алгебр Ли в случае $r = 5$ иллюстрирует нижеследующая диаграмма.

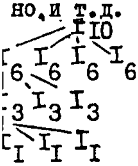


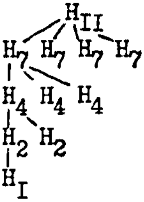


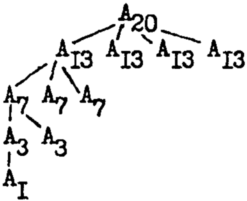


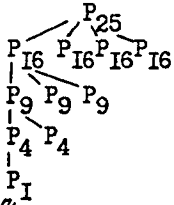
Генераторы всех алгебр Ли конструируются с помощью простейших алгебраических и дифференциальных операций из r инвариантов – решений уравнения (7). Столь же просто записываются структурные уравнения соответствующих алгебр Ли.

Параллельные и конкуррентные векторные поля также порождают алгебры Ли инфинитезимальных преобразований с характерным цепным строением. Если, к примеру, на псевдоримановом многообразии $\mathcal{M}^n$, $n > 5$, существуют конкуррентное векторное поле $\mathcal{D}\psi$: $\nabla^2\psi = g$, и 4 независимых параллельных векторных поля $\mathcal{D}\varphi_a$: $\nabla^2\varphi_a = 0$, ($a = I,\ldots,4$), то в нем действуют I0-мерная изометрическая, II-мерная гомотетическая, 20-мерная аффинная и 25-мерная проективная алгебры Ли, имеющие по 4 различных нетривиальных подалгебры размерностей 6, 7, I3 и I6 соответственно, каждая из которых обладает тремя различными нетривиальными подалгебрами размерностей 3, 4, 7, 9 соответственно, и т.д.









В касательном пространстве каждой точки $x \in \mathcal{M}^n$ возникают 6 параллелограммов,, построенных на рекуррентных векторах

$\mathcal{G}_a D\mathcal{G}_b$. Стороны каждого из параллелограммов и одна из его диагоналей задают негомотетические аффинные движения, а вторая диагональ – инфинитезимальную изометрию. Инфинитезимальные гомотетии и проективные преобразования натянуты в каждой точке на конкуррентное векторное поле $D\psi$. Подобные выводы справедливы для любого числа параллельных векторных полей, существующих в $\mathcal{M}^n$. Именно так, в частности, устроены проективные, аффинные, гомотетические и изометрические алгебры Ли n – мерных псевдоевклидовых пространств.

Приведенные результаты получены независимо от метрической формы пространства $\mathcal{M}^n$ из одного только предположения о существовании в нем нетривиальных решений уравнения

$$\nabla^2\psi + (\mathcal{K}\psi + \mathcal{Z})g = 0, \qquad (\mathcal{K}, \mathcal{Z} - const). \tag{8}$$

Отсюда видна исключительная роль, которую играет это уравнение и определяемые им конциркулярные векторные поля в возникновении групповых симметрий псевдоримановых многообразий.

В пространстве S^n постоянной ненулевой кривизны $\mathcal{K}$ (n+I) конциркулярных векторных полей порождают полные изометрическую, конформную и проективную алгебры Ли, которые целиком определяются заданием n+I скаляров, содержащих, таким образом, всю информацию о локально-групповых свойствах пространства S^n. В качестве этих скаляров могут быть взяты декартовы координаты z^a плоского пространства E^{n+1}, в которое вложено S^n, определенное уравнением $\sum_{a=1}^{n+1} e_a z^{a^2} = I/\mathcal{K}$. Следовательно, n+I функций погружения z^a полностью определяют генераторы алгебр Ли, действующих в S^n, и притом так просто: $X_a = Dz^a$(к.д.), $Y_{ab} = z^{(a}Dz^{b)}$ (п.д.), $W_{ab} = z^{[a}Dz^{b]}$(и.д.).

В §I5 дается полное решение задачи о проективных и аффинных движениях X конциркулярного вида: $\nabla X = \rho\cdot id + X d\varphi$, в произвольных псевдоримановых многообразиях. Ранее решение этой задачи для аффинных движений в специальном классе пространств было получено в серии работ японских математиков Такано, Окумуры и Иваи.

В §I6 показывается, что траектории времениподобных конциркулярных векторных полей определяют во вселенной Де Ситтера мировые линии сближающихся или разбегающихся галактик, подчиняющихся гипотезе Вейля и близких по своему поведению к реальным галактикам вселенной.

Четвертая глава (§§I7 - 26) посвящена классификации ло-
енцевых многообразий ($\mathcal{L}^n$, g) размерности $n \geqslant 3$ по алгеб-
ам Ли проективных движений.

Векторное поле X на n - мерном псевдоримановом много-
бразии ($\mathcal{M}^n$, g) с римановой связностью ∇ называется инфи-
итезимальным проективным преобразованием, или проективным
вижением, если порождаемая им в окрестности каждой точки $x \in$
$\mathcal{M}^n$ локальная группа локальных преобразований сохраняет гео-
езические. Проективное преобразование есть автоморфизм инду-
ированной римановой связностью проективной структуры, опреде-
яемой как главное подрасслоение расслоения $P^2(\mathcal{M}^n)$ 2 -струй,
очнее, 2 - реперов на $\mathcal{M}^n$.

X есть инфинитезимальное проективное преобразование на
$\mathcal{M}^n$, если и только если выполняется условие

$$\nabla_Y A_X = R(X,Y) - (Y\varphi)\cdot id - Y d\varphi,$$

$$(\varphi = \frac{1}{n+1} div X, \quad A_X = \mathcal{L}_X - \nabla_X, \quad Y \in T\mathcal{M}^n),$$

де $\mathcal{L}_X$ - производная Ли вдоль X , R - тензор кривизны.
сли величина $div X$ постоянна,то проективное движение сохра-
яет аффинную связность и называется аффинным движением,в част-
ости, при $\mathcal{L}_X g = 2cg$, $c = const$, - инфинитезимальной го-
отетией, а при $\mathcal{L}_X g = 0$ - инфинитезимальной изометрией. Мно-
ество всех проективных движений в $\mathcal{M}^n$ образует конечномерную
лгебру Ли P($\mathcal{M}^n$), называемую проективной алгеброй Ли в $\mathcal{M}^n$.
ножество всех аффинных движений,а также множества всех инфи-
итезимальных гомотетий и изометрий также образуют алгебры Ли
($\mathcal{M}^n$),H($\mathcal{M}^n$) и I ($\mathcal{M}^n$), которые называются соответствен-
о аффинной,гомотетической и изометрической алгебрами Ли и яв-
яются подалгебрами проективной алгебры Ли в $\mathcal{M}^n$: P($\mathcal{M}^n$) $\supset$
$\supset$ A($\mathcal{M}^n$) $\supset$ H($\mathcal{M}^n$) $\supset$ I ($\mathcal{M}^n$).

Классификация основана на разбиении всех пространств $\mathcal{L}^n$
о типам в соответствии с типом проективного движения X ,оп-
еделенным алгебраической структурой производной Ли $\mathcal{L}_X g$
етрики g в направлении X . Тип тензора $h = \mathcal{L}_X g$, задава-
мый его характеристикой Сегре χ ,определяет тип метрики g ,
оторую мы называем h - метрикой типа χ ,а соответствующее
оренцево многообразие - h - пространством типа χ .

В исследовании можно выделить две основные части. В первой части (§I7) определяются пространства L^n , которые могут допускать I – параметрическую негомотетическую проективную группу. Эта задача сводится к интегрированию системы тензорных дифференциальных уравнений с ковариантными производными относительно неизвестной симметричной билинейной формы в пространстве L^n с произвольной метрической формой. Интегрирование системы осуществляется в §I7 с помощью техники косонормального репера, развитой в главе 2.

Вторая часть (§§ I8 – 25) посвящена определению максимальной проективной алгебры Ли P(L^n) в каждом из найденных в первой части пространств. Принципиальное решение этой проблемы дается в §I8, где изучаются характер и строение алгебры Ли P(L^n) в различных классах пространств. Полученные в §§I9 , 23 результаты позволяют перейти в §§20 – 22, 24, 25 к непосредственному решению основной задачи – определению лоренцевых многообразий L^n , допускающих максимальную негомотетическую проективную алгебру Ли, и самой этой алгебры вместе с ее базисными элементами и структурными уравнениями. В §26 с помощью результатов, полученных в главе 2, определяются алгебры Ли аффинных движений на лоренцевых многообразиях и формулируется окончательный результат.

Все лоренцевы многообразия L^n, допускающие негомотетические проективные алгебры Ли, можно разделить на пять непересекающихся классов, указанных в таблице I.

Заштрихованные клетки в графе II показывают, что соответствующий класс пространств допускает указанный вид преобразований. Символы $r_и$, $r_г$, $r_а$, $r_п$ в графе IУ означают размерности максимальных изометрических, гомотетических, аффинных и проективных алгебр Ли. Для наглядности в графах Ш, IУ приведены сведения, относящиеся к случаю n = 4.

Из таблицы видно, что K – пространства непостоянной кривизны существенно отличаются от обыкновенных h – пространст по характеру и строению максимальных проективных алгебр Ли. Они обладают наибольшей проективной подвижностью среди всех других лоренцевых пространств непостоянной кривизны и приближаются по своим свойствам к пространствам постоянной кривизны.

I	П				Ш	IУ
Класс	Допускаемые преобразования				Максим. проект. алгебра Ли (при $n=4$)	Размерности подалгебр (при $n=4$)
	и.д.	г.д.	а.д.	п.д.		
Обыкновенные h-пространства	▨	▨		▨	P_7 п.д.	$r_{п} = r_{г}+I$
К-пространства непостоянной кривизны (К ≠ 0)	▨			▨	P_8 п.д.	$r_{п} \leq r_{и}+3$
К-пространства непостоянной кривизны (К = 0)	▨	▨	▨	▨	A_{I0} а.д.	$r_{п} \leq r_{а}+I$ $r_{а} \leq r_{г}+3$
Пространства постоянной кривизны К ≠ 0	▨			▨	P_{24} п.д.	$r_{п} = r_{и}+I4$
Пространства постоянной кривизны К = 0	▨	▨	▨	▨	P_{24} п.д.	$r_{п} = r_{а}+4 = r_{г}+I3 = r_{и}+I4$

Таблица I. Классификация псевдоримановых многообразий L^n, $n \geqslant 3$, лоренцевой сигнатуры по максимальным проективным алгебрам Ли.

Отличительной чертой К – пространств является существование в них семейств вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны К. С другой стороны, каждое К – пространство с неаффинной проективной группой Ли допускает конциркулярное векторное поле $\mathcal{D}\psi$ специального вида:

$$\nabla^2 \psi + \mathcal{K}\psi g = 0,$$

с которым связано решение ψ волнового уравнения Клейна – Гордона $\Box \psi \pm m^2 \psi = 0$, $m^2 = n|K|$, описывающего скалярное, векторное, спинорное и другие физические поля.

Пятая глава (§§27 – 30) содержит полное решение проблемы Ли. Здесь определены все двумерные псевдоримановы многообразия $\mathcal{M}^2$, допускающие инфинитезимальные негомотетические проективные преобразования, и для каждого из них – максимальная проективная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры. В подходящих локальных координатах указаны метрики, базисные элементы и структурные уравнения проективных алгебр Ли. Некоторые сведения о проективных алгебрах Ли в $\mathcal{M}^2$ приведены в таблице 2.

I	П				Ш	IУ
Максималь. проект. алгебры Ли	Составляющие преобразования				Подалгебры Ли	Связные макс.проект. группы Ли
	и.д.	г.д.	а.д.	п.д.		
P_3, простые, неразрешимые типы Бианки УШ, IX	▨	▨		▨	$P_3 \supset A_I \equiv H_I \equiv I_I$ $P_3 \supset A_2 \equiv H_2 \supset I_I$	SL (2;R) SP(1) SU(2) SO(3) SO(1,2)
P_2, абелевы, неабелевы	▨			▨	$P_2 \supset A_I \equiv H_I \equiv I_I$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ $\mathbb{R} \oplus \mathbb{T}$ $\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$
P_I				▨		$\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$

Таблица 2. Классификация максимальных негомотетических проективных алгебр Ли двумерных псевдоримановых многообразий $\mathcal{M}^2$ непостоянной кривизны.

I_ℓ , H_ℓ , A_ℓ в графе Ш означают максимальные подалгебры Ли и.д., г.д., а.д. максимальной проективной алгебры Ли P_ℓ . В графе IУ указаны связные группы Ли, имеющие P_r своей алгеброй Ли. Каждое двумерное псевдориманово многообразие постоянной кривизны K допускает проективную алгебру Ли $P_8 \supset A_3 \equiv H_3 \equiv I_3$ при $K \neq 0$ и $P_8 \supset A_6 \supset H_4 \supset I_3$ при $K = 0$.

В §28 устанавливается связь инфинитезимальных проективных преобразований поверхностей вращения с законами сохранения лагранжевых систем с одной степенью свободы и находятся сохра –

няющиеся величины. Обсуждаются возможные приложения к теории солитонов и σ - моделям.

В шестой главе (§§3I - 33) определяются и изучаются инфинитезимальные почти проективные преобразования (почти проективные движения), сохраняющие комплекс геодезических. Доказывается, что почти проективные движения образуют алгебры Ли, конечномерные в случае квадратичного комплекса и бесконечномерные в случае линейного комплекса геодезических. Почти проективные преобразования включают как частные либо предельные случаи произвольные проективные, аффинные и конформные преобразования. Проективное отображение переводит конформную группу в почти проективную группу (§3I).

Определяются алгебры Ли почти проективных движений, сохраняющих квадратичные комплексы геодезических в псевдоевклидовых пространствах E^n, $n \geqslant 4$, в пространстве Де Ситтера (§32) и в приводимых полях тяготения. Показывается, что условие существования почти проективной алгебры Ли в приводимом поле тяготения автоматически приводит к пространствам электровакуума - точным решениям уравнений Эйнштейна - Максвелла в пустоте (§33).

Седьмая глава (§§34 - 36) имеет прикладной характер. В ней исследуются теоретико - полевые модели в рамках единых теорий Эйнштейна, Боннора, Шредингера и классической $\mathcal{N}$ = I супергравитации в пространствах с симметриями в форме проективных (аффинных) движений.

В §34 получаются классы точных решений полевых уравнений теорий единого несимметричного поля Эйнштейна и Боннора, обсуждается единая теория Шредингера.

В §35 рассматриваются классическая $\mathcal{N}$ = I супергравитация, а также электромагнитное поле в рамках этой теории. Получены два класса точных решений уравнений поля Эйнштейна - Рариты - Швингера и Эйнштейна - Максвелла - Рариты - Швингера, описывающих гравитационное поле, поле гравитино (частица со спином 3/2) и электромагнитное поле. Значительная часть выкладок производилась на ЭВМ с применением системы аналитических вычислений REDUCE . Составлены программы для вычисления 2-формы кручения, I-формы связности, 2-формы кривизны, скалярной кривизны и тензора энергии – импульса. Листинги этих программ и соответствующих вычислений воспроизводятся в п.2 §35.

В §36 обсуждается алгоритм вычисления характеристики Сегре билинейной формы на ЭВМ. В пп. 2,3 этого параграфа приводится программа для вычисления характеристики Сегре билинейной формы в линейном пространстве и дается ее описание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты диссертации.

– Дано общее решение классической геометрической проблемы определения геодезически соответствующих псевдоримановых метрик произвольных сигнатуры и размерности.

Найдены все псевдоримановы метрики g и g' с общими геодезическими на многообразии $\mathcal{M}^n$, а также формы их римановых связностей, вид которых в области $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}^n$ определяется характеристикой Сегре χ симметричной билинейной формы a, связанной с g и g' преобразованием Н.С.Синюкова. В случае $\chi = \{m_1 \dots m_k\}$, т.е. в случае элементарных делителей с простыми базисами, указана общая структура тензорных полей g и g' в области $\mathcal{V}$ и в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{V}$ определена каноническая карта, в которой приведены явные выражения для координат этих полей. В случае кратных базисов нахождение метрик g и g' сведено к задаче определения метрик, допускающих параллельные симметричные билинейные формы, общее решение которой было дано ранее (П.А.Широко А.П.Широков, Г.И.Кручкович, А.С.Солодовников).

– Определены все псевдоримановы многообразия L^n лоренцевой сигнатуры $n \geqslant 3$ измерений, допускающие алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Указаны метрические формы этих многообразий, а также базисные векторные поля и структурные уравнения максимальных проективных и аффинных алгебр Ли.

– Решена проблема Ли, т.е. определены все двумерные псевдоримановы многообразия $\mathcal{M}^2$, допускающие инфинитезимальные негомотетические проективные преобразования, и для каждого из них – максимальная проективная алгебра Ли, включая го-

лотетическую и изометрическую подалгебры. В подходящих ло-
альных координатах указаны метрики, базисные элементы и ст-
уктурные уравнения проективных алгебр Ли.

- Введено понятие о конциркулярных движениях и исследо-
ана их связь с проективными и аффинными движениями. Доказа-
о, что специальные конциркулярные векторные поля порождают
лгебры Ли инфинитезимальных изометрических, конформных, аф-
инных и проективных преобразований с характерной "цепной"
труктурой. В пространствах S^n постоянной кривизны ука -
анные поля порождают максимальные изометрические, конформ -
ые, аффинные и проективные алгебры Ли. Решена задача о про-
ктивных и аффинных движениях конциркулярного вида на псевдо-
имановых многообразиях $\mathcal{M}^n$.

- Введено понятие об инфинитезимальных почти проективных
реобразованиях (почти проективные движения), сохраняющих
омплекс геодезических. Показано, что почти проективные дви-
ения образуют алгебры Ли, конечномерные в случае квадратич-
ого комплекса и бесконечномерные в случае линейного комп-
екса геодезических.

Определены алгебры Ли почти проективных движений, сохра-
яющих квадратичные комплексы геодезических в псевдоевклидо -
ых пространствах E^n, $n \geqslant 4$, в пространстве Де Ситтера и
приводимых полях тяготения. Показано, что условие существо-
ания почти проективной алгебры Ли в приводимом поле тяготе-
ия автоматически приводит к пространствам электровакуума.

- Исследованы групповые свойства уравнений геодезичес-
их пространств $\mathcal{M}^n$ с аффинной (в частности, римановой) свя-
ностью. Установлен проективный характер точечных симметрий
равнений геодезических с параметризацией Картана. Обнаруже-
а связь между инфинитезимальными симметриями уравнений гео-
зических с аффинной параметризацией в $\mathcal{M}^n$ и конциркуляр-
ми (конкуррентными) и параллельными векторными полями, а
акже аффинными и специальными проективными движениями (кол-
инеации кривизны).

- Показано, что размерность r группы симметрий систе-
ы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с
- I неизвестными не превосходит число $n^2 + 2n$. При

$n = 2$ отсюда следует теорема Ли.

– Найдена размерность максимальной группы симметрий динамических уравнений Ньютона в $\mathbb{R}^N$ и показано, что эта группа совпадает с проективной группой (N + I) – мерного плоского пространства. При N = 3 максимальная группа симметрий уравнений Ньютона имеет размерность 24 и содержит в качестве подгруппы группу Пуанкаре, лежащую в основе специальной теории относительности.

– Установлена также связь инфинитезимальных проективных преобразований псевдориманова многообразия ($\mathcal{M}^n$, g) с группой симметрий гамильтоновой системы и преобразованиями Ли – Беклунда уравнения Гамильтона – Якоби с гамильтонианом $\mathcal{H}(x, p) = (I/2)g^{ij}p_ip_j$.

– Показано, что группы аффинных и проективных преобразований псевдоримановых пространств $\mathcal{M}^n$ являются группами обобщенных движений в смысле Н.Х.Ибрагимова и найдены границы дефектов пространств $\mathcal{M}^n$ относительно этих групп. Проективные преобразования рассмотрены также в рамках понятия обобщенного движения, распространенного на пространства с аффинной связностью.

– Найдены волновые решения полевых уравнений единых теорий Эйнштейна и Боннора, а также уравнений Эйнштейна – Рариты – Швингера и Эйнштейна – Максвелла – Рариты – Швингера, описывающих поля гравитонов, гравитино и электромагнитное поле в рамках простой супергравитации.

– Составлены пакеты программ для вычислений в простой супергравитации с применением системы аналитических вычислений REDUCE и программа для вычислений характеристики Сегре билинейной формы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах.

I. Аминова А.В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений // Докл. АН СССР.- I97I.- I97, №4.-С.807-809.

2. – О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел // Препринт ИТФ АН СССР 7I-85Р.-Киев,I97I.-

- 2I с.

3. - Проективно - групповые свойства некоторых римановых пространств // Тр. Геометр.семин.Всес.ин-т науч. и техн.информ. АН СССР. - 1974. -т.6 - С.295 - 316.
4. - Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности // Тр.Геометр.семин.Всес. ин-т науч. и техн.информ.АН СССР.- Т.6.-С. 3I7-346.
5. - Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля // Гравитация и теория относительности.- Казань, I975(I976).- №IO-II.- С.9-22.
6. - О конциркулярных движениях в римановых пространствах // Гравитация и теория относительн.- Казань, I975(I976).- № IO-II.- С. I27-I38.
7. - Определение бесконечно малых почти проективных преобразований // Гравитация и теория относительн.-Казань, I976.- № I3.- С. 3-9.
8. - Конциркулярные векторные поля и групповые симметрии в мирах постоянной кривизны // Гравитация и теория относительн.- Казань, I978.-№ I4-I5.- С. 4-I6.
9. - Примеры групп почти проективных движений // Гравитация и теория относительн.-Казань,I978.-№I4-I5.-С.I38-I42.
IO.- Группы почти проективных движений пространств аффинной связности//Изв.вузов.Математика.-I979.-№ 4.- С. 7I-75.
II.- Группы почти проективных движений в приводимых полях тяготения // Гравитация и теория относительн.- Казань, I980.-№ I7. - С. 3-II.
I2.- Об одном классе проективно-подвижных пространств. I // Гравитация и теория относительн.- Казань, I98I.- № I8. - С. 3-IO.
I3.- О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тензорных полей на римановых многообразиях // Изв. вузов. Математика.- I982.- № 6.- С. 63-67.
I4.- О подвижном косоортогональном репере и одном типе проективных движений римановых многообразий. // Изв. вузов. Математика.- Казань, I982.- №9.- С. 69-74.
I5.- О нахождении h -пространств Лоренца // Гравитация и теория относительн. - Казань, I983.- № I9.- С.3-8.

I6.— Об уравнении Эйзенхарта и первых интегралах уравнений геодезических на римановых многообразиях лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов. Математика.- I983.- №I.- С. I2-26.

I7. – О полях тяготения с первым квадратичным интегралом уравнений геодезических // Гравитация и теория относит.- Казань, I983.- № 20. - С. 3-I5.

I8. – Определение лоренцевых h-пространств типа {2(I..I)..} // Гравитация и теория относительн.-Казань,I984. - № 2I. - С. 3-7.

I9. – О проективно-групповых свойствах римановых пространств лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов.Математика.-I984.- №6.- С. I0-2I.

20. – Негомотетические проективные движения в обыкновенных h-пространствах лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов. Математика.- I985.- №4.- С. 3-I3.

2I. – Алгебры Ли проективных движений и механические законы сохранения в двумерных мирах специальной структуры //Гравитация и теория относительн.-Казань,I985.-№22.-С. 3-I2.

22. – Поверхность вращения как динамическая модель лагранжевой системы с одной степенью свободы // Гравитация и теория относительн. - Казань, I985.- № 22.- С. I2-30.

23. – Алгебры Ли проективных движений в h-пространствах типа {3} //Изв.вузов.Математика.-I987.-№3.- С.68-7I.

24. – О проективно-групповых симметриях фридмановских миров и их многомерных обобщений - обыкновенных h-пространств типа {I(I..I)} //Изв.вузов.Математ.-I987.-№I2.-С. 66-68.

25.— О двухвалентных тензорах Киллинга // Гравитация и теория относительн.-Казань, I988.- №25.- С.3-I6.

26. – Группы симметрий в общей теории относительности //Гравитация и теория относительн.- Казань,I988.-№25.-С.I6-23.

27. – Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности // Изв. вузов. Математика.- I988.- № I.- С.3-I3.

28. – Алгебры Ли проективных движений обыкновенных h-пространств лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов. Математика.- №I.- С.3-I2.

29. – О группах инвариантности уравнений движения пробных тел в изотропных космологических UH -моделях // Гравитация и теория относительн.– Казань,I989.-№26.-С.93-I0I.

30. – О проблеме Ли, проективных группах двумерных римановых поверхностей и солитонах // Изв.вузов. Математика.– I990. – №6.– С.3-I0.

31. – О симметриях многомерных моделей // Гравитация и теория относительн.– Казань, I990.– № 27.– С. 46-54.

32. – Группы преобразований римановых многообразий // Проблемы геометрии. Т.22 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М., I990. – С.97-I65.

33. – О К-пространствах и пространствах $\mathcal{V}$(К) // Изв.вузов. Математика. – I990.– № II.– С.75-78.

34. – Алгебры Ли проективных движений пространств $\mathcal{V}$(0) лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов. Математика.-I990.– №I2.- С.3-I3.

35. – Алгебры Ли проективных движений пространств $\mathcal{V}$(К) лоренцевой сигнатуры // Изв.вузов. Математика.-I99I.– № .– С.

36. – Проективные преобразования как обобщенные движения Н.Х. Ибрагимова // Казан.гос.ун-т.– Казань, I99I. – 7с.– Библиограф.5 назв.– Рус. – Деп.в ВИНИТИ 22.04.9I,№I707-В9I.

37. – Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений // Казан.гос.ун-т.– Казань, I99I.– I8 с.- Библиограф.26 назв.– Рус. – Деп. в ВИНИТИ 22.04.9I,№I706-В9I.

38. – ,Кокшарова И.И. Об использовании системы REDUCE для нахождения точных решений уравнений Эйнштейна-Рариты – Швингера – Максвелла // Гравитация и теория относительн.- Казань, I99I. – №28.– С.5-7.

9. – ,Монахов Ю.В. Теории единого несимметричного поля Эйнштейна, Боннора и Шредингера в пространстве с симметриями // Гравитация и теория относительн.- Казань, I977. – №I2,– С.3-I6.

0. – ,Мухамедов А.М. Группы почти проективных движений n-мерных (псевдо)евклидовых пространств // Изв.вузов. Математика. – I980.– №II. – С.5-II.

I. –, – Группы почти проективных движений в пространстве Де

Ситтера // Гравитация и теория относительн.-Казань, 1980 - №16.- С. 3-9.

42. - ,Тогулева Т.П. Проективные и аффинные движения, определяемые конциркулярными векторными полями // Гравитация и теория относительн. -Казань,1975(1976).-№10-11.-С.139-15

43. - Aminova A.V. The groups of symmetrics in the spaces of general relativity // Теор.-группов.методы в мех. Тр. Междунар. симпоз.-Новосибирск,1978.- С.24-33.

44. - New type of space - time symmetries - groups of nearl projective motions // Contributed papers of 10th Intern. Conf. on General Relativ. and Gravit. Padova, 4 - 9 Jul 1983. - Padova, 1983.- Vol.1. - C.166 - 167.

45. - Space - time symmetry groups generated by concircular vector fields // Contributed papers of 10th Intern. Con on general Relativ. and Gravit. Padova, 4 - 9 July,1983 - Vol.1.- C. 168 - 170.

46. - The boost (revolution) surface as dynamic model of ha monic oscillator. Conservation laws // Proc. 11th Int. Conf. on General Relativity and Gravit. Stockholm,July, 6 - 12, 1986. - Stockholm, 1986. - 1p.

47. - On skewnormal frame and second order Killing tensors Proc. 11th Int. Conf. on General Relativity and Gravit. Stockholm, July, 6 - 12, 1986. - Stockholm, 1986.- 1p.

48. - Spacetimes with affine and projective group symmetrie Proc. of The Fifth Marcel Grossmann meeting. Perth, West Australia, Aug.,8 - 13, 1988. - 1p.

49. - On skew-orthonormal frame and parallel symmetric bil ar form on Riemannian manifold// Tensor.-1987.-T.45.-C

50. - On geodesic mappings of the Riemannian spaces // Ten - 1987.- T.46. - C. 179 - 186.

Аминова Ася Васильевна " Инвариантно - групповые методы в теории проективных отображений пространственно - временных многообразий".

Специальность 01.01.03 - математическая физика.

Подписано в печать 12.07.91г. Заказ № 165. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР