КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Губайдуллина Рената Камилевна

ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2012

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Габдулхаев Билсур Габдулхаевич

Научный консультант: кандидат физико-математических наук, доцент Агачев Юрий Романович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кац Борис Александрович

кандидат физико-математических наук, доцент Шакиров Искандер Асгатович

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится "22" марта 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д212.081.10 при ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд.337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан "__" февраля 2012 г. и размещен на официальном сайте ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Е.К. Липачев

I Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие прикладные задачи физики, механики, математической физики, в частности, контактные задачи теории упругости, некоторые задачи теории дифракции, теории статики и теории трещин приводят к многомерным интегральным уравнениям с полярными ядрами и ядрами типа Михлина-Трикоми-Жиро.

Первые значительные результаты по исследованию свойств решений таких уравнений и участвующих в них интегралов в двумерном случае появились в работах Ф. Трикоми, Ж. Жиро, С.Г. Михлина. Они, в частности, получили формулы дифференцирования соответствующих интегралов, формулы для композиции слабосингулярных и сингулярных интегралов и нашли случаи решения уравнений в замкнутой форме. В дальнейшем эти результаты были развиты в различных направлениях: распространение на случай евклидового пространства произвольной размерности; исследование уравнений, заданных в произвольной ограниченной области и на многообразиях с краем; изучение свойств интегралов с обобщенными слабосингулярными ядрами и свойств решений уравнений с такими интегралами; исследование в пространствах Лебега $L_p, 1 \leq p < \infty$ (возможно, с весом) и весовых пространствах Гельдера вопросов разрешимости соответствующих уравнений.

Систематическое исследование многомерных интегральных уравнений с полярными ядрами и с ядром Трикоми-Михлина-Жиро в случае задания уравнения на всем евклидовом пространстве и на ограниченном замкнутом множестве этого пространства проведено С.Г. Михлиным и изложено в его известных монографиях. В случаях открытого ограниченного множества исследование свойств решений многомерных слабосингулярных интегральных уравнений и некоторых классов сингулярных интегральных уравнений содержится в монографиях К.Е. Аткинсона, Г.М. Вайникко, И.К. Лифанова и Л.Н. Полтавского, С.Г. Михлина и С. Прёсдорфа, Г.С.Кита и М.В. Хая, И.В. Бойкова (см. также библиографию в них).

К настоящему времени теория для уравнений с полярными ядрами и ядрами типа Трикоми-Михлина-Жиро хорошо разработана. Из этой теории следует, что за исключением частных случаев такие уравнения в замкнутой форме не решаются. Поэтому как для теории, так и, в особенности, для практики важное значение имеют разработка приближенных методов решения соответствующих многомерных сингулярных интегральных уравнений и исследование вопросов их разрешимости.

Вопросами приближенного решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений и сингулярных интегральных уравнений с ядром Трикоми-Михлина-Жиро занимались С.Г. Михлин, С. Прёсдорф, Г.М. Вайникко, Б.Г. Габдулхаев, А.Б. Самохин, И.В. Бойков, их ученики и последователи. При этом значительное число работ посвящено итерационным методам решения указанных уравнений и лишь небольшое количество работ – построению приближенных решений с помощью прямых методов, таких, как: методы Галеркина и Ритца, методы коллокаций и квадратур на базе сплайновой аппроксимации. Однако, несмотря на сказанное, в этой области всё ещё остается ряд нерешенных задач. К ним, прежде всего, следует отнести следующие: нахождение новых достаточных условий разрешимости уравнений; построение в определенном смысле наилучших итерационных методов; разработка простых вычислительных схем прямых методов со строгим теоретическим обоснованием. Данная диссертационная работа в некоторой степени восполняет этот пробел.

Целью настоящей диссертации является разработка со строгим теоретико-функциональным обоснованием приближенных методов решения двумерных слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений в круге и исследование вопросов разрешимости соответствующих уравнений. При этом под теоретико-функциональным обоснованием, согласно Л. В. Канторовичу и Б. Г. Габдулхаеву, понимается следующий круг задач:

а) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующего уравнения;

б) установление оценок погрешности приближенного решения;

в) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению и исследование скорости сходимости;

г) исследование устойчивости и обусловленности приближенных методов.

Методика исследования. При выводе и обосновании полученных в диссертации результатов существенно используются теория приближения функций многочленами и сплайнами, общая теория приближенных методов анализа, а также результаты из функционального анализа и теории сингулярных интегральных уравнений. При этом подходы и рассуждения, применяемые в работе, основываются на использовании результатов и методик исследований, предложенных в работах научного руководителя.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В работе установлены достаточные условия однозначной разрешимости двумерных интегральных уравнений с полярным ядром и сингулярных интегральных уравнений с ядром Трикоми-Михлина-Жиро. Для исследуемых уравнений дано теоретическое обоснование вычислительных схем ряда итерационных и прямых методов их решения; в частности, получены эффективные оценки погрешности построенных приближенных решений в универсальных терминах конструктивной теории функций. Изучены свойства двумерного полиномиального оператора Лагранжа и предложены с обоснованием два способа вычисления двумерных слабосингулярных интегралов на основе полиномиальной и сплайновой аппроксимаций.

Теоретическое и практическое значение. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при разработке и исследовании точных и приближённых методов решения многомерных сингулярных и слабосингулярных интегральных уравнений, возникающих при решении конкретных прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на итоговых конференциях Казанского государственного университета за 2004 – 2006 гг., 2011 г., на Седьмой, Восьмой и Десятой международных Казанских летних школах-конференциях "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 27 июня – 4 июля 2005 г., 27 июня – 4 июля 2007 г., 1 - 7 июля 2011 г.), на Пятой, Шестой и Десятой молодёжных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения" (Казань, 28 ноября – 2 декабря 2005 г., 28 ноября – 2 декабря 2006 г., 31 октября – 4 ноября 2011 г.), на Второй международной научно-практической конференции "Дни науки – 2006" (Днепропетровск, 17 – 28 июня 2006 г.). Кроме того, по мере получения результаты докладывались на городском научном семинаре при Казанском университете "Теория аппроксимации и ее приложения" (научный руководитель, профессор Б.Г. Габдулхаев) и на семинаре кафедры теории функций и приближений (научный руководитель, профессор Ф.Г. Авхадиев).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах научному руководителю и научному консультанту принадлежат постановка задач и определение общего подхода к исследованиям, соответствующие результаты получены лично диссертантом.

Структура и объем работы. Работа объемом 105 страниц состоит из введения, 2 глав, содержащих 13 параграфов и списка литературы, насчитывающего 114 наименований.

II Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор работ по теме диссертации и дается краткое изложение полученных автором результатов.

Первая глава диссертации посвящена построению и исследованию приближенных методов решения слабосингулярных интегральных уравнений (кратко: с.с.и.у.). В ней вводятся основные пространства, в которых ведутся исследования, строятся кубатурные формулы для вычисления двумерных слабосингулярных интегралов, исследуется разрешимость интегральных уравнений с полярными ядрами и разрабатываются вычислительные схемы приближенных методов решения таких уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

В §1 приводятся вспомогательные результаты из общей теории приближенных методов функционального анализа, теории приближения функций полиномами и доказываются некоторые новые результаты из конструктивной теории функций, необходимые во всем дальнейшем изложении.

§2 посвящен исследованию двух групп кубатурных формул для интеграла с фиксированной особенностью

$$Tu \equiv \int\limits_D \frac{h(x,y)u(y)}{r^\alpha(0,y)}dy, \quad x \in D, \quad 0 < \alpha < 2.$$

При этом для приближенного вычисления слабосингулярного интеграла использовались результаты построения кубатурных формул специального вида для регулярных интегралов, когда областью интегрирования является круг. Первая группа кубатурных формул построена с применением квадратурной формулы Гаусса с весовой функцией Якоби $r^{1-\alpha}$ на отрезке $[0,1]$ и квадратурной формулы наивысшей тригонометрической степени точности. Кубатурная формула в данном случае имеет следующий вид:

$$Tu \approx \frac{2\pi}{m}\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{i=1}^{m} h(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi; r_k\cos\theta_i, r_k\sin\theta_i)u(r_k\cos\theta_i, r_k\sin\theta_i),$$

где $u \in C(D)$, r_k и A_k – узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса, а θ_i – попарно неэквивалентные равноотстоящие узлы на отрезке длиной 2π. Для построения второй группы кубатурных формул вместо классического аппарата полиномиального приближения использовался аппарат сплайн-функций, в частности, сплайнов нулевой и первой степеней. Для обеих групп кубатурных формул установлены оценки погрешности.

В §3 установлены достаточные условия существования и единственности решения с.с.и.у.

$$Au \equiv a(x)u(x) + \int\limits_D \frac{h(x,y)u(y)}{r^\alpha(x,y)}dy = f(x), \qquad x \in D, \quad 0 < \alpha < 2. \qquad (1)$$

Здесь (и далее) D - круг единичного радиуса с центром в начале координат, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – его точки, $r(x,y) = |x - y|$ – евклидово расстояние между точками x и y, $h(x,y), a(x)$ – непрерывные, а $f(x)$ – квадратично-суммируемая (возможно, с весом) в круге D данные функции соответственно, $u(x)$ – искомая функция. Приведем один из полученных результатов.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $a(x) \in C(D)$ не обращается в нуль ни в одной точке области D;

2) $h(x,y) \in C(D^2)$;

3) функция

$$g(x,y) = \frac{h(x,y) + h(y,x)}{r^\alpha(x,y)}$$

разлагается в симметричный ряд

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x)\beta_k(y), \qquad x, y \in D,$$

сходящийся в пространстве $L_2(D^2)$, где $\{\beta_k(s)\}_{k=1}^\infty = \{\beta_k(s_1,s_2)\}_{k=1}^\infty$ – линейно независимая система функций из $L_2(D)$. Тогда с.с.и.у. (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(D)$ при любой правой части $f(x) \in L_2(D)$ и

$$\|u^*\|_{L_2(D)} \leq \frac{1}{m}\|f\|_{L_2(D)},$$

где m – точная нижняя грань функции $|a(x)|$.

В §4 предлагается эффективный итерационный метод решения с.с.и.у. (1). Исходное уравнение записывается в эквивалентном виде

$$u = Bu + \tau f, \qquad \tau > 0,$$

где $B = B(\tau) = E - \tau A : L_2 \to L_2$ есть так называемый оператор перехода. Выбирая здесь τ из условия минимальности нормы оператора B в L_2, т.е. $\tau = \tau_0 = m/M^2$, где m – точная нижняя грань функции $|a(x)|$, а константа M ограничивает норму оператора A в пространстве $L_2(D)$, приближения к решению будем получать по следующему итерационному правилу:

$$u^k = B(\tau_0)u^{k-1} + \tau_0 f = u^{k-1} + \frac{m}{M^2}(f - Au^{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots, \quad u^0 \in L_2(D).$$

Доказывается, что при таком выборе параметра оператор $B = B(\tau_0)$ является сжимающим отображением. Получены оценки погрешности и доказана устойчивость предложенного метода относительно исходных данных.

В §5 исследуется общий проекционный метод Галеркина решения с.с.и.у. (1). Доказана однозначная разрешимость соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, и установлена сходимость приближенных решений, полученных предложенным методом, к точному решению исследуемого уравнения.

В §6 предлагаются проекционно-итеративные методы, основанные на исследованных в §§4 и 5 итерационном и проекционном методах. Необходимость разработки таких методов заключается в том, что разрешимость системы линейных алгебраических уравнений проекционного метода возможна, вообще говоря, только при значениях n порядка системы, начиная с некоторого натурального. Поэтому при больших значениях n задача решения системы алгебраических уравнений становится трудоемкой. Проекционно-итеративные методы позволяют в определенной степени эту проблему решить. Для предложенных проекционно-итеративных методов установлены эффективные оценки погрешности.

Среди прямых методов решения интегральных уравнений особое место занимает метод механических квадратур (кубатур). Это связано, прежде всего, с простой вычислительной схемой указанного метода. Вместе с тем его обоснование вызывает значительные трудности. В §§7 и 8 нами предлагаются вычислительные схемы метода кубатур решения с.с.и.у. (1).

§7 посвящен теоретическому обоснованию метода механических кубатур решения с.с.и.у. с фиксированной особенностью вида

$$Au \equiv a(x)u(x) + \int\limits_D \frac{h(x,y)u(y)}{r^\alpha(0,y)}dy = f(x), \qquad x \in D, \quad 0 < \alpha < 2,$$

где $a(x), f(x)$ и $h(x,y)$ – данные непрерывные функции в D и $D \times D$ соответственно. Вычислительная схема метода строится с применением одной из построенных в §2 кубатурных формул. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_{sp} + \frac{2\pi}{m}\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{i=1}^{m} \overline{h}(\rho_s, \varphi_p; r_k, \theta_i)c_{ki} = \overline{f}(\rho_s, \varphi_p), \ s = \overline{1,n}, \ p = \overline{1,m},$$

относительно приближенных значений $\{c_{ki}\}$ искомой функции $\overline{u}(r,\theta) \equiv \equiv u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ в узлах кубатурной формулы (r_k, θ_i) $(k = \overline{1,n}, \ i = \overline{1,m})$, $\overline{h}(\rho,\varphi; r,\theta) \equiv h(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi; r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\overline{f}(\rho,\varphi) \equiv f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, где $\{r_k\}$ – нули многочлена Якоби из ортогональной системы на $[0,1]$ с весом $r^{1-\alpha}$, $\{\theta_i\} = 2i\pi/m + \omega, \omega \in \mathbb{R}$. Доказывается сходимость метода и устанавливается оценка его погрешности в среднем. Как следствие сходимости метода в среднем, доказывается сходимость метода в узлах кубатурной формулы, а из нее, в свою очередь, сходимость в равномерной метрике.

В §8 предлагаются вычислительная схема и теоретическое обоснование метода механических кубатур решения с.с.и.у. (1). При построении вычислительной схемы метода используются результаты Б.Г. Габдулхаева и П.Н. Душкова по решению методом механических квадратур одного одномерного сингулярного интегрального уравнения. Слабосингулярный интеграл из (1) преобразуется следующим образом:

$$T(hu) \equiv \int\limits_D \frac{h(x,y)u(y)}{r^\alpha(x,y)}dy = \int\limits_D \frac{h_0(x,y)u(y)}{r^\alpha(0,y)}dy, \quad h_0(x,y) = h(x,y)\left(\frac{r(0,y)}{r(x,y)}\right)^\alpha.$$

Рассматривается новый интегральный оператор

$$\widetilde{T}(h_s u) \equiv \int\limits_D \frac{h_s(x,y)u(y)}{r^\alpha(0,y)}dy, \qquad 0 < s < 1,$$

где s – произвольно фиксированный параметр, а

$$h_s(x,y) = h(x,y)r^\alpha(0,y)v_s(x,y), \qquad v_s(x,y) = \begin{cases} r^{-\alpha}(x,y), & r(x,y) \geq s, \\ s^{-\alpha}, & r(x,y) \leq s. \end{cases}$$

Тогда для с.с.и.у.

$$A_s u \equiv u + \widetilde{T}(h_s u) = f$$

становится возможным применить одну из построенных в §2 кубатурных формул. В результате мы приходим к вычислительной схеме метода кубатур решения уравнения (1):

$$c_{tp} + \frac{2\pi}{m}\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{i=1}^{m} \overline{h}_s(\rho_t, \varphi_p; r_k, \theta_i) c_{ki} = \overline{f}(\rho_t, \varphi_p),\ t = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}, \quad (2)$$

относительно приближенных значений $\{c_{ki}\}$ искомой функции $u(x) = \overline{u}(r, \theta)$ в узлах (r_k, θ_i) $(k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m})$. Доказана

Теорема 8.1. *При определенном согласовании параметров s, n и m система алгебраических уравнений метода механических кубатур однозначно разрешима (хотя бы при достаточно больших n и m). Для погрешности приближенных решений $u^*_{s(nm)}$ в пространстве L_2 верна оценка*

$$\|u^* - u^*_{s(nm)}\|_2 \le \frac{\nu \|A^{-1}\|_2}{1-\nu} \cdot \|u^*\|_2 + \frac{\|\overline{A}_s^{-1}\|_{2,q}}{1-\beta_{s(nm)}} \left\{ \beta_{s(nm)} \cdot \|\overline{f}\|_{2,q} + \delta_{nm} \right\},$$

где $\overline{A_s}$ и $\overline{f}$ – оператор A_s и функция f после перехода к полярной системе координат, $\nu = \nu(s, \alpha) = CF < 1, \quad |h(x, y)| \le C$,

$$F = \max_{x \in D} \int\limits_{D_s(x)} \big(r(x,y)^{-\alpha} - v_s(x,y)\big) dy, \qquad D_s(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 | r(x,y) \le s\},$$

$$\beta_{s(nm)} = \frac{6\pi \|\overline{A}_s^{-1}\|_{2,q}}{2-\alpha} \Big\{ E_{n-1,\infty}(\overline{h}_s; \rho)_C + E^{\top}_{\infty,\mu}(\overline{h}_s; \varphi)_C + $$
$$+ E_{n-1,\infty}(\overline{h}_s; r)_C + E^{\top}_{\infty,\mu}(\overline{h}_s; \theta)_C \Big\},$$

$$\delta_{nm} \le 3\sqrt{\frac{2\pi}{2-\alpha}} \left\{ E_{n-1,\infty}(\overline{f}; \rho)_C + E^{\top}_{\infty,\mu}(\overline{f}; \varphi)_C \right\},$$

а $E_{n,\infty}(\overline{u}; r)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $\overline{u}(r,\theta)$ по переменной r алгебраическими многочленами степени не выше n, коэффициенты которых являются произвольными непрерывными функциями относительно переменной θ, $E^{\top}_{\infty,\mu}(\overline{u}; \theta)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $\overline{u}(r,\theta)$ по переменной θ тригонометрическими многочленами степени не выше $\mu = [(m-1)/2]$, коэффициенты которых *являются произвольными непрерывными функциями относительно переменной r.*

В §9 для вычислительной схемы метода наименьших квадратов решения уравнения (1) дано его теоретическое обоснование в пространстве $L_2(D)$.

В **главе II** диссертации исследуются сингулярные интегральные уравнения вида

$$Au \equiv a(x)u(x) + \int\limits_D \frac{f(\theta)h(x,y)}{r^2(x,y)}u(y)dy = g(x), \quad \theta = \frac{x-y}{r(x,y)}, \quad x \in D, \quad (3)$$

где $a(x) \in C(D)$, $g(x) \in L_2(D)$ – данные, а $u(x) \in L_2(D)$ – искомая функции; характеристика $f(\theta) \in L_1[0, 2\pi]$ удовлетворяет необходимому и достаточному условию существования сингулярного интеграла из (3) в смысле главного значения

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 0,$$

а функция $h(x,y) \in C(D^2)$ такова, что

$$\|A\|_{L_2(D) \to L_2(D)} \leq M = \text{const} < \infty.$$

Для уравнения (3) устанавливаются достаточные условия разрешимости, приводятся вычислительные схемы ряда приближенных методов и дается их теоретическое обоснование.

В §10 устанавливаются простые и эффективные условия, достаточные для существования и единственности решения уравнения (3) в пространстве квадратично-суммируемых в круге D функций. В частности, имеет место следующая

Теорема 10.1. *Пусть $\delta \in \mathbb{R}$,*

$$\min_{x \in D} |a(x)| \geq m_0 = const > 0$$

и выполняется одно из условий:

α) функция $f(\theta)$ является нечетной функцией и для $u \in L_2(D)$

$$(S^- u, u) \geq \delta \|u\|^2, \qquad S^- u = \frac{1}{2}\int_D \frac{f(\theta)\,[h(x,y) - h(y,x)]}{r^2(x,y)}u(y)dy;$$

β) $f(\theta)$ является четной функцией и для $u \in L_2(D)$

$$(S^+ u, u) \geq \delta \|u\|^2, \qquad S^+ u = \frac{1}{2}\int_D \frac{f(\theta)\,[h(x,y) + h(y,x)]}{r^2(x,y)}u(y)dy.$$

Если $m = m_0 + \delta > 0$, *то оператор* $A : L_2(D) \to L_2(D)$ *непрерывно обратим и*

$$\|A^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leq m^{-1} < \infty.$$

Следствие. *В условиях теоремы интегральное уравнение (3) имеет единственное решение* $u^* = A^{-1}g \in L_2(D)$ *при любой правой части* $g \in L_2(D)$, *и для него справедливо неравенство*

$$\|u^*\|_{L_2(D)} \leq \frac{1}{m}\|f\|_{L_2(D)}.$$

В §11 построены вычислительные схемы итерационных методов решения с.и.у. (3), обеспечивающие наилучшую скорость сходимости построенных приближений к точному решению, и получены оценки их погрешности в пространстве L_2.

§12 посвящен теоретическому обоснованию проекционного метода решения с.и.у. (3). Приближенное решение уравнения (3) ищется в виде обобщенного многочлена

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x), \qquad x \in D,\ n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $\{\psi_k\}$ – полная ортонормальная система функций в $L_2(D)$, а неизвестные коэффициенты $\{\gamma_k\}$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k c_l(A\psi_k) = c_l(g), \qquad l = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $c_l(z)$ – коэффициенты Фурье функции $z \in L_2(D)$ по системе $\{\psi_k\}$. Для вычислительной схемы (3), (4), (5) справедлива

Теорема 12.1. *В условиях теоремы 10.1 система (5) однозначно разрешима при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и приближенные решения (4) сходятся в* $L_2(D)$ *к точному решению* $u^*(x)$ *уравнения* (3). *При этом погрешность приближенной формулы* $u^*(x) \approx u_n(x)$ *может быть оценена с помощью неравенств*

$$E_n(u^*) \leq \|u^* - u_n\|_2 \leq \frac{M}{m} E_n(u^*), \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n(u^*)$ - наилучшее среднеквадратическое приближение функции $u^* \in L_2(D)$ всевозможными элементами вида (4), M – константа, определяемая из неравенства $\|A\|_{L_2(D)\to L_2(D)} \leq M$.

В §13 исследуются проекционно-итеративные методы решения с.и.у. (3), построенные на основе исследованных в §§11 и 12 итерационном и проекционном методах. Согласно этому методу приближения к решению, полученному проекционным методом (4), (5), ищутся по итерационному правилу

$$u_n^j = u_n^{j-1} + \frac{m}{M^2}\left(P_n g - A_n u_n^{j-1}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ – линейный проекционный оператор, X_n – линейная оболочка, натянутая на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов линейно независимой полной ортонормальной системы функций $\{\psi_k\}$, $n \in \mathbb{N}$, а u_n^0 – произвольное начальное приближение из X_n.

Теорема 13.1. *В условиях теоремы 10.1 решение $u_n \in X_n$ проекционного метода (4), (5) можно найти как предел в L_2 итерационной последовательности (6), причем для $u_n^0 = (m/M^2)P_n g$ справедливы оценки*

$$\|u_n - u_n^j\| \leq \frac{q^{j+1}}{1-q}\frac{m}{M^2}\|P_n g\|, \qquad q = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}, \quad n, j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 13.2. *В условиях теоремы 10.1 единственное решение $u^* \in L_2(D)$ уравнения (3) можно найти как предел*

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} u_n^j$$

в L_2 итерационной последовательности (6). При этом для любых $n, j \in \mathbb{N}$ и $u_n^0 \in X_n$ справедлива оценка

$$\|u^* - u_n^j\| \leq \frac{M}{m}E_n(u^*) + \frac{q^j}{1-q}\|u_n^1 - u_n^0\|;$$

если же $u_n^0 = (m/M^2)P_n g$, то

$$\|u^* - u_n^j\| \leq \frac{M}{m}E_n(u^*) + \frac{q^{j+1}}{1-q}\cdot\frac{m}{M^2}\|g\|.$$

Приведем здесь ещё один результат для проекционно-итеративного метода решения уравнения (3), основанного на итерационном правиле

$$u^k = u^{k-1} + \frac{m}{M^2}(g - Au^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 13.3. *Пусть за начальное приближение $u^0 \in L_2(D)$ берется приближенное решение $u_n \in X_n$ уравнения (3), полученное проекционным методом (4), (5). Тогда погрешность k-го приближения $u^* - u^k$ оценивается по формуле*

$$\|u^* - u^k\| \leq \frac{Mq^k}{m} E_n(u^*),$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $q = \sqrt{1 - m^2/M^2} < 1$.

Заключение. В работе получены и выносятся на защиту следующие основные результаты:

1. Предложены достаточные условия существования и единственности решений двумерных слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений в круге, приводящихся к уравнениям второго рода.

2. Для двумерных интегральных уравнений с полярным ядром и двумерных сингулярных интегральных уравнений типа Трикоми-Михлина-Жиро в круге построены вычислительные схемы и проведено теоретическое обоснование итерационных методов, общего проекционного метода Галеркина и метода механических кубатур.

3. Для двумерных интегралов в круге с полярным ядром предложены с обоснованием два способа построения кубатурных формул.

III Публикации по теме диссертации

1. Габдулхаев, Б. Г. Методы решения одного класса многомерных сингулярных интегральных уравнений / Б. Г. Габдулхаев, Р. К. Губайдуллина // Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 27 июня – 4 июля 2005 г.). – Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского, Том 30. – Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. – 2005. – С. 30 - 34.

2. Габдулхаев, Б. Г. О кубатурных формулах для одного класса многомерных слабо сингулярных интегралов / Б. Г. Габдулхаев, Р. К. Губайдуллина // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції "Дні

науки – 2006”, Т. 35. Математика. – Днiпропетровськ: Наука и освiта. – 2006. – С. 12 - 18.

3. Габдулхаев, Б. Г. Приближенные методы решения одного класса многомерных сингулярных уравнений / Б. Г. Габдулхаев, Р. К. Губайдуллина // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 11. – С. 11 - 16.

4. Губайдуллина, Р. К. Метод наименьших квадратов решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений / Р. К. Губайдуллина// Материалы Пятой молодёжной научной школы-конференции “Лобачевские чтения –2006” (Казань, 28 ноября – 2 декабря 2006 г.). – Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. – 2006. – С. 66 - 68.

5. Губайдуллина, Р. К. Приближенные методы решения одного класса многомерных слабосингулярных интегральных уравнений / Р. К. Губайдуллина // Сб. докладов конференции, посвященной 10-летию филиала КГУ в г. Зеленодольске “Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук”(23 ноября 2006 г.). – Казань: Казан. гос. ун-т. – 2006. – С. 93 - 96.

6. Губайдуллина, Р. К. Об оценках операторов Лагранжа в многомерных пространствах / Р. К. Губайдуллина // Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы” (Казань, 27 июня - 4 июля 2007 г.). – Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского, Том 35. – Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. – 2007. – С.83 - 85.

7. Агачев, Ю. Р. Об одном многомерном слабосингулярном интегральном уравнении / Ю. Р. Агачев, Р. К. Губайдуллина // Известия вузов. Математика. – № 11. – 2007. – С. 3 - 11.

8. Губайдуллина, Р. К. Сходимость в среднем кубатурного метода для одного класса интегральных уравнений / Р. К. Губайдуллина // Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”, посвященной памяти академика П.Л.Ульянова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2008. – С. 59 - 60.

9. Агачев, Ю. Р. Кубатурный метод решения одного класса многомерных слабосингулярных интегральных уравнений / Ю. Р. Агачев, Р. К. Губайдуллина // Известия вузов. Математика. – № 12. – 2009. – С. 3 - 13.

10. Губайдуллина, Р. К. Метод механических кубатур решения одного

класса двумерных слабо сингулярных интегральных уравенений / Р. К. Губайдуллина // Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы” (Казань, 1 - 7 июля 2011 г.). – Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского, Том 43. – Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. – 2011. – С. 106 - 109.