Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Е.А.Широкова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(базовый уровень)

Учебное пособие

Казань
2015

УДК 517

Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол №7 от 01.07 2015 г.

Рецензенты:
доктор физ.-мат.наук, профессор кафедры
высшей математики КГАСУ **В.Л. Крепкогорский**,
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
математического анализа КФУ **Г.Д. Луговая**

Широкова Е.А.
Математический анализ (базовый уровень).
Учебное пособие / Е.А.Широкова.– Казань: Казан. ун-т, 2015 – 144 с.

Учебное пособие представляет собой лекции по курсу математического анализа в КПФУ для студентов, обучающихся по направлению 09.03.03– «Прикладная информатика».
В пособии приведены постановки и решения задач по дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных, теории рядов, теории кратного интегрирования, необходимые для студентов указанного направления. При решении ряда задач применяется пакет компьютерных программ MAXIMA.

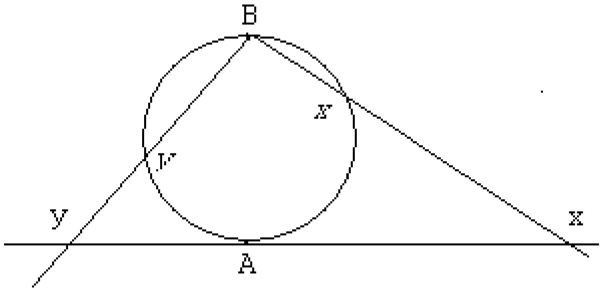
Математическим анализом называют раздел математики, в котором функции изучаются методом пределов.
Для описания математических свойств используют два символа, позволяющих сокращать запись: $\forall$ (любой, произвольный, все) и $\exists$ (существует, найдется). Они называются кванторами общности и существования. При построении противоположного высказывания квантор общности $\forall$ заменяют на квантор существования $\exists$ и, наоборот, квантор существования – на квантор общности, а последнюю (основную) фразу заменяют на противоположную.
Мы будем рассматривать функции, заданные на множестве вещественных чисел R, его подмножествах или множествах, полученных из R декартовым произведением.

Множество R и его подмножества

Известной еще древним грекам является **интерпретация** множества R в виде бесконечной прямой, на которую нанесена точка, являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа – это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными абсолютным величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы.

Другой моделью множества R является окружность. Характерной особенностью такой интерпретации является то, что аналогом бесконечности является одна из точек окружности. Покажем, что между точками бесконечной прямой и конечной окружности существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее заменять одну модель на другую.

Представим окружность, касающуюся прямой в точку А, которую мы назовем полюсом. Другим полюсом (В) назовем точку, диаметрально противоположную А. Проводя из В лучи, пересекающие окружность и данную прямую, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окружности и прямой. Полюс А будут соответствовать самому себе. Полюс В будет соответствовать бесконечности. При этом понятия $+\infty$ и $-\infty$ будут означать только направление движения к одной и той же точке В, соответствующей бесконечно удаленной точке.

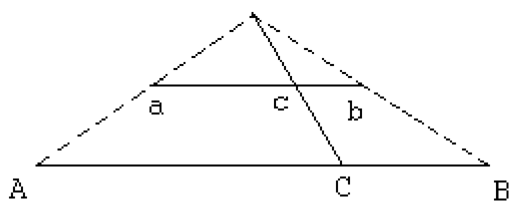


Самым первым подмножеством множества R, освоенным человечеством для счета, является множество натуральных чисел (N). Другим подмножеством R, включающим в себя N, является множество всех целых чисел (Z). Третьим подмножеством, включающим в себя Z, является множество всех рациональных чисел Q, а с множеством иррациональных чисел, дополняющим множество Q до множества R, мы познакомились в этом параграфе.

Мощность множества

Когда речь идет о конечном множестве, одной из его характеристик является число элементов этого множества. Как же с подобной точки зрения характеризовать множества, содержащие бесконечные наборы элементов? Естественным для такой характеристики является сравнение бесконечных множеств между собой или с каким-то бесконечным «эталонным» множеством. Множества считаются **равномощными**, если существует взаимно однозначное соответствие между всеми элементами одного и другого множеств. Это означает, что существует закон, в соответствии с которым каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент второго множества, причем разным элементам первого множества соответствуют разные элементы второго множества и все элементы второго множества имеют прообразы в первом множестве.

Примером задания взаимно однозначного соответствия между множествами точек двух отрезков является гомотетия:



Таким образом, «количество» точек верхнего и нижнего отрезков вследствие взаимно однозначного соответствия между точками одинаково, хотя один отрезок длиннее другого. Все дело в том, что точки, как известно, не имеют длины, и присутствие или отсутствие на отрезке отдельных точек не связано с изменением этой меры отрезка.

Взаимно однозначное соответствие между множествами на вещественной оси можно задавать с помощью функций. Так, функция $y = \operatorname{tg} x$ (что в данном случае равносильно $x = \operatorname{arctg} y$) задает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и точками всей вещественной оси. Таким образом, множество точек любого интервала равно множеству точек всей вещественной прямой.

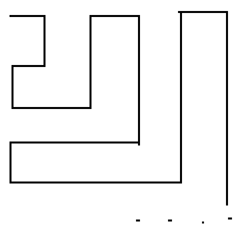
В математике очень важным является понятие **счетного множества**. Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел N. Примером счетного множества является множество Z целых чисел. Действительно, хотя N является подмножеством Z, между точками этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие с помощью следующего правила. Присвоим числу 0 номер 1, числу 1 – номер 2, числу -1 – номер 3, числу 2 – номер 4, числу -2 – номер 5…. Таким образом, целому положительному числу **n** поставим в соответствие натуральное число **2n**; отрицательному целому числу **-n** поставим в соответствие натуральное число **2n+1**. Взаимно однозначное отображение установлено, следовательно, Z счетно.

Множество рациональных чисел Q также является счетным. «Сосчитать» его, то есть, установить взаимно однозначное соответствие с множеством N можно при помощи следующей бесконечной таблицы.

В верхней строке таблицы стоят целые числа (p), начиная с 0. В левом крайнем столбце – натуральные числа (q). На пересечении строки и столбца стоит рациональное число p/q.

q\p	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	…….
1	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	……
2	0	1/2	-1/2	1	-1	3/2	-3/2	2	……
3	0	1/3	-1/3	2/3	-2/3	1	-1	4/3	……
4	0	1/4	-1/4	1/2	-1/2	3/4	-3/4	1	……
5	0	1/5	-1/5	2/5	-2/5	3/5	-3/5	4/5	……
….	…….	…	….	…	…	…	….	…	……

Очевидно, что некоторые числа в таблице повторяются. Но для любого рационального числа найдется место в таблице на пересечении столбца, соответствующего числителю, и строки, соответствующей знаменателю. Начнем двигаться по таблице с левой верхней позиции по такому пути, чтобы пройти все элементы таблицы. Можно, например, двигаться по следующему маршруту.



При этом попадающиеся по пути рациональные числа последовательно нумеруются и запоминаются, так как номера присваиваются только еще не пронумерованным числам. При указанном способе движения числу 0 присваивается номер 1, числу 1 – номер 2, числу 1/2 – номер 3, числу 1/3 – номер 4, числу -1/3 – номер 5, …..Указанная процедура (бесконечная) обеспечит нумерацию всех рациональных чисел, причем ни одно не будет пронумеровано дважды. Взаимно однозначное соответствие установлено.

Возникает вопрос: можно ли пронумеровать все вещественные числа? Ответ на этот вопрос отрицательный. Покажем, что множество точек любого интервала, лежащего на вещественной оси, несчетно.

Поскольку между точками двух интервалов можно установить взаимно однозначное соответствие, докажем **несчетность множества точек интервала (0,1).** Доказательство проведем методом «от противного».

Заметим, что в силу взаимно однозначного соответствия любую точку на интервале (0,1) можно ассоциировать с десятичной дробью вида 0,…….. , где после нуля и запятой стоит бесконечное множество цифр, принимающих значения от 0 до 9. В случае, когда десятичная дробь конечная, все цифры, начиная с некоторой, будут нулями. Предположим, что мы смогли присвоить номера всем точкам интервала или, что то же самое, всем десятичным дробям указанного вида. Следовательно, мы можем расположить все такие числа последовательно, в соответствии с нумерацией:

1) $0,a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}..........$

2) $0,a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}.........$

3) $0,a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}..........$

………………………

n) $0,a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}..........$

……………………..

Здесь все $a_{n,k}$, $n,k \in \mathrm{N}$ – цифры, принимающие значения 0,1,2,3,4,5,6,7,8 и 9.

А теперь построим новую десятичную дробь с нулем в целой части: $0,b_1b_2b_3........$, где b_j – также цифры из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. При построении выберем цифру b_1 так, чтобы $b_1 \neq a_{1,1}$, цифру b_2 так, чтобы $b_2 \neq a_{2,2}$,………., $b_n \neq a_{n,n}$,………. У нас получится новая точка из интервала (0,1), не совпадающая ни с одной точкой из пересчитанных, так как соответствующая новой точке десятичная дробь отличается от каждой из пересчитанных десятичных дробей хотя бы одной цифрой после запятой. Таким образом, мы пришли к противоречию, предполагая, что можем пересчитать **все** точки: мы нашли точку из интервала (0,1), не совпадающую с пересчитанными точками.

Мощность множества точек интервала (0,1), а значит, в силу равномощности, и мощность множества всех вещественных чисел называется **континуум**.

Функции одной переменной

Способы задания функций

Определение 1. Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Определение 2. Множество X называется *<u>областью существования</u>* функции, или областью ее определения.

Определение 3. Множество Y называется *<u>областью значений</u>* функции.

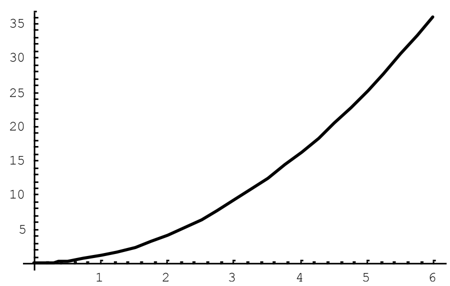
Примеры. 1. Показательная функция $y = 2^x,\ x \in \mathrm{R}$.

2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x,\ x > 0$.

3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание). В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

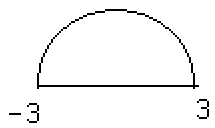
x	1	1.5	2	2.5	3	4	6
y	1	2.25	4	6.25	9	16	36



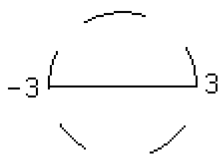
Аналитически функцию можно задать в явном виде $y = f(x)$ (*<u>явное задание функции</u>*), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее *<u>неявно</u>* $F(x, y) = 0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией.

Пример неявного задания функции $x^2+y^2=9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$,



и $y=-\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2+y^2=9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Кроме того, возможно *<u>параметрическое задание функции</u>* $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t\in[t_0,T]$. Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi)$, в неявном виде записанное как $x^2+y^2=9$.

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$n!=1\times2\times3\times\ldots\times n.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей… . На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1\times2\times3\times...\times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times...\times(m-1)\times m = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается A_m^n. Таким образом,

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более, чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов, состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением с повторением** из m по n и равен m^n.

4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается C_m^n. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{n!}$ или $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

Числовые последовательности.

Числовой последовательностью называют счетный набор пронумерованных чисел $x_n, n \in \mathrm{N}$. Последовательность также можно рассматривать как функцию, заданную на множестве N. Число x_n называют членом последовательности, n – номером этого члена последовательности.

Примеры. 1) $\dfrac{1}{n}, n \in \mathrm{N}$, 2) $3n, n \in \mathrm{N}$, 3) $1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathrm{N}$, 4) $(-1)^n, n \in \mathrm{N}$.

Легко заметить, что члены первой и третьей последовательностей с ростом n приближаются к конкретной величине, члены второй последовательности безгранично увеличиваются, а члены четвертой последовательности поочередно принимают два значения.
Введем определение предела последовательности, используя кванторы общности и существования для отображения динамики процесса.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $x_n, n \in \mathrm{N}$, ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)=1$. Здесь $x_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $a=1$. Так как $|x_n - a| = \dfrac{1}{n^2}$, найдем такое значение $N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ ($\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$). Так как последнее неравенство эквивалентно неравенству $n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, за $N(\varepsilon)$ можно принять наибольшее целое число, меньшее или равное $\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$. Такое число обозначается как $[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}]$.

Элементарные свойства пределов

1. Предел единственен.

Доказательство . Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n > N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n > N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ получим $|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \le |b - x_n| + |x_n - a| < \varepsilon$. Из произвольности ε получаем: расстояние между числами a и b может быть сделано сколь угодно малым. Это означает, что $a = b$.

2. Пусть $x_n \le y_n \le z_n, \forall n \in \mathrm{N}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. (Теорема о двух полицейских).

Доказательство. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $\forall n > N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $\forall n > N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ получим неравенства $a - \varepsilon < x_n, z_n < a + \varepsilon$. Следовательно, при $\forall n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ справедливо $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$, что обеспечивает неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$.

Пример применения. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. Обозначим $y_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Имеем $y_n \ge 0, n \in \mathrm{N}$. В соответствии с формулой бинома

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + n y_n + \frac{n(n-1)}{2!} y_n^2 + \ldots + y_n^n .$$

Следовательно, $n-1>\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$ или $y_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$. Из соотношения $0\le y_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$, применяя теорему о двух полицейских, получим $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

3. Пусть $x_n\ge 0$ при $\forall n\in\mathrm{N}$. Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $a\ge 0$.

Доказательство от противного. Пусть $a<0$. В соответствии с определением предела при $\varepsilon=-\frac{a}{2}$ найдем $N_0\in\mathrm{N}$ такое, что $\forall n>N_0$ ($|x_n-a|<-\frac{a}{2}$). То есть $\frac{a}{2}<x_n-a<-\frac{a}{2}$ при $\forall n>N_0$. Из правого неравенства следует $x_n<\frac{a}{2}$, что противоречит предположению.

4. Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

Доказательство. Сначала получим вспомогательное неравенство $||x_n|-|a||\le|x_n-a|$. Имеем

$$\begin{cases}|a|=|a-x_n+x_n|\le|a-x_n|+|x_n|\\ |x_n|=|x_n-a+a|\le|x_n-a|+|a|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|-|x_n|\le|a-x_n|\\ |x_n|-|a|\le|x_n-a|\end{cases}\Rightarrow||x_n|-|a||\le|x_n-a|.$$

Согласно определению предела для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathrm{N}$ такое, что при $\forall n>N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n-a|<\varepsilon$. Согласно доказанному неравенству при тех же $\forall n>N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $||x_n|-|a||<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

Для рассмотрения следующих свойств пределов последовательностей введем два определения.

Определение 1. Последовательность $x_n, n\in\mathrm{N}$, называется ограниченной, если $\exists M>0$ тчо $|x_n|<M, \forall n\in\mathrm{N}$.

Определение 2. Последовательность $x_n, n\in\mathrm{N}$, называется бесконечно малой величиной (б.м.в.), если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

5. Если последовательность $x_n, n\in\mathrm{N}$, сходится, то есть, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $x_n, n\in\mathrm{N}$, – ограниченная величина.

Доказательство. В соответствии с определением предела при $\varepsilon=1$ найдем такое $N_1\in\mathrm{N}$, что $|x_n-a|<1$ при $\forall n>N_1$. Следовательно, в соответствии с неравенством, полученным выше, $||x_n|-|a||<1$ при $\forall n>N_1$. Отсюда $|x_n|<1+|a|$ при $\forall n>N_1$. Найдем теперь $M=\max\{|x_1|+1,|x_2|+1,...,|x_{N_1(\varepsilon)}|+1,|a|+1\}$. Очевидно, что $|x_n|<M, \forall n\in\mathrm{N}$.

6. Пусть $x_n, n \in \mathrm{N}$, – ограниченная величина, $y_n, n \in \mathrm{N}$,– б.м.в. Тогда $z_n = x_n y_n, n \in \mathrm{N}$, – б.м.в.

Доказательство. Найдем для $\forall \varepsilon > 0$ такое $N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ ($|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$). Тогда для $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n| = |x_n y_n| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

7. Пусть $x_n, n \in \mathrm{N}$, – б.м.в., $y_n, n \in \mathrm{N}$,– б.м.в. Тогда $z_n = x_n + y_n, n \in \mathrm{N}$, б.м.в.

Доказательство. Найдем для $\forall \varepsilon > 0$ такое $N_1(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N_1(\varepsilon)$ ($|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$) и такое $N_2(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N_2(\varepsilon)$ ($|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$) . Тогда при $\forall n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ ($|z_n| < \varepsilon$).

Арифметические свойства пределов

Для упрощения доказательств этих свойств приведем новое определение предела последовательности, эквивалентное данному выше:
число a называется пределом последовательности $x_n, n \in \mathrm{N}$, если $x_n = a + x'_n$, где x'_n – б.м.в. (Доказать эквивалентность определений самостоятельно).

1.Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$ и $y_n = b + y'_n$, то $x_n + y_n = a + b + (x'_n + y'_n)$, причем выражение в скобках – б.м.в. согласно седьмому элементарному свойству.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$ и $y_n = b + y'_n$, то $x_n \cdot y_n = a \cdot b + (b \cdot x'_n + a \cdot y'_n + x'_n \cdot y'_n)$, причем выражение в скобках – б.м.в. согласно шестому и седьмому элементарным свойствам.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$, то $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$. Чтобы показать, что выражение $\frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$ – б.м.в., согласно шестому элементарному свойству достаточно показать, что $\frac{1}{|x'_n + a|}$ – ограниченная величина при достаточно больших значениях $n \in \mathrm{N}$. Имеем $\frac{1}{|x'_n + a|} = \frac{1}{|-(-x'_n) + a|} \le \frac{1}{||a| - |-x'_n||}$. Пусть

число $N_0 \in \mathrm{N}$ таково, что $|x'_n| < \frac{|a|}{2}$ при $\forall n > N_0$. Следовательно, $\frac{1}{|x'_n + a|} < \frac{2}{|a|}$ при $\forall n > N_0$ и $\frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$ – б.м.в. Теперь остается применить шестое элементарное свойство и новое определение предела.

Следствие. Согласно 2-му и 3-му арифметическим свойствам очевидным является следующее утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{y_n}{x_n}) = \frac{b}{a}$.

Основные свойства пределов последовательностей

Прежде, чем сформулируем первое основное свойство, дадим новое *Определение.* Последовательность x_{n_k}, $k \in \mathrm{N}$, называется **подпоследовательностью** последовательности x_n, $n \in \mathrm{N}$, если n_k, $k \in \mathrm{N}$, – монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Например, $x_3, x_7, x_{23}, ..., x_{3+4+16+...+4^{k-1}}, ...$ – подпоследовательность последовательности $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...$.

1.Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

2. Любая монотонная ограниченная последовательность сходится.

3. Лемма о вложенных отрезках.
Пусть $a_n, n \in \mathrm{N}$, и $b_n, n \in \mathrm{N}$,– последовательности концов последовательно вложенных друг в друга отрезков ($[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$), причем $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = \{a\}$. (То есть, пересечением последовательно вложенных друг в друга отрезков с длинами, стремящимися к нулю, является точка).
Доказательство. Очевидно, что последовательности $a_n, n \in \mathrm{N}$, и $b_n, n \in \mathrm{N}$, монотонны, причем первая неубывающая, а вторая невозрастающая. Первая ограничена сверху (например, числом b_1), вторая – снизу (например, числом a_1). Согласно второму основному свойству $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Имеем $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Таким образом, предельный отрезок, лежащий во всех отрезках, вырождается в точку a. Из условия последовательной вложимости отрезков $\bigcap_{k=1}^{n}[a_k, b_k] = [a_n, b_n]$. Поэтому $\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = \lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=1}^{n}[a_k, b_k] = \lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = \{a\}$.

Неперово число

Утверждение. $\exists \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathrm{N}$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, представим общий член последовательности в виде

$$x_n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2\cdot n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot n^3} + \ldots + \frac{n!}{n!\cdot n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n}).$$

Очевидно, что все слагаемые после числа 2 в последнем выражении положительные, их число равно $n-1$ и при увеличении n сами слагаемые будут увеличиваться, а к имеющимся слагаемым будут добавляться новые, то есть x_n растет с ростом n. Оценим общий член последовательности x_n сверху с применением формулы суммы геометрической прогрессии:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} < 2+1 = 3.$$

Таким образом, наша последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, в соответствии со вторым основным свойством пределов числовых последовательностей существует предел этой последовательности, который принято обозначать e. Это число называется неперовым числом, находится между числами 2 и 3 и приблизительно равно 2,71828.

Итак, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение предела последовательности предполагает известным предел последовательности (a), с которым сравнивается общий член последовательности (x_n). Возникает вопрос: как узнать, имеет ли последовательность какой-либо предел, не имея представления о значении этого предела. Ответ на этот вопрос дает

Критерий Коши. Последовательность $x_n, n \in \mathrm{N}$, сходится тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, такое что для $\forall m, n > N(\varepsilon) \, (|x_n - x_m| < \varepsilon)$. (Мы видим, что сравниваются не общий член последовательности и предел, а два члена последовательности с достаточно большими номерами. Условие, приведенное в формулировке критерия Коши называется условием **фундаментальности** последовательности).

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то есть, последовательность сходится. Докажем ее фундаментальность. В соответствии с определением предела для $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ тчо для $\forall n > N(\varepsilon) \, (|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Возьмем любые $m, n > N(\varepsilon)$. Тогда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. То есть из сходимости следует фундаментальность.

2. Достаточность. Пусть последовательность $x_n, n \in \mathrm{N}$, фундаментальна. Покажем сначала, что из фундаментальности следует ограниченность. В условии фундаментальности примем $\varepsilon = 1$ и найдем $N \in \mathrm{N}$ такое, что $\forall m, n > N (|x_n - x_m| < 1)$. Следовательно, при $m = N + 1$ имеем: $(|x_{N+1} - x_n| < \varepsilon)$ при $\forall n > N$. Из неравенства $||x_n| - |x_{N+1}|| \le |x_{N+1} - x_n| < 1$ при $\forall n > N$ получим неравенство: $|x_n| < 1 + |x_{N+1}|$ при $\forall n > N$. Следовательно, для всех членов последовательности справедлива оценка $|x_n| < \max\{|x_1| + 1, |x_2| + 1, ..., |x_N| + 1, 1 + |x_{N+1}|\}$ для $\forall n \in \mathrm{N}$. Итак, ограниченность доказана. Воспользуемся теперь первым основным свойством пределов последовательности и выберем из ограниченной последовательности $x_n, n \in \mathrm{N}$, сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}, k \in \mathrm{N}$, где $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Взяв теперь в условии фундаментальности $m = n_k$ при достаточно больших значениях $k > K(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, получим $\forall k > K(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon) \, (|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получим $\forall n > N(\varepsilon) \, (|x_n - a| \le \varepsilon)$. В силу произвольности ε выполнение последнего неравенства обеспечивает то, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Упражнение. Используя определение предела последовательности, докажите, что если последовательность сходится к конечному пределу, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Предел функции в точке

Существуют два определения предела функции в точке: $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

1. **Определение Гейне**: для любой последовательности $x_n,\ n\in \mathrm{N}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, справедливо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.
2. **Определение Коши**: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x,\ |x-a|<\delta$, справедливо $(|f(x)-b|<\varepsilon)$.

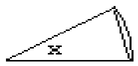
Для чего нужны два определения? Первое определение не является конструктивным, так как мы не сможем проверить всевозможные числовые последовательности, сходящиеся к точке a. Однако, это определение очень удобно для построения контрпримеров. Доказывать же существование предела в точке удобно с помощью второго определения.

Для того, чтобы пользоваться двумя определениями, докажем их эквивалентность, то есть покажем, что из условий первого определения следует выполнение условий второго определения и наоборот.

$2\Rightarrow 1$. Пусть справедливы условия второго определения и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Из определения предела числовой последовательности для любого $\varepsilon>0$ и определенного в соответствии с условием второго предела значения $\delta(\varepsilon)>0$ найдем такое значение $N=N(\delta(\varepsilon))=N(\varepsilon)\in\mathrm{N}$, что $|x_n-a|<\delta(\varepsilon)$ для любого $n>N(\varepsilon)$. Следовательно, в соответствии с условием определения 2 $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ при $\forall n>N(\varepsilon)$. Последнее является установлением того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$. То есть выполнение условий второго определения обеспечивает выполнение условий первого определения.

$1\Rightarrow 2$ доказывается от противного. Пусть выполняются условия первого определения, но условия второго определения нарушаются, то есть, $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что для $\forall\delta>0\ \ \exists x_0$ такое, что $|x_0-a|<\delta$ и $(|f(x_0)-b|\geq\varepsilon_0)$. В силу произвольности $\delta>0$ возьмем $\delta=\dfrac{1}{n}$ и найдем при каждом значении $n\in\mathrm{N}$ такое значение x_n, что $|x_n-a|<\dfrac{1}{n}$ и $(|f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0)$. Мы видим, что нашли последовательность $x_n,\ n\in\mathrm{N}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq b$. Последнее показывает невыполнимость условий первого определения. Мы пришли к противоречию.

П р и м е р. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Пусть $x>0$. Сравним площади сектора радиуса 1 раствора x и вписанного в него равнобедренного треугольника с той же вершиной, представленных на рисунке. Площадь треугольника равна $\frac{\sin x}{2}$, площадь сектора равна $\frac{x}{2}$. Треугольник вписан в сектор, значит площадь треугольника меньше площади сектора.



Следовательно, $\sin x < x$ для любого $x>0$. Пользуясь нечетностью функции $\sin x$, получим $\sin x > x$ для любого $x<0$. Таким образом, $|\sin x| < |x|$ для $x\neq 0$. Для $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)=\varepsilon$ такое что $|\sin x|<\varepsilon$ при $|x|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ в соответствии с определением Коши.

Из определения Гейне и свойств пределов последовательностей следует справедливость свойств пределов функций.

Свойства пределов функций

1) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $b+c=\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$;

2) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $k\in\mathrm{R}$, то $kb=\lim\limits_{x\to a}(kf(x))$;

3) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $b\cdot c=\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$;

4) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причем $c\neq 0$, то $\frac{b}{c}=\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})$;

5) если $f(x)\geq 0$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\geq 0$;

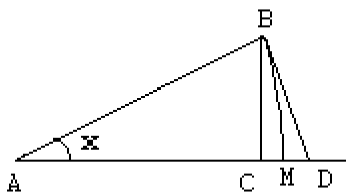
6) если $f(x) \le h(x) \le g(x)$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ (теорема о двух полицейских).

П р и м е р. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Воспользуемся полученной выше оценкой в неравенстве $0 \le |\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2}$. Теперь из теоремы о двух полицейских следует $|\cos x - 1| \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, $\cos x \to 1$ при $x \to 0$.

Первый замечательный предел

Докажем, что справедлива формула: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Прежде всего, заметим, что вследствие нечетности функции $\sin x$ отношение $\frac{\sin x}{x}$ при x, близком к 0, положительно при любом знаке x. Достаточно предположить, что x приближается к 0, оставаясь положительным. В противном случае мы сменим знак x, что не повлияет на результат.

Используем геометрическое доказательство. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



В силу последовательной вложимости друг в друга треугольника ABM, сектора ABM и треугольника ABD соответствующие соотношения имеют место между площадями этих фигур: $S_{\Delta ABM} < S_{сектABM} < S_{\Delta ABD}$. Имеем $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{сектABM} = \frac{1}{2}x$, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому получаем неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то в силу предположения о знаке x знаки неравенства не изменятся. Поэтому мы имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских.

Мы получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. Осталось применить свойство 4) для получения предела обратной величины: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел и его следствия

Докажем, что справедлива формула $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$. Но прежде изменим определение Коши с учетом того, что переменная x стремится не к конечному значению a, когда для попадания x в окрестность a следует выполнить неравенство $|x-a|<\delta$ при достаточно малом $\delta>0$, а к бесконечности. Переменная x окажется в окрестности бесконечности, если окажется по модулю больше достаточно большой величины. Таким образом, **определение Коши** в случае $x\to\infty$ будет выглядеть так: $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M=M(\varepsilon)>0$ такое, что для любого числа $x\in X$, удовлетворяющего условию $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пусть $x>0$, то есть $x\to+\infty$. Рассмотрим неравенство

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}= \\ =(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]}) . \qquad (*)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{[x]})^{[x]}=e$, так как при $x\geq 1$ величина $[x]$ – натуральное число – и мы имеем последовательность, участвующую в определении числа e. Аналогично, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{[x]+1})^{[x]+1}=e$. Теперь остается применить неравенство (*) и теорему о двух милиционерах.

Для случая $x<0$ сделаем замену $x=-y$. Тогда $(1+\dfrac{1}{x})^x=(1-\dfrac{1}{y})^{-y}=(\dfrac{y-1}{y})^{-y}=(\dfrac{y}{y-1})^y=(1+\dfrac{1}{y-1})^{y-1}(1+\dfrac{1}{y-1})$.

При $x\to-\infty$ имеем: $y\to+\infty$. Поэтому можно применить уже доказанную формулу для положительной переменной $y-1$. Доказательство завершено.

Прологарифмируем обе части второго замечательного предела – получим $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{1}{x}))=1$. Если теперь заменить $\frac{1}{x}$ переменной t, которая стремится к нулю при стремлении x к бесконечности, получим следствие из второго замечательного предела

1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

Другим следствие второго замечательного предела является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

Рассмотрим теперь предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$. Сделаем замену $(1+x)^\alpha=e^z$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha$. (Во втором выражении равенства числитель и знаменатель умножены на z и сделан переход к пределу в соответствии со вторым следствием.)

Таким образом, третьим следствием второго замечательного предела является

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

Односторонние пределы

Число b называется **левым пределом** функции $f(x)$ при $x\to a$ (пределом слева), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a слева $(x_n<a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x$, $0<a-x<\delta$, справедливо $(|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Число b называется **правым пределом** функции $f(x)$ при $x\to a$ (пределом справа), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a справа$(x_n>a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x,\ 0<x-a<\delta$, справедливо $(|\,f(x)-b|<\varepsilon)$.

Существование предела в точке означает, что пределы слева и справа существуют и равны.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (бесконечно малой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Определение 2. Функция $A(x)$ называется бесконечно большой функцией (бесконечно большой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\infty$.

Следствие. Функция $\dfrac{1}{A(x)}$ при $x\to x_0$ бесконечно малая, а $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$, причем $0<|K|<\infty$, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка малости при $x\to x_0$.

П р и м е р. Функции $(1+x)^3-1$ и x – бесконечно малые величины одного порядка малости при $x\to 0$.

Определение 4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

П р и м е р. Функции x и $\sin x$ – эквивалентные бесконечно малые величины при $x\to 0$.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

П р и м е р. Функция x^2– бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $\sin x$ при $x\to 0$.

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой и ограниченной величины – величина бесконечно малая.

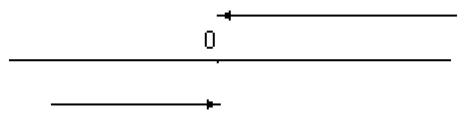
Функция, непрерывная в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathrm{R}$ и $a \in X$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то говорят, что эта функция непрерывна в точке a. По-другому можно записать свойство непрерывности так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$. Свойство непрерывности функций передается суперпозиции этих функций: если $y = f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Функция, непрерывная в каждой точке множества X, называется непрерывной на множестве X. График непрерывной функции представляет собой непрерывную кривую. Все известные из школьного математического курса функции непрерывны в областях, где они заданы: многочлены, e^x, $\ln x$ при $x > 0$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

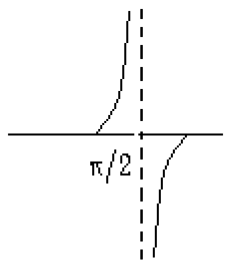
Пример разрывной функции – функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Доказать, что она имеет разрыв в точке $x = 0$ можно с применением определения Гейне. Зададим последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, что общий член последовательности стремится к нулю с ростом номера, причем четные члены последовательности – положительные числа, нечетные – отрицательные. Нетрудно заметить, что $f(x_n) = (-1)^n$. Поскольку последовательность $(-1)^n$ не имеет предела, то в соответствии с определением Гейне функция $y = \operatorname{sgn} x$ не имеет предела в точке $x = 0$, и поэтому не может быть непрерывной в этой точке, как бы мы ее в этой точке ни определяли.



Приведенный пример точки разрыва – **точка разрыва первого рода**. В соответствии с определением точки разрыва первого рода функция должна иметь пределы при x, стремящимся к точке разрыва слева и при x, стремящимся к точке разрыва справа, только эти пределы не совпадают. В случае функции $y = \operatorname{sgn} x$ предел слева в точке разрыва $x = 0$ равен -1, предел справа равен 1.

Точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ называется такая предельная точка множества X, на котором задана функция, что хотя бы один из пределов (слева или справа) функции в этой точке не существует или бесконечен. В качестве примера можно привести функцию $y = \operatorname{tg} x$. В точке $x = \pi/2$ функция не определена, но эта точка является предельной для множества определения функции. При стремлении x к $\pi/2$ слева значения функции, постоянно увеличиваясь, стремятся к $+\infty$. При стремлении x к $\pi/2$ справа, значения функции, уменьшаясь, стремятся к $-\infty$.



Функция, непрерывная в каждой точки множества X, называется непрерывной на множестве X.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b]. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Функция $f(x)$ ограничена на [a,b].

Доказательство (от противного). Предположим, что $f(x)$ не является ограниченной, то есть, для $\forall n \in \mathrm{N}$ $\exists x_n \in [a,b]$ такое, что $|f(x_n)| > n$. Выберем из ограниченной последовательности x_n, $n \in \mathrm{N}$, сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}, $k \in \mathrm{N}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Точка x_0

является предельной для отрезка $[a,b]$, и в силу замкнутости отрезка принадлежит этому отрезку. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Это противоречит тому, что $|f(x_{n_k})| > n_k$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

2. $\exists x_M, x_m \in [a,b]$ такие, что $f(x_M) = M, f(x_m) = m$, где M – наибольшее, m – наименьшее значения функции на отрезке.

3. Если $f(a)\cdot f(b) < 0$ (значения на концах отрезка имеют разные знаки), то $\exists x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0) = 0$.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся леммой о вложенных отрезках. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам и проверим значение $f(\frac{a+b}{2})$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $x_0 = \frac{a+b}{2}$ и теорема доказана. В противном случае выберем ту половину отрезка, на границах которой функция имеет разные знаки. Разделим этот новый отрезок пополам и проверим значение функции в этой середине…. Продолжая указанный процесс, мы либо получим значение 0 у функции в одной из середин получаемых отрезков, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n \in \mathrm{N}$, обладающих свойствами: $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$. В соответствии с леммой о вложенных отрезках $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in [a,b]$. В силу непрерывности функции на отрезке $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$. В силу того, что знаки $f(a_n)$ и $f(b_n)$ разные, $f(c) = 0$. Следовательно, $x_0 = c$.

Следствиями 3-го свойства являются следующие свойства:

3-а. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. (Для доказательства следует применить свойство 3 к функции $f_1(x) = f(x) - k$ для любого значения k между $f(a)$ и $f(b)$).

3-б. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между M и m, где M и m из свойства 2. (Для доказательства следует применить свойство 3-а для функции $f(x)$ на отрезке $[x_m, x_M]$).

Условие дифференцируемости функции в точке

Условию непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно дать следующее определение: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(a+\Delta x) - f(a)) = 0$, где $\Delta x = x - a$ называется приращением аргумента, а $\Delta f = f(x) - f(a)$ называется соответствующим приращением функции. В связи с этим возникает вопрос о сравнении малых величин Δx и Δf при стремлении Δx к нулю.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке a, если существует такая константа A, что $\Delta f = A\Delta x + \alpha$ при достаточно малых значениях Δx, где $\alpha -$ величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Из определения следует, что функция, дифференцируемая в точке, является непрерывной в этой точке. Более того, следует, что величина Δx не может быть величиной большего порядка малости, чем Δf, в противном случае величина A была бы не константой, а бесконечной величиной.

В случае дифференцируемости функции в точке соответствующая константа A имеет свое название: она называется **производной** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $f'(a)$. Из определения также очевидно, что производная определяется с помощью предельного перехода следующим образом:

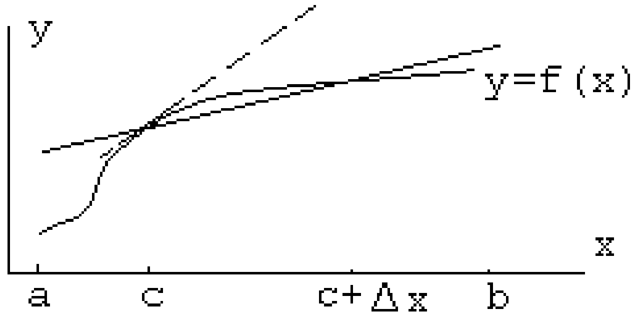
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Условие дифференцируемости имеет важные геометрический и физический смыслы.

Задача о проведении касательной к кривой

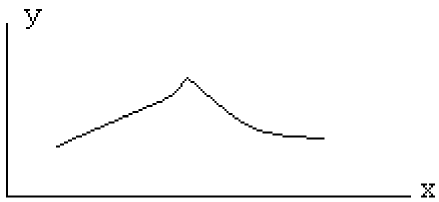
Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$. Требуется провести касательную к этой кривой в точке $c \in (a,b)$. Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид: $\dfrac{x-c}{(c+\Delta x)-c} = \dfrac{y - f(c)}{f(c+\Delta x) - f(c)}$ или

$y = f(c) + \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}(x - c)$. Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX .



Таким образом, уравнение касательной в точке $(c, f(c))$ имеет вид $y = f(c) + f'(c)\cdot(x - c)$.

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции. Существование касательной означает, что равны пределы отношения $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0 \pm 0$, то есть, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$. Это значит, что $f(c+\Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + \Delta x \cdot a$, где $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\Delta x \cdot a = \alpha$ – величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx. Таким образом, для того, чтобы можно было провести касательную к кривой $y = f(x),\ x \in [a, b]$ в точке $(c, f(c))$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке c.

Задача о вычислении мгновенной скорости

Предположим, что мы следим за прямолинейным движением точки, пройденный путь которой в зависимости от времени выражается формулой $S(t)$. Чтобы вычислить среднюю скорость движения точки на участке $[t_0, t_0+\Delta t]$, достаточно получить значение $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$. Если теперь устремить Δt к нулю, мы получим, что отрезок выродится в точку, а средняя скорость по отрезку при существовании предела $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ превратится в мгновенную скорость в точке t_0. Таким образом, производная функции $S(t)$, представляющей зависимость пути от времени, представляет мгновенную скорость в соответствующей точке.

Итак**, геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$,
физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x=x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y=f(x)$.

Дифференциал

Как было сказано выше, в случае дифференцируемости функции в точке второе слагаемое α в выражении приращения функции $\Delta f = f'(x_0)\Delta x+\alpha$ – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно – в случае, когда $f'(x_0)\neq 0$, – и чем величина $f'\left(x_0\right)\Delta x$. Другими словами, **первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции**. Называют его **дифференциалом функции** $y=f\left(x\right)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0)=f'\left(x_0\right)\Delta x.$ В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df=f'\left(x\right)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'\left(x\right)=\dfrac{df}{dx}$. Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 1.

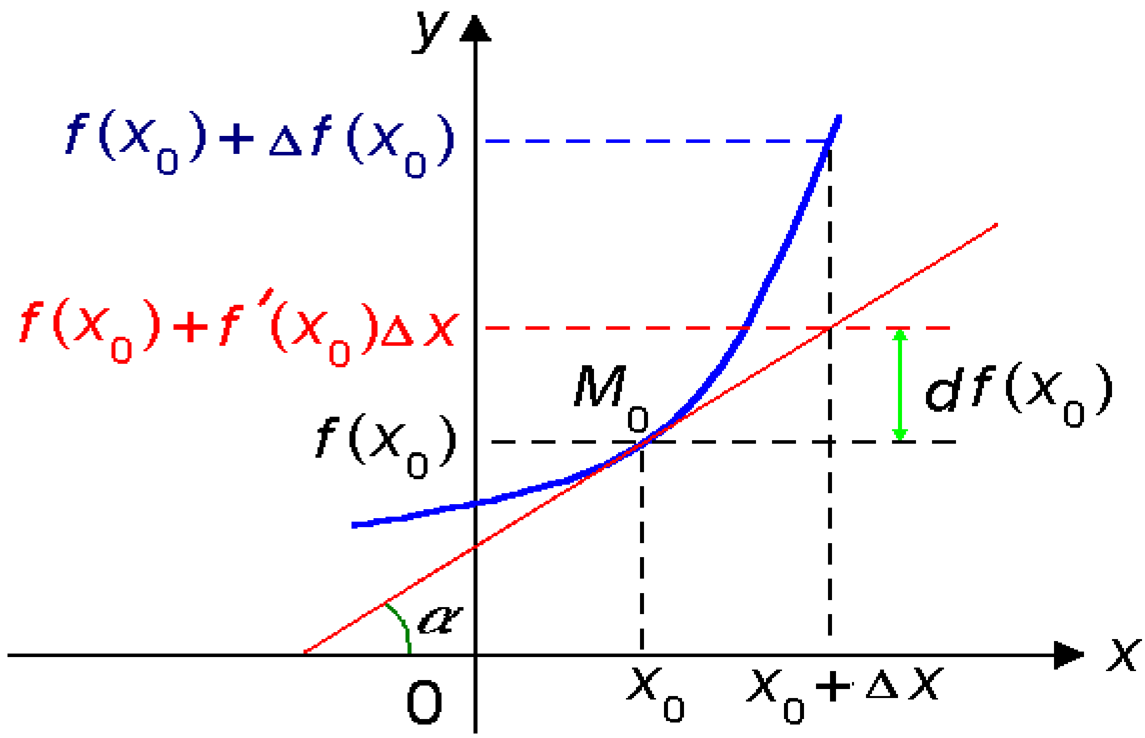


Рис. 1

Примеры получения производных

Применяя замечательные пределы и их следствия, получим

1. $$\sin' a=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a;$$

2. $$\cos' a=\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$
$$=-\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}=-\sin a;$$

3. $$(e^x)'_{|a}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a\lim_{x-a\to 0}\frac{(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a;$$

4. $\ln' a = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a} =$

$= \dfrac{1}{a}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{\frac{x-a}{a}} = \dfrac{1}{a};$

5. $(x^{\alpha})'_{|a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x-a} = a^{\alpha}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\frac{x}{a})^{\alpha}-1}{x-a} = a^{\alpha}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\frac{x-a}{a}+1)^{\alpha}-1}{x-a} =$

$= a^{\alpha-1}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{(\frac{x-a}{a}+1)^{\alpha}-1}{\frac{x-a}{a}} = \alpha a^{\alpha-1}.$

Производные и арифметические операции над функциями

Из условия дифференцируемости и из свойств пределов функций следуют свойства производных.

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)+g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, $k\in\mathrm{R}$. Тогда функция $k\cdot f(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$.
3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.
4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $g(a)\neq 0$. Тогда функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке a, причем $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Покажем, как доказывается свойство 3. Обозначим $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Имеем

$$\Delta h = f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a) = (f(x)-f(a))\cdot g(x)+f(a)\cdot(g(x)-g(a)) =$$
$$= \Delta f\cdot g(x)+\Delta g\cdot f(a) = (f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot g(x)+(g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a) =$$
$$= (f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot(g(a)+\Delta g)+(g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a),$$

где α и β – величины более высокого порядка малости, чем Δx. Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при Δx, получим следующее представление:

$$\Delta h = (f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a))\cdot\Delta x + f'(a)\cdot\Delta x\cdot\Delta g + \alpha\cdot g(a) + \alpha\cdot\Delta g + \beta\cdot f(a) =$$
$$= (f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a))\cdot\Delta x + \gamma,$$

где γ – величина более высокого порядка малости, чем Δx. В соответствии с условием дифференцируемости и выражением производной свойство 3 доказано.

Упражнение. В качестве приложения свойства 4 докажите равенства: $\mathrm{tg}' a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$, $\mathrm{ctg}' a = -\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Производная сложной функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$. Пусть функция $g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Имеем

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot(f(x) - f(x_0)) + \beta =$$
$$= g'(f(x_0))\cdot(f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \alpha) + \beta = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x - x_0) + g'(f(x_0))\cdot\alpha +$$
$$+ \beta = g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \gamma,$$

где $\gamma = g'(f(x_0))\cdot\alpha + \beta$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x - x_0)$. Действительно, слагаемое $g'(f(x_0))\cdot\alpha$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x - x_0)$, так как сомножитель α обладает этим свойством. Слагаемое β – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(f(x) - f(x_0))$. Поэтому

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \frac{\beta}{(x - x_0)} = \lim_{x - x_0 \to 0} \frac{\beta}{(f(x) - f(x_0))}\cdot\frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} = 0.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Пример. Найдем производную $\ln|x| = \dfrac{1}{2}\ln x^2$. Пользуясь доказанным свойством, получим $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x = \dfrac{1}{x}$.

Производная обратной функции

Даны функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = g(y)$, т.е. $x = g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$,тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, при этом $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$.

Действительно, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Теперь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Пример. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Упражнение. В качестве приложения правила дифференцирования обратной функции докажите равенства

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная параметрически заданной функции

Пусть $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $t\in[t_1,t_2]$, причем функции обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0\in(t_1,t_2)$, $\varphi'(t_0)\neq 0$, $\varphi(t_0)=x_0, \psi\left(t_0\right)=y_0$.

Считая, что $y=y(x)$, вычислим $\dfrac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом, а затем продифференцировать обе части заданного соотношения, применяя правило дифференцирования сложной функции.

Пример. Пусть в соотношении $x\cdot\cos y+\ln(x+y)=5$ аргументом является x, функцией y. Продифференцируем по x заданное соотношение: $\cos y-x\cdot\sin y\cdot y'(x)+\dfrac{1+y'(x)}{x+y}=0$. Отсюда выражаем искомую производную: $y'(x)(\dfrac{1}{x+y}-x\cdot\sin y)=-\dfrac{1}{x+y}-\cos y$ или

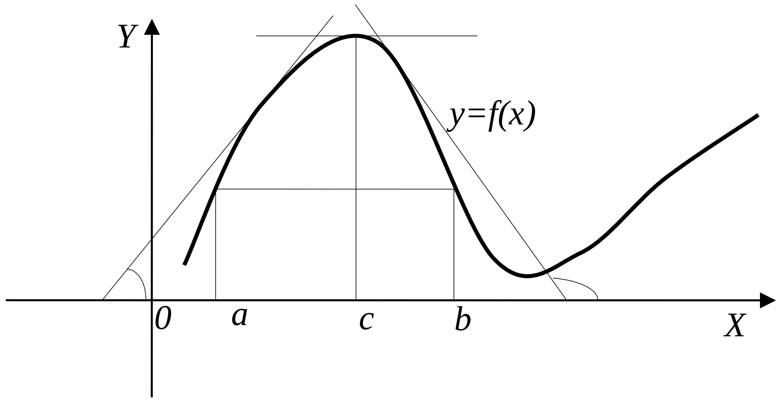
$$y'(x)=\frac{(x+y)\cdot\cos y+1}{(x+y)\cdot x\cdot\sin y-1}.$$

Метод логарифмического дифференцирования

Представим, что нам необходимо взять производную функции $y(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$. Для этого сначала прологарифмируем обе части соотношения: $\ln y(x)=\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)$. А теперь продифференцируем обе части полученного соотношения по x: $\dfrac{y'(x)}{y(x)}=\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\dfrac{\psi(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ или $y'(x)=y(x)\cdot(\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\dfrac{\psi(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)})$. Логарифмическое дифференцирование имеет смысл применять также в случаях, когда необходимо взять производную произведения нескольких функций или производную частного от деления двух произведений.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Терема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a\,, b)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала $(a\,, b)$, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0,\ c \in (a\,, b)$.



На рисунке приведена геометрическая иллюстрация теоремы.

Доказательство. 1. В случае, когда $f(x) \equiv f(a) = f(b)$ вывод теоремы очевиден, и в качестве точки c можно взять любую внутреннюю точку интервала $(a\,, b)$.

2. Пусть функция $f(x)$ не является постоянной на отрезке $[a,b]$. По свойству непрерывных на отрезке функций существует внутренняя точка $c \in (a,b)$, в которой функция принимает либо минимальное, либо максимальное на отрезке значение. Пусть для определенности это будет максимальное значение: $f(x) - f(c) < 0,\ \forall x \in [a,b]$. Значит, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$. Поэтому единственная возможность дифференцируемости функции в точке c: $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a\,, b)$ и $g(b) \ne g(a)$, то существует такая точка $c \in (a\,, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

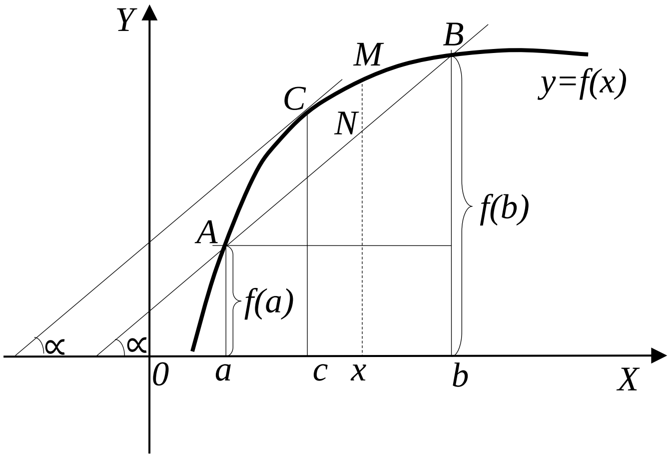
$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]}[g(x) - g(a)].$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, то есть введенная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]} g'(c) = 0$, теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$ является

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то существует такая точка $c \in (a, b)$, для которой справедливо:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение. Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y'' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение.

$$y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Примеры.

1) Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$ и так далее.

2) Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n).$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков. Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x) = f(x)'dx$, тогда

$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx$,

dx - бесконечно малое приращение, не зависящее от x, поэтому производная от него считается как от постоянной. Т.е.

$d^2 f(x) = (f'(x))'dx^2 = f''(x)\, dx^2$.

Подобным образом получим $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n$.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta$, где β– бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Поэтому для точек x, близких к точке a справедлива формула

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример. $\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}} \approx 2\cdot\left[1+\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot(-\frac{1}{16})\right] = \frac{63}{32}$. Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $a = 0$, $x = -\frac{1}{16}$. Поэтому $f(a) = 1$, $f'(a) = \frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a) = -\frac{1}{16}$.

Возникают вопросы: 1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции? 2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $n+1$ порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива формула

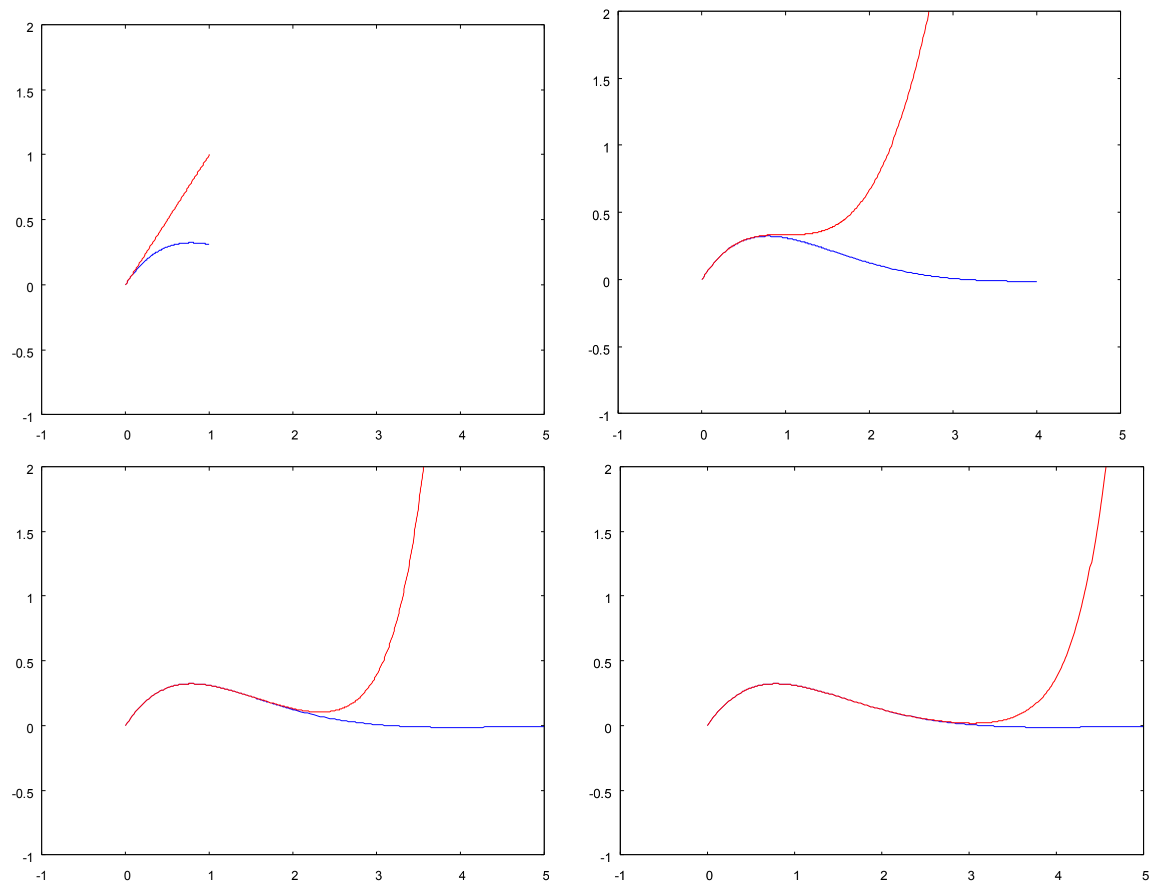
$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$

$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x),$$

где остаточный член $r(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta\in(0,1)$.

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta\in(0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки. Последняя формула является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в окрестности точки $a=0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+$$
$$+\frac{d^4f(a)}{4!}+\dots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x).$$

Для приложений к вычислению пределов используют **локальную** формулу Тейлора, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена.

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. В свою очередь для оценки величины $e^{\max\{x,0\}}$ можно брать 1 при $x<0$ и 3^x при $x>0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. Так как $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$ и т.д., получим $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$ ….

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots+\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n-1\right)!}x^{2n-1}+r_n\left(x\right).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, так как $|\sin(x+(2n+1)\frac{\pi}{2})|\le 1$.

Пример 3. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=\cos x$.

$f'\left(x\right)=-\sin x$, $f''\left(x\right)=-\cos x$, $f'''\left(x\right)=\sin x$, $f^{IV}\left(x\right)=\cos x$,

$f^{V}\left(x\right)=-\sin x$, $f^{VI}\left(x\right)=-\cos x$.

Очевидно, что

$f\left(0\right)=1$, $f'\left(0\right)=0$, $f''\left(0\right)=-1$, $f'''\left(0\right)=0$,

$f^{IV}\left(0\right)=1$, $f^{V}\left(0\right)=0$, $f^{VI}\left(0\right)=-1$.

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots+\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}x^{2n}+r_n\left(x\right).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$, так как $|\cos(x+(2n+2)\frac{\pi}{2})|\le 1$.

Пример 4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=\ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0!=1)$, имеем $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$. Согласно приведенной формуле остаточного члена имеем $|r_n(x)|=\frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$. Поэтому для $x>0$ получим оценку

$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, но для $x<0$ использование приведенной формулы остаточного члена не годится. Для таких значений x используют другие формы остаточного члена.

Пример 5. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$, и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, приведенная форма остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае оценка следующая: $|r_n(x)|\le\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$.

Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Приложения производной функции

Правило Лопиталя

(Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a и имеет место одна из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство (для неопределенности $\frac{0}{0}$). Поскольку $f(a)=g(a)=0$, (иначе не будет указанной неопределенности), из теоремы Коши имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь использовалось, что c находится между a и x, следовательно, при $x\to a$ и $c\to a$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{2x}=\dfrac{1}{4}.$

Раньше это пример решался с помощью тождественного преобразования

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}=\dfrac{1}{4}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$ (доказан первый замечательный предел).

Теорема о возрастании (убывании) функции $y=f(x)$ на интервале

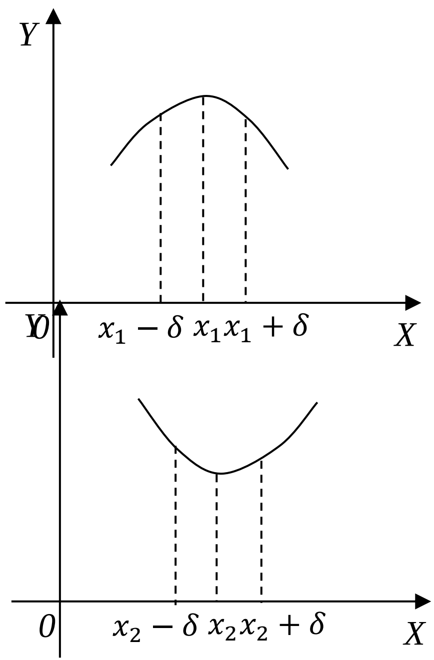
Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на этом отрезке. Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для $a<x<b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$ при $x\neq x_1$.

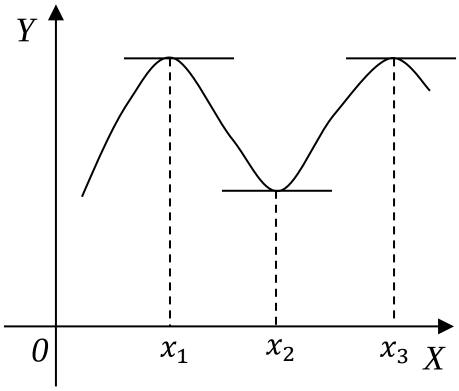
Определение 2. Функция $y=f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_2



выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.

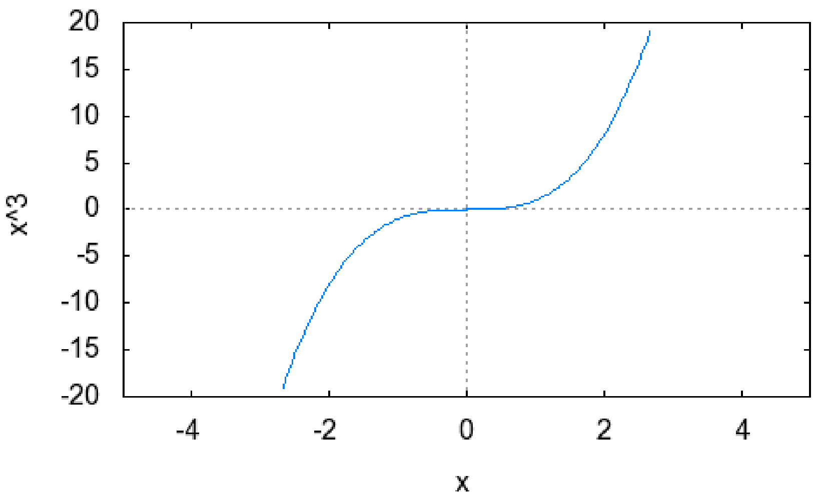
Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c) = 0$.



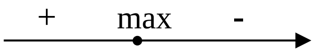
Доказательство. Пусть точка c – точка максимума, тогда $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то есть $f'(c) = 0$.

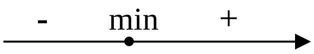
Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 о достаточном условии существования максимума и минимума функции.

Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.





Теорема 2 о достаточном условии существования максимума и минимума функции. Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство.

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0)=0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

П р и м е р 1. $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

П р и м е р 2. $y=\cos^2 x$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=-\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\frac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k)=-2\cos \pi k$, поэтому $x_k=\frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

П р и м е р. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[1;4]$.

Находим точки, в которых производная обращается в нуль: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$, получаем две точки, одна из которых $x = 0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

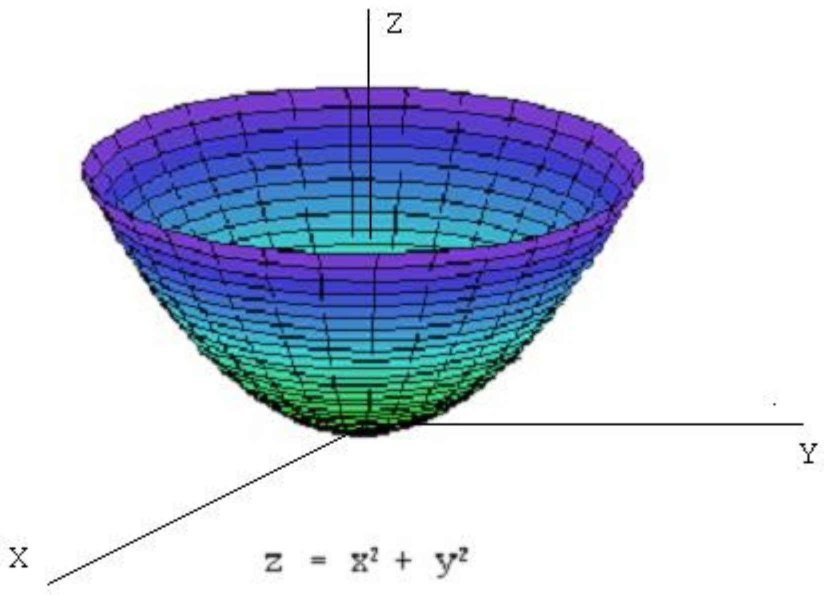
Определяем в этих точках значения функции $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, $y_3 = 17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x = 2$, наибольшее (17) при $x = 3$.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Примерами функций двух переменных являются, например, формулы эллиптического параболоида, имеющего уравнение $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, или гиперболическим параболоида, имеющего уравнение $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Правые части приведенных выражений являются функциями переменных x и y.

Если график функции одной переменной представляет собой плоскую кривую, характеризующую зависимость функции от переменной, то в случае двух переменных такую характеристику зависимости функции (z) от переменных (x и y) выражает поверхность.



Для графического изображения зависимости функции трех и более переменных понадобилось бы пространство размерности, большей, чем 3. Поэтому такие графические изображения невозможны.

Многомерные пространства.
Мы будем рассматривать n-мерные пространства R^n, элементами которых являются точки x, каждая из которых задается n координатами $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В случае малой размерности пространства, чтобы не вводить верхние индексы, мы будем использовать традиционные координаты: x, y, z, u, v, w.
Расстоянием между точками x и y n-мерного пространства является величина $\rho(x,y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + ... + (x^n - y^n)^2}$.

Функцией n переменных $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие вещественное число z. Примером функции двух переменных, заданной на всей плоскости XOY, является уже рассмотренная функция $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, графическая зависимость которой изображается с помощью эллиптического параболоида.

Предел функции многих переменных. Понятие предела функции в точке переносится с функций одной переменной на функции многих переменных $z = f(x),\ x \in D,$ следующим образом. $z_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x \in D$, таких что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - z_0 | < \varepsilon$.
В случае функций двух переменных для вычисления предела в точке удобно переходить к полярным координатам в окрестности этой точки, а в случае функции трех переменных – к сферическим координатам.
П р и м е р ы. 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Переходя к полярным координатам в окрестности точки $(1,0)$, запишем $x = 1 + r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$. Очевидно, что точка с координатами (x, y) стремится к точке с координатами $(1,0)$ тогда и только тогда, когда $r \to 0$. Следовательно, искомый предел равен $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\ln(1 + r \cdot \cos\varphi + e^{r \cdot \sin\varphi})}{\sqrt{1 + r^2 + 2 \cdot r \cdot \cos\varphi}}$. Последний предел – это предел функции одной переменной r, непрерывной по r при $r = 0$ для любого значения φ. Поэтому мы получаем ответ: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2$.

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{2\cdot x\cdot y\cdot z}{x^3+2\cdot y^3-z^3}$. Переходя к сферическим координатам в окрестности точки $(0,0,0)$, положим $x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi$, $y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi$, $z=r\cdot\cos\psi$. Точка с координатами (x,y,z) стремится к точке $(0,0,0)$ тогда и только тогда, когда $r\to 0$. Следовательно, искомый предел после перехода к сферическим координатам и сокращения числителя и знаменателя на величину r^3 равен $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\psi\cdot\cos\psi}{(\cos^3\varphi+2\cdot\sin^3\varphi)\cdot\sin^3\psi-\cos^3\psi}$. Очевидно, что данный предел не существует, так как полученное после сокращения выражение не зависит от переменной r, а зависит только от значений φ и ψ. Ответ: предел не существует.

Непрерывность функции многих переменных в точке. Как и в случае функций одной переменной, функция многих переменных $z=f(x),\ x\in D$, называется непрерывной в точке $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n)$, если точка x_0 входит в область определения функции D и $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Из определения предела функции многих переменных следует, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, для любого $\varepsilon>0$ существует такое значение $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек $x\in D$, таких что $\rho(x,x_0)<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Таким образом, **малым приращениям аргумента** (в смысле расстояния в пространстве R^n) у функции, непрерывной в точке, соответствуют **малые приращения функции.**

Как и в случае функций одной переменной, арифметические действия над непрерывными функциями не выводят из класса непрерывных функций, если нет деления на 0.

Дифференцируемость функции многих переменных.

Требование дифференцируемости функции многих переменных в точке является более сильным, чем требование непрерывности функции в точке, так как не только обеспечивается малость приращения функции при малом приращении аргумента. Условие дифференцируемости состоит в том, что **приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, является результатом линейного преобразования этого бесконечно малого приращения аргумента**.

Вспомним, что приращение аргумента функции многих переменных является n-мерным вектором, а линейное отображение n-мерного вектора в пространство размерности 1 задается матрицей-строкой размера $1\times n$.

Поэтому условие дифференцируемости функции многих переменных $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ формулируется следующим образом: **существует матрица-строка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ такая, что для любого вектора приращений аргумента $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, ..., \Delta x^n)$ имеет место представление $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a_1 \cdot \Delta x^1 + a_2 \cdot \Delta x^2 + ... + a_n \cdot \Delta x^n + \alpha$,**

где величина α настолько мала, что $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \dfrac{\alpha}{\rho(x_0 + \Delta x, x_0)} = 0$.

При этом матрица-строка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ называется производной матрицей, а величина α называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0 + \Delta x, x_0)$.

Частные производные.

Предположим, что функция $z = f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$. Как выразить элементы производной матрицы-строки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ через заданную функцию? Выберем вектор приращений так, что приращения происходят только по k-му аргументу x^k. Вектор приращений аргумента в этом случае имеет вид $\Delta x = (0, 0, ..., 0, \Delta x^k, 0, ..., 0)$, следовательно, $\rho(x_0 + \Delta x, x_0) = |\Delta x^k|$.

Приращение функции примет вид $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0^1, ..., x_0^k + \Delta x^k, ..., x_0^n) - f(x_0^1, ..., x_0^n) = a_k \cdot \Delta x^k + \alpha$, где $\lim\limits_{\Delta x^k \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta x^k} = 0$. Последние соотношения являются условием дифференцируемости функции $g(x^k) = f(x_0^1, ... x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n)$ одной переменной x^k в точке x_0^k. При этом

$$a_k = \frac{dg(x^k)}{dx^k}\Big|_{x^k = x_0^k} = \frac{df(x_0^1, ... x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n)}{dx^k}\Big|_{x^k = x_0^k}.$$

Таким образом, k-й элемент производной матрицы-строки является производной по k-й переменной x^k заданной функции в точке x_0^k при фиксированных остальных переменных $x^j = x_0^j, j \neq k$. Такая производная называется **частной производной функции многих переменных** $f(x^1, x^2, ..., x^n)$ по переменной x^k в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и обозначается $\dfrac{\partial f(x^1, ..., x^n)}{\partial x^k}\Big|_{x = x_0} = f'_{x^k}(x_0)$. Итак, производная матрица-строка, участвующая в определении условия дифференцируемости функции многих переменных в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$, состоит из частных производных по соответствующим переменным в точке x_0:

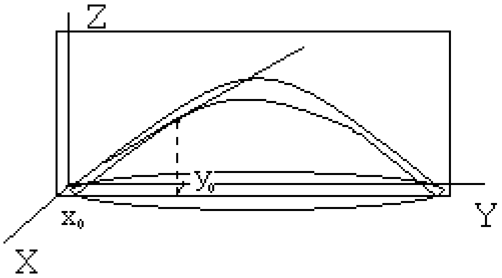
$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (f'_{x^1}(x_0), f'_{x^2}(x_0), ..., f'_{x^n}(x_0)).$$

Главная часть приращения функции многих переменных в точке x_0, принимающая теперь вид $\sum_{k=1}^{n} f'_{x^k}(x_0) \cdot \Delta x^k = \sum_{k=1}^{n} f'_{x^k}(x_0) \cdot dx^k$, называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Таким образом, связь приращения функции в точке и дифференциала в той же точке имеет вид $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \alpha$, где α – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho(x_0 + \Delta x, x_0)$.

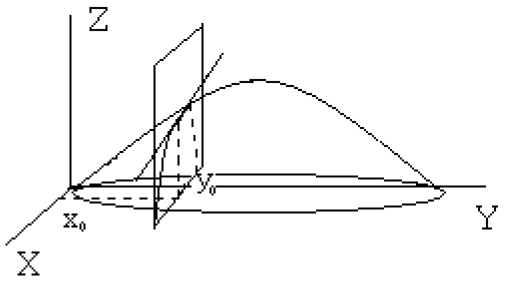
Геометрический смысл частных производных функции двух переменных.

Пусть $z = f(x, y), (x, y) \in D$, – функция двух переменных. Графическим изображением этой функции является поверхность над областью D. Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in D$, в которой данная функция имеет конечные частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.

Пересечением плоскости $x = x_0$ с заданной поверхностью является кривая. Аппликата этой кривой определяется по формуле $z = f(x_0, y)$. Частная производная $f'_y(x_0, y_0)$ является тангенсом угла наклона касательной к полученной кривой $z = f(x_0, y)$, лежащей в плоскости $x = x_0$, с положительным направлением оси OY в точке $y = y_0$. Направляющий вектор этой касательной имеет координаты $(0,1, f'_y(x_0, y_0))$.



Пересечением плоскости $y = y_0$ с заданной поверхностью является кривая. Аппликата этой кривой определяется по формуле $z = f(x, y_0)$. Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ является тангенсом угла наклона касательной к полученной кривой $z = f(x, y_0)$, лежащей в плоскости $y = y_0$, с положительным направлением оси OX в точке $x = x_0$. Направляющий вектор этой касательной имеет координаты $(1,0, f'_x(x_0, y_0))$.



Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной явно

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$, причем $(x_0, y_0) \in D$. Проведем такую плоскость через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, чтобы векторы $(0,1, f'_y(x_0, y_0))$ и $(1,0, f'_x(x_0, y_0))$ лежали в этой плоскости. Такая плоскость называется касательной плоскостью к заданной поверхности, проходящей через данную точку. Выведем уравнение такой плоскости. Как известно, уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору $\vec{a} = (A, B, C)$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Такое уравнение получается из условия взаимной перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ с применением скалярного произведения. Значит, для получения уравнения касательной плоскости нам достаточно найти вектор $\vec{a} = (A, B, C)$, перпендикулярный к этой плоскости. По условию вектор $\vec{a} = (A, B, C)$ перпендикулярен как вектору $(0,1, f'_y(x_0, y_0))$, так и вектору $(1,0, f'_x(x_0, y_0))$. Значит, выполняются соотношения $B + Cf'_y(x_0, y_0) = 0$ и $A + Cf'_x(x_0, y_0) = 0$. Отсюда следует, что вектор $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ является перпендикулярным к касательной плоскости. Поэтому уравнение касательной плоскости принимает вид $z - f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Дифференцируемость вектор-функции многих переменных.

Вектор-функцией $z = f(x) = (f_1(x^1, x^2, ..., x^n), f_2(x^1, x^2, ..., x^n), ..., f_m(x^1, x^2, ..., x^n))$, размерности m, заданной на множестве D из пространства R^n, назовем закон, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие точка z из m-мерного пространства ($z \in \mathrm{R}^m$). Каждая из функций, являющихся координатами вектор-функции, называется координатной функцией. Примером вектор-функции размерности 2 двух переменных служит $z = (x(r,\varphi), y(r,\varphi))$, где $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$. Нетрудно видеть, что данная вектор-функция задает соответствие между полярными и декартовыми координатами.

Приращением m-мерной вектор-функции в точке x_0 является m-мерный вектор $\Delta z = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0),..., f_m(x_0+\Delta x) - f_m(x_0))$.

Признаком дифференцируемости вектор-функции в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2,..., x_0^n)$ является то, что **приращение функции, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента является результатом линейного преобразования этого бесконечно малого приращения**. Линейное отображение пространства R^n в пространство R^m задается матрицей размера $m\times n$. Поэтому условием дифференцируемости m-мерной вектор-функции n переменных является существование такой матрицы A размером $m\times n$, что для любого n-мерного вектора приращений аргумента Δx справедливо

$\Delta z = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha$, где вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x, x_0)\to 0} \dfrac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_m^2}}{\rho(x_0+\Delta x, x_0)} = 0$. Матрица A называется производной матрицей и состоит из значений всех частных производных всех координатных функций, входящих в вектор-функцию, в данной точке:

$$A = \begin{pmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & ... & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & ... & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ f'_{m\,x^1}(x_0) & f'_{m\,x^2}(x_0) & ... & f'_{m\,x^n}(x_0) \end{pmatrix} = \left[f'_{i\,x^j}(x_0) \right]_{i=1,\, j=1}^{m,\ n}.$$

Производная матрица суперпозиции вектор-функций.

Пусть $z = f(x),\ x\in D,$ – m-мерная вектор-функция n переменных. То есть, $x = (x^1, x^2,..., x^n)$. Пусть $x = g(y),\ y\in S,$– n-мерная вектор-функция k переменных. То есть, $y = (y^1, y^2,..., y^k)$. Очевидно, что если подставить $g(y)$ вместо переменной x в выражение $z = f(x)$, мы получим новую функцию, называемую суперпозицией двух вектор-функций: $z = h(y) = (f\circ g)(y),\ y\in S,$ которая является m-мерной вектор-функцией k переменных.

Предположим, что вектор-функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0\in S$, и соответствующей производной матрицей является матрица B. Предположим, что вектор-функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(y_0)\in D$, и соответствующей производной матрицей является матрица A. Тогда вектор-функция $h(y) = (f\circ g)(y)$ дифференцируема в точке y_0, и производной **матрицей суперпозиции является матрица $C = A\cdot B$.**

Якобиан.

Пусть $z = f(x),\ x \in D,$ – n-мерная вектор-функция n переменных, дифференцируемая в точке x_0. В данном случае производная матрица является квадратной, размера $n \times n$. Для такой матрицы может быть вычислен определитель. Этот определитель $\begin{vmatrix} f'_{1\,x^1}(x_0) & f'_{1\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{1\,x^n}(x_0) \\ f'_{2\,x^1}(x_0) & f'_{2\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{2\,x^n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n\,x^1}(x_0) & f'_{n\,x^2}(x_0) & \dots & f'_{n\,x^n}(x_0) \end{vmatrix}$ называется якобианом и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}\Big|_{x=x_0} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}\Big|_{x=x_0}$.

Примеры. 1. Сосчитаем якобиан перехода от полярных координат к декартовым координатам. Напомним формулы: $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$. Имеем $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = r$.

2. Сосчитаем якобиан перехода от сферических координат к декартовым координатам. Напомним формулы: $x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi,\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi,$ $z = r \cdot \cos\psi$. Имеем

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \cdot \sin\psi & -r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi \\ \sin\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi & r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r \cdot \sin\psi \end{vmatrix} = -r^2 \cdot \sin\psi .$$

Существование частных производных в точке и дифференцируемость в точке

Если в случае функции одной переменной условие дифференцируемости в точке и условие существования производной в точке совпадали, то в случае функций нескольких переменных условие дифференцируемости в точке является более сильным требованием, чем условие существования частных производных по всем переменным в этой точке. В качестве примера рассмотрим функцию $z = f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \cdot y \neq 0, \\ 0, & x \cdot y = 0. \end{cases}$

Эта функция является разрывной в точке $(0,0)$, и значит, не может быть дифференцируемой в этой точке. С другой стороны, частные производные по обеим переменным в этой точке существуют: $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Производная по направлению

1. Случай функции двух переменных $f(x,y)$. Направление задается вектором. Выберем единичный вектор, задающий направление на плоскости: $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. Этот вектор образует угол α с положительным направлением оси OX. Производной функции двух переменных по направлению $\vec{l}$ называется выражение $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\alpha$.
2. Случай функции трех переменных $f(x,y,z)$. Пусть задан единичный вектор $\vec{l}$, образующий углы α,β и γ с осями OX, OY и OZ, соответственно. Если обозначить координаты вектора $\vec{l}$ через a, b и c, то по формуле косинуса угла между двумя векторами $\vec{l}$ и $\vec{i}$ получим $a=\cos\alpha$. Аналогично, $b=\cos\beta, c=\cos\gamma$. Таким образом, единичный вектор, образующий углы α,β и γ с осями OX, OY и OZ, имеет координаты $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Производной функции трех переменных по направлению $\vec{l}$ называется выражение $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma$.

Для обобщения полученных формул производной по направлению введем понятие **градиент** функции нескольких переменных $f(x^1,x^2,....,x^n)$**.** Градиентом называется вектор из частных производных: $\operatorname{grad} f=(f'_{x^1},f'_{x^2},...,f'_{x^n})$. Теперь $\dfrac{\partial f}{\partial l}=(\operatorname{grad} f,\vec{l})$, где $\vec{l}$ – единичный вектор направления.

Касательная плоскость к поверхности, заданной параметрически.
Мы уже знаем, что касательная плоскость к поверхности, заданной явно в виде $z=z(x,y)$, в точке (x_0,y_0,z_0) имеет уравнение $z-z_0=\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0)+\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}\cdot(y-y_0)$.

Пусть теперь та же поверхность задана параметрически: $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases}$

где u, v – параметры, причем $x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0)$ и $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{(u_0,v_0)}\neq 0$.

В соответствии с явным и параметрическим заданиями одной и той же поверхности имеем $z(u,v)=z(x(u,v),y(u,v))$. Это значит, что мы имеем суперпозицию функции двух переменных $z(x,y)$ и вектор-функции

$(x(u,v),y(u,v))$. Поэтому производная матрица-строка (z'_u,z'_v) равна произведению матрицы-строки (z'_x,z'_y) на квадратную матрицу $\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$.

Сравнивая элементы одинаковых матриц, получим $\begin{cases} z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \\ z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v. \end{cases}$

Последние соотношения можно рассматривать как систему относительно z'_x и z'_y. Система с ненулевым главным определителем имеет единственное решение, которое можно найти с помощью правила Крамера:

$$z'_x(x_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\Big|_{(u_0,v_0)},\ z'_y(x_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\Big|_{(u_0,v_0)}.$$

Подставляя полученные частные производные в уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в явном виде, получим уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной параметрически:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)} \cdot (x - x(u_0,v_0)) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)} \cdot (y - y(u_0,v_0)) +$$
$$+ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)} \cdot (z - z(u_0,v_0)) = 0.$$

Частные производные высших порядков.

Любая частная производная f'_{x^k} функции n переменных $f(x) = f(x^1,...,x^n)$ сама также является функцией n переменных. Частная производная от частной производной функции многих переменных называется **частной производной второго порядка** функции $f(x)$. При этом, если переменные, по которым берутся производные сначала от функции $f(x)$, а затем от функции f'_{x^k}, не совпадают, такая частная производная называется смешанной. Обозначения частной производной второго порядка: $f''_{x^k x^l} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}$. В том случае, когда $f''_{x^k x^l}$ и $f''_{x^l x^k}$ – непрерывные функции в окрестности некоторой точки, $f''_{x^k x^l} = f''_{x^l x^k}$ в этой точке.

Аналогично вводятся частные производные любого порядка.

Дифференциалы высших порядков.

По аналогии с производными вводятся дифференциалы высших порядков, то есть дифференциалы от дифференциалов. Рассмотрим функцию трех переменных $u = f(x,y,z)$. Дифференциалом этой функции является выражение $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz$. Заметим, что входящие в последнее выражение производные – функции от x, y и z, а дифференциалы переменных не зависят от x, y и z. Поэтому при условии непрерывности смешанных производных дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2 f = d(f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz) = (f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz)'_x \cdot dx +$$
$$+(f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz)'_y \cdot dy + (f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz)'_z \cdot dz =$$
$$= f''_{xx} \cdot (dx)^2 + 2 \cdot f''_{xy} \cdot dx \cdot dy + f''_{yy} \cdot (dy)^2 + 2 \cdot f''_{xz} \cdot dx \cdot dz + 2 \cdot f''_{yz} \cdot dy \cdot dz + f''_{zz} \cdot (dz)^2.$$

В последней формуле мы воспользовались свойством равенства смешанных производных. Нетрудно видеть, что формула дифференциала второго порядка аналогична формуле второй степени суммы трех слагаемых. Нетрудно сосчитать дифференциалы второго и третьего порядков функции двух переменных $u = f(x,y)$: $d^2 f = f''_{xx} \cdot (dx)^2 + 2 \cdot f''_{xy} \cdot dx \cdot dy + f''_{yy} \cdot (dy)^2$,

$$d^3 f = f'''_{xxx} \cdot (dx)^3 + 3 \cdot f'''_{xxy} \cdot (dx)^2 \cdot dy + 3 \cdot f'''_{xyy} \cdot dx \cdot (dy)^2 + f'''_{yyy} \cdot (dy)^3.$$

Формула Тейлора для функции многих переменных.

Как и в случае функций одной переменной, для функций многих переменных $f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ формула Тейлора дает связь между приращением функции в точке и ее дифференциалами в этой же точке:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + ... + \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \alpha,$$

где $\lim\limits_{\rho(x_0+\Delta x, x_0) \to 0} \dfrac{\alpha}{\rho^m (x_0 + \Delta x, x_0)} = 0$.

В частности, для функции двух переменных имеем:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy +$$
$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx \cdot dy + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (dy)^2] + ... + \alpha.$$

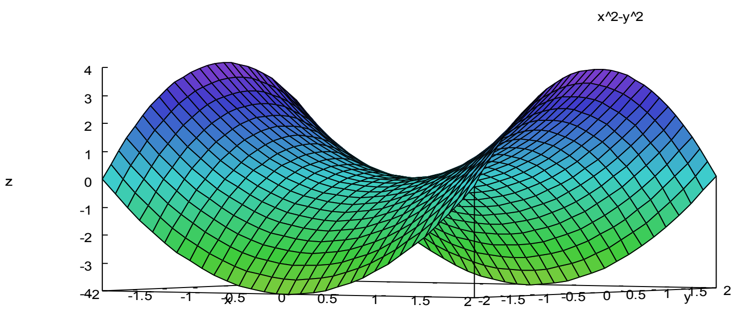
Здесь $\lim\limits_{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0} \dfrac{\alpha}{\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^m} = 0$.

Локальный экстремум функции многих переменных.

Точкой локального экстремума функции $f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n)$, $x \in D$, называется такая точка $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in D$, для которой в области D существует окрестность, в которой разность $f(x) - f(x_0)$ не меняет знак. В частности, точка x_0 является точкой минимума, если $f(x)-f(x_0)>0,\ x\neq x_0$, и точка x_0 является точкой максимума, если $f(x)-f(x_0)<0,\ x\neq x_0$.

Необходимое условие локального экстремума.
Пусть x_0 – точка экстремума, и функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Рассмотрим функцию одной переменной $g(x^k)=f(x_0^1,...,x_0^{k-1},x^k,x_0^{k+1},...,x_0^n)$, где k – любое натуральное число между 1 и n. Эта функция имеет точкой экстремума точку x_0^k, и значит, $g'(x_0^k)=f'_{x^k}(x_0^1,...,x_0^n)=0$. Следовательно, необходимым условием экстремума функции многих переменных $f(x)$ в точке x_0, где она дифференцируема, является следующее условие: $f'_{x^1}(x_0)=f'_{x^2}(x_0)=...=f'_{x^n}(x_0)=0$. Точка, в которой все частные производные первого порядка данной функции равны нулю, называется **критической точкой** этой функции.

Достаточное условие локального экстремума.
Выполнение необходимого условия экстремума не обязательно обеспечивает действительное наличие экстремума в точке, то есть, критическая точка функции может не быть точкой локального экстремума. В качестве примера рассмотрим функцию двух переменных $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$. Критической точкой для этой функции является точка (0,0). Однако эта точка является не экстремальной, а седловой.



Для того чтобы выяснить, достигается ли в критической точке экстремум и какой, следует обратиться к дифференциалу второго порядка в этой точке. Итак, пусть x_0 – критическая точка для функции многих переменных $f(x)$. В этом случае $df(x_0)=0$. В соответствии с формулой Тейлора

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\alpha,\ \text{где}\ \lim_{\rho(x_0+\Delta x,x_0)\to 0}\frac{\alpha}{\rho^2(x_0+\Delta x,x_0)}=0.$$

Поэтому знак разности $f(x)-f(x_0)$ в окрестности точки x_0 определяется знаком дифференциала второго порядка в точке x_0 при всевозможных малых приращениях $dx^k,\ k=1,...,n$.
Рассмотрим случай $n=2$. Пусть критическая точка имеет координаты (x_0,y_0). Рассмотрим приращение функции в окрестности этой точки:

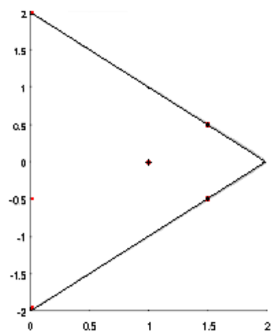
$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(dx)^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot dx\cdot dy+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(dy)^2]+\alpha.$$

Если при любом сочетании бесконечно малых приращений dx и dy выражение в квадратных скобках не меняет знак, то данная критическая точка является точкой локального экстремума. Вынесем за квадратную скобку множитель $(dy)^2$. Знак приращения функции совпадает со знаком квадратного трехчлена $f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(\frac{dx}{dy})^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{dy}+f''_{yy}(x_0,y_0)$ относительно $\frac{dx}{dy}$. Как известно, квадратный трехчлен не меняет знак в том случае, если не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицателен. В случае отрицательного дискриминанта знак квадратного трехчлена определяется знаком коэффициента при наибольшей степени (или знаком свободного члена). Таким образом, **критическая точка с координатами** (x_0,y_0) **является точкой локального экстремума, если** $(f''_{xy}(x_0,y_0))^2-f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)<0$**. При этом мы имеем точку минимума, если** $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$**, и точку максимума, если** $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$**.**

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области.

Так же, как в случае функции одной переменной, заданной на отрезке, функция двух переменных, заданная в замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо в **критических точках**, лежащих в заданной области, либо в **граничных точках** области. Трудность этого случая в том, что у области на плоскости, имеется бесконечное множество граничных точек.
П р и м е р. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z=x^2-xy+y^2-2x+y$ в треугольнике, образованном прямыми $x=0,\ y=x-2,\ y=-x+2$.



Прежде всего, найдем критические точки заданной функции, решив систему

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ -x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, и мы получаем критическую точку (1,0). Эта точка лежит внутри заданной области, поэтому мы вычисляем в этой точке значение функции: $z(1,0) = -1$.

Теперь переходим к граничным точкам. Заданная область имеет 3 прямолинейных граничных участка: 1) $x = 0,\ -2 \le y \le 2$, 2) $0 \le x \le 2,\ y = x - 2$,

3) $0 \le x \le 2,\ y = -x + 2$.

На участке 1) $z = z_1(y) = y^2 + y,\ -2 \le y \le 2$. Функция $z_1(y)$ на отрезке [-2,2] принимает наибольшее значение, равное 6, в точке 2 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке -1/2.

На участке 2) $z = z_2(x) = x^2 - x(x-2) + (x-2)^2 - 2x + (x-2) = x^2 - 3x + 2$,

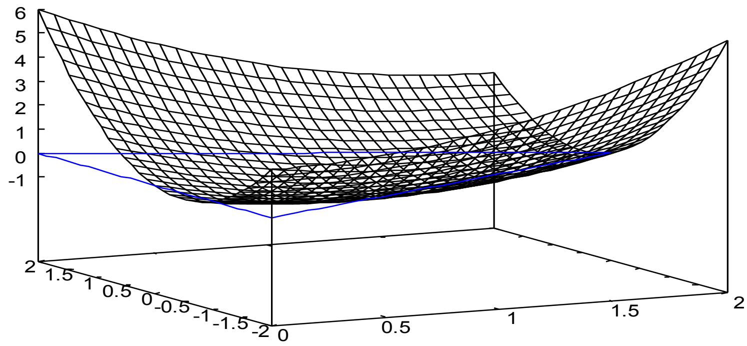
$0 \le x \le 2$. Функция $z_2(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 2, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -1/4, в критической точке 3/2.

На участке 3) $z = z_3(x) = x^2 - x(-x+2) + (-x+2)^2 - 2x + (-x+2) = 3x^2 - 9x + 6$

,

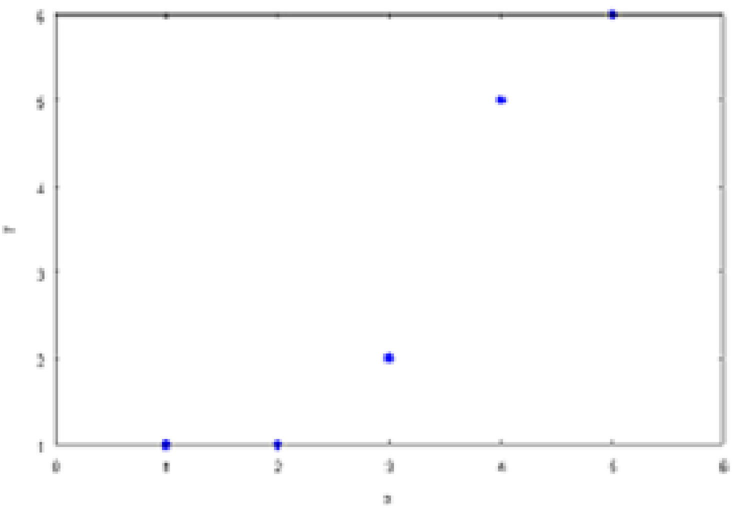
$0 \le x \le 2$. Функция $z_3(x)$ принимает на отрезке [0,2] наибольшее значение, равное 6, в точке 0 (конец отрезка), и наименьшее значение, равное -3/4, в критической точке 3/2.

Получив значение в критической точке и наибольшие и наименьшие значения на отрезках границы (-1, 6, -1/4, 2, -3/4), мы выбираем среди них наибольшее и наименьшее. Это значения 6 (наибольшее значение данной функции в заданном треугольнике) и -1 (наименьшее значение данной функции в заданном треугольнике). Трехмерное изображение соответствующей поверхности выглядит следующим образом.



Метод наименьших квадратов

Поиск локальных экстремумов функции двух переменных активно применяется в задаче о проведении прямой линии, наиболее близкой к n заданным точкам на плоскости. Известно, что через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых, через две точки – единственную прямую. Через произвольные 3 точки прямую провести нельзя. Тем более, через 5 точек. Но представим, что проведены замеры в 5 точках (x=1, x=2, x=3, x=4, x=5). Значения, полученные при замерах, соответственно, равны: y=1, y=1, y=2, y=5, y=6.
Нанесем результаты наблюдений на плоскость. Мы видим, что если соединить точки последовательно, полученная линия будет близка к прямой.



Учитывая, что замеры производятся неточно, мы хотим нарисовать приближенный график линейной зависимости y от x. Не существует прямой, проходящей через пять полученных на плоскости точек, но можно постараться провести прямую максимально близко к полученным точкам.

Уравнение прямой на плоскости $y = Ax + B$ зависит от двух параметров A и B. Нужно подобрать их так, чтобы при значениях x, равных 1, 2, 3, 4 и 5, значения $Ax + B$ мало отличались от 1, 1, 2, 5 и 6, соответственно. Это значит, что нужно подобрать такие A и B, чтобы значение функции

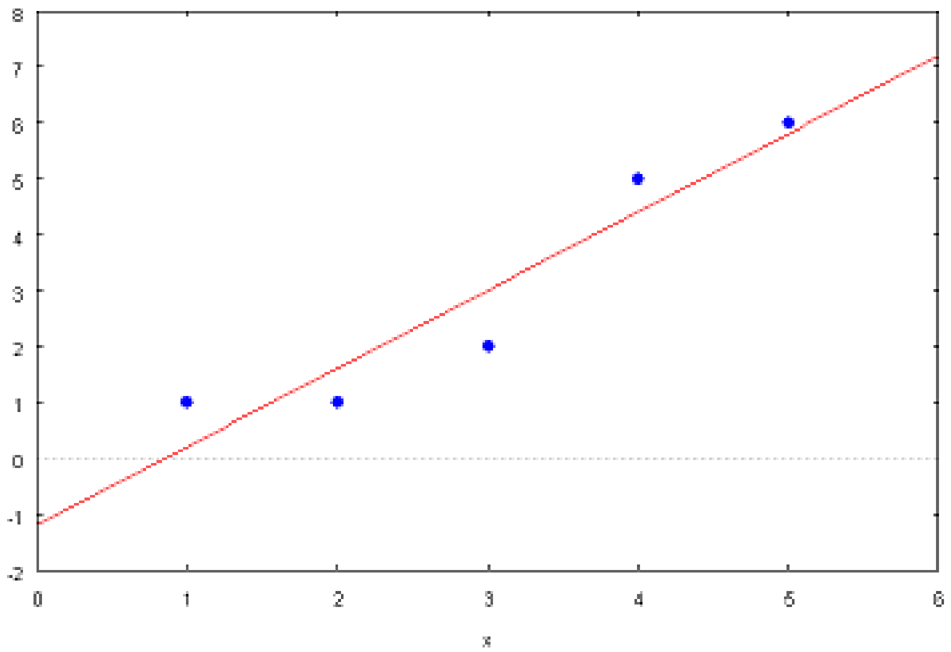
$$F(A,B) = (A\cdot 1 + B - 1)^2 + (A\cdot 2 + B - 1)^2 + (A\cdot 3 + B - 2)^2 + (A\cdot 4 + B - 5)^2 + (A\cdot 5 + B - 6)^2$$

было минимальным. Это значит, должно выполняться необходимое условие экстремума: $\begin{cases} F'_A = 0, \\ F'_B = 0. \end{cases}$ В данном случае после приведения подобных членов получим $\begin{cases} 110A + 30B = 118, \\ 15A + 5B = 15. \end{cases}$ Решая эту систему, найдем $A = \frac{7}{5}, B = -\frac{6}{5}$.

Проверим, будут ли полученные значения обеспечивать локальный минимум. Поскольку $F''_{AA} = 110,\ F''_{BB} = 10,\ F''_{AB} = 30$, условие существования экстремума ${F''_{BB}}^2 - F''_{AA}\cdot F''_{BB} < 0$ выполняется, и так как $F''_{BB} > 0$, найденные значения обеспечивают минимум функции $F(A,B)$.

Таким образом, уравнение искомой прямой: $y = \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}$.

Нарисуем график с помощью MAXIMы: введем **xy: [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 5], [5, 6]]; plot2d([[discrete, xy], 7/5*x-6/5], [x,0,6],[style, points, lines]);** и нажмем Shift+Enter. Получим



Предложенный метод нахождения прямой, проходящей наиболее близко к заданным точкам, называется **методом наименьших квадратов.**

Заметим, что пакет программ MAXIMA содержит этот метод. Для того, чтобы решить ту же задачу при помощи компьютера, следует сначала ввести координаты точек на плоскости: записать **load (lsquares);**
M : matrix ([1,1], [2,1], [3,2], [4,5], [5,6]) и нажать Shift+Enter.

Компьютер выведет на экран и запомнит 5 заданных точек в виде матрицы из двух столбцов. Затем введем команды

lsquares_estimates (M, [x,y], y = A*x+B, [A,B]) и нажмем Shift+Enter. Компьютер выведет на экран ответ $A = \frac{7}{5}, B = -\frac{6}{5}$, который мы уже получили выше.

Локальный экстремум в случае функции трех и более числа переменных.

В том случае, когда следует найти локальные экстремумы функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, следует сначала отыскать все критические точки функции, решив систему из n уравнений с n переменными: $\begin{cases} f'_{x_1} = 0, \\ \quad ... \\ f'_{x_n} = 0. \end{cases}$

Для того, чтобы выяснить, будет ли критическая точка $M = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ точкой локального экстремума, следует сосчитать в этой точке все частные производные второго порядка, составить матрицу вида $\begin{pmatrix} f''_{x^1x^1} & \cdots & f''_{x^1x^n} \\ ... & ... & ... \\ f''_{x^nx^1} & \cdots & f''_{x^nx^n} \end{pmatrix}$ и рассмотреть последовательность определителей, состоящих из элементов в левом верхнем углу матрицы: $\Delta_1 = f''_{x^1x^1}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^1x^1} & f''_{x^1x^2} \\ f''_{x^2x^1} & f''_{x^2x^2} \end{vmatrix}, ...$

$\Delta_n = \begin{vmatrix} f''_{x^1x^1} & \cdots & f''_{x^1x^n} \\ ... & ... & ... \\ f''_{x^nx^1} & \cdots & f''_{x^nx^n} \end{vmatrix}$. Минимум в критической точке M будет тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$. Максимум в критической точке M будет тогда и только тогда, когда $-\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \cdot \Delta_n > 0$, то есть, знаки у последовательности определителей обязаны чередоваться.

Условный экстремум

Представим, что нам нужно найти наибольшее или наименьшее значения функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условии, что переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ связаны соотношениями (условиями) $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., \; g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; m < n$.

Если есть возможность исключить из *m* условий *m* переменных, выразив их через остальные *n*-*m* переменные, задача сведется к нахождению экстремумов функции *n*-*m* переменных.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x^2 + 3y^2 = 1$.

Из условия получим $x^2 = 1 - 3y^2$, поэтому исследуемая функция принимает вид $z = 1 - 2y^2$. Очевидно, что условие диктует и ограничения на область определения новой функции: $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Очевидно, что наибольшее значение функция $z = 1 - 2y^2$ принимает при $y = 0$ ($z = 1$), а наименьшее при $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($z = \frac{1}{3}$). Возвращаясь к исходной функции двух переменных, получаем: наибольшее значение функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x^2 + 3y^2 = 1$ принимает в точках (-1,0) и (1,0), а наименьшее в точках $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ и $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Представим теперь, что условие в предыдущей задаче имеет вид $x^2 + y^2 + xy = 1$. Из такого условия неудобно выражать одно переменное через другое. Здесь применим

Метод Лагранжа.

Этот метод предусматривает не уменьшение, а увеличение числа переменных на количество условий. Вводится **функция Лагранжа** вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... +$$
$$+ \lambda_m \cdot g_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Ищется критическая точка новой функции, то есть решение системы

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \cdot g'_{1\,x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m \cdot g'_{m\,x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \cdot g'_{1\,x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m \cdot g'_{m\,x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

……………………
$g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$

Найденное значение $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$ подставляется в $d^2F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ и проверяется знак полученного выражения. Положительное значение означает условный минимум, отрицательное значение означает условный максимум.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x^2 + y^2 + xy = 1$.

Здесь функция Лагранжа имеет вид $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$.

Построим систему для получения критической точки:

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x + y) = 0, \\ 2y + \lambda(2y + x) = 0, \\ \quad x^2 + y^2 + xy = 1. \end{cases}$$

Первые два уравнения этой системы представляют собой однородную систему относительно переменных (x, y). Как известно, такая однородная система с ненулевым главным определителем имеет только нулевые решения. Однако, третье уравнение системы убеждает нас в том, что переменные x и y не могут быть одновременно нулями. Следовательно, система из первых двух уравнений обязана иметь нулевой главный определитель. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & \lambda \\ \lambda & 2(1+\lambda) \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Следовательно, мы имеем $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2/3$.

Подставляя λ_1 в первое уравнение системы, получим связь между x и y: $x = -y$. Теперь из третьего уравнения системы найдем $y_{1,2} = \pm 1,\ x_{1,2} = \mp 1$.

Подставляя λ_2 в первое уравнение системы, получим связь между x и y: $x = y$. Теперь из третьего уравнения системы найдем $y_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Итак, у нас 4 точки $(x_k, y_k),\ k = 1,2,3,4$. Можно подставить их координаты в выражение функции и узнать, какая из них дает условный минимум и какая – условный максимум. Но мы проверим это с помощью второго дифференциала. Имеем

$$d^2F = (2 + 2\lambda)(dx^2 + dy^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} dxdy) + 2d\lambda[(2x + y)dx + (2y + x)dy].$$

Сразу заметим, что выражение в квадратных скобках равно нулю, так как это полный дифференциал от левой части уравнения условия

$x^2+y^2+xy=1$. И поскольку на множестве, где мы ищем экстремумы, левая часть условия равна константе (1), полный дифференциал левой части равен нулю. Следовательно, $d^2F=(2+2\lambda)(dx^2+dy^2+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}dxdy)$. Дискриминант квадратного трехчлена $(2+2\lambda)(t^2+1+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}t)$ равен нулю, и значит, знак трехчлена определяется знаком коэффициента $(2+2\lambda)$. Таким образом, в точках $(\pm1,\mp1)$ условный максимум, а в точках $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ условный минимум.

Неопределенный интеграл

Первообразная, множество первообразных

*Определение***.** Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$, где $C-$постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Теорема. Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если $F'(x)=f(x)$ и $\Psi'(x)=f(x)$, то $F(x)-\Psi(x)=C=\mathrm{Const}$.

Доказательство: Обозначим $\Phi(x)=F(x)-\Psi(x)$ Согласно предположению $\Phi'(x)\equiv 0$. Следовательно, $\forall\ a,b$ имеем:

$$\Phi(b)-\Phi(a)=(\text{формула Лагранжа})=$$

$$=\Phi'(c)(b-a)=0\ \Rightarrow\ \Phi=\Phi(b)=\Phi(a)=\mathrm{Const}.$$

Определение. Множество всех первообразных одной функции называется **неопределенным интегралом этой функции** и обозначается $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx-$ подынтегральным выражением. Очевидно, что если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)\,dx=\int F'(x)\,dx=F(x)+C$, где $C-$произвольная постоянная интегрирования, то есть постоянная может принимать любые значения.

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$.	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \dfrac{1}{x}$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$.
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.	$(-\cos x + C)' = \sin x$.
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.	$(\sin x)' = \cos x$.
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	$(\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$.	$(\arcsin x + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C$.	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
10. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$.	$\left(\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\| + C.$	$\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\|+C\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$

Приемы интегрирования

1. Тождественные преобразования подынтегрального выражения и сведение к табличным интегралам

Из свойства производной

$$\left[k\cdot f(x)+l\cdot g(x)\right]' = k\cdot f'(x)+l\cdot g'(x)$$

следует аналогичное свойство для неопределенных интегралов

$$\int\left[k\cdot f(x)+l\cdot g(x)\right]dx = k\cdot\int f(x)\,dx + l\cdot\int g(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int\frac{x-2}{x^3}dx$. Деля почленно числитель на знаменатель, представляя интеграл от разности в виде разности интегралов и вынося постоянный сомножитель за знак интеграла, получим в соответствии с таблицей

$$\int\frac{x-2}{x^3}dx = \int(x^{-2}-2x^{-3})dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = .$$
$$= x^{-2} - x^{-1} + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$. Воспользуемся тождеством $1=\cos^2 x+\sin^2 x$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} + \int\frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= -\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x + C.$$

2. Замена переменной в интеграле

Докажем, что если $F(x)+C=\int f(x)dx$, то $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$.

Доказательство. Имеем: $(F(x)+C)'=f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t))+C)'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\int f(x)dx=\left\{\begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array}\right\}=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

При подходящей замене переменной мы сводим заданный интеграл к табличному.

Пример 1. Найти $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Здесь $t=\sin x, \cos x dx=dt$. Следовательно, в соответствии с тем, что $\int e^t dt=e^t+C$, имеем $\int e^{\sin x}\cos x\,dx=e^{\sin x}+C$.

Пример 2. Найти $\int \mathrm{tg}x\,dx$. Сделаем замену $t=\cos x,\ dt=-\sin x dx$. Тогда $\int \mathrm{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C..$

Пример 3. Найти $\int e^{-x^2}xdx$. Сделаем замену $-x^2=t$. Тогда $-2xdx=dt$ и $\int e^{-x^2}xdx=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

3. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx + C.$$

(или $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$).

Доказательство. Справедливы соотношения:

$\int (u(x)\cdot v(x))'dx = u(x)\cdot v(x) + C$ и

$\int (u(x)\cdot v(x))'dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$

Сравнивая правые части, получим приведенную выше формулу.

Пример 1. Найти $\int e^x x\,dx$. Обозначим $x = u(x), v'(x) = e^x$. Тогда $v(x) = e^x, u'(x) = 1$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим $\int e^x x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$.

Пример 2. Найти $\int (\ln x)^2 dx$ В этом примере мы применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int (\ln x)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = (\ln x)^2, u' = 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}, \\ v' = 1, v = x \end{matrix} \right| = x\cdot(\ln x)^2 - 2\int \ln x\frac{x}{x}dx = x\cdot(\ln x)^2 -$$

$$-2\int \ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, v = x \end{matrix} \right] = x\cdot(\ln x)^2 - 2(x\ln x - \int \frac{x}{x}dx) =$$

$$= x\cdot(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется соотношение вида $F(x, y(x), y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Решить дифференциальное уравнение – это значит, определить функцию $y(x)$, удовлетворяющее этому соотношению, возможно, в неявном или параметрическом виде.

Простейшее дифференциальное уравнение вида $y'(x) = f(x)$ мы уже решали, так как находили $y(x) = \int f(x)dx$. Мы знаем, что интеграл определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. То есть решение простейшего дифференциального уравнения содержит произвольную постоянную. Решения более сложных дифференциальных уравнений также находятся с точностью до произвольных постоянных (возможно, нескольких).

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком входящих в него производных. Поэтому дифференциальное уравнение вида $F(x, y(x), y', y'',..., y^{(n)}) = 0$ считается дифференциальным уравнением n-го порядка.

Так же, как не любая функция может быть проинтегрирована, и представлена в виде элементарных функций, так и не любое дифференциальное уравнение имеет решение, выражающееся через элементарные функции. Класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, узок. Мы изучим несколько классов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, а также рассмотрим некоторые приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Кроме того, мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с применением дифференциальных уравнений.

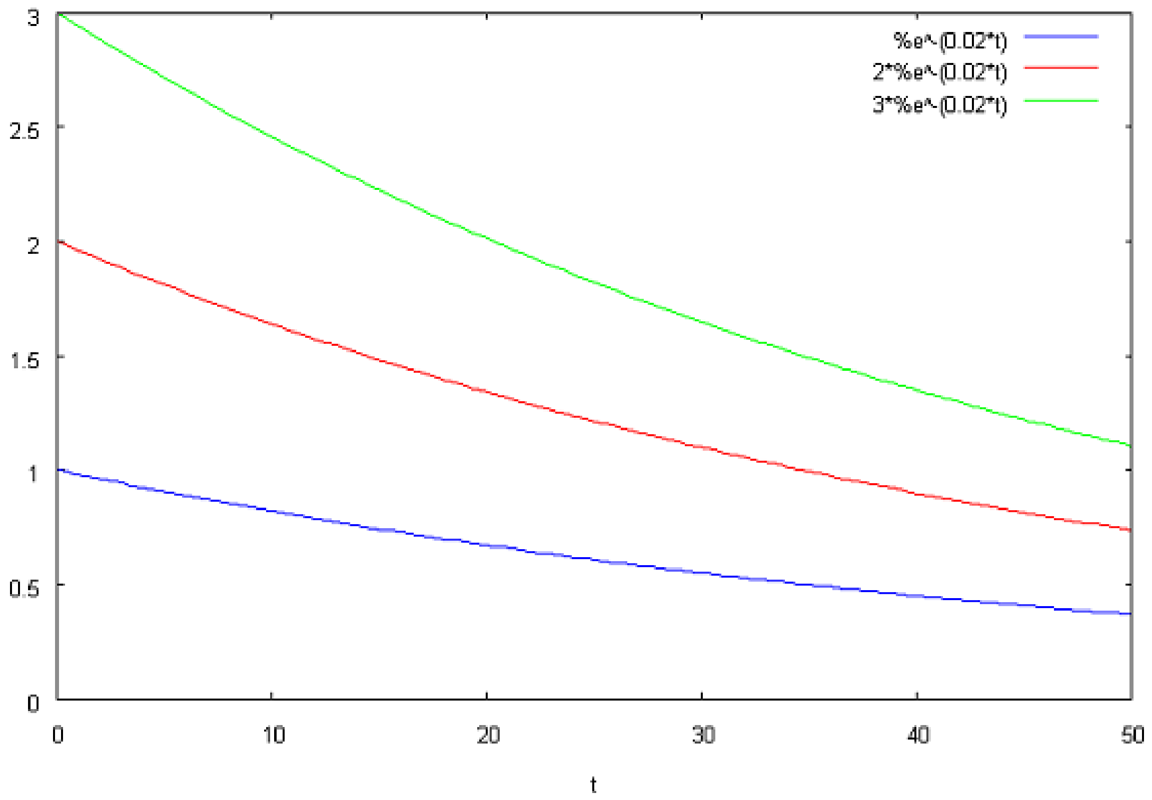
Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$. Запишем производную в виде отношения дифференциалов: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ и разнесем в разные части выражения, содержащие x и y. Мы получим равенство двух дифференциалов: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$. После интегрирования правой части по x, а левой – по y мы получим слева функцию, зависящую от y, а справа – функцию, зависящую от x, отличающихся на константу:
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C.$$

П р и м е р. В соответствии с законом радиоактивного распада вещества скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества. Если обозначить $m(t)$ массу нераспавшегося вещества в момент t, то этот закон можно записать в виде соотношения: $m'(t) = -\alpha \cdot m$. Знак минус указывает на то, что масса вещества убывает с ростом t.

Решение. Разделим переменные: $\frac{dm}{m} = -\alpha \cdot dt$. После интегрирования получим $\ln m = -\alpha \cdot t + \ln C$. Здесь произвольное постоянное слагаемое мы представили в виде логарифма положительной постоянной величины для удобства последующего потенцирования: $m(t) = Ce^{-\alpha \cdot t}$.

Проанализируем полученное решение. Оно содержит постоянные α (эта постоянная зависит от вида радиоактивного вещества – стронций, радий, уран….) и C – постоянную интегрирования. Предположим, что мы исследуем радиоактивный распад радия, для которого $\alpha = 0,02$, если измерять время в годах. Решение уравнения распада имеет вид $m(t) = Ce^{-0,02 \cdot t}$, и мы получаем множество решений вследствие присутствия произвольной положительной константы C.



Как выбрать единственное? В данном случае, чтобы узнать, какое количество радиоактивного вещества останется по прошествии определенного времени, необходимо знать, сколько его было в начальный момент. Задавая $m(0)$, мы задаем значение C. Таким образом, чтобы решать конкретные задачи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями, необходимо не только само уравнение, но и дополнительные данные, количество которых определяется порядком дифференциального уравнения. Для решения задачи, поставленной для дифференциального уравнения первого порядка, необходимо задать

начальное условие $y(t_0)=y_0$. Уравнение вкупе с начальным условием называется **задачей Коши**.

Уравнение в полных дифференциалах и приводимое к нему

Уравнение первого порядка $y'=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, очевидно, может быть записано в виде $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. Представим теперь, что $M'_y=N'_x$ и эти функции непрерывны. Это означает, что существует такая функция $U(x,y)$, что $U'_x(x,y)=M(x,y),\ \ U'_y(x,y)=N(x,y)$. Действительно, ведь $U''_{xy}(x,y)=U''_{yx}(x,y)=M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$. Итак, уравнение теперь имеет вид $U'_x dx+U'_y dy=0$ или $dU(x,y)=0$. Следовательно, решение исходного уравнения – множество неявно заданных функций $U(x,y)=C$.

П р и м е р. Решить уравнение $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$. Мы видим, что условие $M'_y=N'_x$ выполняется. Перегруппировывая слагаемые в виде $(2xydx+x^2dy)-y^2dy=0$, можно заметить, что первая скобка – это $d(x^2y)$. Следовательно, уравнение можно переписать в виде $d(x^2y-y^3/3)=0$. Следовательно, решением является неявно заданная функция $x^2y-y^3/3=C$.

Иногда удается найти для произвольного дифференциального уравнения вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ такую функцию $\mu(x,y)$, что умножив обе части уравнения на эту функцию, мы превращаем его в уравнение в полных дифференциалах, так как $(\mu M)'_y=(\mu N)'_x$. Такой сомножитель называется **интегрирующим множителем**.

П р и м е р. Решить уравнение $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$. Сгруппируем члены уравнения следующим образом: $(x^2+y^2)dx+(xdx+ydy)=0$. Мы видим, что вторая скобка представляет собой $d(x^2+y^2)/2$. Разделим обе части уравнение на первую скобку: $dx+\dfrac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}=0$ или $d(x+\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{2})=0$. Отсюда $x+\ln(x^2+y^2)^{1/2}=C$. Здесь интегрирующим множителем явилась функция $\dfrac{1}{(x^2+y^2)}$.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

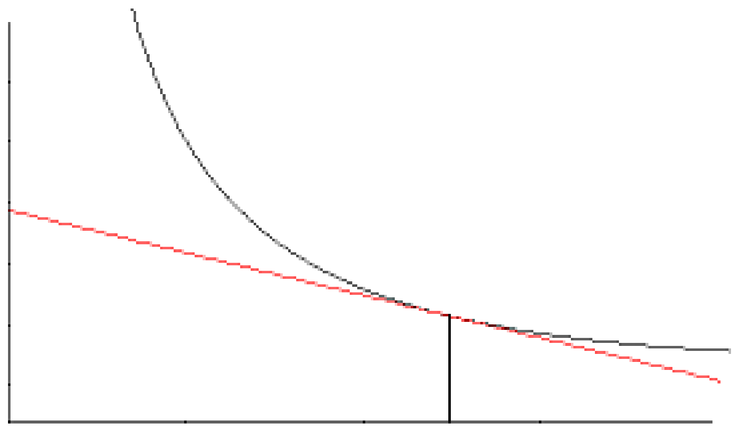
Так называется дифференциальное уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$. Здесь сама функция и ее производная связаны линейно. Решать уравнение будем методом вариации произвольной постоянной. Для этого сначала решим соответствующее уравнение с нулевым свободным членом, называемое **линейным однородным** уравнением: $y' = a(x)y$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение $y = C \cdot e^{\int a(x)dx}$. Теперь мы будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде

$y = C(x) \cdot e^{\int a(x)dx}$. Найдем неизвестный множитель $C(x)$, подставив y в указанном виде в заданное уравнение. Мы получим

$C'(x) \cdot e^{\int a(x)dx} + C(x) \cdot a(x)e^{\int a(x)dx} = C(x) \cdot a(x)e^{\int a(x)dx} + b(x)$.

После взаимного уничтожения одинаковых слагаемых в левой и правой частях придем к соотношению $C'(x) \cdot e^{\int a(x)dx} = b(x)$. Отсюда мы найдем $C'(x)$, а затем и $C(x)$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

П р и м е р. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.



Решение. Высота трапеции равна абсциссе точки касания x. Большее основание трапеции отличается от меньшего, равного y, на величину $-x \cdot y'$. Выражая площадь трапеции, получим соотношение $\frac{2y - xy'}{2}x = 3a^2$, откуда выведем линейное уравнение $y' = \frac{2}{x}y - \frac{6a^2}{x^2}$. Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения $y' = \frac{2}{x}y$. Это $y(x) = C \cdot x^2$. Теперь подставим выражение $y(x) = C(x) \cdot x^2$ в линейное неоднородное уравнение. Мы получим соотношение $C'(x)\cdot x^2 = -\frac{6a^2}{x^2}$,

откуда $C(x) = \frac{2a^2}{x} + C$. Осталось подставить выражение $C(x)$ в

представление $y(x)$. В результате получим решение $y(x) = \frac{2a^2}{x} + Cx^2$.

Применение пакета программ MAXIMA для решения дифференциального уравнения первого порядка и задачи Коши

Для решения дифференциальных уравнений и задач Коши удобно применять пакет математических программ MAXIMA.
Рассмотрим следующую задачу Коши. Найти решение дифференциального уравнения $(1+e^x)y' = ye^x$, удовлетворяющее условию $y(0)=2$.
Аналитическое решение. Представим производную в уравнении в виде отношения дифференциалов и разделим переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$.
Интегрируя обе части, получим $\ln y = \ln(1+e^x) + \ln C$ или $y = C(e^x+1)$.
Подставляя в полученное решение уравнения значения $x=0$ и $y=2$, получим $C=1$. Поэтому решением поставленной задачи Коши является $y=(e^x+1)$.

Решим задачу Коши, рассмотренную в предыдущем примере, с помощью компьютера. Для этого введем в память компьютера дифференциальное уравнение: **(1+%e^x)*‘diff(y,x)=y*%e^x** и нажмем Shift+Enter. На следующей строчке появится введенное уравнение. Заметим, что перед командой **diff(y,x)** обязательно должен стоять апостроф **‘,** иначе компьютер продифференцирует y по x и выдаст 0.
Теперь для того, чтобы решить введенное дифференциальное уравнение (не выше второго порядка), посмотрим, под каким номером (например, (%o1)) запомнил компьютер введенное уравнение, этот номер стоит перед дифференциальным уравнением, выведенным компьютером на экран. Компьютер решит дифференциальное уравнение по команде **ode2(%o1,y,x)** и Shift+Enter и выведет на экран y=**%c*(%e^x+1)**. Решение уравнения получено. Роль *C* в компьютерной записи выполняет %c. Теперь используем начальное условие. Для этого посмотрим номер, под которым компьютер вывел на экран решение уравнения (например, %o2). Введем команду **ic1(%o2,x=0,y=2)** и нажмем Shift+Enter. Мы получим решение задачи Коши **y=%e^x+1.**

Понижение порядка дифференциального уравнения

До сих пор мы решали только дифференциальные уравнения первого порядка. Существуют дифференциальные уравнения высших порядков, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений первого порядка. Простейший пример: $y''=e^{2x}$. Очевидно, что для получения решения $y(x)$ достаточно дважды проинтегрировать правую часть. Заметим, что при первом интегрировании мы получаем постоянную интегрирования $y'=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$. При втором интегрирование мы снова получаем постоянную интегрирования – уже другую: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$. Таким образом, решение дифференциального второго порядка содержит уже две произвольные постоянные. Очевидно, что решая подобное простейшее уравнение n-го порядка, мы получим n произвольных постоянных. Следовательно, что для получения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задавать n дополнительных условий.

Уравнение вида $F(x,y',y'')=0$. В этом случае следует взять за неизвестную функцию $z(x)=y'$. Найдя z, мы определим y интегрированием.

П р и м е р. Решить уравнение $x^2y''=y'^2$. Введем функцию $z=y'$ и решим уравнение с разделяющимися переменными $x^2z'=z^2$. Получив его решение $z=\dfrac{x}{1-C_1x}$, найдем исходную функцию y: $y(x)=-\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{1}{C_1^2}\ln|1-C_1x|+C_2$.

Для выделения из множества решений единственного решения можно задать условия: $y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_1$. Например, $y(1)=0,\ \ y'(1)=2$.

Из последнего условия мы получим $C_1=\frac{1}{2}$, то есть

$y(x)=-2x-4\ln|1-x/2|+C_2$.

Из первого условия получим $C_2=2-4\ln 2$. Теперь частное решение, удовлетворяющее двум дополнительным условиям, имеет вид

$y(x)=2(1-x)-4\ln|2-x|$.

Применение пакета программ MAXIMA для решения задачи Коши в случае дифференциального уравнения второго порядка

Команда **ode2** применяется и для решения дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, для того, чтобы решить задачу Коши в предпоследнем примере, введем сначала дифференциальное уравнение: **x^2*‘diff(y,x,2)= (‘diff(y,x))^2.** Записав его (например, под номером %o1), решим его по команде **ode2(%o1,y,x).** В данном случае мы задаем два начальных условия, поэтому следующая команда содержит 2 вместо 1. То есть, если решение имеет номер %o2, используем начальные условия по команде **ic2(%o2,x=1,y=0,’diff(y,x)=2).** Решение задачи Коши будет построено.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Это уравнения, имеющие вид $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=f(x)$, где $a_1,a_2,...,a_n$ – постоянные коэффициенты.

Однородным линейным уравнением n-го порядка называются уравнения вида $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0$.

Решение однородного уравнения.

Вследствие линейности дифференциального уравнения легко доказывается утверждение: если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два частных решение уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0$, то $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ при любых α и β – также решение этого уравнения.

Мы должны в виде общего решения однородного уравнения получить такую линейную комбинацию частных решений $y(x)=C_1y_1(x)+...+C_n\,y_n(x)$, чтобы было возможно получить решение соответствующей задачи Коши при любом наборе начальных условий $y(x_0)=y_1^0,\ y'(x_0)=y_2^0,\ ...,y^{(n-1)}(x_0)=y_n^0$. Это означает, что система

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+...+C_n\,y_n(x_0)=y_1^0, \\ \qquad\qquad .... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+...+C_n\,y_n^{(n-1)}(x_0)=y_n^0 \end{cases}$$

должна быть разрешима относительно набора констант $C_1,...C_n$ при любой правой части, и значит, главный определитель системы отличен от нуля.

Рассмотрим определитель $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$, называемый **определителем Вронского**. Именно условие $W(x_0)\neq 0$ позволяет удовлетворить заданным начальным условиям в точке x_0.

Назовем систему частных решений $y_1(x),\ y_2(x),\dots,\ y_n(x)$ уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_ny=0$ **линейно зависимой**, если существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, причем хотя бы одно из них отлично от нуля, что $\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_1(x)+\dots+\alpha_n\cdot y_n(x)=0$ при всех значениях переменной *x*. В противном случае систему частных решений назовем линейно независимой. Очевидно, что определитель Вронского, составленный для линейно зависимой системы частных решений, тождественно равен нулю.

Для того, чтобы получить систему линейно независимых решений, искать **частное** решение однородного уравнения будем в виде $y(x)=e^{kx}$. Подставив $y(x)$ в указанном виде в однородное уравнение, получим $(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\dots+a_n)e^{kx}=0$. Следовательно, неизвестное значение сомножителя k мы найдем, если решим алгебраическое уравнение n-й степени

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\dots+a_n=0,$$

называемое **характеристическим уравнением.**

В соответствии с основной теоремой алгебры характеристическое уравнение имеет ровно n корней, считая все вещественные и комплексные корни с учетом их кратности.

Рассмотрим все случаи корней характеристического уравнения и определим вид частного решения так, чтобы все частные решения были линейно-независимыми. Получив n линейно-независимых частных решений, мы сможем построить **общее** решение однородного уравнения $y(x)=C_1y_1(x)+\dots+C_n\,y_n(x)$, содержащее n произвольных постоянных и позволяющее решать любую задачу Коши с любыми начальными данными, сводя решение этой задачи Коши к системе с ненулевым главным определителем

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0)\ \dots\dots\ y_n(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\dots\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

а) **Простой вещественный корень**. Простому вещественному корню k_1 характеристического уравнения соответствует частное решение $y_1(x) = e^{k_1 x}$. Если все корни характеристического уравнения простые и вещественные, определитель Вронского примет вид

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & ..... & e^{k_n x} \\ & .... & \\ k_1^{n-1} \cdot e^{k_1 x} & ... & k_n^{n-1} \cdot e^{k_n x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + ... + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & ..... & 1 \\ & .... & \\ k_1^{n-1} & ... & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

П р и м е р. Решить однородное дифференциальное уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$. Построим характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$. Это характеристическое уравнение имеет три простых корня: $k = 0, k = 2, k = 3$. Поэтому общим решение исходного дифференциального уравнение является функция $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

б) **Вещественный корень кратности** m**.** Если корень k_0 характеристического уравнения имеет кратность m**,** то, естественно, мы не можем использовать m одинаковых частных решений вида $y(x) = e^{k_0 x}$, соответствующих этому корню, так как определитель Вронского будет иметь одинаковые столбцы, и следовательно, обратится в ноль. В указанном виде мы сможем взять только одно из m частных решений. Можно показать, что все m частных решений, соответствующих данному корню характеристического уравнения, имеют вид $y_j(x) = x^{j-1} e^{k_0 x}, \ j = 1,..,m$, то есть функции $x^{j-1} e^{k_0 x}, \ j = 1,..,m$, удовлетворяют исходному однородному дифференциальному уравнению. Заметим прежде всего, что если k_0– корень уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n = 0$ кратности m**,** то k_0 – корень любого из уравнений $(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n)^{(j)} = 0, \ j = 1,...,m-1$.

Покажем, как проводится доказательство того, что $xe^{k_0 x}$ (случай $j = 2$) удовлетворяет исходному однородному уравнению. Подставим $xe^{k_0 x}$ в левую часть исходного однородного дифференциального уравнения и получим

$$xe^{k_0 x} k_0^n + ne^{k_0 x} k_0^{n-1} + a_1 [xe^{k_0 x} k_0^{n-1} + (n-1)e^{k_0 x} k_0^{n-2}] + ... + a_{n-1} [xe^{k_0 x} k_0 + e^{k_0 x}] +$$
$$+ a_n xe^{k_0 x} = xe^{k_0 x} [k_0^n + a_1 k_0^{n-1} + ... + a_n] + e^{k_0 x} [nk_0^{n-1} + (n-1)k_0^{n-2} + ... + a_{n-1}] = 0.$$

Первое выражение в квадратных скобках обращается в ноль, так как k_0– корень характеристического уравнения, второе выражение в квадратных скобках обращается в ноль, так как k_0– корень уравнения $(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n)' = 0$. Подобным же образом можно показать, что функции $x^{j-1}e^{k_0x}$, $j=3,..,m$, удовлетворяют исходному однородному дифференциальному уравнению.

П р и м е р. Решить однородное дифференциальное уравнение $y^{(6)}-2y^{(5)}+y^{(4)}=0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^6-2k^5+k^4=0$, и следовательно, имеет корни 0 (кратности четыре) и 1 (кратности два). Поэтому общим решением исходного дифференциального уравнения является функция $y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^x(C_5+C_6x)$.

в) **Простой комплексный корень.** При решении алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами наличие комплексного корня $\alpha+i\beta$ обеспечивает наличие комплексно сопряженного корня $\alpha-i\beta$. Поэтому можно было бы в качестве частных решений, соответствующих этой паре корней, взять функции $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$. Однако для того, чтобы не привлекать комплексные числа для решения дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами, используя формулу Эйлера $e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$, в качестве частных решений берут функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

П р и м е р. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)}+4y''=0$. Характеристическим уравнением является уравнение $k^4+4k^2=0$. Корнями этого уравнения являются $k=0$ (кратности 2) и комплексные корни $\pm i2$. Поэтому общее решение имеет вид $y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

г**) Комплексные корни кратности** m**.** В случае, когда характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\alpha\pm i\beta$ кратности m**,** соответствующие этим корням частные решения соответствующего однородного дифференциального уравнения имеют вид $x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ j=1,..,m$, и $x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\ j=1,..,m$.

П р и м е р. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)}+4y'''+14y''+20y'+25y=0$. Характеристическое уравнение можно представить в виде $(k^2+2k+5)^2=0$, следовательно, корнями характеристического уравнения являются $-1+2i$ (кратности 2) и $-1-2i$ (кратности 2). Поэтому общим решение заданного однородного дифференциального уравнения будет функция $y(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x\sin 2x)$.

Решение неоднородного уравнения. Мы уже знаем, как найти общее решение однородного уравнения. Чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, нужно найти **частное решение неоднородного уравнения** и прибавить к нему уже найденное общее решение соответствующего однородного уравнения. Действительно, пусть $y_0(x)$ – общее решение однородного уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=0$, содержащее n произвольных постоянных $C_1,...C_n$. Если $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=f(x)$, то функция $\tilde{y}(x)+y_0(x)$ удовлетворяет тому же неоднородному уравнению и содержит произвольные постоянные $C_1,...,C_n$.

Таким образом, вопрос о нахождении общего решения неоднородного уравнения сводится к вопросу о нахождении частного решения неоднородного уравнения. Существуют разные методы построения такого решения. Рассмотрим **метод вариации произвольной постоянной,** который позволяет сразу получить общее решение неоднородного уравнения.

Суть этого метода в том, что, получив решение соответствующего однородного уравнения в виде $y_0(x)=C_1y_1(x)+...+C_ny_n(x)$, мы ищем общее решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=C_1(x)y_1(x)+...+C_n(x)y_n(x)$ и подбираем такие неизвестные функции $C_1(x),...,C_n(x)$, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла неоднородному уравнению. Оказывается, что для этого достаточно, чтобы эти производные этих неизвестных функций удовлетворяли системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

Докажем это для случая $n=2$. Пусть необходимо решить уравнение $y''+ay'+by=f(x)$. Решение однородного уравнения имеет вид $y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, причем $y_j''+ay_j'+by_j=0,\ j=1,2$. Возьмем общее решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ и подставим в неоднородное уравнение. Мы получим:

$$C_1''y_1+2C_1'y_1'+C_1y_1''+C_2''y_2+2C_2'y_2'+C_2y_2''+a(C_1y_1'+C_1'y_1+$$

$$+C_2y_2'+C_2'y_2)+b(C_1y_1+C_2y_2)=f(x).$$

Выражения, имеющие сомножителями C_1 и C_2 обращаются в ноль, поэтому имеем:

$$C_1''y_1+2C_1'y_1'+C_2''y_2+2C_2'y_2'+a(C_1'y_1+C_2'y_2)=f(x).$$

Пусть $C_1'y_1+C_2'y_2=0$. Взяв производные от обеих частей этого равенства, получим $C_1''y_1+C_1'y_1'+C_2''y_2+C_2'y_2'=0$. Поэтому для того, чтобы функция $y(x)$ была решением неоднородного уравнения, остается положить $C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)$.

П р и м е р. Решить дифференциальное уравнение $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид $k^2-2k+1=0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения – функция $y_0(x)=C_1e^x+C_2xe^x$. Поэтому общее решение неоднородного уравнение ищем в виде $y(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$. Для определения неизвестных функций $C_1(x),C_2(x)$ составим систему относительно их производных

$$\begin{cases} C_1'e^x+C_2'xe^x=0, \\ C_1'e^x+C_2'(xe^x+e^x)=\dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Сокращая уравнения на e^x, мы получим систему с главным определителем, равным 1. Решая систему и интегрируя, получим $C_1(x)=-x+C_1$, $C_2(x)=\ln|x|+C_2$. Общее решение исходного уравнения запишется теперь в виде $y(x)=e^x(-x+C_1+x\ln|x|+C_2x)$. Заметим, что в силу произвольности константы C_2 выражение $-x+C_2x$ можно заменить выражением C_2x. Поэтому решение можно записать в виде $y(x)=e^x(C_1+x\ln|x|+C_2x)$.

Применение пакета программ MAXIMA для решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Для дифференциальных уравнений порядка выше, чем 2, команда **ode2** уже неприменима. Такие уравнения решаются MAXIM-ой операционным методом. При этом начальные условия следует задавать до решения дифференциального уравнения с помощью команды **atvalue**. Заметим, что и сами дифференциальные уравнения записываются несколько по-другому. Так, в уравнении обязательно указывать функцию, зависящей от аргумента. Само решение дифференциального уравнения происходит по команде **desolve**.

Пусть, например, следует решить уравнение

$$y^{(4)}+4y'''+14y''+20y'+25y=x^2$$

с начальными условиями $y(0)=5,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=1$.

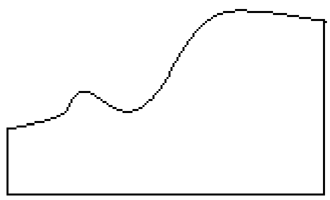
Сначала введем дифференциальное уравнение:
'diff(y(x),x,4)+4*'diff(y(x),x,3)+14*diff(y(x),x,2)+20*diff(y(x),x)+25*y(x)=x^2
;.

Предположим, что дифференциальное уравнение записано под номером %o1. Теперь введем начальные условия:
atvalue(y(x),x=0,5);atvalue('diff(y(x),x),x=0,-1);
atvalue('diff(y(x),x,2),x=0,0);atvalue('diff(y(x),x,3),x=0,1);.
И наконец, решаем дифференциальное уравнение под номером %o1:
desolve(%o1,y(x));.
Компьютер запишет решение:
y(x)=%e^(-x)*((32273*sin(2*x))/10000+(3121*cos(2*x))/625)+(2877*x*%e^(-x)*sin(2*x))/500-(2397*x*%e^(-x)*cos(2*x))/1000+x^2/25-(8*x)/125+4/625

Интеграл Римана

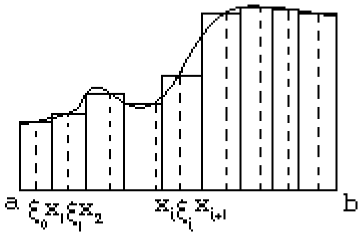
Площадь криволинейной трапеции

Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Для того, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.



Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}],\ i=0,...,n$, где $x_0=a,\ x_n=b$. На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y=f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами $(\xi_i, f(\xi_i))$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Δ называется **диаметром разбиения**. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем $\sigma(f,R,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$. Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(f,R,\xi)=I$, причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y=f(x)$.

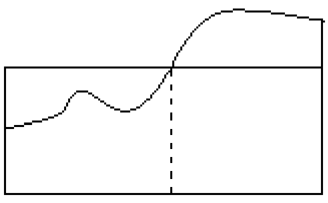
Любая **непрерывная** на отрезке функция является **интегрируемой** на этом отрезке. Хотя класс интегрируемых по Риману функций значительно шире, чем класс непрерывных функций, мы будем рассматривать только интегралы от непрерывных функций.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали **интегралом** – так же, как множество первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Отметим пока очевидные свойства интеграла Римана, следующие из свойств сумм и пределов.

1. **Линейность**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β– произвольные постоянные, то функция $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем $\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$.
2. **Аддитивность**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c\in[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$. Следствием этой формулы можно считать соотношение $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$. То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.
3. **Интегральное неравенство**. Если $f(x)\ge 0,\ x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

   3-а. Если $f(x)\ge g(x),\ x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx.$

   3-б. $m\le f(x)\le M,\ x\in[a,b]$, то $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$
4. **Теорема о среднем**. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0\in[a,b]$, что $\int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)\cdot(b-a)$. То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



x_0

Доказательство. В соответствии со свойством 3-б $m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$.

В силу свойства непрерывной функции существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$.

Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Будем рассматривать интегралы от этой функции на отрезках $[a,t]$ при всевозможных $t \in [a,b]$. Очевидно, что результат интегрирования зависит от значения верхнего предела интегрирования. Поэтому обозначим $I(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Имеем $I(a) = 0,\ I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Рассмотрим $I(t+\Delta t) - I(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x)dx$. В соответствии с теоремой о среднем существует такое значение $\theta \in (0,1)$, что $\int_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t+\theta\cdot\Delta t)\cdot\Delta t$. Следовательно, $\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = f(t+\theta\cdot\Delta t)$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$ и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке $t \in [a,b]$, получим

$I'(t) = f(t)$.

Последнее означает, что функция $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Следовательно, если $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) = I(x) + C$ по свойству двух первообразных одной и той же функции. Следовательно, $\Phi(a) = C$, так как $I(a) = 0$, и $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C$. Значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют

определенным интегралом) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

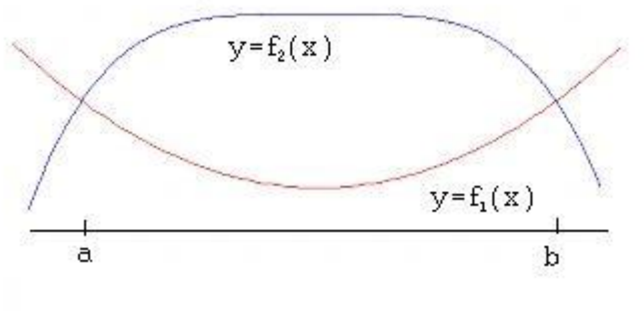
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Приложения интеграла Римана

Интеграл Римана по отрезку был нами введен как площадь криволинейной трапеции. Понятие площади неотделимо от понятия интеграла. С его помощью можно вычислять площади любых плоских областей, а также длины дуг, площади поверхностей и объемы тел.

1.Вычислить **площадь области, расположенной между двумя кривыми** $y = f_1(x)$ **и** $y = f_2(x)$ **и над отрезком** $[a,b]$, причем $f_1(a) = f_2(a),\quad f_1(b) = f_2(b)$.

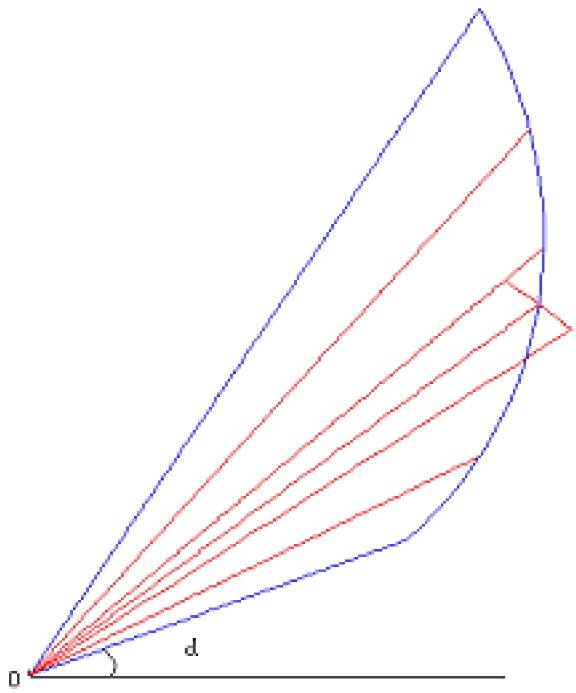


Очевидно, что площадь области между кривыми равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций, поэтому

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

2. Вычислить **площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами (в полярных координатах)** $\varphi = \alpha$ **и** $\varphi = \beta$**, а также заданной в полярных координатах кривой** $r = f(\varphi),\quad \alpha < \varphi < \beta$**.**

Проведем внутри криволинейного сектора лучи $\varphi = \varphi_k,\ k = 1,\dots,n-1$, разбивающие исходный сектор на мелкие криволинейные секторы $\varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}$, причем $\varphi_0 = \alpha,\quad \varphi_n = \beta$.



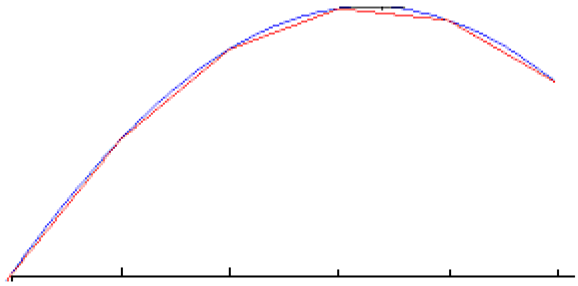
Заменим каждый мелкий криволинейный сектор круговым сектором с тем же углом при вершине и радиусом, равным значению $r(\tilde{\varphi}_k)$, где $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Тогда площадь кругового мелкого сектора равна $r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2$. При этом чем меньше разность $\varphi_{k+1} - \varphi_k$, тем меньше площадь кругового мелкого сектора отличается от площади соответствующего криволинейного мелкого сектора.

При достаточно частом разбиении исходного криволинейного сектора площадь его достаточно близка к величине

$$\sum_{k=0}^{n} r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)/2 = \sum_{k=1}^{n+1} r^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k/2.$$

Если теперь устремить к нулю наименьший из растворов малых криволинейных секторов, мы получим предел интегральных сумм – интеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$, который совпадает с площадью исходного криволинейного сектора.

3.Вычислить **длину дуги кривой** $y = f(x),\ x \in [a,b]$**.** Длиной дуги кривой мы будем называть предельную сумму длин вписанных в дугу хорд при стремлении этих хорд к точкам.



Разобъем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}],\ i=0,...,n$, где $x_0=a,\ x_n=b$. Длина хорды, расположенной над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, равна $\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}$. Воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа и получим длину этой же хорды в виде $\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+[f'(\xi_{i+1})(x_{i+1}-x_i)]^2}=\sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i$, где $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. Таким образом, длина дуги всей кривой может быть приближена суммой $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i$, причем чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$, тем точнее результат. При стремлении длины наименьшего из отрезков разбиения к нулю мы получим из суммы интеграл: $\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$, который и дает выражение длины дуги данной кривой.

4. Вычислить **длину дуги пространственной кривой**, заданной параметрически в виде

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[t_0,T\rfloor.$$

Для вычисления ее длины применяют формулу

$$S=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

Методы вычисления интеграла Римана

Благодаря формуле Ньютона-Лейбница вычисление интеграла сводится к отысканию первообразной и вычислению значений этой первообразной в концах отрезка интегрирования. Поэтому основные приемы вычисления интеграла Римана так же, как в случае неопределенного интеграла, – замена переменной и интегрирование по частям.

1. Замена переменной. Пусть $x=\varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, где $\varphi(t)$ – монотонная непрерывная функция, имеющая непрерывную производную на интервале $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Согласно условию $\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$.

П р и м е р. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t\cdot\cos t dt$. Сделаем замену $\sin t=z$. Монотонная на отрезке $[0,\pi/2]$ функция $\sin t$ отображает этот отрезок в отрезок $[0,1]$. Поэтому $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t\cdot\cos t dt=\int\limits_0^1 z^3dz=\left.\frac{z^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$.

2. **Интегрирование по частям**. Справедлива следующая формула: $\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$.

Доказательство. Так как согласно формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b (u(x)\cdot v(x))'dx=(u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b$ и согласно свойству определенного интеграла $\int\limits_a^b (u(x)\cdot v(x))'dx=\int\limits_a^b u(x)\cdot(v(x))'dx+\int\limits_a^b (u(x))'\cdot v(x)dx$, сравнивая правые части последних двух равенств, получим требуемую формулу.

П р и м е р. $\int\limits_1^e \ln xdx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{x}{x}dx=e-(e-1)=1.$

Приближенное вычисление интеграла Римана

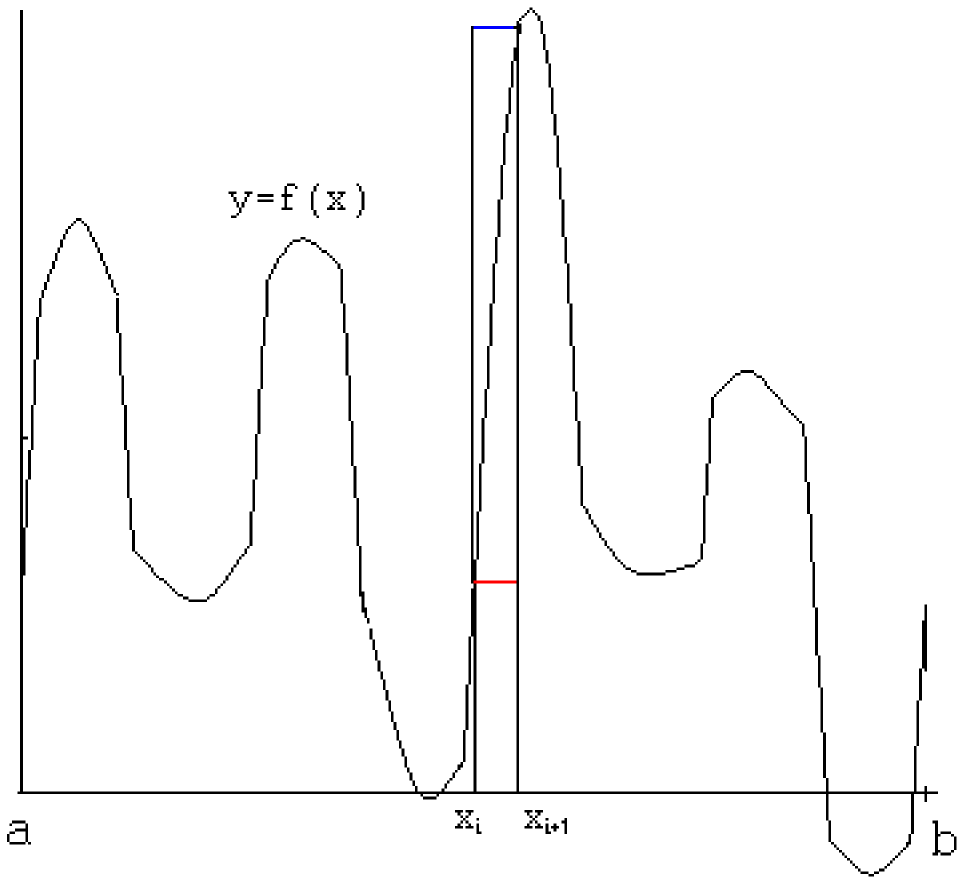
К сожалению, не для любой непрерывной функции можно найти первообразную в виде суперпозиции элементарных функций. Поэтому можно столкнуться с определенным интегралом, для которого применение формулы Ньютона-Лейбница невозможно. Например, $\int\limits_1^4\frac{\sin x}{x}dx$.

Для таких интегралов приходится применять приближенное интегрирование. Формул приближенного интегрирования довольно много, но все они основаны на ассоциации интеграла с площадью криволинейной трапеции, построенной на основании, совпадающем с отрезком интегрирования. Этот отрезок разбивается на n равных частей (для удобства машинного счета) и соответствующие узкие криволинейные трапеции заменяются близкими фигурами, площадь которых легко вычисляется. С ростом n площади узких криволинейных трапеций и простейших фигур практически не отличаются друг от друга, поэтому погрешность вычислений можно сделать сколь угодной малой. Мы рассмотрим две простейшие формулы – случаи, когда криволинейные трапеции заменяются прямоугольниками и трапециями.

1. **Формула прямоугольников**. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется прямоугольником с высотой –либо $f(x_i)$, либо $f(x_{i+1})$. Суммируя площади этих прямоугольников с одинаковыми основаниями длины $\dfrac{b-a}{n}$, получим либо $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, либо $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

2. **Формула трапеций**. Отрезок $[a,b]$ снова разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется обычной трапецией, причем участок кривой $y = f(x)$ над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется хордой, соединяющей соответствующие точки. Высота такой трапеции равна $\dfrac{b-a}{n}$, средняя линия равна $\dfrac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$. Поэтому, суммируя площади соответствующих трапеций, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$



Сосчитаем приведенный выше интеграл $\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$ двумя способами по формулам прямоугольников с помощью пакета программ MAXIMA. Выберем шаг, равный 3/200.

Формула прямоугольников с высотами, равными значениям функции в правых концах отрезков разбиения считается в MAXIMe по формуле **3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,1,200),numer**; с высотами, равными значениям функции в левых концах отрезков разбиения считается в MAXIMe по формуле

3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,0,199),numer.

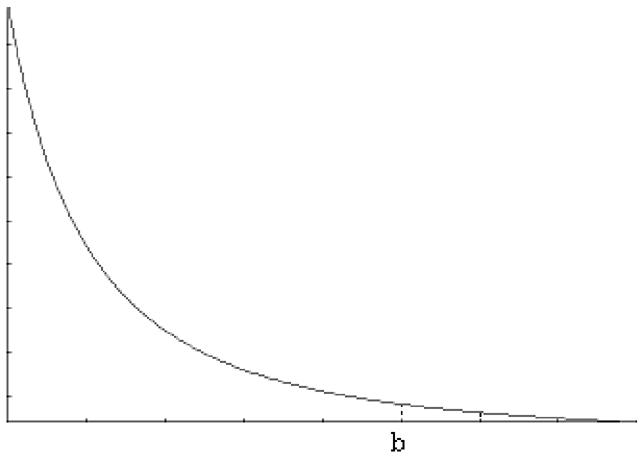
Если использовать готовые формулы приближенного вычисления интегралов в MAXIMe, можно использовать команду **quad_qag** : **first(quad_qag(sin(x)/x,x,1,4,2)**).

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Просматривая математические тексты, нетрудно наткнуться на выражения вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$ или $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$. С точки зрения введенного нами понятия интеграла Римана по отрезку приведенные интегральные выражения представляются бессмыслицей. Действительно, мы не сможем составить ни одной интегральной суммы, так как никогда не кончим разбивать бесконечный промежуток на конечные отрезки и выбирать на них отмеченные точки. И тем более, мы не сможем рассматривать последовательности интегральных сумм, соответствующих последовательностям таких разбиений с диаметрами разбиений, стремящимся к нулю. Что же понимают под такими интегралами?

Приведенные интегралы называются **несобственными** интегралами по бесконечному промежутку и определяются они при помощи интегралов Римана по конечным отрезкам следующим образом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[\beta,b]$, $b>\beta$. То есть для любого $b>\beta$ существует $I(b)=\int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$, то такой предел обозначают $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$ и говорят, что этот несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится.



Пример. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}}\,dx$. Очевидно, что $I(b)=\frac{b^{1-\nu}-1}{1-\nu}$ при $\nu\neq 1$ и $I(b)=\ln b$ при $\nu=1$. Устремим теперь b к $+\infty$.

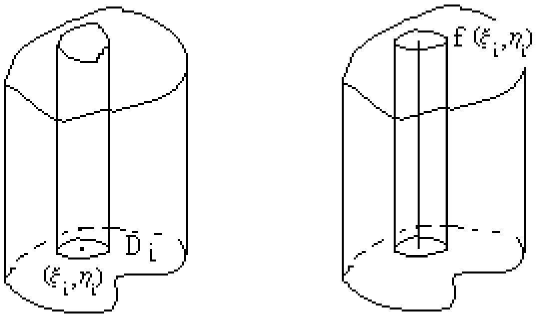
Очевидно, что конечный предел функции $I(b)$ существует только при $\nu > 1$. Он равен $\frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ предел $I(b)$ бесконечен. Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx$ сходится только при $\nu > 1$, причем $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx = \frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx$ расходится.

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

По аналогии с определенными интегралами по отрезку от функции одной переменной рассматриваются интегралы по области D из n-мерного пространства от функции $f(x) = f(x^1, ..., x^n)$ n переменных. Для этого, как и в случае одной переменной, область D разбивается на мелкие подобласти D_i, $i = 1, ..., l$, выбирается точка $\xi_i \in D_i$, составляется интегральная сумма $\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i) \cdot m(D_i)$. Здесь $m(D_i)$ – n-мерный объем области D_i. В частности, в случае 2-мерного пространства 2-мерный объем – это площадь области, в случае 3-мерного пространства 3-мерный объем – это обычный объем тела. Далее подобласти начинают стягиваться в точки, при этом их количество бесконечно возрастает**. Предел интегральных сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения исходной области на подобласти и от способа выбора точек $\xi_i \in D_i$, называется интегралом от функции $f(x)$ по области D и обозначается** $\int_D f(x) dm$. Интегралы от непрерывных функций по областям с непрерывными границами существуют. С помощью кратных интегралов вычисляют объемы тел, их массу, центр тяжести…. Вычисляются кратные интегралы сведением к последовательным интегрированиям по отрезкам с применением формулы Ньютона-Лейбница. Мы рассмотрим подробно случаи $n = 2$ и $n = 3$, то есть, двойные и тройные интегралы.

Двойной интеграл. В качестве основной задачи, приводящей к двойному интегралу от функции двух переменных, рассмотрим задачу вычисления объема цилиндроида – тела, ограниченного снизу плоскостью XOY, сбоку –

цилиндрической поверхностью, и сверху – поверхностью $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$.



Здесь $f(x,y)$ – непрерывная функция в каждой точке области D, граница которой – непрерывная кривая. Разбивая D на подобласти D_i и заменяя цилиндроид с основанием D_i и верхней поверхностью $z = f(x,y)$ цилиндром высоты $f(\xi_i,\eta_i)$, где (ξ_i,η_i) – произвольная точка из D_i, найдем приблизительное значение объема, равное $\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i,\eta_i)\cdot S(D_i)$. Стягивая подобласти D_i в точки и тем самым увеличивая количество этих подобластей, мы будем уточнять величину объема исходного цилиндроида. Предел интегральных сумм называется **двойным интегралом от $f(x,y)$ по области D и обозначается** $\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$**.** В данном случае функция $f(x,y)$ положительна. В общем случае подынтегральная функция может произвольно менять знак.

Свойства двойного интеграла. Эти свойства повторяют свойства интеграла функции одной переменной по отрезку.

1. **Линейность**. Двойной интеграл от линейной комбинации функций равен той же линейной комбинации двойных интегралов от этих функций
$$\iint\limits_D \lfloor \alpha\cdot f(x,y) + \beta\cdot g(x,y) \rfloor dx\,dy = \alpha\cdot\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta\cdot\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy\ .$$

2. **Аддитивность**. Если область D разбита на две части D_1 и D_2, то
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dx\,dy.$$

3. **Сохранение неравенства**. Если $f(x,y) \ge g(x,y)$ всюду в области D, то
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \ge \iint\limits_D g(x,y)dx\,dy.$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области D, имеющей площадь S, то

$$m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \le M \cdot S.$$

4. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y)-$ непрерывная в замкнутой области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка (ξ,η), для которой справедливо равенство

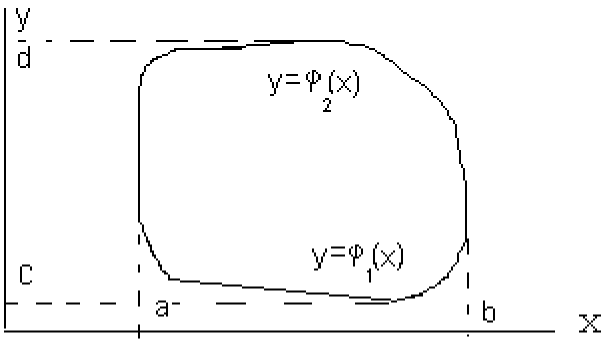
$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S,$$

где S площадь области D.

Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим случай области, выпуклой в направлении оси OY. Это означает, что граница области D пересекается любой прямой параллельной оси OY либо не более, чем в двух точках, либо по одному отрезку.

Пусть область D такова, что расположена между прямыми $x=a,\ x=b,$ параллельными оси OY. Эти прямые касаются границы области D или частично совпадают с границей по отрезку.



Участки границы области D, проецирующиеся на интервал (a,b), заданы уравнениями соответственно $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x),\ \varphi_1(x)<\varphi_2(x)$, $a<x<b$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

Интеграл справа, называемый повторным, обычно записывают несколько по-другому, помещая dx сразу после внешнего интеграла и опуская квадратные скобки. В результате имеем следующее выражение двойного интеграла через повторный:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Способ вычисления повторного интеграла следующий. Сначала вычисляется интеграл по y – внутренний интеграл, который берется от функции $f(x,y)$ по переменной y, когда x считается постоянной, с использованием формулы Ньютона-Лейбница. Верхний и нижний пределы внутреннего интеграла зависят от x, так что, взяв внутренний интеграл, мы получим внешний интеграл по переменной x от полученной функции, зависящей от x. Остается взять внешний интеграл, где верхний и нижний пределы должны быть константами.

Пределы двукратного интеграла определяются по виду области D, исходя из чертежа. Определяется отрезок $[a,b]$ на оси OX, на который проецируется область D. Определяются кривые $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, ограничивающие область D, соответственно снизу и сверху. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются пределами для внутреннего интеграла, взятого по y, то есть, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ есть ординаты точек входа и выхода из области D при движении по прямой, параллельной оси OY, в сторону увеличения y при фиксированном x. Числа a и b – нижний и верхний пределы внешнего интеграла по x.

Аналогичная формула перехода к повторному интегралу справедлива для области, выпуклой в направлении оси OX, только в таком случае в повторном интеграле внутренним будет интеграл по переменной x.

В случае произвольной квадрируемой области ее разбивают на конечное число выпуклых в направлении осей подобластей и применяют переход к повторному интегралу в каждой из этих подобластей.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x, y=x^2.$

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения границ области D: $x=0, x=1.$
Прямая, проведенная через область параллельно оси OY в направлении роста y между прямыми $x=0$ и $x=1$, пересекает на точке входа параболу $y=x^2$, а на точке выхода прямую $y=x.$ Внешними пределами (по x) являются 0 и 1, а внутренними (по y) x^2 и x.

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y)dy=\int_0^1 (x^2y+\frac{y^2}{2})\Bigg|_{x^2}^{x} dx=\int_0^1 (x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-x^4)dx=$$

$$(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{5})\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{3}{10}=\frac{7}{60}.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$ по области $y=x^2, y=0, x+y=2.$

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения граничных кривых области D. Линии $y=x^2$ и $x+y=2$ пересекаются в точке (1,1). Линии $y=x^2, y=0$ пересекаются в точке (0,0). Линии $y=0,\ x+y=2$ пересекаются в точке (2,0). Если вычислять этот интеграл, взяв в качестве внешнего интегрирования интегрирование по x, то при определении пределов интегрирования по y на выходе будут две разные линии, и придется разбивать область интегрирования на две области. Так что в этом случае внешнее интегрирование берем по y, а внутреннее по x. Прямая, пересекающая область параллельно оси OX в положительном направлении, пересекает в точке входа линию $y=x^2$ а в точке выхода линию $y=2-x.$ Внешними пределами (по y) будут 0 и 1, а внутренними пределами (по x) $\sqrt{y}$ и $2-y.$ В результате имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} yxdx = \int\limits_0^1 y\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1((y-2)^2y-y^2)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}-\frac{4y^3}{3}+2y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{24}.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D xy^2dxdy$, если область D ограничена параболой $y^2=4x$ и прямой $x=1$, применяя пакет программ MAXIMA.

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения кривых, ограничивающих область интегрирования: (1,-2) и (1,2). Для данной области проще внешнее интегрирование проводить по y, а внутреннее – по x. Запишем команду для повторного интегрирования: **integrate(integrate(x*y^2,x,y^2/4,1),y,-2,2)** и нажмем Shift+Enter.

Замена переменных в двойном интеграле.

Для успешного вычисления двойного интеграла иногда целесообразно производить замену переменных, например, если сложная область интегрирования D в плоскости XOY является образом прямоугольника $D_{u,v}$ со сторонами, параллельными координатным осям в плоскости параметров UOV при отображении $x=x(u,v), y=y(u,v)$. Будем предполагать, что функции $x=x(u,v), y=y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в $D_{u,v}$, то есть отображение непрерывно дифференцируемо, причем, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, (u,v) \in D_{u,v}$. Тогда формула замены переменной имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{u,v}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv .$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} dxdy$ по круговому сектору, ограниченному линиями $y = x, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 4.$

Р е ш е н и е. Применение декартовых координат в данном случае было бы сложным. Перейдем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Тогда в плоскости полярных координат (r,φ) имеем прямоугольник, ограниченный прямыми $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{\pi}{3}, r = 0, r = 2$.

Вычислим модуль якобиана преобразования: $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \left\|\begin{matrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi \end{matrix}\right\| = r.$

Таким образом, $\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int\limits_{0}^{2} rdr = \dfrac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \dfrac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{2} = 2(\dfrac{\pi^2}{9} - \dfrac{\pi^2}{16}) = \dfrac{7\pi^2}{144}$

.

2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} xdxdy$ по области $D,$ ограниченной линиями $y = 2x, y = 2x + 3, y = 1 - 3x, y = 3 - 3x.$

Р е ш е н и е. Для упрощения вычисления перейдем к новым переменным $u = y - 2x, v = y + 3x.$ Вычислим модуль якобиана преобразования: $|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{5}$. Областью интегрирования в плоскости новых переменных будет прямоугольник со сторонами, параллельными осям OU и OV: $u = 0, u = 3, v = 1, v = 3.$

$$\iint_D x\,dx\,dy=\frac{1}{5}\int_0^3 du\int_1^3\frac{v-u}{5}dv=\frac{1}{25}\int_0^3\frac{(v-u)^2}{2}\Bigg|_1^3 du=\frac{1}{50}\int_0^3((3-u)^2-(1-u)^2)du=$$

$$=\frac{1}{25}\int_0^3(4-2u)du=\frac{1}{25}(4u-u^2)\Bigg|_0^3=\frac{3}{25}.$$

3. Вычислить $\iint_D xy\,dx\,dy$, если область D ограничена кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ и прямыми $x=0$, $y=0$ с помощью следующей замены переменных: $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$.

Р е ш е н и е. Подставляя в уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ новое представление переменных, получим $\sqrt{u}=2$ или $u=4$. Подставляя в уравнение $x=0$ новое представление x, получим $\cos v=0$ или $v=\pi/2$. Подставляя в уравнение $y=0$ новое представление y, получим $\sin v=0$ или $v=0$. Таким образом, областью в плоскости параметров будет прямоугольник $0\le u\le 4,\ \ 0\le v\le \pi/2$. Вычисляя якобиан, получим

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4u\cos^3 v\cdot\sin^3 v.$$

В итоге, применяя MAXIMу, найдем значение интеграла, если используем команды **integrate(integrate(4u^3*(cos(v))^7*(sin(v))^7,u,0,4),v,0,%pi/2)** и нажмем Shift+Enter.

4. Сосчитать площадь области D, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Р е ш е н и е. Перейдем в интеграле $\iint_D dx\,dy$ к обобщенным полярным координатам: $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$. Уравнение границы области мы получим при $r=1$. Поэтому, чтобы получить всю область D, необходимо следующие диапазоны изменений параметров: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1$.

Сосчитаем якобиан: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=abr$. Следовательно,

$\iint_D dx\,dy=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\,dr=ab\pi$. Таким образом, площадь области, ограниченной эллипсом, равна произведению полуосей на число π.

Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

В случае, когда уравнение поверхности задано в явном виде: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, площадь поверхности вычисляется по формуле

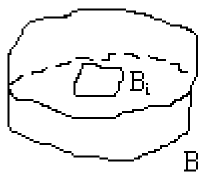
$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy.$$

В том случае, когда поверхность задается параметрически: $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$

$(u, v) \in D_{u,v}$, площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_{D_{u,v}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2}\, dudv.$$

Тройные интегралы. В качестве основной задачи, приводящей к тройному интегралу от функции трех переменных, рассмотрим задачу вычисления массы неоднородного тела B с переменной плотностью $\rho(x, y, z)$.



Разделим тело B на n фрагментов. Пусть B_i - один из этих фрагментов. Выберем внутри этого фрагмента точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$. Обозначим через ΔM_i массу вещества внутри B_i, через ΔV_i – объем B_i. В силу непрерывности плотности при достаточно малых размерах фрагмента, то есть, при малых значениях $\max\limits_{(x', y', z'), (x'', y'', z'') \in B_i} \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} = d_i$ можно считать, что $\Delta M_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i$. Эти вычисления выполним для всех частей, на которые мы разбили тело. Складывая полученные произведения, найдем массу M тела B:

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i.$$

Точное значение массы найдем, если справа перейдем к пределу, когда число разбиений n стремится к бесконечности, а все фрагменты B_i стягиваются в точку, то есть наибольший из диаметров фрагментов, называемый диаметром разбиения, стремится к нулю:

$$M = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i.$$

Предел интегральных сумм называется **тройным интегралом от** $\rho(x, y, z)$ **по области** B **и обозначается** $\iiint\limits_B \rho(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_B \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **.** В данном случае функция $\rho(x, y, z)$ положительна. В общем случае подынтегральная функция может произвольно менять знак.

Свойства тройного интеграла.

1. **Линейность**. Тройной интеграл от линейной комбинации двух функций

равен той же линейной комбинации тройных интегралов от этих функций

$$\iiint\limits_B \lfloor \alpha \cdot f(x, y, z) + \beta \cdot g(x, y, z) \rfloor dx\, dy\, dz = \alpha \cdot \iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \beta \cdot \iiint\limits_B g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. **Аддитивность**. Если трехмерная область B разбита на две части B_1 и B_2, то $\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{B_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{B_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

3. **Сохранение неравенства.** . Если $f(x, y, z) \ge g(x, y, z)$ всюду в B, то

$$\iiint\limits_B f(x, y, z) dx\, dy\, dz \ge \iiint\limits_B g(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

Следствие. Если M и m есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z)$ в трехмерной области B, имеющей объем V, то $m \cdot V \le \iiint\limits_B f(x, y, z) \le M \cdot V$.

4. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в трехмерной

замкнутой области B, то в этой области найдется по крайней мере одна

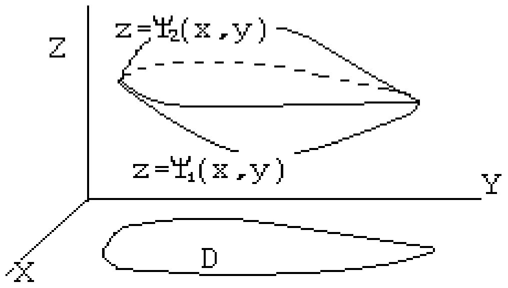
точка (ξ, η, ς), для которой справедливо равенство

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\xi, \eta, \varsigma) \cdot V,$$

где V объем области B.

Вычисление тройного интеграла

Пусть тело Ω выпукло в направлении оси OZ и проецируется на область D в плоскости XOY. Пусть уравнения нижней и верхней граничных поверхностей тела $z=\psi_1(x,y),\ (x,y)\in D,$ и $z=\psi_2(x,y),\ (x,y)\in D,$ соответственно.



Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D}\left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy.$$

Пусть уравнения кривых, ограничивающих область D снизу и сверху (в направлении движения вдоль оси OY) $y=\varphi_1(x), x\in\lfloor a,b\rfloor$ и $y=\varphi_2(x), x\in\lfloor a,b\rfloor$. Тогда $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Сначала вычисляем внутренний интеграл от функции $f(x,y,z)$ по z, считая x и y постоянными Используем формулу Ньютона –Лейбница, подставляя вместо верхнего предела $\psi_2(x,y)$, а нижнего $\psi_1(x,y)$. В результате имеем функцию, зависящую только от x и y. Далее от полученной функции берем интеграл по y, считая x постоянной. Используем формулу Ньютона-Лейбница, взяв в качестве верхнего предела $\varphi_2(x)$ и нижнего $\varphi_1(x)$. В результате получаем функцию, зависящую только от x. Подсчитав от нее интеграл по отрезку $[a,b]$, получим число равное искомому тройному интегралу.

Аналогично сводится к повторному интегрированию тройной интеграл для тела, выпуклого в направлении двух любых координатных осей. В случае, когда тело Ω не обладает таким свойством, разрежем его на фрагменты, выпуклые в направлении двух координатных осей, по плоскостям или цилиндрическим поверхностям с образующими, параллельными осям координат.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^4}$, где Ω- тело, ограниченное плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Р е ш е н и е. Проекцией тела на плоскость OXY является область D, ограниченная прямыми $x=0,\ y=0,\ y=1-x$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^4}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^4}=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(-\frac{1}{3(x+y+z+1)^3}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}dy=-\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=-\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^2}{8}+\frac{x}{4}+\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-1\right)=\frac{1}{48}.$$

Для того, чтобы вычислить тот же интеграл с применением MAXIMы, требуется ввести команду **integrate(integrate(integrate((x+y+z+1)^(-4),z,0,1-x-y)y,0,1-x),x,0,1)** и нажать Shift+Enter.

2. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz,$ где Ω - тело, ограниченное снизу параболоидом вращения $z=x^2+y^2$, а сверху плоскостью $z=1$.

Р е ш е н и е. Проекцией тела на плоскость XOY является круг $x^2+y^2\le 1$, который и является областью интегрирования D. Таким образом,

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_{D}\left[\int\limits_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)dz\right]dxdy=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)dxdy\ .$$

Для упрощения вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$ Тогда уравнение границы области D примет вид $r=1$. В результате имеем

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^3(1-r^2)dr=2\pi\cdot\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz,$ где тело Ω ограничено поверхностями $z=x^2+y^2,\ z=2(x^2+y^2),\ y=3x,\ y=4x,\ x=5$ с применением MAXIMы.

Р е ш е н и е. Проекцией тела Ω на плоскость XOY является треугольник $0\le x\le 5,\ 3x\le y\le 4x$. Поэтому следует ввести команды **integrate(integrate(integrate(x^2,z,x^2+y^2,2*(x^2+y^2)),y,3*x,4*x),x,0,5)** и нажать Shift+ Enter.

4.Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Р е ш е н и е. Для того, чтобы сосчитать объем тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, введем обобщенные сферические координаты:

$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi,$

$0\le\varphi\le 2\pi,\ -\pi/2<\psi<\pi/2,\ 0\le r\le 1.$

Вычисляя якобиан $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi,\psi)}=abcr^2\cos\psi$, получим

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\int\limits_0^1 r^2dr=\frac{4}{3}abc.$$

Для того, чтобы сосчитать объем тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, введем обобщенные сферические координаты:

$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi,$

$0\le\varphi\le 2\pi,\ -\pi/2<\psi<\pi/2,\ 0\le r\le 1.$

Вычисляя якобиан $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(z,\varphi,\psi)}=abcr^2\cos\psi$, получим

$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\int\limits_0^1 r^2dr=\frac{4}{3}\pi abc$. Следовательно, объем эллипсоида равен произведению полуосей, умноженному на 4π/3.

Замена переменных в тройном интеграле

Как и в случае двойного интеграла, при вычислении тройного интеграла иногда удобно производить замену переменных. Пусть $\begin{cases} x=x(u,v,w), \\ y=y(u,v,w),(u,v,w)\in\Omega_{u,v,w}, \\ z=z(u,v,w), \end{cases}$ где $\Omega_{u,v,w}$ – прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными координатным осям в пространстве UVW.

Будем предполагать, что функции $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ и $z = z(u,v,w)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в $\Omega_{u,v,w}$, то есть, отображение непрерывно дифференцируемо, причем $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0,\ (u,v,w) \in D_{u,v,w}$. Тогда формула перехода к новым переменным имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{u,v,w}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, где тело Ω ограничено конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z = 1$.

Р е ш е н и е. Если использовать для вычисления декартовы координаты, то появятся радикалы, которые затруднят вычисление. Поэтому введем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1.$$

Пределы изменения параметров обусловлены тем, что уравнение конической поверхности в новых координатах имеет вид $z = r$, и в пересечении конуса с плоскостью $z = 1$ получим окружность $x^2 + y^2 = 1$, а в цилиндрических координатах $r = 1$. Модуль якобиана преобразования равен

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = r.$$

Таким образом, $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_r^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 r^2(1-r)dr = \dfrac{\pi}{6}$.

2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, где тело Ω ограничено эллипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Р е ш е н и е. В целях упрощения счета введем обобщенные сферические координаты, что позволит избежать радикалов в подынтегральных функциях:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\psi \\ y = br\sin\varphi\cos\psi \,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1, \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$$

так как в обобщенных сферических координатах уравнение поверхности, ограничивающей тело, будет $r = 1$. Вычислим модуль якобиана преобразования:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}\right| = \left|\begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix}\right| = abcr^2 cos\psi.$$

Итак, $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz = abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos\psi d\psi\int\limits_0^1 r^4dr = \frac{4}{5}\pi abc$.

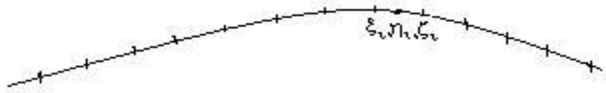
3. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$, где тело Ω расположено в октанте $x>0,\ y>0,\ z>0$ и ограничено поверхностями $z=\frac{x^2+y^2}{2}, z=\frac{x^2+y^2}{3}, xy=1, xy=4, y=3x, y=4x$.

Р е ш е н и е. Введем новые переменные: $u=\frac{y}{x},\ \ v=xy,\ \ w=\frac{x^2+y^2}{z}$. Такая замена обеспечит в плоскости новых переменных параллелепипед: $3\le u\le 4,\ \ 1\le v\le 4,\ \ 2\le w\le 3$. Так как, выражая старые переменные через новые, мы получим соотношения $x=\sqrt{\frac{v}{u}},\ y=\sqrt{uv},\ z=\frac{(1+u^2)v}{uw}$, нетрудно подсчитать значение якобиана: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{v(1+u^2)}{2u^2w^2}$. Теперь для того, чтобы сосчитать заданный интеграл с помощью MAXIMы, введем команду **integrate(integrate(integrate(v^3*(1+u^2)^2/(2*w^3*u^3),w,2,3),v,1,4), u,3,4)** и нажмем Shift+Enter.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл 1-го рода. В качестве основной задачи, приводящей к криволинейному интегралу первого рода, рассмотрим задачу о вычислении массы неоднородной нити.

Пусть С – кривая в пространстве XYZ, любой фрагмент которой имеет длину. Тяжелая неоднородная нить расположена вдоль этой кривой. Плотность нити, рассчитанная на единицу длины, зависит от местоположения точки на кривой и равна $\rho(x,y,z)$, причем $\rho(x,y,z)$ – непрерывная на C функция. Для того, чтобы вычислить массу неоднородной нити, разобьем кривую C на n фрагментов с длинами Δl_i и на каждом таком фрагменте выберем точку с координатами (ξ_i,η_i,ζ_i) и



найдем
значение $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$.

Предполагая, что длина i-го фрагмента мала и учитывая, что плотность непрерывна, получим, что масса этого фрагмента будет приблизительно равна $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$, при этом чем меньше фрагмент, тем точнее полученная масса этого фрагмента. Поэтому массу всей нити можно получить, просуммировав массы всех фрагментов и устремив к нулю длины фрагментов, одновременно увеличивая количество фрагментов, на которые разбита кривая. Таким образом, выражение для массы нити будет иметь вид

$$M = \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i \,.$$

Обозначая предел интегральной суммы с помощью интеграла, получим

$$M = \int_C \rho(x,y,z)dl \,.$$

Правая часть последнего выражения называется **криволинейным интегралом первого рода или криволинейным интегралом по длине дуги**. Заметим, что результат интегрирования не зависит от направления движения по кривой C, как не зависит от направления измерения масса нити.

С помощью криволинейного интеграла 1-го рода можно вычислять не только массу нити, но и другие физические характеристики нити: моменты, центр тяжести.

Способ вычисления криволинейного интеграла первого рода.

Пусть требуется вычислить $\int_C f(x,y,z)dl$, когда функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой C. Кривая C задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$

$t\in[0,T]$, где функции $x(t),y(t),z(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[0,T]$ производные. Тогда

$$\int\limits_C f(x,y,z)dl=\int\limits_0^T f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt .$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\int\limits_C (x-y)dl$, где C – верхняя полуокружность единичного радиуса с центром в нуле на плоскости XY.

Р е ш е н и е. Параметрическим уравнениями данной полуокружности являются $x=\cos t, y=\sin t,\quad t\in[0,\pi]$. В данном случае полуокружность находится на плоскости XY, поэтому $z\equiv 0$. Используя формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода, получим

$$\int\limits_C (x-y)dl=\int\limits_0^\pi(\cos t-\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int\limits_0^\pi(\cos t-\sin t)dt=-2 .$$

2. Вычислить $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)dl$, где C – часть винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt,\ t\in[0,2\pi]$.

Р е ш е н и е. В соответствии с приведенной формулой вычисления криволинейного интеграла первого рода, пользуясь заданной параметризацией, получим

$$\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)dl=\int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}\,2\pi(a^2+b^2\frac{4\pi^2}{3}) .$$

3. Найти массу дуги кривой $x=t, y=\frac{t^2}{2}, z=\frac{t^3}{3},\quad t\in[0,1]$, плотность которой меняется по закону $\sqrt{3y}$.

Р е ш е н и е. Масса дуги C вычисляется по формуле $\int\limits_C \rho(x,y,z)dl$, где $\rho(x,y,z)$ – плотность неоднородной дуги. В соответствии с параметризацией и формулой плотности получим значение массы в виде интеграла: $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{3}{2}}t\sqrt{1+t^2+t^4}dt$.Такой интеграл вычисляется хотя бы с помощью MAXIMы.

Криволинейный интеграл 2-го рода. В качестве основной задачи, приводящей к криволинейному интегралу второго рода, рассмотрим задачу о вычислении работы силы вдоль кривой.

Пусть C – кривая в пространстве XYZ с заданным направлением движения по ней. В каждой точке кривой задан вектор силы

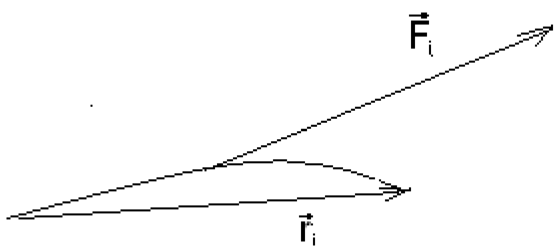
$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Следует вычислить работу силы $\vec{F}(x,y,z)$ вдоль кривой C.

Если бы кривая была прямолинейным направленным отрезком $\vec{r}$, а сила $\vec{F}$ была постоянной вдоль всего этого отрезка, работу мы вычислили бы с помощью скалярного произведения по формуле $A = (\vec{F}, \vec{r})$.

Будем полагать компоненты вектора силы $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывными на C функциями. Будем считать кривую C гладкой, то есть такой, что в каждой точке кривой существует касательная к кривой в этой точке, а при разбиении кривой точками на дуговые фрагменты и при измельчении такого разбиения хорда, соединяющая концы дугового фрагмента, становится сколь угодно близкой к соответствующему дуговому фрагменту.

Для вычисления работы силы вдоль кривой разобьем кривую C на n фрагментов точками с координатами (x_i, y_i, z_i) так, что при движении в заданном направлении по кривой параметр i растет. Выберем на i-м дуговом фрагменте точку с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i). При измельчении разбиения кривой вектор силы на i-м дуговом фрагменте мало отличается от вектора $\vec{F_i} = (P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i))$ вследствие непрерывности компонент вектора силы. В свою очередь, путь вдоль i-го дугового фрагмента от точки с координатами (x_i, y_i, z_i) к точке с координатами$(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ при измельчении разбиения мало отличается от пути вдоль соответствующей хорды. Прямолинейный путь вдоль хорды задается вектором $\vec{r_i} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i) = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$, причем измельчение разбиения равносильно стремлению к нулю компонент вектора $\vec{r_i}$. Таким образом, работа силы вдоль i-го дугового фрагмента близка к значению $A_i = (\vec{F_i}, \vec{r_i})$, и это значение тем точнее, чем мельче разбиение кривой C.



Работу вдоль всей кривой C мы получим, если просуммируем значения работы на всех дуговых фрагментах кривой C, измельчая разбиение и увеличивая одновременно количество дуговых фрагментов:

$$A=\lim_{\substack{\max_i \Delta x_i\to 0\\ \max_i \Delta y_i\to 0\\ \max_i \Delta z_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}A_i=\lim_{\substack{\max_i \Delta x_i\to 0\\ \max_i \Delta y_i\to 0\\ \max_i \Delta z_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\ .$$

Переходя с помощью предела от интегральных сумм к интегралу, имеем

$$A=\int_C(\vec{F},d\vec{r})=\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\ .$$

Интеграл в правой части последнего выражения называется **криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам.** Этот интеграл вычисляют только вдоль **ориентированных** кривых – то есть, кривых, на которых задано направление. Заметим, что, если мы сменим направление движения вдоль кривой С на противоположное, а значит, заменим при вычислении A_i вектор $\vec{r}_i$ на вектор $-\vec{r}_i$, то получим замену знака A на противоположный знак. Поэтому при задании криволинейного интеграла второго рода обязательно задают **направление движения** по кривой интегрирования.

В случае, когда кривая С замкнута, символ интеграла обычно несколько изменяют, добавляя пересекающий его кружок: $\oint$.

Способ вычисления криволинейного интеграла второго рода. Пусть требуется вычислить $\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

Кривая С задана параметрически: $\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \quad t\in[0,T],\\ z=z(t),\end{cases}$ где функции $x(t),y(t),z(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[0,T]$ производные. В этом случае мы имеем следующую формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_0^T[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t)y(t),z(t))z'(t)]dt\ .$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\int_C(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где С – парабола $y=x^2$, $x\in[-1,1]$, в плоскости XY, пробегаемая в направлении возрастания x .

Р е ш е н и е. В качестве параметра для уравнения кривой С можно выбрать переменную x. То есть, параметрическое уравнение кривой имеет вид $x = x, y = x^2, x \in [-1,1]$. Поскольку кривая находится в плоскости XY, имеем $z \equiv 0$. Поэтому в соответствии с формулой для вычисления криволинейного интеграла второго рода

$$\int\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int\limits_{-1}^{1} [(x^2 - 2xx^2)1 + ((x^2)^2 - 2xx^2)2x]dx = \quad =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} [x^2 - 2x^3 - 4x^4 + 2x^5]dx = -\frac{14}{15}.$$

2. Вычислить $\int\limits_C (y^2 - z^2)dx + yzdy - 2x^2dz$, где С – кривая $x = 2t,\ y = -t^2,\ z = t - t^3,\ \ t \in [0,1]$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой

$$\int\limits_C (y^2 - z^2)dx + yzdy - 2x^2dz = \int\limits_0^1 [(t^4 - (t - t^3)^2) \cdot 2 + t^2(t - t^3) \cdot 2t - 8t^2(1 - 3t^2)]dt.$$

3. Вычислить работу силы $\vec{f} = (2y, z, -3x)$ вдоль кривой С, где С – часть винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ \ t \in [0, 2\pi]$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой работы силы вдоль кривой $A = \int\limits_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, где под интегралом стоит скалярное произведение,

$$A = \int\limits_C 2ydx + zdy - 3xdz = \int\limits_0^{2\pi} (2a\sin t(-a\cos t) + bt \cdot a\cos t - 3a\cos t \cdot b)dt.$$

Связь между криволинейным интегралом второго рода вдоль замкнутой кривой на плоскости и двойным интегралом. Формула Грина.

Пусть С – кусочно-гладкая замкнутая кривая, ограничивающая область D. На кривой С задано такое направление, что при движении в этом направлении область D остается слева. Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D вплоть до ее границы, кроме того, функции $Q'_x(x, y)$ и $P'_y(x, y)$ также непрерывны в D вплоть до границы. Тогда справедлива **формула Грина**

$$\oint\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

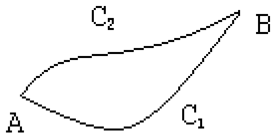
П р и м е р.

Вычислить $\oint\limits_C x^2dx+2xydy$, где C – единичная окружность с центром в нуле, проходимая так, что круг остается слева, двумя способами:
а) непосредственно, б) с помощью формулы Грина.

Р е ш е н и е. а) Параметризуем кривую: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]$.
Теперь $\oint\limits_C x^2dx+2xydy=\int\limits_0^{2\pi}(-\sin t\cos^2 t+2\cos^2 t\sin t)dt=0$.
б) $\oint\limits_C x^2dx+2xydy=\iint\limits_D(2y-0)dxdy=2\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=0.$

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости.

В общем случае криволинейный интеграл $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, где кривая C соединяет точки A и B на плоскости XY, зависит от пути C. Зададимся вопросом, каким условиям должны удовлетворять функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в области D, чтобы результат интегрирования по любой кривой, лежащей внутри D, и соединяющей две фиксированные точки, был одинаковым.



Очевидно, что условие независимости результата интегрирования криволинейного интеграла по кривой, соединяющей две фиксированные точки области, от формы этой кривой равносильно условию равенства нулю интеграла по любой замкнутой кривой, лежащей в этой области. Действительно, обозначим через C_1 и C_2 две кривые, лежащие в D, с общими начальной и конечной точками. Тогда кривая $C=C_1\bigcup C_2^-$, где знак «-» означает, что соответствующая кривая проходится в противоположном направлении, будет замкнутой. Следовательно, соотношение

$$\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{C_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy-\int\limits_{C_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

равносильно тому, что $\int\limits_{C_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{C_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Необходимым и достаточным условием того, что $\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,

где C – любая замкнутая кривая, лежащая в области D, является равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, выполняющееся всюду в D для непрерывных функций P'_y и Q'_x.

Для доказательства этого факта используется формула Грина.

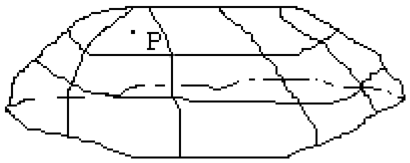
Заметим, что выполнение условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – это условие того, что подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, называемой потенциалом. Действительно, если $P(x,y) = U'_x$ и $Q(x,y) = U'_y$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = U''_{xy}$.

Таким образом, выполнение условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ обеспечивает представление $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, и криволинейный интеграл от этого выражения по любой кривой, соединяющей две фиксированные точки A и B с координатами (x_A, y_A) и (x_B, y_B), соответственно, равен $\int\limits_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A)$.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Поверхностный интеграл первого рода. Основной задачей, приводящей к поверхностному интегралу первого рода, является задача о вычислении массы неоднородной оболочки.

Пусть S – поверхность в пространстве XYZ. Тяжелая неоднородная оболочка расположена в пространстве в виде этой поверхности. Плотность оболочки, рассчитанная на единицу площади поверхности, зависит от местоположения точки на поверхности и равна $\rho(x,y,z)$, причем $\rho(x,y,z)$– непрерывная на S функция. Для того, чтобы вычислить массу неоднородной оболочки, разобьем поверхность S на n фрагментов S_i с площадями Δs_i и на каждом таком фрагменте



$P = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

выберем точку P_i с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i). Найдем значение $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Предполагая, что площадь i-го поверхностного фрагмента мала и учитывая, что плотность непрерывна, получим, что масса этого фрагмента будет приблизительно равна $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$, причем чем меньше фрагмент, тем точнее полученная масса этого фрагмента. Поэтому массу всей оболочки можно получить, просуммировав массы всех фрагментов и устремив к нулю площади фрагментов, одновременно увеличивая количество фрагментов, на которые разбита поверхность. Таким образом, выражение для массы оболочки будет иметь вид

$$M = \lim_{\max\limits_i \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i .$$

Представим предел интегральной суммы через двойной интеграл, так как сомножитель Δs_i – элемент площади. В результате предельного перехода получим $M = \iint\limits_S \rho(x, y, z) ds$.

Интеграл, стоящий в правой части последнего выражения, называется **поверхностным интегралом первого рода или поверхностным интегралом по площади поверхности**. Заметим, что результат интегрирования не зависит от выбора стороны оболочки.

С помощью поверхностного интеграла 1-го рода можно вычислять не только массу оболочки, но и другие физические характеристики оболочки: моменты, центр тяжести….

Способ вычисления поверхностного интеграла первого рода.

Пусть требуется вычислить $\iint\limits_S f(x, y, z) ds$, когда функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S. Поверхность S задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} (u,v) \in [0,U] \times [0,V]$$, где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U] \times [0,V]$ частные производные первого порядка. Тогда

$$\iint_S f(x,y,z)ds =$$

$$= \iint_{[0,U] \times [0,V]} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2} dudv.$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint_S |xy|ds$, где S – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

Р е ш е н и е. Прежде всего, заметим, что проекцией данной поверхности S на плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Параметризуем уравнение поверхности с помощью полярных координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r^2, \end{cases} \quad r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Вычислим входящие в формулу якобианы:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \ \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)} = -2r^2\cos\varphi, \ \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,t)} = -2r^2\sin\varphi.$$

Теперь получим представление исходного поверхностного интеграла через двойной интеграл по прямоугольнику значений параметров:

$$\iint_S |xy|ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 |\sin\varphi\cos\varphi| \sqrt{r^2 + 4r^4} dr =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + 4r^2} dr.$$

Таким образом, мы пришли к вычислению произведения двух интегралов по отрезкам.

2. Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (z \ge 0)$, плотность которой в каждой ее точке равна z / a.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для массы неоднородной оболочки $m=\iint\limits_S \rho(x,y,z)ds$. Перейдем к сферическим координатам $x=a\cos\varphi\cos\psi, y=a\sin\varphi\cos\psi, z=a\sin\psi$, $\varphi\in[0,2\pi],\psi\in[0,\pi/2]$, и вычислим якобианы
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=a^2\cos\psi\sin\psi, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=a^2\cos\varphi\cos^2\psi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=a^2\sin\varphi\cos^2\psi$.

Теперь $m=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi a^2\sqrt{\cos^2\psi\sin^2\psi+\cos^4\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}d\psi=$

$$=2\pi a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi\cos\psi d\psi=\pi a^2.$$

3. Найти массу оболочки конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ с плотностью $\rho=(2-z)$.

Р е ш е н и е. Оболочка состоит из части конической поверхности $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ и из части плоскости $S_2: z=1,\ x^2+y^2\le 1$. Поэтому искомая масса представляет собой сумму двух слагаемых:
$m=\iint\limits_{S_1}\rho(x,y,z)ds+\iint\limits_{S_2}\rho(x,y,z)ds=\iint\limits_{S_1}(2-z)ds+\iint\limits_{S_2}1ds$. Второй интеграл представляет собой площадь единичного круга и равен π. Для вычисления первого интеграла введем цилиндрические координаты:
$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. Уравнение конической поверхности дает соотношение $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Вычислим якобианы: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r, \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)}=-r\cos\varphi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\varphi)}=-r\sin\varphi$. Поэтому
$\iint\limits_{S_1}(2-z)ds=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(2-r)\sqrt{2}rdr$. В итоге искомая масса равна $\pi\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$.

Поверхностный интеграл второго рода. Основной задачей, приводящей к поверхностному интегралу второго рода, является задача о вычислении потока вектора через поверхность.

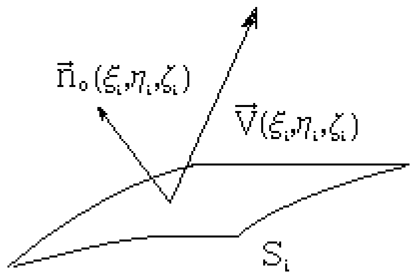
Пусть S – двусторонняя поверхность, то есть такая, что при движении точки по любому замкнутому пути, лежащему на поверхности, нормаль к поверхности возвращается в исходное состояние. (Примером односторонней поверхности является лист Мебиуса). Предположим, что через поверхность S протекает жидкость, причем скорость течения жидкости (ее направление и величина) различная в разных точках поверхности S. Таким образом, в точках поверхности задан вектор скорости:

$$\vec{V}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),\ \ (x,y,z)\in S .$$

Будем считать функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ непрерывными на S.

Потоком вектора $\vec{V}$ через поверхность S назовем объем жидкости, протекающей через поверхность S в направлении нормали к фиксированной стороне поверхности за единицу времени. Вычислим поток вектора через поверхность.

Будем считать поверхность гладкой, то есть имеющей касательную плоскость и нормаль в каждой точке. Разделим поверхность на n фрагментов S_i, настолько малых, что нормаль к этому поверхностному фрагменту в различных его точках практически совпадает с нормалью к S_i в одной выбранной на S_i точке. Тогда поток Π_i вектора $\vec{V}$ через фрагмент S_i приблизительно равен $h_i\cdot\Delta s_i$, где Δs_i – площадь фрагмента, h_i – проекция вектора $\vec{V}$ на направление нормали к выбранной стороне поверхностного фрагмента S_i в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$. То есть, h_i – скалярное произведение вектора $\vec{V}$ и единичного вектора нормали.



Следовательно, $h_i=(\vec{V}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i),\vec{n}_0(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i))$, где $\vec{n}_0(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ - единичный вектор нормали к поверхностному фрагменту в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$. Таким образом, $\Pi_i\approx[P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\cos\gamma_i]\cdot\Delta s_i$, причем значение Π_i тем точнее, чем меньше площадь фрагмента S_i. Заметив, что площадь фрагмента S_i можно заменить площадью соответствующего фрагмента касательной в точке $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ плоскости к S, получим: $\cos\alpha_i\Delta s_i=\Delta s_{i(yz)},\ \cos\beta_i\Delta s_i=\Delta s_{i(zx)},\ \cos\gamma_i\Delta s_i=\Delta s_{i(xy)}$. Здесь $\Delta s_{i(yz)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость YOZ, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\alpha_i$, $\Delta s_{i(zx)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость ZOX, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\beta_i$, $\Delta s_{i(xy)}$ – площадь проекции фрагмента S_i на плоскость XOY, взятая с тем знаком, какой имеет $\cos\gamma_i$.

В итоге мы получим следующие выражения для вычисления потока:

$$\Pi = \iint_S (\vec{V}, \vec{n}_0)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum [P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\cos\gamma_i]\Delta s_i =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta s_{i(yz)} \to 0 \\ \max \Delta s_{i(zx)} \to 0 \\ \max \Delta s_{i(xy)} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(yz)} + Q(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(zx)} + R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta s_{i(xy)}]$$

.

При переходе к пределу в последнем выражении, учитывая, что пределы элементов площадей на координатных плоскостях – это произведения дифференциалов соответствующих координат, получим

$$\Pi = \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy .$$

Выражение в правой части последнего равенства называется **поверхностным интегралом второго рода или поверхностным интегралом по координатам.**

Заметим, что смена стороны поверхности меняет знак вектора нормали $\vec{n}_0$ на противоположный, поэтому смена стороны поверхности меняет знак соответствующего интеграла второго рода на противоположный.

Следует отметить, что поверхностный интеграл второго рода иногда записывают в виде

$$\iint_S (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)ds ,$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие векторы нормали к поверхности.

Способ вычисления поверхностного интеграла второго рода.

Пусть требуется вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)ds =$$

$$= \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy,$$

когда функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ непрерывны на поверхности S.

Поверхность S задана параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in[0,U]\times[0,V], \\ z = z(u,v), \end{cases}$ где

функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U]\times[0,V]$ частные производные первого порядка, причем
$\sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2}\neq 0,\ (u,v)\in[0,U]\times[0,V]$. Тогда

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$
$$=\pm\iint_{[0,U]\times[0,V]}[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+$$
$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv.$$

Выбор знаков + или – определяется выбором стороны поверхности.

П р и м е р ы.

1. Вычислить $\iint_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$, где S – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Р е ш е н и е. Параметризуем уравнение эллипсоида с помощью обобщенных сферических координат: $x=a\cos\varphi\cos\psi, y=b\sin\varphi\cos\psi, z=c\sin\psi$, $\varphi\in[0,2\pi],\psi\in[-\pi/2,\pi/2]$.
Вычислим соответствующие якобианы:
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}=ab\cos\psi\sin\psi, \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\psi)}=bc\cos\varphi\cos^2\psi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\psi)}=ac\sin\varphi\cos^2\psi$.
Чтобы определить, какой знак нужно будет выбрать, обратим внимание на то, что внешняя нормаль к эллипсоиду в тех точках, где $z>0$, то есть, $\psi\in(0,\pi/2)$, имеет положительную проекцию на ось OZ. Это означает, что третья координата вектора нормали при $\psi\in(0,\pi/2)$ должна быть положительной. В нашем случае $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=ab\cos\psi\sin\psi>0$ при $\psi\in(0,\pi/2)$, следовательно, найденные якобианы являются координатами вектора нормали именно к внешней стороне эллипсоида, и менять знак у интеграла не придется. Таким образом,

$$\iint\limits_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{2\pi} (\frac{bc\cos\varphi\cos^2\psi}{a\cos\varphi\cos\psi}+\frac{ac\sin\varphi\cos^2\psi}{b\sin\varphi\cos\psi}+$$

$$+\frac{ab\cos\psi\sin\psi}{c\sin\psi})d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{2\pi} (\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\cos\psi d\varphi = 4\pi(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}).$$

2. Вычислить поток вектора $\vec{V}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2\le a^2, z\in[0,h]$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой потока $\Pi=\iint\limits_S(\vec{V},\vec{n})ds$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности, имеем $\Pi=\iint\limits_S(yz\cos\alpha+xz\cos\beta+xy\cos\gamma)ds$. Введем цилиндрические координаты $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$, тогда уравнение боковой поверхности цилиндра примет вид $r=a,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le h$, то есть, параметрами являются φ и z, а параметрические уравнения поверхности примут вид $x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=z$. Имеем следующее представление якобианов: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,r)}=0, \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,r)}=a\cos\varphi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,r)}=a\sin\varphi$. Теперь для вычисления потока нам нужно вычислить интеграл

$$\Pi=\pm\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h (a^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot z+a^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot z)ds.$$

Для выбора знака перед интегралом заметим, что направление внешней нормали к цилиндру совпадает с направлением радиуса-вектора точки цилиндра, и так как соответствующие якобианы совпадают по знаку с координатой радиуса-вектора, перед интегралом выберем знак +. В результате вычислений получим $\Pi=2a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^h zdz=0$.

3. Вычислить поток вектора $\vec{V}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}, z\le 1$, в направлении внешней нормали. Формула для вычисления потока будет той же, что и в предыдущей задаче: $\Pi=\iint\limits_S(y\cos\alpha+z\cos\beta+x\cos\gamma)ds$. Введем цилиндрические координаты, тогда параметрические уравнения поверхности примут вид $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1$. Вычислим якобианы: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=r, \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\varphi)}=-r\cos\varphi, \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\varphi)}=-r\sin\varphi$. Заметим, что аппликата вектора внешней нормали для данного конуса всегда отрицательна.

Поскольку $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r > 0$, а знак этого якобиана должен совпадать со знаком аппликаты вектора внешней нормали, в формуле для вычисления потока выбираем знак –. Таким образом,

$$\Pi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-r^2 \sin\varphi\cos\varphi - r^2 \sin\varphi + r^2 \cos\varphi)dr =$$

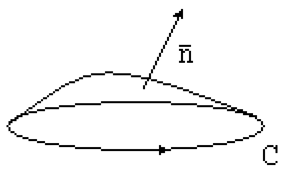
$$= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi \int_0^1 r^2 dr = 0.$$

Связь криволинейного интеграла второго рода по замкнутой кривой в пространстве с поверхностным интегралом. Формула Стокса

Пусть C – гладкая замкнутая пространственная кривая, S – такая двусторонняя поверхность, что кривая C является границей этой поверхности. Тогда справедлива **формула Стокса**

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds ,$$

где выбор стороны поверхности, а значит, выбор знаков направляющих косинусов нормали к поверхности определяется заданием обхода по кривой C следующим образом: если глядеть с конца вектора нормали к поверхности C, должно быть видно, что обход кривой C совершается против часовой стрелки.



Следует пояснить, что собой представляет правая часть формулы Стокса. Под интегралом находится определитель, в верхней строке которого расположены направляющие косинусы вектора нормали к поверхности S, в средней строке расположены символические операторы нахождения частных производных, и в нижней строке расположены функции, представленные в криволинейном интеграле. Раскладывая определитель по верхней строке, мы получим поверхностный интеграл второго рода. Формальное «умножение» символического оператора на функцию означает, что от этой функции следует взять частную производную по соответствующей переменной.

В частном случае – когда поверхность S – это плоскость XOY, то есть $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (0,0,1)$, формула Стокса превращается в формулу Грина.

П р и м е р ы.

1.Вычислить с применением формулы Стокса $\oint\limits_C (z+y)dx+(x-z)dy+(y+2x)dz$, где C – окружность, полученная в пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскости $x-y+3z=0$ и проходимая так, что та сторона конечной части плоскости, нормаль к которой имеет координаты $(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}})$, остается слева.

Р е ш е н и е. В качестве поверхности S можно выбрать как часть заданной сферы, так и часть заданной плоскости. Для простоты вычислений мы выберем плоскость. Применяя формулу Стокса, получим

$$\oint\limits_C (z+y)dx+(x-z)dy+(y+2x)dz = \frac{1}{\sqrt{11}}\iint\limits_S \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z+y) & (x-z) & (y+2x) \end{vmatrix} ds = \frac{3}{\sqrt{11}}\iint\limits_S ds$$

Последний интеграл равен площади круга, находящегося в сечении шара плоскостью, проходящей через центр шара. Поскольку этот круг имеет радиус 2, получим $\oint\limits_C (z+y)dx+(x-z)dy+(y+2x)dz = \frac{12\pi}{\sqrt{11}}$.

2. Вычислить двумя способами $\oint\limits_C xdx+ydy+zdz$, где C – кривая, получаемая в пересечении конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскости $y/2+z=1$ и проходимая так, что та сторона конечной части плоскости, нормаль к которой имеет координаты $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, остается слева.

Р е ш е н и е. а) Непосредственное вычисление. Переходя к цилиндрическим координатам, получим параметрические уравнения конуса: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости, пересекающейся с конусом, получим для точек, общих для конуса и плоскости, связь между параметрами r и φ: $r(1+\sin\varphi/2)=1$. Следовательно, для точек кривой C имеем параметризацию:

$x(\varphi)=\frac{2\cos\varphi}{2+\sin\varphi},\ y(\varphi)=\frac{2\sin\varphi}{2+\sin\varphi},\ z(\varphi)=\frac{2}{2+\sin\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Таким образом,

$$\oint_C xdx+ydy+zdz=\int_0^{2\pi}[x(\varphi)x'(\varphi)+y(\varphi)y'(\varphi)+z(\varphi)z'(\varphi)]d\varphi=$$

$$=\left.\frac{x^2(\varphi)+y^2(\varphi)+z^2(\varphi)}{2}\right|_0^{2\pi}=0.$$

б) Вычисление с помощью формулы Стокса:

$$\oint_C xdx+ydy+zdz=\frac{1}{\sqrt{5}}\iint_S\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}ds=0\,.$$

Связь интеграла по замкнутой поверхности с тройным интегралом по телу, ограниченному этой поверхностью. Формула Гаусса-Остроградского

Пусть S – двусторонняя замкнутая поверхность, ограничивающая тело V. Предположим, что функции $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные в V и непрерывны на S. Докажем справедливость формулы Гаусса-Остроградского:

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,,$$

где поверхностный интеграл взят по внешней стороне поверхности S.

П р и м е р ы.

1. Вычислить поток вектора $\vec{V}=(x,2y,3z)$ через единичную сферу с центром в нуле в направлении внешней нормали двумя способами.

Р е ш е н и е.

а) Непосредственное вычисление. Вводя сферические координаты $x=\cos\varphi\cos\psi,\ y=\sin\varphi\cos\psi,\ z=\sin\psi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\pi/2<\psi<\pi/2$, и вычисляя соответствующие якобианы, запишем интеграл, необходимый для вычисления потока:

$$\oiint_S xdydz+2ydzdx+3zdxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2\varphi\cos^3\psi+$$

$$+2\sin^2\varphi\cos^3\psi+3\sin^2\psi\cos\psi)d\psi.$$

б) Решение с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

$$\oiint_S xdydz+2ydzdx+3zdxdy=\iiint_\Omega(1+2+3)dxdydz=6\iiint_\Omega dxdydz\,.$$

Последний интеграл равен $\frac{4}{3}\pi$ как объем шара радиуса 1. То есть величина потока равна 8π .

2. Вычислить поток вектора $\vec{V}=(y-x, 2x, z+3x)$ через полную поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. Если считать поток непосредственно, придется брать сумму потоков через боковую поверхность конуса и через его основание. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\oint\!\!\oint_S (y-x)dydz + 2xdzdx + (z+3x)dxdy = \iiint_{\Omega} (-1+1)dxdydz = 0.$$

3. Вычислить поток вектора $\vec{V}=(x, y, z)$ через полную поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в направлении внешней нормали.

Р е ш е н и е. Применим формулу Гаусса-Остроградского:

$$\oint\!\!\oint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint_{\Omega} dxdydz .$$

Последний интеграл равен объему тела Ω, ограниченного заданным эллипсоидом, то есть, $4\pi abc/3$.

Следовательно, искомый поток равен $4\pi abc$.

РЯДЫ

Числовые ряды

Понятие предела последовательности дает возможность ввести понятие числового ряда – бесконечной суммы вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где a_k – общий член ряда. На первый взгляд бесконечное суммирование невозможно уже хотя бы в силу конечности жизни любого, кто занимается суммированием. Выход из положения следующий: бесконечная сумма понимается как предел последовательности s_n – конечных n–ных **частных сумм** $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Таким образом, суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ будем называть число

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Ряд называется **сходящимся**, если для него существует конечная сумма. Ряд называется **расходящимся**, если соответствующий предел частных сумм не существует или бесконечен.

П р и м е р 1. Сосчитаем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$, $|q|<1$. Имеем согласно формуле суммы геометрической прогрессии $s_n=\sum_{k=1}^{n}q^k=q\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Поскольку $q^n\to 0$ при $n\to\infty$, получим $\sum_{k=1}^{\infty}q^k=\dfrac{q}{1-q}$.

Заметим, что при $|q|\geq 1$ соответствующий ряд расходится.

П р и м е р 2. Сосчитаем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}$. Имеем

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1$.

Необходимым признаком сходимости числового ряда является условие: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Доказывается это легко: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то есть существует $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. При $n\to\infty$ справедливо: $n-1\to\infty$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s$. Поскольку $s_n-s_{n-1}=a_n$, то из 1-го и 2-го свойств пределов последовательностей имеем: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что необходимое условие сходимости не является достаточным. То есть, стремление к нулю общего члена ряда не обеспечивает его сходимость.

К о н т р п р и м е р. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$, называемый гармоническим рядом, расходится. Для этого рассмотрим последовательность частных сумм s_{2^n}, то есть частные суммы

$s_2, s_4, s_8, \ldots$. При суммировании членов конечной суммы s_{2^n} сгруппируем рядом стоящие члены суммы, начиная от $\frac{1}{2^l+1}$ до $\frac{1}{2^{l+1}}$, при всех $l=1,\ldots,n-1$:

$$s_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8})+\ldots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}) >$$
$$> 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = 1+n\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \infty$, и значит, предел последовательности частных сумм не может быть конечным.

Свойства числовых рядов

Следующие свойства сходящихся рядов очевидным образом следуют из свойств пределов последовательностей.

1. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sigma$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k)$ также сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\cdot a_k+\beta\cdot b_k) = \alpha\cdot s+\beta\cdot\sigma.$$

2. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ сходятся или расходятся одновременно, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+N} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - s_N$.

Ряды с положительными членами

Л е м м а. Ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда все его частные суммы ограничены.

Доказательство следует из того факта, что частные суммы рядов с положительными членами $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ монотонно возрастают с ростом n, и значит, имеют предел тогда и только тогда, когда они ограничены сверху.

Теорема сравнения 1. Пусть $0 < a_k \le b_k$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Обозначая $\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sigma_n$, имеем: $s_n \le \sigma_n$. Остальное следует из доказанной леммы.

Теорема сравнения 2. Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0$, причем существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K (\neq 0)$. Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из определения предела при $\varepsilon = \frac{K}{2}$ найдем N такое, что $|\frac{a_n}{b_n} - K| < \frac{K}{2}$ при любом $n > N$. Следовательно, $a_n < \frac{3}{2} K \cdot b_n$, $b_n < \frac{2}{K} \cdot a_n$ при $n > N$. Согласно теореме сравнения 1 ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+N}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_{k+N}$ сходятся или расходятся одновременно. Согласно свойству 2 сходящихся рядов теорема доказана.

П р и м е р. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^7 + 8}{10k^9 + 6k^3 + 4}$ сходится, так как его можно сравнить со сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, рассмотренным выше. Действительно, существует $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^7 + 8)n(n+1)}{(10n^9 + 6n^3 + 4)} = \frac{3}{10}$, и можно применить теорему сравнения 2.

Два следующих достаточных условия сходимости числовых рядов с положительными членами, называются признаками сходимости.

Признак Даламбера. Пусть существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$. Если $p < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $p > 1$, то этот ряд расходится.

Доказательство. 1) Пусть $p<1$. Выберем $\varepsilon>0$ такое, что $p+\varepsilon<1$ и найдем номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $|\frac{a_{n+1}}{a_n}-p|<\varepsilon$ для $\forall n>N(\varepsilon)$. Это значит, что $\frac{a_{n+1}}{a_n}<p+\varepsilon<1$ для $\forall n>N$. Следовательно, $a_{N+2}<(p+\varepsilon)a_{N+1}$, $a_{N+3}<(p+\varepsilon)a_{N+2}<(p+\varepsilon)^2 a_{N+1}, \ldots,\ a_{N+k+1}<(p+\varepsilon)^k a_{N+1}, \ldots$. Это значит, что знакоположительный ряд $a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots..+a_{N+k}+\ldots.$ сходится по теореме сравнения 1, так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+1}(p+\varepsilon)^k$ (сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $p+\varepsilon<1$). Согласно второму свойству числовых рядов исходный ряд также сходится.
2) Пусть $p>1$. Выберем $\varepsilon>0$ такое, что $p-\varepsilon>1$ и найдем номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $|\frac{a_{n+1}}{a_n}-p|<\varepsilon$ для $\forall n>N(\varepsilon)$. Это значит, что $\frac{a_{n+1}}{a_n}>p-\varepsilon>1$ для $\forall n>N$. Следовательно, $a_{N+2}>(p-\varepsilon)a_{N+1}$, $a_{N+3}>(p-\varepsilon)a_{N+2}<(p-\varepsilon)^2 a_{N+1}, \ldots,\ a_{N+k+1}>(p-\varepsilon)^k a_{N+1}, \ldots$. Это значит, что знакоположительный ряд $a_{N+2}+a_{N+3}+\ldots..+a_{N+k}+\ldots.$ расходится по теореме сравнения 1, так как расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+1}(p-\varepsilon)^k$ (сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $p-\varepsilon>1$). Согласно второму свойству числовых рядов исходный ряд также расходится.

П р и м е р. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. Здесь $a_n=\frac{1000^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0$, данный ряд сходится.

Признак Коши. Пусть существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$. Если $p<1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, если $p>1$, то этот ряд расходится.

Доказательство. 1)Пусть $p<1$. Возьмем $\varepsilon<(1-p)/2$ и найдем N такое, что $|\sqrt[n]{a_n}-p|<\varepsilon$ при $n>N$. Следовательно, $\sqrt[n]{a_n}<\varepsilon+p=p_1<1$ и $a_n<p_1^n$ при $n>N$. Согласно теореме сравнения 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+N}$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_1^k$. Следовательно, и исходный ряд сходится.

2) Пусть $p>1$. Возьмем $\varepsilon<(p-1)/2$ и найдем N такое, что

$|\sqrt[n]{a_n}-p|<\varepsilon$ при $n>N$. Следовательно, $\sqrt[n]{a_n}>-\varepsilon+p=p_2>1$ и $a_n>p_2{}^n$

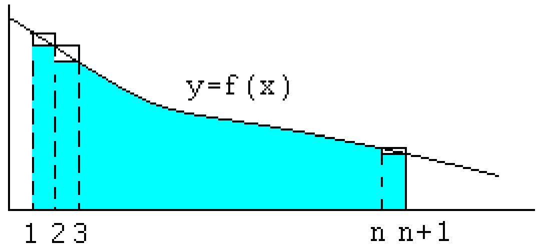
при $n>N$. Согласно теореме сравнения 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{k+N}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_2{}^k$. Следовательно, и исходный ряд расходится.

П р и м е р. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$, данный ряд сходится.

Следующий признак основан на сравнении ряда и несобственного интеграла, подынтегральная функция которого при натуральных значениях аргумента превращается в члены ряда.

Интегральный признак. Пусть члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ монотонно убывают с ростом n. Если монотонная функция $f(x)$ такова, что $f(n)=a_n$, то сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ равносильна сходимости или расходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$.

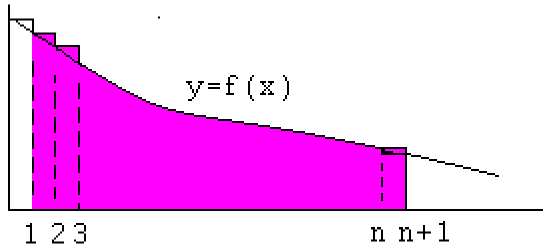
Доказательство. Сравним частные суммы ряда с интегралом от функции $f(x)$ по соответствующему отрезку. Для этого рассмотрим график функции $y=f(x),\ x>0$, и отметим натуральные значения переменной и значения функции при этих натуральных значениях переменной.



Закрашенная часть рисунка представляет собой область с площадью, равной

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k)\cdot 1=\sum_{k=2}^{n+1} a_k = S_{n+1}-a_1.$$

Закрасим теперь рисунок по-другому:



Теперь закрашенная часть рисунка представляет собой область с площадью, равной

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\cdot 1=\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n.$$

Легко заметить, что благодаря монотонности функции $f(x)$ справедливо неравенство: $S_{n+1}-a_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$. Следовательно, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то при $\forall n \in \mathrm{N}$ интегралы $\int_1^{n} f(x)dx$ ограничены, и значит, ограничены частные суммы исходного ряда: $S_n \le \int_1^{n} f(x)dx + a_1$. И наоборот, $\int_1^{M} f(x)dx \le \int_1^{[M]+1} f(x)dx \le S_{[M]} \le S$.

Данный признак дает возможность сделать вывод о сходимости или расходимости ряда вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$, при том, что два предыдущих признака не позволяют это сделать, так как в обоих случаях здесь $p=1$. Вспомним, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Знакопеременные ряды

Для знакопеременных рядов приведенные признаки сходимости также можно применять, но для исследования **абсолютной сходимости**.

Теорема. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, причем в этом случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ называется абсолютно сходящимся.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ сходится, то есть, сходится последовательность частных сумм $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|c_k|$. Применим Критерий Коши сходимости последовательности частных сумм $\sigma_n,\ n\in\mathrm{N}$, в соответствии с которым для $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n>m>N(\varepsilon)$ справедливо: $|\sigma_n-\sigma_m|=|\sum_{k=m+1}^{n}|c_k||=\sum_{k=m+1}^{n}|c_k|<\varepsilon$. Однако при этом критерий Коши выполняется и для частных сумм $S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ исходного ряда, так как $|S_n-S_m|=|\sum_{k=m+1}^{n}c_k|\le\sum_{k=m+1}^{n}|c_k|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность частных сумм исходного ряда имеет предел, то есть, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ сходится.

Таким образом, если имеется знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, имеет смысл проверить возможность применения какого-либо признака сходимости к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$, и если условия сходимости выполняются, исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ сходится абсолютно.

П р и м е р. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha>1$.

Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Пусть члены положительной последовательности a_k, монотонно убывая, стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность четных частных сумм $s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - ...... + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$. Очевидно, что с ростом n значения s_{2n} возрастают. Теперь запишем эту же частную сумму в ином виде: $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ...... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Очевидно, что $s_{2n} < a_1$. Таким образом, мы имеем монотонно возрастающую ограниченную сверху последовательность s_{2n}. По одному из свойств последовательностей существует $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Итак, последовательность частных сумм с четными номерами имеет предел. Что же с нечетными частными суммами?

Так как $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, то существует $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s$. Следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

П р и м е р. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$ сходится по признаку Лейбница при любом $\alpha > 0$. В предыдущем примере, опираясь на интегральный признак, мы показали, что этот ряд при $\alpha > 1$ сходится абсолютно. При $0 < \alpha \le 1$ ряд не может абсолютно сходиться. Но он сходится по признаку Лейбница.

Ряд, сходящийся, но не сходящийся абсолютно, называется **условно сходящимся**.

Функциональные ряды

Пусть $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in M$, – последовательность функций, заданных на одном и том же множестве, причем при каждом значении $x_0 \in M$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится. Тогда мы можем рассматривать функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ на множестве M и исследовать свойства функции $s(x)$ – суммы ряда – на том же множестве M.

В связи с вопросами сходимости функциональных рядов отметим

следующий из теоремы сравнения **мажорантный признак** сходимости

функционального ряда: если $\exists a_n > 0$ тчо $\forall x \in M,\ \forall n \in \mathrm{N}\ (|f_n(x)| \leq a_n)$ и ряд с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ абсолютно сходится на множестве M.

П р и м е р. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ сходится при любом значении переменной x, так как мажорирующим рядом для него является сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Степенные ряды

Простейшим примером функционального ряда является степенной ряд – ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$. Числа $c_k,\ k = 0,1,...$, называются коэффициентами степенного ряда. Поскольку простой заменой переменной $\tilde{x} = x - a$ исходный степенной ряд превращается в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \tilde{x}^k$, мы будем рассматривать только степенные ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Очевидно, что такой ряд обязательно сходится в точке $x = 0$. Ответом на вопрос об области сходимости степенного ряда дает

Теорема Абеля. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится в точке $x = x_1$, тогда он сходится, причем абсолютно, при $\forall x,\ |x| < |x_1|$.

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ расходится в точке $x = x_2$, тогда он расходится при $\forall x,\ |x| > |x_2|$.

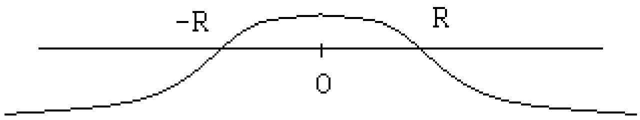
Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то общий член этого ряда стремится к нулю, и значит, ограничен, то есть, $\exists M > 0$ тчо $|c_k x_1^k| \le M$.

Пусть $|x| < |x_1|$ тогда $|c_k x^k| \le M \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$ сходится, то по теореме сравнения абсолютно сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$.

Так как $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_2^k$ расходится, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ не может сходиться ни при каких значениях x, $|x| > |x_2|$, так как в противном случае он бы сходился, в

соответствии с доказанной частью теоремы, и при $x = x_2$.

Из теоремы Абеля следует, в частности, что область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ представляет собой некоторый интервал $(-R, R)$, а область расходимости – внешность этого интервала. Что касается двух точек $x = \pm R$, являющихся границами этого интервала, то сходимость или расходимость ряда в этих точках следует проверять для каждой функции индивидуально.



Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда.

Способы определения радиуса сходимости степенного ряда

1. В соответствии с признаком Даламбера если $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x|}{|c_n|} < 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x|}{|c_n|} > 1$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ расходится. Следовательно, при $|x| = R$ имеем: $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}| R}{|c_n|} = 1$ или $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

2. Аналогично используя признак Коши, получим $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

П р и м е р 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$. Найдем радиус сходимости. Здесь $c_n=\dfrac{1}{n^p}$. Следовательно, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p}{n^p}=1$.

Проверим сходимость в точке $x=1$. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, который сходится, если $p>1$ и расходится, если $p\le 1$.

Проверим сходимость в точке $x=-1$. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$, который сходится, если $p>0$ и расходится, если $p\le 0$.

Замечание. Внутри интервала сходимости ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз. Это значит, что если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k=s(x),\ |x|<R$, то 1) $\int\limits_a^b s(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\int\limits_a^b x^k dx,\ |a|,|b|<R$,

2) $(s(x))^{(m)}=\sum\limits_{k=m}^{\infty}c_k(x^k)^{(m)},\ |x|<R$.

Связь между коэффициентами степенного ряда и его суммой

Итак, пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k=s(x),\ |x|<R$. Положим $x=0$, тогда получим: $c_0=s(0)$.

Возьмем производную от членов ряда и его суммы: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k kx^{k-1}=s'(x),\ |x|<R,$ и положим $x=0$. Тогда $c_1=s'(0)$. Продолжая процесс дифференцирования, получим: $n!c_n=s^{(n)}(0)$.

То есть, $c_n=\dfrac{s^{(n)}(0)}{n!}$. Таким образом, коэффициенты степенного ряда являются **коэффициентами формулы Тейлора** для суммы ряда.

Поставим вопросы: если для произвольной функции $f(x)$, имеющей бесконечное число производных в точке $x=0$ построить ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, называемый **рядом Тейлора** функции $f(x)$, то 1) где он будет сходиться, и

2) если будет сходиться, то будет ли сходиться к самой функции $f(x)$?

Ответы на поставленные вопросы.

1) Так как ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ – это степенной ряд, то для него обычным образом можно находить радиус и интервал сходимости. То есть, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$.

2) Так как частная сумма ряда Тейлора – это полином из формулы Тейлора $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, то разность между частной суммой и функцией $f(x)$ согласно формуле Тейлора есть остаточный член формулы Тейлора. Мы его

рассматривали в форме Лагранжа: $r_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ 0<\theta<1$. Таким образом, если внутри интервала сходимости остаточный член формулы

Тейлора стремится к нулю с ростом n, то сумма ряда Тейлора совпадает с

исходной функцией, по которой построен ряд. И тогда говорят, что

функция $f(x)$ представима в виде ряда Тейлора, то есть

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Примеры разложения функций в ряды Тейлора

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. В соответствии с формулой Тейлора

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

где $|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Сосчитаем радиус сходимости степенного ряда.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Таким образом, этот ряд сходится во всех точках вещественной оси.

Для того, чтобы выяснить, будет ли сходиться ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ к функции e^x, заметим, что при любом значении $x \in \mathrm{R}$ имеем $|r_n(x)| \le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ при всех $x \in \mathrm{R}$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. В соответствии с формулой Тейлора

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + r_n(x),$$

где $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. То есть, $R = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \infty$ и $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ при всех $x \in \mathrm{R}$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. В соответствии с формулой Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_n(x),$$

где $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$. То есть, $R = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \infty$ и $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ при всех $x \in \mathrm{R}$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. В соответствии с формулой Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + r_n(x),$$

где $|r_n(x)| = \dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$, $0<\theta<1$. Сосчитаем радиус сходимости этого ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. Форма Лагранжа остаточного члена здесь годится только для $x>0$. В этом случае $|r_n(x)| < \dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, и для $0<x<1$ имеем $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Другая форма остаточного члена для

$0>x>-1$ приводит к подобному результату. Поэтому для $|x|<1$

справедливо представление $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. В соответствии с

формулой Тейлора $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)$.

Найдем радиус сходимости этого степенного ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right|=1$.

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α,

форма Лагранжа остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае имеем оценку: $|r_n(x)|\le\dfrac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$. Очевидно,

что при $0<x<1$ имеем $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Для отрицательных значений x применяем другую форму остаточного члена. В результате для $|x|<1$ справедливо представление $(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

Легко заметить, что полученная формула есть бесконечный аналог формулы

бинома Ньютона.

Примеры приложений рядов Тейлора

Представленные в предыдущем пункте канонические разложения могут служить основой для получения новых разложений. Так, положив $\alpha = -1$ и в последнем разложении, мы получим формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $(-q)$: $1 - q + q^2 + ... + (-q)^n + ... = \frac{1}{1+q}$. Заменив в этой формуле q на $(-q)$, получим:

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}.$$

Заменим в последней формуле q на $-t^2$, мы получим разложение

$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n, \quad |t| < 1$. Последний ряд имеет радиус сходимости, равный 1. Вспомним, что внутри интервала сходимости ряды можно интегрировать почленно и проинтегрируем обе части последнего равенства по t от 0 до $x, \quad |x| < 1$, тогда получим разложение: $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Выше, там, где мы говорили о функциях, не имеющих первообразной, выраженной через элементарные функции, был приведен пример функции $\frac{\sin t}{t}$. Благодаря простому разложению этой функции в ряд Тейлора, ее можно проинтегрировать по отрезку $[0, x]$ и получить новую функцию, называемую **интегральным синусом**: $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$.

Формула Эйлера

Разложения функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в ряды Тейлора, справедливые для всех вещественных x, оказываются такими же и в случае, когда x – комплексное число. Пусть $x = i \cdot t$, где i – мнимая единица, а t – вещественное число. Разложим $e^{i \cdot t}$ в ряд Тейлора:

$$e^{i \cdot t} = 1 + i \cdot t - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - i\frac{t^7}{7!} + ... = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ...) +$$
$$+ i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...) = \cos t \ + \ i \cdot \sin t.$$

Вот эта формула, выражающая связь между e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в случае комплексных переменных, и называется формулой Эйлера.

Тригонометрические ряды Фурье

В различных отраслях науки, в том числе, в физике приходится иметь дело с периодическими явлениями. Простейший пример – электрические колебания. Периодической называется функция $f(x)$, для которой существует такая величина T, называемая периодом, что $f(x) = f(x+T)$. Простейшими $T-$периодическими функциями являются тригонометрические функции вида $\sin\frac{2\pi kx}{T}, \cos\frac{2\pi kx}{T}$, где k – целое число, называемые **гармониками**. Представление периодической функции в виде суммы гармоник называется гармоническим анализом. В случае, когда такая сумма бесконечна, мы получаем тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

Итак, пусть непрерывная $T-$периодическая функция $f(x)$ представлена в виде тригонометрического ряда: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{T}$.

Возникает вопрос: как найти коэффициенты $a_0, a_k, b_k,\ k \in N$?

Воспользуемся тем, что гармоники обладают следующим свойством:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi kx}{T} dx = 0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2\pi kx}{T}dx = 0,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi lx}{T}\sin\frac{2\pi mx}{T}dx = 0,\ \forall l, m \in \mathrm{N},$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi lx}{T}\cos\frac{2\pi mx}{T}dx = 0,\ \forall l, m \in \mathrm{N},\ l \neq m,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2\pi lx}{T}\sin\frac{2\pi mx}{T}dx = 0,\ \forall l, m \in \mathrm{N},\ l \neq m,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\frac{2\pi lx}{T}dx = \frac{T}{2},$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\frac{2\pi lx}{T}dx = \frac{T}{2}.$$

Теперь для того, чтобы, например, найти a_m умножим обе части равенства $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{T}$ на $\cos\frac{2\pi mx}{T}$ и проинтегрируем на отрезке $[-T/2, T/2]$. С учетом свойств гармоник в правой части равенства останется только слагаемое $a_m\frac{2}{T}$, а в левой части – выражение $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi mx}{T}dx$. Отсюда мы получим a_m.

Умножая на $\sin\frac{2\pi mx}{T}$ и интегрируя, получим b_m.

А для того, чтобы получить a_0, нужно просто проинтегрировать обе части равенства $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{T}$ на отрезке $[-T/2, T/2]$.

Таким образом, непрерывная периодическая функция $f(x)$ представима в виде следующего тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{T},$$ где

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{T}dx,\ \ k = 0, 1, 2, ...,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{T}dx,\ \ k = 1, 2, ...$$

Заметим, что в случае, когда $f(x)$ четная на отрезке $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, коэффициенты при синусах обратятся в ноль. Если $f(x)$ нечетная на отрезке $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, исчезнут коэффициенты при косинусах и свободный член.

В случае, когда периодическая функция имеет **точки разрыва**, ее также можно раскладывать в ряд Фурье, но равенство функции и суммы ряда будет только в точках непрерывности функции. В точках разрыва ряд Фурье будет сходиться к полусумме значений функции слева и справа от точки разрыва: $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k x_0}{T}+b_k \sin\frac{2\pi k x_0}{T}=\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.

Возможно разложение функции в ряд Фурье с помощью MAXIMы. Мы получим все коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T-периодически продолженной на всю вещественную ось, если введем **load(fourie); fourier*(f(x),x,t)*** и нажмем Shift+Enter**.**

П р и м е р. Получим коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)=e^x, -\pi\le x<\pi$. Для этого введем **load(fourie); fourier(%e^x,x,%pi),** нажмем Shift+Enter и получим

$$a_0=(e^{\pi} - e^{-\pi})/\pi,$$

$$a_n=(n\sin\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}n\sin\pi n/(n^2+1)-$$
$$-\cos\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}\cos\pi n/(n^2+1))/\pi,$$

$$b_n=(\sin\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}\pi\sin\pi n/(n^2+1)-$$
$$-n\cos\pi n/(e^{\pi}n^2+e^{\pi})+e^{\pi}n\cos\pi n/(n^2+1))/\pi.$$

Мы видим, что коэффициенты содержат выражения $\sin\pi n=0$ и $\cos\pi n=(-1)^n$. Поэтому преобразуем коэффициенты:

$$a_0=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(\frac{1}{e^{\pi}(n^2+1)}-\frac{e^{\pi}}{(n^2+1)}),$$

$$b_n=\frac{(-1)^n n}{\pi}(-\frac{1}{e^{\pi}(n^2+1)}+\frac{e^{\pi}}{(n^2+1)}).$$

Для того, чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T – периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует
ввести **load(fourie); totalfourier (*f(x),x,T*)** и нажать Shift+Enter**.**

П р и м е р. Для разложения в ряд Фурье функции из предыдущего примера введем **load(fourie); totalfourier (%e^x, x, %pi).** При этом получим разложение

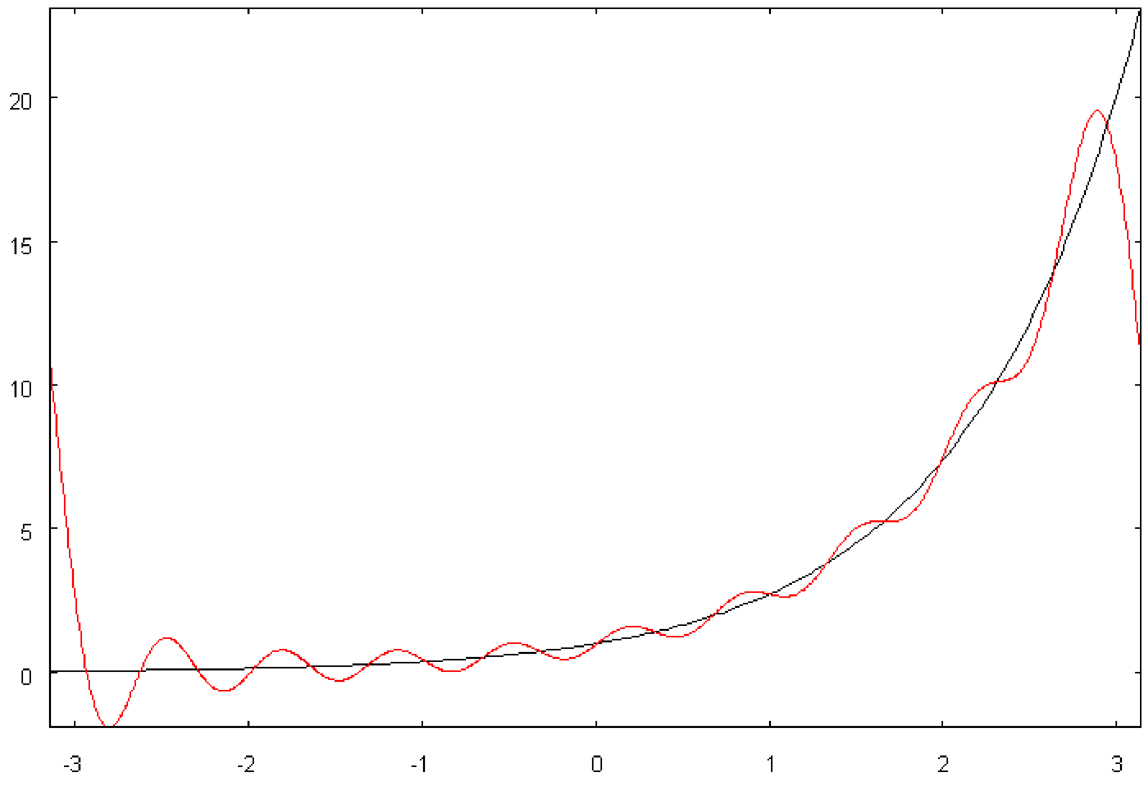
$$-\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n\sin nx}{n^2+1}}{\pi}+\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1}}{\pi}+$$

$$+\frac{e^{-\pi}(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)}{2\pi}.$$

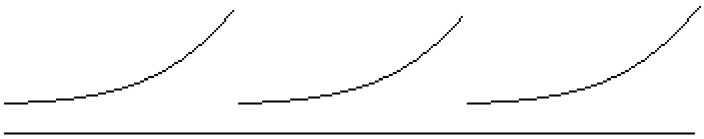
Следует отметить, что частные суммы ряда Фурье приближают исходную функцию не в конкретных точках, а «в среднем по отрезку». Сравним заданную функцию $y=e^x$, $-\pi\le x\le\pi$, и 9-ю частную сумму ряда Фурье на одном графике. Для этого сначала введем функцию $g(x)$, совпадающую с 9-й частной суммой, а затем нарисуем функцию e^x (черным цветом) и функцию $g(x)$ (красным цветом) на одном графике над отрезком $[-\pi,\pi]$:

g(x):=-(%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1)*sum((n*(-1)^n*sin(n*x))/(n^2+1),n,1,9))/%pi+(%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1)*sum(((-1)^n*cos(n*x))/(n^2+1),n,1,9))/%pi+(%e^(-%pi)*(%e^%pi-1)*(%e^%pi+1))/(2*%pi);
load(draw); draw2d(explicit(%e^x,x,-%pi,%pi), color=red, explicit(g(x),x,-%pi,%pi)).

В результате получим картину



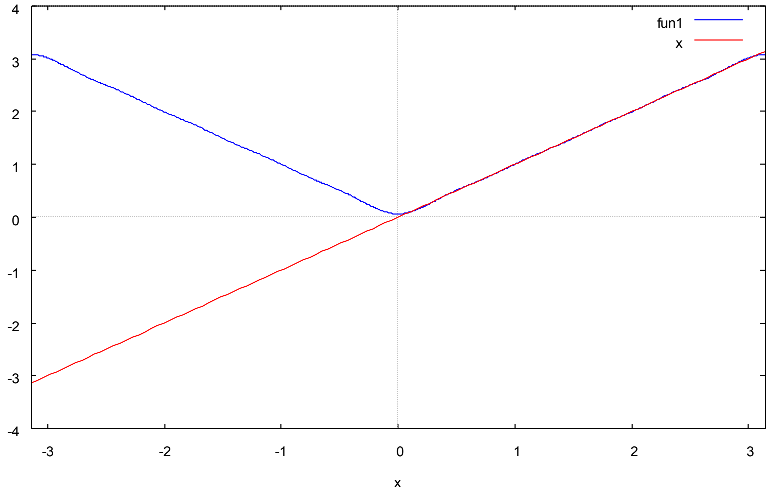
Здесь видно, что в конечных точках отрезка, где функция $y=e^x$, $-\pi \le x \le \pi$, при периодическом продолжении с отрезка $[-\pi,\pi]$ в другие точки вещественной оси терпит разрыв, график частной суммы ряда Фурье (красная линия) значительно отличается от графика экспоненциальной функции. Если брать частную сумму с большим количеством членов, то график частной суммы будет теснее приближаться к исходной функции во внутренних точках интервала $(-\pi,\pi)$, но вблизи точек $x=\pm\pi$ поведение будет тем же из-за разрыва исходной функции при периодическом продолжении.



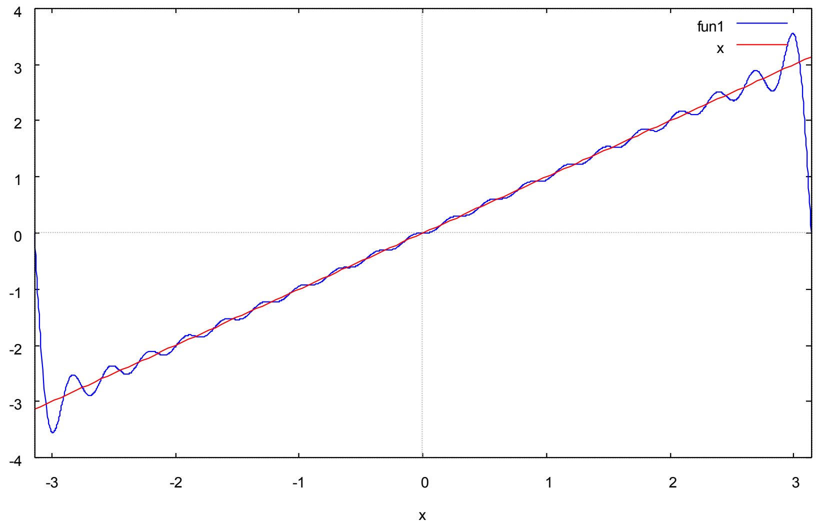
Мы видим, что если задать функцию на симметричном интервале $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, автоматически продолжает исходную функцию $T-$периодически на всю вещественную ось. Оказывается, можно задать функцию на полуинтервале $[0,\frac{T}{2})$, продолжить ее четным или нечетным образом на симметричный полуинтервал $(-\frac{T}{2},0]$ и уже затем продолжить полученную на интервале $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ четную или нечетную функцию $T-$периодически на всю вещественную ось. Для этого следует применить **разложение в ряд Фурье по косинусам или по синусам**, соответственно.

П р и м е р. Зададим на интервале $[0,\pi)$ функцию $y=x$.

Разложим функцию в ряд по косинусам с помощью MAXIM-ы. Для этого применим команду **load(fourie); fourcos (x, x, %pi).** Мы получим коэффициенты $a_0=\frac{\pi}{2}$ и $a_n=\frac{2(\cos(\pi n)-1)}{\pi n^2}$. График частной суммы ряда на интервале $(-\pi,\pi)$ до 10-го члена получим по команде **plot2d(%pi/2+ sum((2*(cos(%pi*n)/n^2-1/n^2))/%pi*cos(n*x),n,1,10),[x,-%pi,%pi]).**



Здесь синяя линия – ряд Фурье по косинусам, красная – исходная функция. Разложим функцию в ряд по синусам по команде **load(fourie); foursin(x,x,%pi).** Коэффициенты ряда имеют вид $b_n = -\frac{2}{n}\cos(\pi n)$. Очевидно, что частные суммы соответствующего ряда сходятся медленнее, чем частные суммы в предыдущем случае. График частной суммы ряда на интервале $(-\pi, \pi)$ до 20-го члена получим по команде **plot2d(sum((2*(-cos(%pi*n)/n)) *sin(n*x),n,1,20),[x,-%pi,%pi])**.



Здесь синяя линия – ряд Фурье по синусам, красная – исходная функция.