

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Б. Мазо

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ
РАСЧЕТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ**

Учебное пособие



**КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2013**

УДК 536.25(075.8)

ББК 22.317я73

М 13

*Печатается по рекомендации учебно-методического совета
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета*

Рецензент –

доктор физико-математических наук, профессор **В.Л. Федаев**

Мазо А.Б.

М 13 Основы теории и методы расчета теплопередачи: учебное пособие / А.Б. Мазо – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 144 с.

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций и лабораторных занятий для студентов старших курсов и магистров Института математики и механики Казанского университета. В Представлены теоретические основы инженерных методов расчета тепловых процессов; рассматриваются и более сложные задачи конвективного теплообмена, в том числе задачи термоконвекции, плавления – кристаллизации, испарения – конденсации.

Большое внимание уделено методам решения задач теплообмена. Студенты получают аналитические решения простейших задач, знакомятся с приемами построения автомодельных решений, а также численными методами решения нелинейных задач конвективного теплообмена.

Пособие может быть полезно также аспирантам, научным работникам и инженерам соответствующих специальностей.

УДК 536.25(075.8)

ББК 22.317я73

© Мазо А.Б., 2013

© Казанский университет, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Теплопередача как наука – это учение о распространении тепла, т.е. об обмене внутренней энергией между отдельными частями сплошной среды.

Теплопередача имеет обширные приложения во всех сферах деятельности человека. Перечислим некоторые из них.

Энергетика (тепловые и атомные электростанции), теплотехника (теплообменные аппараты химической промышленности, градирни), металлургия и сварка, машиностроение (системы охлаждения двигателей), военное дело (взрывы, горение); строительство (теплоснабжение и вентиляция); аэрокосмическая область (тепловая защита, двигатели). Методы теплопередачи применяются и при исследовании природных явлений (климат, ледники и льды, реки, озера, океаны, вулканы, пожары).

Теплопередача – базовый курс инженерных и теплотехнических специальностей, важная часть механики.

Перенос тепла осуществляется тремя основными способами:

Теплопроводность – молекулярный перенос тепла между частями среды. Возникает, когда температура частей различна.

Конвекция – перенос тепла вместе с перемещением объемов жидкости или газа (текучая среда) между по-разному нагретыми областями.

3. *Излучение* (радиация) – распространение тепла в виде электромагнитных волн. Обусловлено только температурой и оптическими свойствами среды. Внутренняя энергия одного тела превращается в лучистую энергию, переносится в виде волн и поглощается другим телом, т.е. наоборот лучистая энергия превращается во внутреннюю.

Обычно конвекция всегда сопровождается теплопроводностью. Говорят о *конвективном теплообмене*.

В теплотехнических устройствах происходит *конвективный теплообмен* между потоками жидкости или газа с твердой поверхностью (например, стенкой трубы). Это называется *теплоотдачей*.

Если присутствуют все три механизма, говорят о *радиационно-конвективном теплообмене*.

В технике часто рассматривают тепловое взаимодействие двух жидкостей (газов), разделенных стенкой. Это – *теплопередача*.

Многие процессы теплообмена сопровождаются переносом вещества. Например, это испарение воды и конденсация пара из паровоздушной смеси. Тогда говорят о *конвективном массообмене*. Как правило, такие процессы являются *многофазными*, т.е. в объеме одновременно находятся различные фазы одного вещества (вода, пар, капли) или разные вещества (водяной пар, воздух).

В данном учебном пособии изучаются первые два механизма теплопередачи, рассматриваются типичные задачи теплопроводности и конвективного, излагаются основы математического моделирования неизоотермических процессов в механике и методы численного решения возникающих при этом задач.

Глава 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теплопроводность сплошной среды – это её способность передавать тепло благодаря микродвижению молекул, без макроскопических движений вещества. Теплопроводностью в той или иной мере обладают все вещества: газы, жидкости, твердые тела.

Мы будем использовать феноменологический подход к изучению явлений теплопроводности, согласно которому устанавливаются общие соотношения между макропараметрами процесса, исходя из общих законов сохранения энергии и опыта. В качестве альтернативы укажем на статистический подход, который основан на детальном изучении микроструктуры вещества (молекулы, ионы, электроны) и дальнейшем выводе макросоотношений с помощью осреднения.

1.1. Основные понятия теории теплопроводности.

Как показывает опыт, передача тепла теплопроводностью возникает в неподвижной среде только в случае неравномерном нагреве ее частей. Тепловой поток при этом течет от горячей части к более холодной, что приводит к выравниванию температуры и как результат – к прекращению потока тепла. Степень нагрева микрообъема среды с центром в точке x, y, z в момент времени t называется мгновенной *температурой* среды в этой точке. В соответствии с феноменологическим подходом, температура – величина относительная, т.е. её значение может быть измерено лишь в сравнении с другой температурой. Этим объясняется наличие различных температурных шкал: Цельсия, Кельвина, Фаренгейта. В шкале Цельсия температура плавления льда при нормальном давлении принята за ноль, а температура кипения – за 100 градусов. В си-

стеме СИ (System International) температура измеряется в градусах Кельвина.

Температурное поле $T(x, y, z, t)$ – это совокупность значений температуры во всех точках пространства и времени. Если $\partial T / \partial t = 0$, то имеем стационарное температурное поле $T(x, y, z)$. Если по одной или двум координатам температура не меняется, имеем двумерное $T(x, y, t)$ или одномерное $T(x, t)$ поле температуры. В каждый момент времени t двумерное температурное поле изображают в виде карты изотерм $T(x, y) = const$. Одномерное поле изображается графиком $T = T(x)$.

Температурный градиент. Если объединить точки среды, имеющие одинаковую мгновенную температуру, получим семейство поверхностей (в двумерном случае – линий) – изотермы $T = const$. Т.к. одна точка среды в один момент t не может иметь разных температур, изотермические поверхности не пересекаются. Температура тела изменяется только в направлениях, пересекающих изотермы. Наибольшая скорость изменения T происходит в направлении, ортогональном изотермам. Это направление роста температуры задается вектором $grad T = (\partial T / \partial x, \partial T / \partial y, \partial T / \partial z)$.

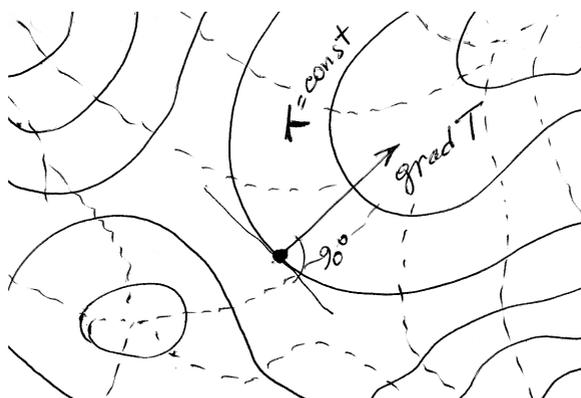


Рис. 1.1. Изотермы, градиент температуры и линии теплового потока

Тепловой поток. Если взять площадку dF , m^2 и сосчитать количество тепла, проходящее через нее по нормали за время dt , получится dQ , Дж. Согласно опытному закону Фурье

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \quad (1.1)$$

Здесь λ , Вт/(м К) – коэффициент пропорциональности, называемый *теплопроводностью* среды. Знак минус выбран для того, чтобы положительным был поток в направлении от горячего к холодному. Обычно удобнее оперировать с *плотностью теплового потока*

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} T, \quad \text{Вт}/m^2 \quad (1.2)$$

и именно формулу (1.2) называть законом Фурье. Оказалось, что коэффициент теплопроводности λ является свойством среды (материала), в которой распространяется тепло.

Линии, совпадающие по направлению с вектором \vec{q} , очевидно, ортогональны изотермам и называются линиями теплового потока. Ком-

поненты вектора плотности теплового потока в декартовой системе координат выражаются формулами

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Для изотропной однородной среды $\lambda = const$; если среда неоднородна, то ее теплопроводность зависит от координат, $\lambda = \lambda(x, y, z)$, а в общем случае *анизотропии* неоднородной среды используют тензор теплопроводности

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

в котором $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x, y, z)$, $i \in \{x, y, z\}$. Физически λ_{ij} означает теплопроводность среды в направлении i при температурном напоре в направлении j . Закон Фурье (1.2) для анизотропной среды имеет вид

$$\vec{q} = -\Lambda \text{grad} T, \quad q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

1.2. Теплопроводность различных материалов

Коэффициент теплопроводности определяется в экспериментах с образцами среды на основе замеров теплового потока и градиента температуры. Используется формула (1.2) в виде

$$\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad} T|}. \quad (1.4)$$

Диапазон значений коэффициента теплопроводности – от 0.0015 Вт/(м К) для газов, до 0.15 Вт/(м К) для жидкостей и до 150 для некоторых металлов Вт/(м К). Порядок значений λ для различных веществ приведен на рис. 2.

Теплопроводность газов

Механизм передачи тепла теплопроводностью в газах – броуновское движение молекул; при этом надо обеспечить отсутствие конвективных потоков.

Из молекулярной физики известно, что $\lambda = \nu c l \rho / 3$, где ν – средняя скорость движения молекул, l – длина свободного пробега молекул газа до столкновения с другой молекулой, c и ρ – теплоёмкость и плотность газа.

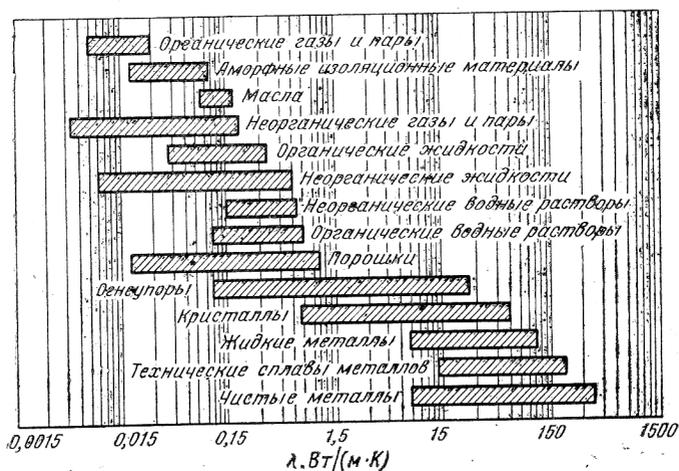


Рис. 2. Порядок величины коэффициента теплопроводности для различных материалов

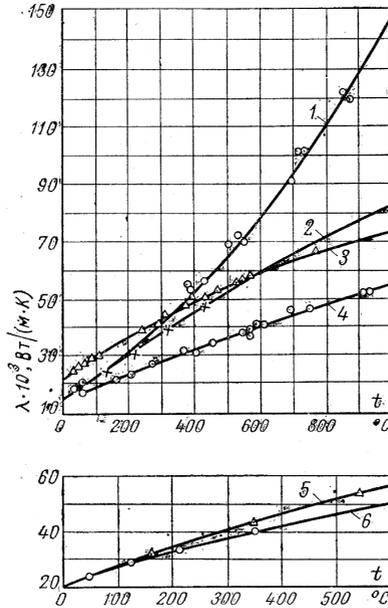


Рис. 1.3. Теплопроводность газов. 1 – водяной пар; 2 – двуокись азота; 3 – воздух; 4 – аргон; 5 – кислород; 6 – азот.

Теплопроводность газов слабо зависит от давления p , поскольку с ростом p увеличивается плотность ρ , но уменьшается длина свободного пробега l , так что их произведение сохраняется примерно постоянным. Это справедливо в интервале давлений от 10^3 до 10^9 Па. Коэффициент λ растет с ростом температуры, поскольку средняя скорость движения молекул v при этом возрастает примерно как квадратный корень из T . Для водяного пара теплопроводность равна 0.01 при 0 градусов Цельсия и возрастает до 0.1 при 700 градусов Цельсия.

Как видно из рис. 1.3, зависимость $\lambda(T)$ для разных газов, вообще говоря, нелинейна, однако на практике обычно используют линейное представление вида

$$\lambda(T) = \lambda_0 [1 + \beta(T - T_0)], \quad \lambda_0 \equiv \lambda(T_0), \quad (1.5)$$

в котором параметр β определяется из опыта.

Теплопроводность жидкостей

Механизм теплопроводности в жидкости – это перенос энергии путем упругих колебаний. Из молекулярной физики известно, что для жидкостей теплопроводность пропорциональна плотности, $\lambda \sim \rho$. Плотность жидкостей, как правило, падает с ростом температуры, поэтому и теплопроводность λ убывает с ростом T . Исключения составляют вода и глицерин. Диапазон изменения теплопроводности λ жидкостей от 0.1 Вт/(мК) для вазелинового масла, 0.2 Вт/(мК) для спирта, 0.6 Вт/(мК) для воды.

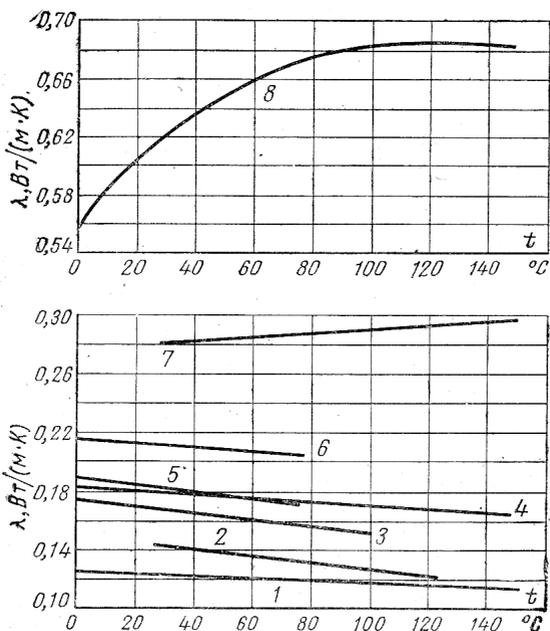


Рис. 1.4. Теплопроводность жидкостей. 1 – вазелиновое масло; 2 – бензол; 3 – ацетон; 4 – касторовое масло; 5 – спирт этиловый; 6 – спирт метиловый; 7 – глицериновое масло; 8 - вода.

Теплопроводность твердых тел

В металлах основным передатчиком тепла являются свободные электроны. Двигаясь, они выравнивают температуру во всех точках тела. Для большинства металлов λ убывает с ростом температуры, даже для чистых металлов, а при наличии примесей – особенно резко. Это объясняется тем, что с ростом T и при наличии примесей растет число структурных неоднородностей, которые приводят к рассеиванию электронов. Например, для чистой меди $\lambda = 396 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, а для той же меди со следами мышьяка $\lambda = 142 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. У сплавов (латунь), наоборот, λ слабо растет с температурой.

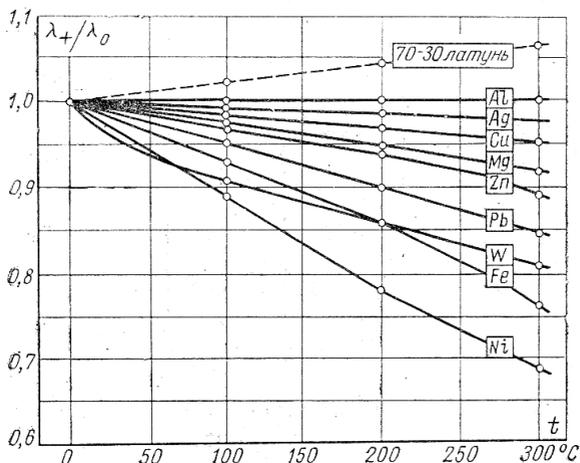


Рис. 1.5. Относительная теплопроводность некоторых чистых металлов в зависимости от температуры

У твердых диэлектриков теплопроводность λ растет с температурой. Обычно, чем выше плотность материала, тем выше и его теплопроводность.

У пористых материалов λ сильно зависит от пористости и влажности. То же относится к порошкам и другим строительным материалам. Дело в том, что при значительных температурных нагрузках во влажных пористых средах (кирпич, бетон и др.) происходит и конвекция, и излучение. Так что вообще применимость закона Фурье к таким средам не очевидна.

Пример: для сухого кирпича $\lambda = 0.35$ Вт/(м К), для воды $\lambda = 0.6$ Вт/(м К), а для влажного кирпича $\lambda = 1.0$ Вт/(м К). Это явно говорит о наличии конвективного переноса тепла внутри кирпича.

Материалы, у которых $\lambda < 0.25$ Вт/(м К), обычно используют для теплоизоляции.

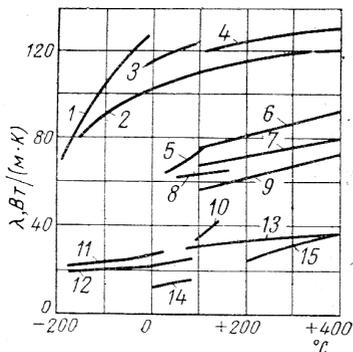


Рис. 1.6. Теплопроводность сплавов. 1 – латунь 18; 2 – латунь 30; 3 – латунь 12; 4 – никром; 5 – бронза; 6 – марганцовистая бронза; 7 – орудийная бронза; 8 – сплав олова и цинка; 9 – фосфористая бронза; 10 – белый металл; 11 – константин; 12 – монель-металл; 13 – марганцин; 14 – никелевая сталь; 15 – жидкий сплав олова с цинком.

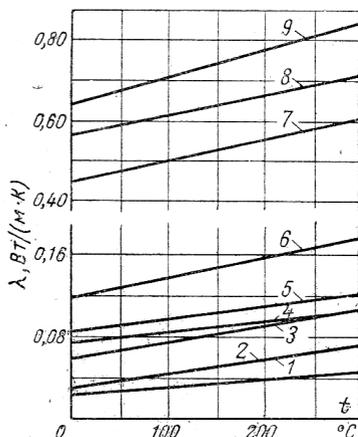


Рис. 1.7. Теплопроводность строительных и теплоизоляционных материалов. 1 – воздух; 2 – минеральная вата; 3 – шлаковая вата; 4 – ньювель; 5 – совелит; 6 – диатомитовый кирпич; 7 – красный кирпич; 8 – шлакобетонный кирпич; 9 – шамотный кирпич.

1.3. Классическое уравнение теплопроводности

Выберем бесконечно малый объем $dV = dx dy dz$, рассмотрим баланс тепловой энергии за время dt . Теплосодержание изменилось на величину $c\rho dT dV$, внутри выделилось тепло $f dV dt$ (f – объемная плотность внутренних источников, например индукционного нагрева, Вт/м³; c – теплоемкость, Дж/(кг К)).

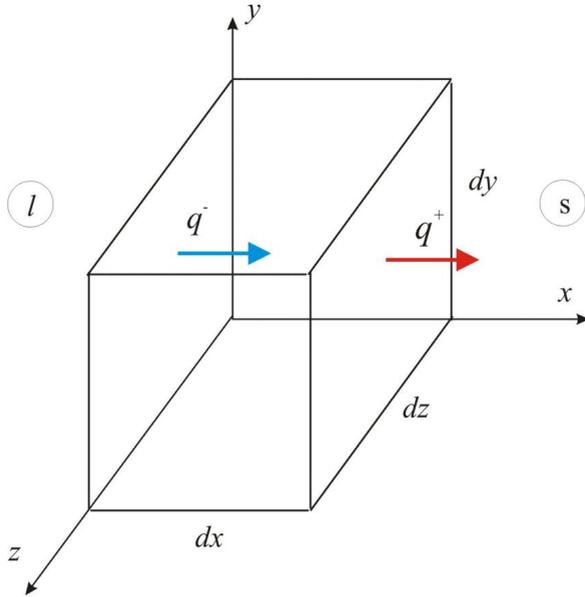


Рис. 1.8. К выводу уравнения теплопроводности

А через грани за это время поступило в объём и ушло из него тепло

$$\begin{aligned}
 & q_x(x)dydzdt - q_x(x-dx)dydzdt + \\
 & + q_y(y)dx dz dt - q_y(y-dy)dx dz dt + \\
 & + q_z(z)dx dy dt - q_z(z-dz)dx dy dt
 \end{aligned}$$

Если все сложить, разделить на $dt dV$, то в пределе при $dt \rightarrow 0$, $dV \rightarrow 0$ получим уравнение баланса тепловой энергии

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + f. \quad (1.6)$$

Если вставить сюда закон Фурье (2), то получим уравнение

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + f, \quad \vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

или

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f . \quad (1.7)$$

Если $\lambda = \text{const}$, удобно ввести в рассмотрение температуропроводность материала

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \frac{\text{м}^2}{\text{с}} . \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.7) упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \frac{f}{c\rho}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{f}{c\rho} . \quad (1.9)$$

При моделировании теплопередачи рассматриваются различные варианты уравнений (1.7) или (1.9). Например, однородное уравнение (без источников, когда $f = 0$), теплопроводность в анизотропной среде, когда $\lambda = \Lambda$ - матрица (1.3), а также стационарное уравнение Пуассона или Лапласа для стационарных процессов, когда $\partial T / \partial t = 0$. Кроме того, часто применяются двумерные или одномерные уравнения. В простейшем случае одномерной стационарной однородной изотропной теплопроводности имеем уравнение

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad T(0) = T_0, \quad T(l) = T_1,$$

решение которого дает линейное распределение температуры $T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)x/l$ и не зависит от теплофизических свойств c, ρ, λ материала.

1.4. Уравнение теплопроводности в энтальпийной форме

Вводится удельная энтальпия (теплосодержание) $h(T)$, Дж/кг. Это такая функция, что ее производная по температуре равна теплоемкости: $dh/dT = c$. Более строго, последнее равенство является определением теплоемкости. Тогда

$$\frac{\partial h(T)}{\partial t} = \frac{\partial h(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t},$$

и уравнение (7) можно переписать в виде

$$\rho \frac{\partial h(T)}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + f.$$

В линейном случае $h = cT$, и уравнение (1.7) сохраняет свой вид. Однако бывают более сложные нелинейные зависимости энтальпии от температуры, в том числе разрывные для задач с фазовыми превращениями (испарение-конденсация, плавление-кристаллизация). Например, двухфазная задача Стефана, описывающая плавление и кристаллизацию чистых веществ, характеризуется функцией энтальпии с разрывом:

$$h(T) = \begin{cases} cT & , \quad T < T_f \\ cT + L & , \quad T > T_f \end{cases}.$$

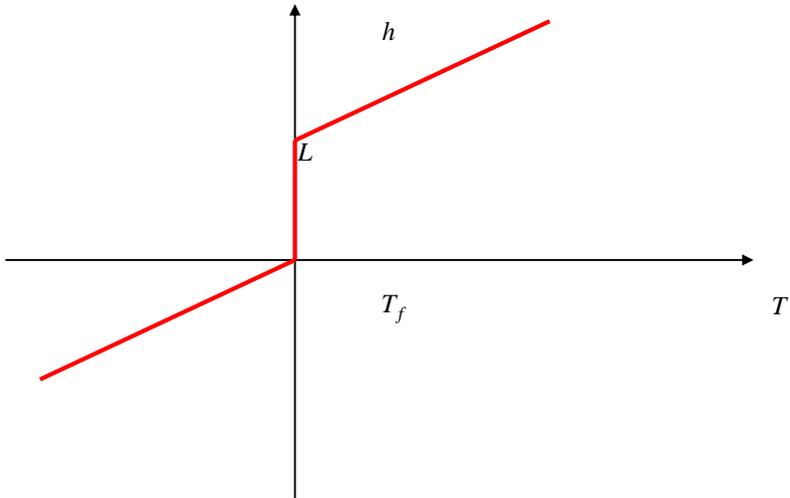


Рис. 1.9. Удельная энтальпия с фазовым переходом

Последнее определение можно записать с помощью функции Хевисайда \hat{h} :

$$h(T) = cT + Lh(T - T_f), \quad \dot{h}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь T_f – точка фазовых превращений (температура плавления-кристаллизации), L , Дж/кг – скрытая теплота плавления, которая поглощается при плавлении и выделяется при кристаллизации. В этом случае производная энтальпии в точке фазового перехода равна бесконечности, и

$$\frac{\partial h(T)}{\partial t} = \frac{\partial h(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = [c + L\delta(T - T_f)] \frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t}.$$

А уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho \tilde{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + f, \quad \tilde{C}(T) = c + L\delta(T - T_f).$$

Здесь использована символическая дельта-функция Дирака. Ее основные свойства таковы:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}, \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Таким образом, обобщенная теплоемкость \tilde{C} имеет вид

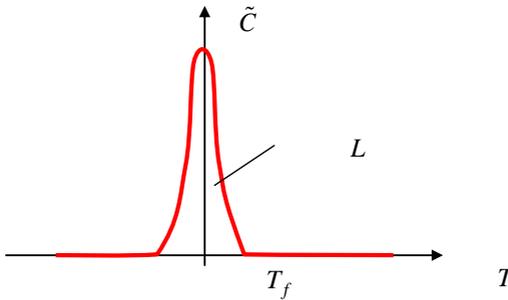


Рис. 1.10. Обобщенная теплоемкость с фазовым переходом

1.5. Граничные и начальные условия

Уравнение теплопроводности имеет бесконечное множество решений. Чтобы выделить единственное решение, надо задать краевые (начальные и граничные) условия. Начальное условие имеет вид

$$t = 0: T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z). \quad (1.10)$$

Граничные условия могут быть трех родов.

Условия первого рода, или граничное условие *Дирихле*. Задана температура на границе Γ .

$$x, y, z \in \Gamma: T(x, y, z, t) = T_\Gamma(x, y, z, t). \quad (1.11)$$

Условия второго рода, или граничное условие *Неймана*. Задана плотность теплового потока на границе Γ .

$$x, y, z \in \Gamma: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, z, t). \quad (1.12)$$

Размерность q – Вт/м². Здесь n – внешняя нормаль к границе. В частности, при $q = 0$ имеем условие теплоизоляции границы тела.

Условия третьего рода, или граничное условие *Ньютона – Рихмана*. Задан закон теплообмена с окружающей средой.

$$x, y, z \in \Gamma: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - T_c). \quad (1.13)$$

Важно понимать, что в этом случае $T|_\Gamma \neq T_c$. Коэффициент теплоотдачи α , Вт/(м²К) концентрирует в себе всю информацию о сложных процессах теплового контакта между телом и окружающей средой в пограничном слое. Дело в том, что на самом деле непосредственно на поверхности контакта тела с окружающей средой всегда справедливо равенство $T|_\Gamma = T_c$, а в условии (13) фигурирует температура за пределами пограничного слоя. Задача определения коэффициента теплоотдачи α –

одна из центральных в теории теплообмена. Граничные условия 1-го и 2-го рода следует рассматривать как идеализацию, за исключением некоторых случаев, типа сварочного источника.

1.6. Безразмерные переменные и подобие в задачах теплопроводности

Рассмотрим модельную двумерную задачу теплопроводности о нагреве тела D , представляющем собой прямоугольник $(0, L) \times (-H, H)$ с вырезанным кругом радиуса R . Расчетная область имеет двусвязную границу $\Gamma = \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup \gamma$, см. рис. 1.11.

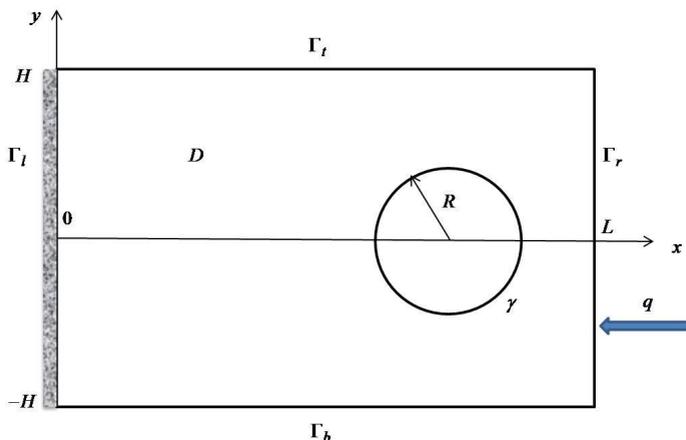


Рис. 1.11. Область расчета для модельной задачи теплопроводности

Температурное поле $T(x, y, t)$ в D удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + f, \quad x, y \in D, \quad t > 0, \quad (1.14)$$

где c - теплоёмкость, ρ - плотность, λ - теплопроводность материала; f - интенсивность внутренних источников тепла. В начальный момент

температура тела равна температуре T_0 окружающей среды. На внутренней границе γ (поверхность нагревателя – окружность радиуса R) поддерживается температура $T_h > T_0$; левая граница Γ_l ($x=0$) теплоизолирована; на правой границе Γ_r ($x=L$) задан тепловой поток q ; на нижней границе Γ_b ($y=-H$) и верхней Γ_t ($y=H$) границах происходит теплообмен с окружающей средой при заданном коэффициенте теплообмена α . Соответствующие краевые условия для уравнения (14) формулируются в виде

$$t=0: T(x, y) = T_0. \quad (1.15)$$

$$x, y \in \gamma: T = T_h; \quad (1.16)$$

$$x=0: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad x=L: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q; \quad (1.17)$$

$$y = \pm H: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - T_0). \quad (1.18)$$

Здесь n - внешняя к Γ нормаль. Для простоты будем считать, что параметры задачи - заданные константы. Поделив уравнение (1.14) на $c\rho$ и введя коэффициент температуропроводности $a = \lambda / (c\rho)$, получим уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{f}{c\rho}, \quad x, y \in D, \quad t > 0, \quad (1.19)$$

где Δ - оператор Лапласа. Далее, введем безразмерные переменные

$$\bar{x}, \bar{y} = \frac{x, y}{H}; \quad \bar{t} = \frac{ta}{H^2}; \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_h - T_0}; \quad \bar{f} = \frac{fH^2}{\lambda(T_h - T_0)}; \quad \bar{q} = \frac{qH}{\lambda(T_h - T_0)}. \quad (1.20)$$

Подставим (19) в (18) и получим уравнение теплопроводности в безразмерной форме (черта над безразмерными величинами опущена):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + f, \quad 0 < x < L, \quad -1 < y < 1, \quad t > 0, \quad (1.21)$$

Краевые условия (14) – (17) примут вид

$$t = 0: T(x, y) = 0. \quad (1.22)$$

$$x, y \in \gamma: T = 1; \quad (1.23)$$

$$x = 0: \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad x = L: \frac{\partial T}{\partial n} = q; \quad (1.24)$$

$$y = \pm 1: \frac{\partial T}{\partial n} = -\text{Bi } T. \quad (1.25)$$

Здесь $\text{Bi} = \alpha H / \lambda$ - критерий подобия теплообмена с окружающей средой, число Био. Безразмерные комплексы q, f характеризуют интенсивность внешних и внутренних источников тепла.

Постановка в безразмерных переменных значительно проще, чем исходная задача (1.14) - (1.18), поскольку содержит 5 безразмерных параметров L, R, f, q, Bi вместо 11 размерных параметров $L, H, R, \lambda, c, \rho, \alpha, q, f, T_0, T_h$. Кроме того, все величины в задаче (1.21) – (1.25) имеют порядок $O(1)$, что облегчает построение сеточных схем, расчетных алгоритмов и анализ результатов вычислительного эксперимента.

Задание 1. Решить задачу (1.21) – (1.25) методом конечных элементов. Использовать треугольные элементы с линейными базисными функциями. Применить чисто неявную схему. При записи интегрального тождества граничные условия Дирихле (1.23) аппроксимировать условиями 3-го рода (для симметрии матрицы)

$$x, y \in \gamma: \frac{\partial T}{\partial n} = -AT + A \cdot 1, \quad A = 10^6 \gg 1.$$

На каждом временном слое для решения алгебраической задачи использовать SOR или SSOR.

Что должно получиться? Ниже представлены результаты расчета при значениях параметров $L = 3, R = 0.3, f = 5, q = 1, \text{Bi} = 1$. Вместо однородного условия Неймана при $x = 0$ ставилось граничное условие Дирихле $T = 0$. Шаг схемы по времени $\tau = 10^{-3}$.

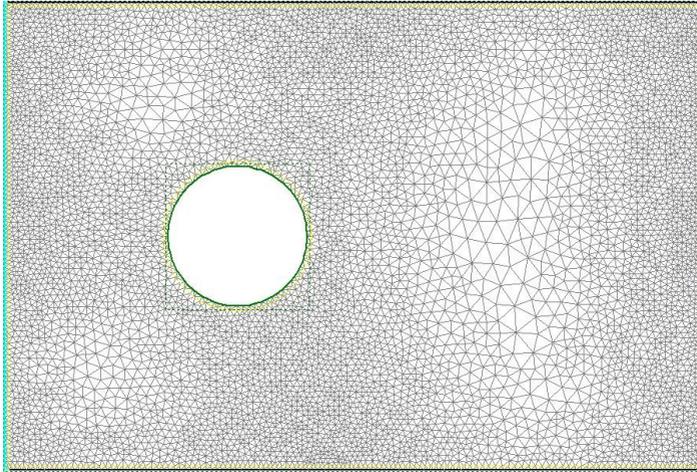


Рис. 1.12. Сетка МКЭ для задачи (1.21) – (1.25). 8000 узлов

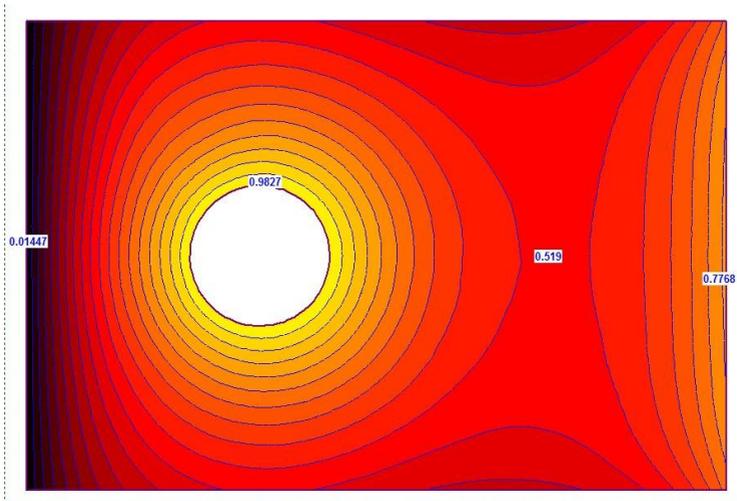


Рис. 1.13. Температурное поле на момент $t = 0.1$

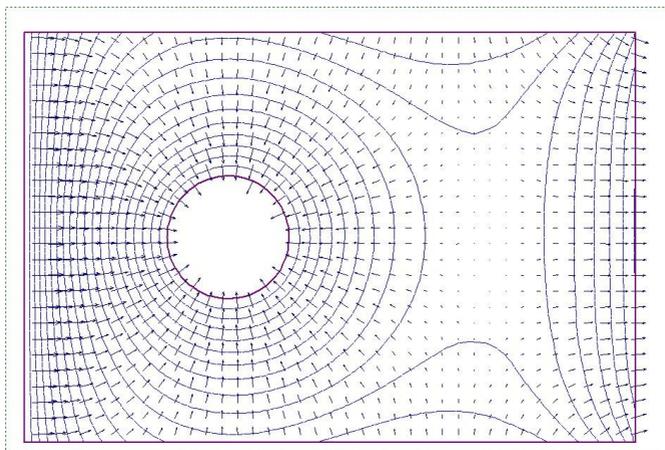


Рис. 1.14. Изотермы и направления теплового антипотока (стрелки).

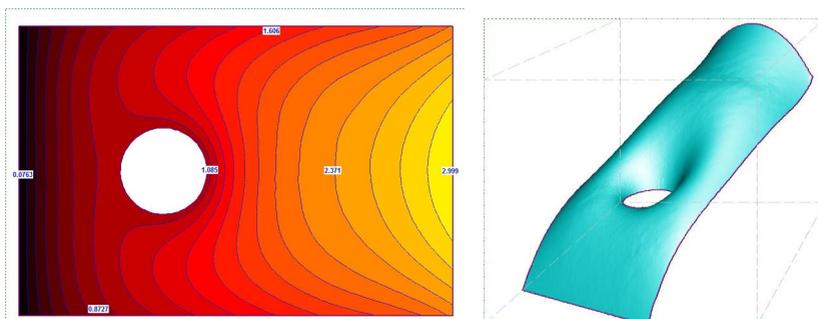


Рис. 1.15. Температурное поле при $t = 0.8$ в 2D и 2.5D представлении

1.7. Простейшие инженерные задачи теплопроводности

В настоящее время численное решение довольно сложных многомерных задач теплопроводности не вызывает принципиальных затруднений. Однако в ряде практических случаев полезно и достаточно уметь получить точное аналитическое решение простейших одномерных стационарных задач. Познакомимся с некоторыми из них.

1.7.1. Стационарная теплопередача через плоскую стенку

Постановка одномерной задачи Дирихле имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < \delta; \quad T(0) = T_0, \quad T(\delta) = T_1. \quad (1.26)$$

Общее решение этого уравнения – линейная функция $T(x) = kx + b$.

Подставляем ее в граничные условия и получаем

$$T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\delta} x, \quad \text{К.}$$

Плотность теплового потока равна

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{\delta} = -\lambda \frac{\Delta T}{\delta}, \quad \text{Вт/м}^2.$$

Здесь ΔT – температурный напор, К.

За время t через площадь F пройдет количество тепла

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\delta} Ft, \quad \text{Дж.}$$

Многослойная стенка состоит из N слоев, их толщины δ_i , а теплопроводности λ_i , $i = 1..N$.

Цель: определить тепловой поток q через стенку через граничные значения температуры T_0, T_N и построить график температуры в стенке.

Плотность теплового потока через каждый слой одинакова и равна q , а распределение температуры в пределах каждого слоя линейно. Обозначим через T_i температуру на правом конце i -го слоя, тогда

$$\begin{array}{ll} q = -\lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{\delta_1}; & q \frac{\delta_1}{\lambda_1} = T_0 - T_1; \\ q = -\lambda_2 \frac{T_2 - T_1}{\delta_2}; & \text{или} \quad q \frac{\delta_2}{\lambda_2} = T_1 - T_2; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ q = -\lambda_N \frac{T_N - T_{N-1}}{\delta_N}. & q \frac{\delta_N}{\lambda_N} = T_{N-1} - T_N. \end{array} \quad (1.26)$$

Если сложить все уравнения правой колонки, получим

$$q \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} = q \sum_{i=1}^N r_i = T_0 - T_N; \quad r_i = \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (1.27)$$

Здесь r_i , $\text{м}^2 \text{К} / \text{Вт}$ – термическое сопротивление i -го слоя. Обозначим через

$$R = \sum_{i=1}^N r_i = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

суммарное термическое сопротивление, или термическое сопротивление многослойной стенки. Тогда из (1.27) получим

$$q = \Delta T / R. \quad (1.28)$$

С другой стороны, по аналогии с однородной стенкой можем записать $q = \lambda_{\text{экв}} \Delta T / \delta$, где $\lambda_{\text{экв}}$ – эквивалентная теплопроводность многослойной стенки, а $\delta = \sum_{i=1}^N \delta_i$ – ее толщина. Сравнивая два выражения для плотности теплового потока, получим выражение для эквивалентной теплопроводности

$$\lambda_{\text{экв}} = \delta / R, \quad R = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (1.29)$$

Итак, зная толщины δ_i и теплопроводности λ_i слоев, легко найти их термические сопротивления $r_i = \delta_i / \lambda_i$ и полное сопротивление R . Далее, если заданы температуры T_0 и T_N на внешних границах, вычисляем температурный напор ΔT и по формуле (1.28) находим плотность теплового потока q . Зная q , из системы уравнений (1.26) легко последовательно найти значения температуры на границах раздела слоев:

$$T_0 = T(0); \quad T_1 = T_0 - qr_1; \quad T_2 = T_1 - qr_2; \quad \dots T_N = T(\delta) \quad (1.30)$$

Рассмотрим теперь задачу с граничными условиями Ньютона-Рихмана)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) &= \lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < \delta; \\
x = 0: q &= -\lambda \frac{dT}{dx} = -\alpha_0(T - T_0^{cp}); \\
x = \delta: q &= -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha_1(T - T_1^{cp});
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Из линейного вида решения уравнения (1.31) следует, что

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T(\delta) - T(0)}{\delta} = idem \tag{1.32}$$

Используя граничные условия (1.31) и выражение для плотности теплового потока (1.32), составляем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\alpha_0} &= -T_0 + T_0^{cp}; \\
\frac{q\delta}{\lambda} &= -T_1 + T_0; \\
\frac{q}{\alpha_1} &= T_1 - T_1^{cp}.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Если сложить все равенства (1.33), получим

$$\begin{aligned}
q\left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{\alpha_1}\right) &= T_1^{cp} - T_0^{cp}, \\
q = k(T_1^{cp} - T_0^{cp}), \quad k = \frac{1}{R}, \quad R &= \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{\alpha_1}\right).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь k – коэффициент теплопередачи. Как только по формуле (1.34) найден тепловой поток, с помощью (1.33) сразу определяются значения температуры двух поверхностей стенок:

$$T_0 = T_0^{cp} + \frac{q}{\alpha_0}, \quad T_1 = T_1^{cp} - \frac{q}{\alpha_1}. \tag{1.35}$$

Аналогично для *многослойной* плоской стенки имеем

$$q = k(T_1^{cp} - T_0^{cp}), \quad k = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\delta_i} + \frac{1}{\alpha_1}. \quad (1.36)$$

1.7.2. Теплопередача через цилиндрическую стенку

Постановка задачи Дирихле имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad r_0 < r < r_1 = r_0 + \delta; \quad (1.37)$$

$$T(r_0) = T_0, \quad T(r_1) = T_1.$$

Интегрируя уравнение (1.37), получим

$$r \frac{dT}{dr} = C_1, \quad dT = C_1 \frac{dr}{r} = C_1 d(\ln r)$$

Интегрируя, найдем общее решение

$$T = C_2 + C_1 \ln r \quad (1.38)$$

Подставим формулу (1.38) в граничные условия задачи (1.37), чтобы найти константы C_1, C_2 :

$$T_0 = C_2 + C_1 \ln r_0, \quad T_1 = C_2 + C_1 \ln r_1;$$

$$T_0 - T_1 = C_1 (\ln r_0 - \ln r_1) = C_1 \ln \frac{r_0}{r_1},$$

$$C_1 = \frac{T_0 - T_1}{\ln(r_0/r_1)}, \quad C_2 = T_0 - (T_0 - T_1) \frac{\ln r_0}{\ln(r_0/r_1)}.$$

Эти константы подставим в общее решение (1.38). Получим

$$T = T_0 - (T_0 - T_1) \frac{\ln r_0}{\ln(r_0/r_1)} + \frac{T_0 - T_1}{\ln(r_0/r_1)} \ln r =$$

$$= T_0 - (T_0 - T_1) \frac{\ln r_0 - \ln r}{\ln(r_0/r_1)} = T_0 + (T_0 - T_1) \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(r_1/r_0)} \quad (1.39)$$

Итак, температура в цилиндрической стенке трубы распределена по логарифмическому закону. Плотность теплового потока зависит от r и равна

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda}{r} \frac{T_0 - T_1}{\ln(r_1 / r_0)}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (1.40)$$

а количество тепла Q , отводящееся за 1 секунду от трубы через участок ее боковой поверхности длиной l метров (площадь участка $F = 2\pi rl$), равно

$$\frac{Q}{1 \text{ с}} = \frac{qF}{1 \text{ с}} \equiv P = -2\pi\lambda l \frac{T_0 - T_1}{\ln(1 + \delta / r_0)}, \quad \text{Вт} \quad (1.41)$$

Эту формулу можно использовать для оценки потерь в трубе системы теплоснабжения. Обычно оценивают погонную (на единицу длины) мощность теплопотерь

$$\frac{P}{l} \equiv P_l = 2\pi\lambda \frac{T_0 - T_1}{\ln(1 + \delta / r_0)}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}}. \quad (1.42)$$

Формулировка задачи теплопередачи через цилиндрическую стенку с граничными условиями Ньютона-Рихмана имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right) &= 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad r_0 < r < r_1 = r_0 + \delta; \\ r = r_0 : \lambda \frac{dT}{dr} &= \alpha_0 (T - T_0^{cp}); \\ r = r_1 : \lambda \frac{dT}{dr} &= -\alpha_1 (T - T_1^{cp}); \end{aligned} \quad (1.43)$$

Из постоянства величины $r\lambda dT/dr$ следует, что погонная мощность (1.42) не зависит от r . Однако для задачи Ньютона-Рихмана значения T_0, T_1 не известны. Запишем различные выражения для $P_l = 2\pi\lambda r \partial T / \partial r$

$$P_l = 2\pi\lambda \frac{T_0 - T_1}{\ln(1 + \delta / r_0)} = -2\pi r_0 \alpha_0 (T_0 - T_0^{cp}) = 2\pi r_1 \alpha_1 (T_1 - T_1^{cp})$$

Эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
T_0^{cp} - T_0 &= \frac{P_l}{2\pi r_0 \alpha_0}, \\
T_0 - T_1 &= \frac{P_l}{2\pi \lambda} \ln(1 + \delta / r_0), \\
T_1 - T_1^{cp} &= \frac{P_l}{2\pi r_1 \alpha_1}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Сложим эти уравнения и получим

$$T_0^{cp} - T_1^{cp} = \frac{P_l}{2\pi} \left(\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{\ln(1 + \delta / r_0)}{\lambda} + \frac{1}{(r_0 + \delta) \alpha_1} \right)$$

Выразим отсюда погонную мощность

$$P_l = 2\pi k_l (T_0^{cp} - T_1^{cp}), \quad k_l = \left(\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{\ln(1 + \delta / r_0)}{\lambda} + \frac{1}{(r_0 + \delta) \alpha_1} \right)^{-1} \tag{1.45}$$

Здесь k_l , Вт/(м К) – линейный коэффициент теплопередачи, а $R_l = 1/k$ – линейное термическое сопротивление.

На практике часто встречаются *тонкостенные* трубы, когда $\delta \ll r_0$.

В этом случае $\ln(1 + \delta / r_0) \approx \delta / r_0$, и формула (1.45) принимает вид

$$P_l = 2\pi k r_0 (T_0^{cp} - T_1^{cp}), \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{r_0 \alpha_1}}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}} \tag{1.46}$$

а полная тепловая мощность, отводимая с поверхности тонкостенной трубы длиной l равна

$$P = P_l l = 2\pi k r_0 l \Delta T \tag{1.47}$$

где $\Delta T = T_0^{cp} - T_1^{cp}$ – разность температур жидкостей, текущих в трубе и в затрубном пространстве.

В случае многослойной цилиндрической стенки система уравнений (1.44) должна принять вид

$$\begin{aligned}
T_0^{cp} - T_0 &= \frac{P_l}{2\pi r_0 \alpha_0}, \\
T_0 - T_1 &= \frac{P_l}{2\pi \lambda} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) = \frac{P_l}{2\pi \lambda_1} \ln \left(1 + \frac{\delta_1}{r_0} \right), \\
&\dots\dots\dots \\
T_i - T_{i+1} &= \frac{P_l}{2\pi \lambda} \ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right) = \frac{P_l}{2\pi \lambda_i} \ln \left(1 + \frac{\delta_{i+1}}{r_i} \right), \\
T_N - T_1^{cp} &= \frac{P_l}{2\pi r_N \alpha_1}
\end{aligned}
\tag{1.48}$$

После сложения всех уравнений имеем

$$\begin{aligned}
T_0^{cp} - T_1^{cp} &= \frac{P_l}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_N \alpha_1} + \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \right\}, \text{ или} \\
P_l &= 2\pi k_l (T_0^{cp} - T_1^{cp}), \quad k_l = \left\{ \frac{1}{r_N \alpha_1} + \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right) \right\}^{-1}, \tag{1.49} \\
R_l &= 1 / k_l
\end{aligned}$$

Пример. По металлической трубе течет горячий пар. Внешний слой термоизоляции снижает потери тепла в окружающий холодный воздух. Требуется рассчитать термическое сопротивление R_l , погонную потерю мощности P_l , и значения температуры на границах r_0, r_1, r_2 в зависимости от толщины δ_2 и теплопроводности λ_2 изолятора.

Исходные данные к расчету: внутренний радиус трубы $r_0=2$ см, толщина стенки трубы $\delta_1=2$ мм, теплопроводность металла $\lambda_1=40$ Вт/(мК). Внутренний коэффициент теплоотдачи $\alpha_0=500$ Вт/(м²К), температура пара $T_0^{cp}=150^0$ С. Внешний коэффициент теплоотдачи $\alpha_1=5$ Вт/(м²К), температура воздуха $T_1^{cp}=-15^0$ С. Диапазоны

изменения параметров изолятора: $1 \text{ мм} < \delta_2 < 3 \text{ см}$,
 $0.025 < \lambda_2 < 0.25 \text{ Вт/(м К)}$.

Решение задачи. Используем формулы (1.48), (1.49) при $N = 2$.

$$\begin{aligned} T_0^{cp} - T_0 &= \frac{P_l}{2\pi r_0 \alpha_0}, \\ T_0 - T_1 &= \frac{P_l}{2\pi \lambda_1} \ln \left(1 + \frac{\delta_1}{r_0} \right), \\ T_2 - T_1^{cp} &= \frac{P_l}{2\pi r_2 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} P_l &= 2\pi k_l (T_0^{cp} - T_1^{cp}), \\ R_l &= \frac{1}{r_2 \alpha_1} + \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \quad k_l = \frac{1}{R_l}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

При заданных δ_2, λ_2 из указанного диапазона по формулам (1.51) вычисляем удельное термическое сопротивление R_l и коэффициент теплопередачи k_l . Затем подсчитываем погонную потерю мощности P_l . Это значение используем в соотношениях (1.50), с помощью которых находим температуру на границах:

$$T_0 = T_0^{cp} - \frac{P_l}{2\pi r_0 \alpha_0}, \quad T_1 = T_0 - \frac{P_l}{2\pi \lambda_1} \ln \left(1 + \frac{\delta_1}{r_0} \right), \quad T_2 = T_1^{cp} + \frac{P_l}{2\pi r_2 \alpha_1}. \quad (1.52)$$

Результаты расчета приведены ниже в виде номограмм.

На рисунках (1.16) – (1.19) видно, что при $\lambda_2 = 0.25$ (плохая теплоизоляция) наблюдаются аномальные свойства слоя изолятора: термическое сопротивление падает, а потери мощности растут при увеличении толщины слоя δ_2 .

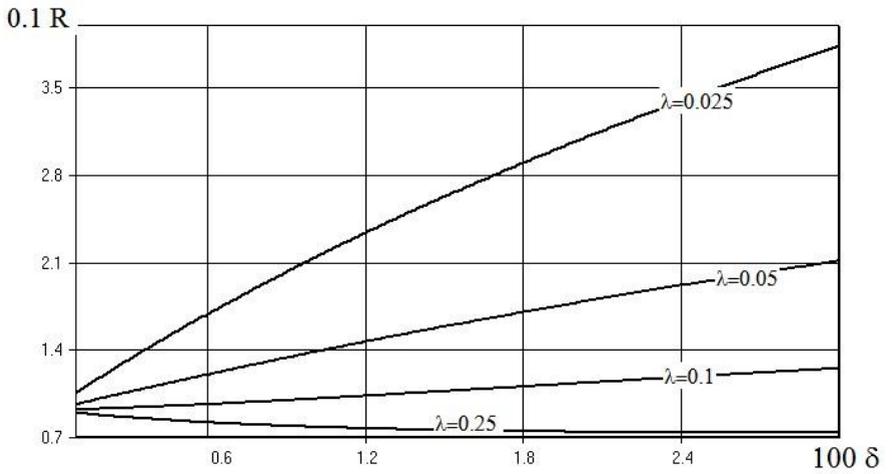


Рис. 1.16. Термическое сопротивление стенки трубы с изолятором

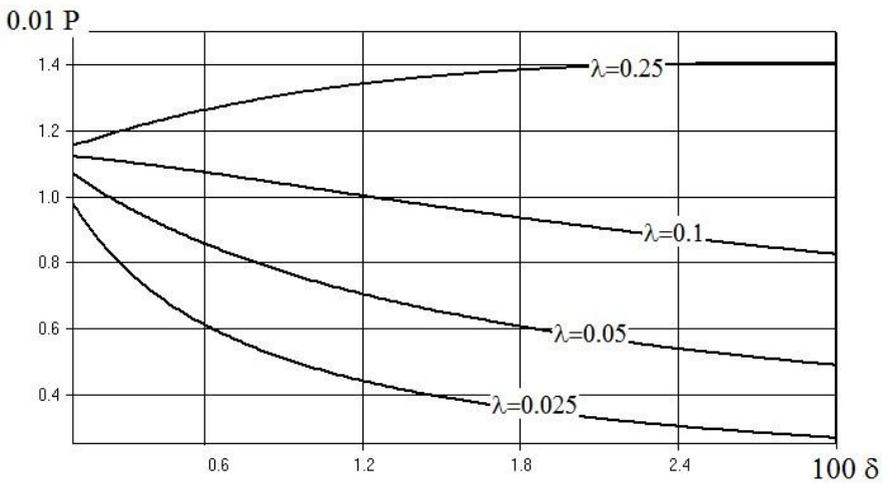


Рис. 1.17. Погонная мощность теплопотерь трубы с изолятором

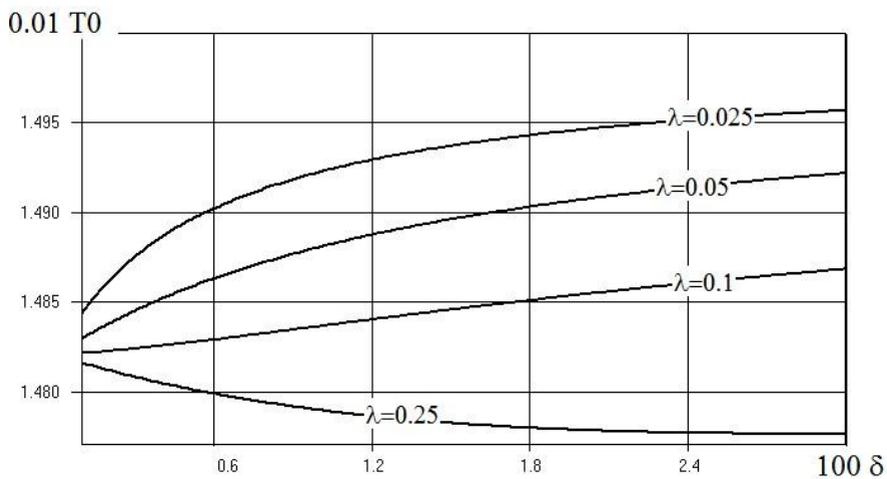


Рис. 1.18. Температура внутренней стенки трубы

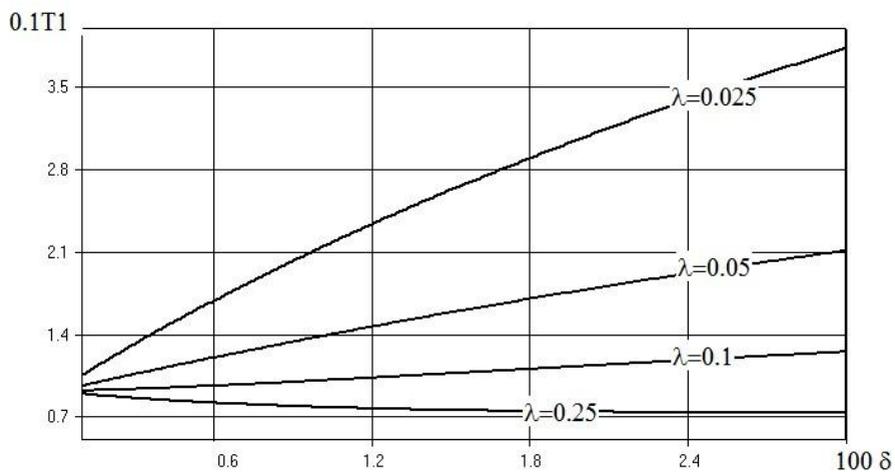


Рис. 1.19. Температура наружной поверхности изолятора

1.7.3. Теплоотдача оребренных труб. Прямое ребро

Количество тепла, рассеивающееся в окружающую среду с поверхности нагретого тела, пропорционально площади этой поверхности. Этот факт используется для повышения теплоотдачи различных теплообменных устройств за счет оребрения их поверхности. Рассмотрим трубу с прямым оребрением прямоугольного профиля (рис. 1.20).

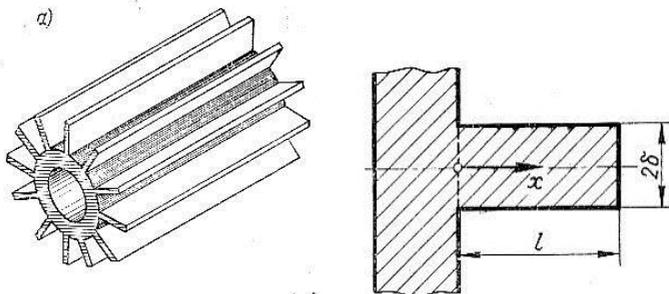


Рис. 1.20. Труба с прямым оребрением прямоугольного профиля
 Длина ребра l , его толщина 2δ , теплопроводность материала λ . Температура внешней стенки трубы и ребра в месте контакта равна T_0 , температура окружающей среды T_{cp} . Коэффициент теплоотдачи α .

Задача теплопроводности в ребре имеет вид (теплосъемом с торцев ребра пренебрегаем)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad -\delta < y < \delta;$$

$$x = 0: T = T_0, \quad x = l: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$y = \pm \delta: \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \mp \alpha (T - T_{cp}).$$
(1.53)

Интегрируем уравнение (1.53) по толщине ребра с учетом граничных условий при $y = \pm \delta$:

$$2\delta\lambda \frac{d^2\langle T \rangle}{dx^2} - \alpha(T(\delta) - T_{cp}) - \alpha(T(-\delta) - T_{cp}) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (1.54)$$

$$x = 0: \langle T \rangle = T_0, \quad x = l: \lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} = 0;$$

Здесь введена средняя по толщине ребра температура

$$\langle T \rangle(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T(x, y) dy. \quad (1.55)$$

Примем допущение $T(\delta) \approx T(-\delta) \approx \langle T \rangle$, справедливое для тонких рёбер. Тогда из (1.54) получим задачу для средней температуры (1.55)

$$\frac{d^2\langle T \rangle}{dx^2} - \frac{\alpha}{\delta\lambda} (\langle T \rangle - T_{cp}) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (1.56)$$

$$x = 0: \langle T \rangle = T_0, \quad x = l: \lambda \frac{d\langle T \rangle}{dx} = 0;$$

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{T} = \frac{\langle T \rangle - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha l}{\varepsilon \lambda}, \quad \varepsilon = \bar{\delta} = \frac{\delta}{l}, \quad (1.57)$$

в которых задача (1.57) примет вид (черта над безразмерными величинами опущена)

$$\frac{d^2\bar{T}}{d\bar{x}^2} - \text{Bi} \bar{T} = 0, \quad 0 < \bar{x} < 1; \quad \bar{T}(0) = 1, \quad \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}}(1) = 0. \quad (1.58)$$

Общее решение уравнения (1.58) имеет вид $\bar{T}(\bar{x}) = C_1 e^{x\sqrt{\text{Bi}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\text{Bi}}}$, константы C_1, C_2 определяются с помощью граничных условий.

$$\bar{T}(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}}(1) = \sqrt{\text{Bi}} (C_1 e^{\sqrt{\text{Bi}}} - C_2 e^{-\sqrt{\text{Bi}}}) = 0.$$

Имеем

$$C_1 = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{2\text{ch}(\sqrt{Bi})}, \quad C_2 = 1 - C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{2\text{ch}(\sqrt{Bi})};$$

$$T(x) = \frac{\text{ch}(\sqrt{Bi}(1-x))}{\text{ch}(\sqrt{Bi})}.$$
(1.59)

Здесь $\text{ch}(x) = 0.5(e^x + e^{-x})$ - гиперболический косинус.

Безразмерное решение задачи (1.59) определяется единственным параметром – числом Био. Графики распределения температуры в ребре в зависимости от Bi представлены на рис. 1.21.

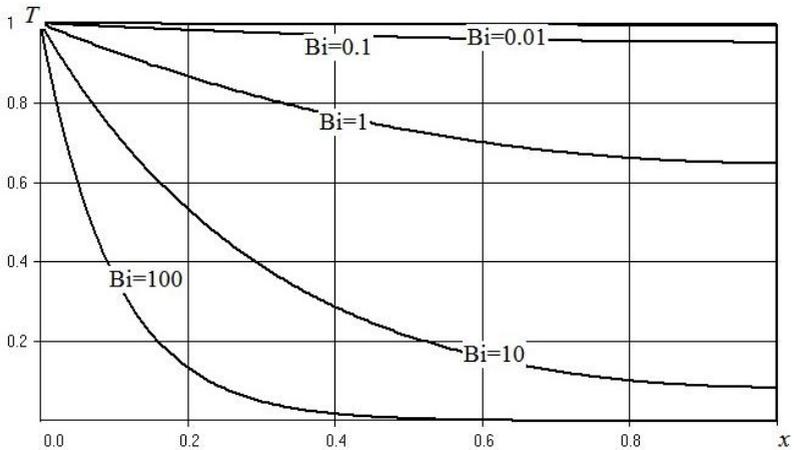


Рис. 1.21. Температура в прямом ребре прямоугольного сечения

Видно, что температура падает с ростом x . Критерием эффективности ребра ξ называют отношение реального теплового потока Q , снимаемого с ребра, к идеальному тепловому потоку Q_1 , который бы рассеивался с поверхности, если бы вся поверхность имела температуру $T = 1$. В безразмерных переменных можно записать

$$Q = 2Bi \int_0^1 T(x) dx, \quad Q_1 = 2Bi, \quad \xi = \int_0^1 T(x) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\text{ch}[\sqrt{Bi}(1-x)]}{\text{ch}(\sqrt{Bi})} dx = -\frac{\text{sh}[\sqrt{Bi}(1-x)]}{\sqrt{Bi} \text{ch}(\sqrt{Bi})} \Big|_0^1 = \frac{\text{th}(\sqrt{Bi})}{\sqrt{Bi}}.$$

График эффективности $\xi(Bi)$ показан на рис. 1.22.

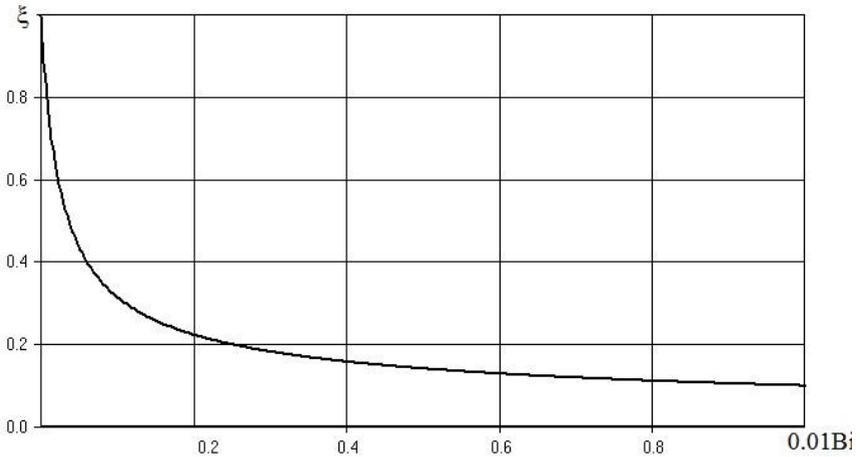


Рис. 1.22. Зависимость эффективности прямого ребра от числа Bi

Формула (1.57) для параметра Bi показывает, что эффективность прямого оребрения можно повысить за счет материалов с высокой теплопроводностью λ и использования коротких толстых рёбер.

1.7.4. Теплоотдача оребренных труб. Кольцевое ребро

Рассмотрим трубу с кольцевым оребрением прямоугольного профиля (рис. 1.23).

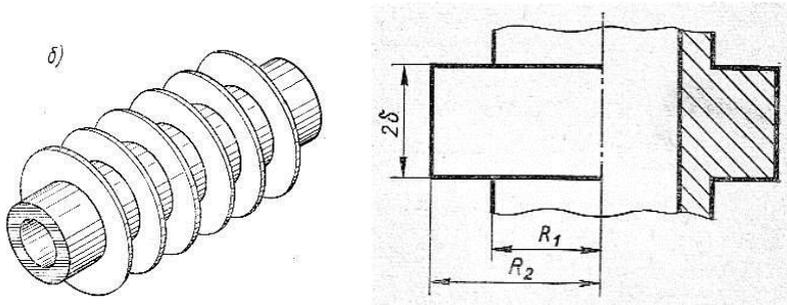


Рис. 1.23. Труба с кольцевым оребрением прямоугольного профиля

Уравнение теплопроводности в кольцевом ребре записываются так же, как в прямом ребре, отличие состоит только в том, что используются цилиндрические координаты:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad R_1 < r < R_2 = R_1 + l, \quad -\delta < y < \delta;$$

$$r = R_1 : T = T_0, \quad r = R_2 : \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0;$$

$$y = \pm \delta : \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \mp \alpha (T - T_{cp}).$$
(1.60)

Умножим уравнение (1.60) и проинтегрируем по толщине ребра с учетом граничных условий при $y = \pm \delta$:

$$2\delta \lambda \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\langle T \rangle}{dr} \right) - \alpha r (T(\delta) + T(-\delta) - 2T_{cp}) = 0, \quad R_1 < r < R_2;$$

$$r = R_1 : \langle T \rangle = T_0, \quad r = R_2 : \lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} = 0;$$
(1.61)

Здесь введена средняя по толщине ребра температура

$$\langle T \rangle(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T(x, y) dy.$$
(1.62)

Примем допущение $T(\delta) \approx T(-\delta) \approx \langle T \rangle$, справедливое для тонких ребер. Тогда из (1.61) получим задачу для средней температуры (1.62)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\langle T \rangle}{dr} \right) - \frac{\alpha}{\delta \lambda} (\langle T \rangle - T_{cp}) = 0, \quad R_1 < r < R_2; \quad (1.63)$$

$$r = R_1 : \langle T \rangle = T_0, \quad r = R_2 : \lambda \frac{d\langle T \rangle}{dr} = 0.$$

Введем безразмерные переменные

$$\bar{r} = \frac{r}{l}, \quad \bar{T} = \frac{\langle T \rangle - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha l}{\varepsilon \lambda}, \quad \varepsilon = \bar{\delta} = \frac{\delta}{l}, \quad (1.64)$$

в которых задача (1.63) примет вид (черта над безразмерными величинами опущена)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \text{Bi} T = 0, \quad R_1 < r < R_1 + 1; \quad T(0) = 1, \quad \frac{dT}{dr}(1) = 0. \quad (1.65)$$

Это модифицированное уравнение Бесселя, его решение имеет вид

$$T(r) = C_1 I_0(r\sqrt{\text{Bi}}) + C_2 K_0(r\sqrt{\text{Bi}}),$$

где I_0 и K_0 - модифицированные функции Бесселя нулевого порядка 1-го и 2-го родов. Константы $C_{1,2}$ можно найти из граничных условий.

Однако более просто решить и исследовать задачу (1.65) численно. Рассеянный с поверхности кольцевого ребра безразмерный тепловой поток, идеальный поток от полностью прогретого ребра и коэффициент эффективности кольцевого оребрения определяются формулами

$$Q = 2\pi \cdot 2\text{Bi} \int_{R_1}^{R_1+1} T(r)r \, dr,$$

$$Q_1 = 2\pi \cdot 2\text{Bi} \int_{R_1}^{R_1+1} r \, dr = 2\pi \text{Bi} \left[(R_1 + 1)^2 - R_1^2 \right] = 2\pi \text{Bi} (2R_1 + 1), \quad (1.66)$$

$$\xi = \frac{Q}{Q_1} = \frac{2}{2R_1 + 1} \int_{R_1}^{R_1+1} T(r)r \, dr.$$

Задание 2. Решить задачу (1.65) методом конечных разностей на равномерной сетке. Построить распределения температуры по радиусу ребра при значениях числа Био из диапазона $0.01 < Bi < 100$, результат представить в виде номограммы, аналогичной рис. 1.21. Подсчитать эффективности кольцевого оребрения $\xi(Bi)$ по формуле (1.66), применив для вычисления интеграла квадратурную формулу трапеций. Сравнить результат с аналогичной зависимостью для прямого ребра (рис. 1.22).

1.8. О точных решениях уравнения теплопроводности

Линейное нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f. \quad (1.67)$$

Источники получения его точных решений:

1. автомодельные (самоподобные) ситуации;
2. операционное исчисление (интегральные преобразования типа Лапласа и т.д.)
3. разделение переменных, решения в виде рядов.

В данном разделе мы рассмотрим источник 1. Автомодельные ситуации возникают, когда в краевой задаче для уравнения (1.67) отсутствует пространственный масштаб (например, изучается распространение тепла в полубесконечной области).

1.8.1. Автомодельная задача Дирихле

о распространении тепла в полубесконечной области с постоянными теплофизическими свойствами, постоянной начальной температурой и без источников. Граничные условия Дирихле моделируют внезапный нагрев стенки $x=0$ при $t=0$ до температуры T_0 и поддержание там этой температуры при $t>0$. Имеем следующую формулировку задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad x > 0, t > 0; \\ t = 0: \quad T &= T_0; \\ x = 0: \quad T &= T_1; \quad x \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow T_0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Запишем (31) в безразмерных переменных

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \bar{t} = \frac{ta}{l^2}. \quad (1.69)$$

Здесь масштаб длины l можно взять произвольно, например $l = 1 \text{ м}$. В этих переменных получаем (черта опущена)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \\ t = 0: \quad T &= 0; \\ x = 0: \quad T &= 1; \quad x \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Решение этой задачи имеет вид $T = F(x, t)$.

Чтобы определить автомодельную переменную, потребуем, чтобы уравнение и граничные условия (1.70) были инвариантны относительно растяжения

$$\hat{T} = a_T T, \quad \hat{x} = a_x x, \quad \hat{t} = a_t t.$$

Подставим \hat{T} и другие «растянутые» величины в (1.70):

$$\begin{aligned} \frac{a_T \partial \hat{T}}{a_t \partial \hat{t}} &= \frac{a_x^2 \partial^2 \hat{T}}{a_T \partial \hat{x}^2}, \quad \frac{\hat{x}}{a_x} > 0, \quad \frac{\hat{t}}{a_t} > 0; \\ t = 0: \quad \frac{\hat{T}}{a_T} &= 0; \\ x = 0: \quad \frac{\hat{T}}{a_T} &= 1; \quad x \rightarrow \infty: \quad \frac{\hat{T}}{a_T} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Решение этой задачи имеет вид $\hat{T} = \hat{F}(\hat{x}, \hat{t})$.

Очевидно, форма записи уравнений (1.70) и (1.71) будет одинаковой не при любых параметрах растяжения, а только если

$$a_t = 1, \quad a_x = a_x^2.$$

Раз задача не изменилась, то для любого a_x справедливо равенство

$$T = \widehat{T} = a_t \widehat{F}(a_x x, a_x^2 t)$$

Выберем $a_x = 1/\sqrt{t}$, тогда количество независимых переменных сократится:

$$T = F(x/\sqrt{t}, 1) = f(\eta), \quad \eta = x/\sqrt{t}.$$

На самом деле удобнее брать автомодельную переменную

$$\eta = x/(2\sqrt{t}). \tag{1.72}$$

Чтобы получить из дифференциального уравнения в частных производных (1.70) обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка с единственной независимой переменной (1.72), преобразуем дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2 \cdot 2\sqrt{t} t} = -\frac{\eta}{2t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d}{d\eta}; \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4t} \frac{d^2}{d\eta^2}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Подставив (1.73) в (1.70), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2t} \frac{dT}{d\eta} &= \frac{1}{4t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}, \quad \text{или} \quad T'' + 2\eta T' = 0, \quad \eta > 0; \\ \eta = 0: \quad T &= 1; \quad \eta \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Эта задача легко решается. Обозначим $p = T'$, тогда из уравнения следует $p' + 2\eta p = 0$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} = -d(\eta^2), \quad p = \frac{dT}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2}. \quad (1.74)$$

Проинтегрируем уравнение (1.74) от 0 до η и учтем, что $T(0) = 1$:

$$1 - T(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi. \quad (1.75)$$

В дальнейшем для представления решения удобно использовать известные специальные функции ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad \text{и} \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (1.76)$$

со свойствами $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, $\operatorname{erfc}(0) = 1$, $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$, см. рис. 1.24.

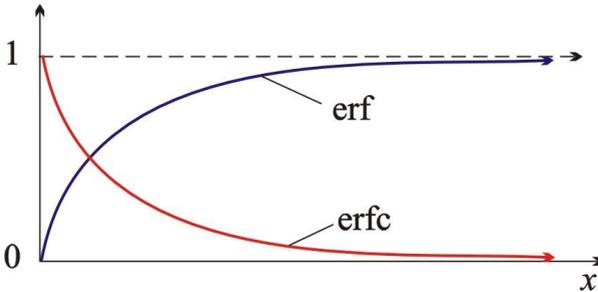


Рис. 1.24. Специальные функции erf и erfc

Положим в (1.75) $\eta = \infty$, получим $1 = 0.5\sqrt{\pi}C_1$, откуда находим константу $C_1 = 2/\sqrt{\pi}$. Автомоделное решение задачи примет вид

$$T(\eta) = \operatorname{erfc}\eta. \quad (1.77)$$

1.8.2. Автомоделная задача Неймана

с заданным тепловым потоком на границе формулируется следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \\
t = 0: \quad T &= T_0; \\
x = 0: \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= -q_0; \quad x \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow T_0.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Если в безразмерных переменных (1.69) масштаб длины l по-прежнему задать произвольно и выбрать температуру T_1 так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{q_0 l}{\lambda(T_1 - T_0)} = 1,$$

то из постановки (1.78) получим безразмерную задачу

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \\
t = 0: \quad T &= 0; \\
x = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial x} &= -1; \quad x \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Чтобы определить автомодельную переменную, запишем растяжение $\hat{T} = a_T T$, $\hat{x} = a_x x$, $\hat{t} = a_t t$ и преобразуем задачу:

$$\begin{aligned}
\frac{a_t}{a_T} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} &= \frac{a_x^2}{a_T} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2}, \quad \frac{\hat{x}}{a_x} > 0, \frac{\hat{t}}{a_t} > 0; \\
t = 0: \quad \hat{T} / a_T &= 0; \\
x = 0: \quad \frac{a_x}{a_T} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} &= -1; \quad x \rightarrow \infty: \quad \frac{\hat{T}}{a_T} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ее решение $\hat{T} = \hat{F}(\hat{x}, \hat{t})$. Инвариантность к растяжению будет, если положить $a_T = a_x$, $a_t = a_x^2$. Выберем $a_x = 1/\sqrt{t}$, тогда

$$T = \frac{1}{a_T} \hat{T}(a_x x, a_t t) = \sqrt{t} \hat{F}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \sqrt{t} f(\eta), \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{1.80}$$

Подставим это представление в (1.79) и с учетом формул (1.73) получим следующие выражения для частных производных:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} f + \sqrt{t} f' \frac{-x}{2\sqrt{t} t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} (f - \eta f');$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sqrt{t} f' \frac{1}{\sqrt{t}} = f', \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f'' \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

В результате приходим к более простой задаче для автомодельной функции $f(\eta)$

$$-2f'' - \eta f' + f = 0, \quad f'(0) = -1, \quad f(\infty) = 0. \quad (1.81)$$

Эта задача решается численно, после чего значение температуры в любой момент времени t в любой точке пространства x вычисляется по формулам

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad T(x, t) = \sqrt{t} f(\eta).$$

Задание 3. Решить задачу (1.81) методом конечных разностей и построить графики функций $f(\eta)$ и $T(x)$ для нескольких моментов времени. Убедиться, что профили температуры самоподобны (автомодельны).

Указания. 1) Вместо бесконечности взять точку $\eta_0 = 10$ и построить равномерную сетку $\eta_i = ih, i = 0..N; h = \eta^0 / N$. 2) Поскольку $\eta > 0$ при аппроксимации «конвективного» члена $\eta f'$ использовать направленную разность. 3) Разностную схему

$$f_0 - f_1 + h^2 f_0 = 1,$$

$$2(-f_{i-1} + 2f_i - f_{i+1}) - h\eta_i (f_{i+1} - f_i) + h^2 f_i = 0, \quad i = 1..N;$$

$$f_N = 0.$$

решить методом прогонки.

Глава 2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН

2.1. Основные понятия, определения и задачи

Конвективным *теплообменом* называется передача тепла при движении жидкости.

Теплообмен между движущейся жидкостью и поверхностью обтекаемого тела называется *теплоотдачей*.

Конвективный теплообмен при движении жидкости под действием внешних сил, приложенных на границе течения, или под действием однородного поля массовых сил, или за счет кинетической энергии, сообщенной жидкости вне области рассмотрения, называется *вынужденной конвекцией*.

Конвективный теплообмен при движении жидкости под действием неоднородного поля массовых сил называется *свободной (естественной) конвекцией*.

Процесс теплоотдачи называется *стационарным (установившимся)*, если температура не зависит от времени; при этом движение жидкости не запрещается. Если же $\partial T / \partial t \neq 0$, то процесс теплоотдачи нестационарный.

Основной задачей теории конвективного теплообмена является установление связи между плотностью теплового потока q на поверхности теплообмена Γ (стенки), температурой втекающей жидкости T_e и температурой стенки T_w . Решение основной задачи предполагает решение *гидродинамической задачи* о поле скорости и давления и *тепловой задачи* о поле температуры. Знание поля температуры жидкости T позволяет записать решение основной задачи теории конвективного теплообмена в виде

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \alpha (T_e - T_w), \quad (2.1)$$

где n - внешняя к границе Γ нормаль, α - искомый коэффициент теплоотдачи (теплообмена). В формуле (2.1) величины T_e , T_w , λ считаются заданными. Практический смысл решения основной задачи конвективного теплообмена – определения коэффициент теплоотдачи α - в том, чтобы в инженерных расчетах избежать решения трудоемких гидродинамической и тепловой задач, а для оценки эффективности теплообмена пользоваться непосредственно формулой (2.1). Понятно, что α зависит от множества параметров конкретной задачи. Чтобы уменьшить число этих параметров, вводят безразмерные переменные $\bar{n} = n / \delta$, $\bar{T} = (T - T_w) / (T_e - T_w)$ и переписывают равенство (2.1) в

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma}. \quad (2.2)$$

Здесь δ - масштаб толщины пограничного слоя, Nu - число Нуссельта, основной критерий подобия конвективного теплообмена.

2.2. Уравнения конвективного теплообмена

2.2.1. Уравнение неразрывности

В движущейся жидкости в момент t выделим контрольный объем V . Границу этого объема обозначим S . При $t > 0$ можно говорить о двух объемах: эйлеровом V_E , который остается в первоначальных границах S , но, вообще говоря, состоит из уже из других материальных частиц жидкости (за её счет протекания последней через неподвижную виртуальную границу S), и лагранжев объем V_L , который все время содержит одни и те же материальные частицы и, следовательно, деформируется по мере движения жидкости. Пусть f - некоторое свойство среды, заклю-

ченной в объеме V . Справедлива следующая формула, описывающая эволюцию свойства f в объеме V :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} f dV = \int_{V_E} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f v_n dS = 0. \quad (2.3)$$

Здесь v_n - скорость жидкости по нормали к границе S . Последний интеграл представляет поток свойства f через замкнутую поверхность S . С помощью теоремы Гаусса-Остроградского поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный:

$$\int_S f v_n dS = \int_{V_E} \operatorname{div}(f \mathbf{v}) dV. \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) будем использовать для вывода уравнений конвективного теплообмена.

Рассмотрим такое свойство среды как плотность ρ . Масса вещества в объеме V_L вычисляется по формуле

$$m = \int_{V_L} \rho dV. \quad (2.5)$$

Закон сохранения массы выражается формулой $\partial m / \partial t = 0$. Подставим сюда выражение (2.5) и воспользуемся формулой (2.3). Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = 0,$$

или, с учетом теоремы Гаусса Остроградского (2.4),

$$\int_{V_E} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0.$$

Так как объем V_E выбран произвольно, подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Это и есть уравнение неразрывности.

Если жидкость несжимаема, то ее плотность постоянна, $\rho = \text{const}$, следовательно, $\partial \rho / \partial t = 0$ и ρ можно вынести из-под оператора дивергенции и сократить. Получим

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

Здесь применено соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

2.2.2. Уравнения движения

Это три уравнения для компонент вектора скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$. Изменение количества движения (удельного импульса) $\rho \mathbf{v}$ в объеме V происходит под действием массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем. Математически это записывается в виде векторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_S (\rho \mathbf{v}) v_n dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \mathbf{p}_n dS.$$

Все члены этого уравнения имеют размерность силы. Здесь \mathbf{g} - это ускорение массовых сил (например, ускорение гравитации), а $\mathbf{p}_n = P \cdot \mathbf{n} = p^i n_i$ - вектор внутренних напряжений жидкости на элемент поверхности S с нормалью \mathbf{n} , $n_i = \cos(n, i)$ - косинус между нормалью к площадке и осью i . Здесь $P = \{p_{ij}\}$ - тензор внутренних напряжений. С помощью теоремы Гаусса Остроградского (2.4) последний поверхностный интеграл преобразуется в объемный:

$$\int_S \mathbf{p}_n dS = \int_V \operatorname{div} P dV, \quad \operatorname{div} P = \nabla_i \mathbf{p}^i,$$

$$\mathbf{p}^i = p_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

Проекция векторного уравнения импульсов на ось x имеет вид.

$$\int_V \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int_S (\rho u) v_n dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho u \mathbf{v}) dV = \int_V \rho g_x dV + \int_V \nabla_j p_{xj} dV$$
(2.8)

Интеграл с дивергенцией можно представить в виде

$$\int_V \operatorname{div}(\rho u \mathbf{v}) dV = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(u) dV + \int_V u \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV,$$

а интеграл с производной по времени равен

$$\int_V \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV = \int_V \left(u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV.$$

Таким образом, в левой части уравнения (2.8) получаем

$$\int_V \left(u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(u) + u \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV =$$

$$= \int_V \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u \right) \right] dV$$

Но первый член представляет собой уравнение неразрывности (2.6), и поэтому равен нулю. Окончательно в левой части (2.8) получаем

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u \right) dV. \quad (2.9)$$

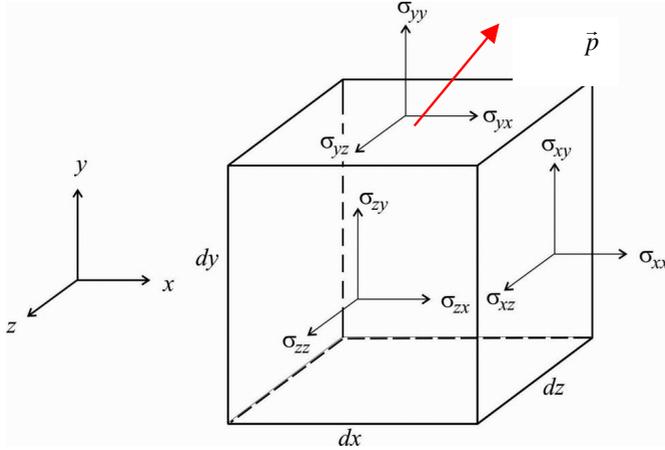


Рис. 2.1. Структура напряжений на поверхности элементарного объема

Вычислим теперь правую часть уравнения, учитывая, что компоненты тензора полных напряжений определяются формулой

$$p_{ij} = -p\delta_i^j + \sigma_{ij}, \quad (2.10)$$

где p - давление, δ_i^j - символ Кронекера, σ_{ij} - вязкие напряжения (см. рис. 2.1). Физически σ_{ij} означает напряжение на площадку с нормалью i , действующее в направлении j . Подставив (2.9), (2.10) в (2.8), окончательно получим уравнение импульса в направлении x в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right\} + g_x \quad (2.11)$$

Уравнения импульсов в направлении y и z аналогичны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right\} + g_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right\} + g_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнения движения (2.11) – (3.12) удобно записывать в индексной форме

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

Система уравнений импульса (2.13) называется уравнениями движения в напряжениях, или уравнениями Навье. Для замыкания системы требуется выразить σ_{ij} через другие характеристики движения жидкости. Общеизвестной научной гипотезой является линейная модель трения Стокса, которая пригодна для описания самых сложных ламинарных и турбулентных течений и для несжимаемой жидкости выглядят так:

$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.14)$$

где e_{ij} - тензор скоростей деформации; μ – динамическая вязкость. Она является свойством жидкости, которая характеризует величину напряжений в жидкости при ее деформации. Наряду с динамической вязкостью часто используют кинематическую вязкость $\nu = \mu / \rho$.

2.2.3. Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Плотность несжимаемой жидкости постоянна, в математической модели ρ выступает как заданный параметр. Уравнения Навье (2.13), после подстановки в них закона трения Стокса (2.14) преобразуются к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \nu e_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

Если вязкость постоянна, то член, выражающий дивергенцию вязких напряжений можно записать так:

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \nu \Delta v_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Но последнее слагаемое равно нулю из-за уравнения неразрывности, поэтому из (2.15) получаем уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

Здесь

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа.

Система уравнений (2.7), (2.16) замкнута, она содержит 4 уравнения для трёх компонент скорости и давления.

2.2.4. Уравнение конвективного теплопереноса

Выделим, как и раньше, контрольный объём V с границей S и рассмотрим закон изменения его полной энтальпии (теплосодержания)

$$H = \int_{V_t} \rho h(T) dV,$$

где $h(T)$ - удельная энтальпия, производная этой функции называется теплоемкостью: $c = dh / dT$. Если \mathbf{q} - плотность теплового потока на границе S , а f - удельная мощность внутренних источников тепла, то баланс энергии выразится уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dV}_{\text{изменение энтальпии в объеме}} + \underbrace{\int_S \rho h v_n dS}_{\text{поток энтальпии через поверхность}} = \underbrace{-\int_S q_n dS}_{\text{приток тепла через поверхность}} + \underbrace{\int_V f dV}_{\text{внутренние источники}}.$$

Знак минус в правой части появился потому, что положительным, т.е. направленным на повышение энергии объема, считается поток тепла через границу S внутрь тела, т.е. противоположно внешней к поверхности S нормали n . Используя теорему Гаусса-Остроградского (2.4), преобразуем поверхностные интегралы в объемные,

$$\int_S \rho h v_n dS = \int_V \nabla (\rho h \mathbf{v}) dV; \quad \int_S q_n dS = \int_V \nabla \mathbf{q} dV$$

и, учитывая произвольность контрольного объема V , запишем уравнение энтальпии

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho h \mathbf{v}) = -\nabla \mathbf{q} + f. \quad (2.17)$$

Для определения потока \mathbf{q} привлечем линейный закон теплопроводности Фурье (1.2) $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$. Как и при выводе уравнения импульсов, уравнение неразрывности позволяет записать левую часть уравнения (2.17) в виде субстанциональной производной удельной энтальпии h :

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } h \right) = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + f \quad (2.18)$$

В простейшем случае при $h = cT$ из (2.18) получаем

$$\rho \left\{ \frac{\partial(cT)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(cT) \right\} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + f \quad (2.19)$$

Если теплофизические свойства среды постоянны ($\rho, c, \lambda = \text{const}$), то из (2.19) принимает традиционный вид уравнения конвективной теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = a \Delta T + \phi \quad (2.20)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$, $\text{м}^2 / \text{с}$ – температуропроводность среды, $\phi = f / c\rho$.

Уравнение (2.20) вместе с тремя уравнениями Навье-Стокса (2.16) и уравнением неразрывности (2.7) образуют замкнутую систему уравнений для математического описания нестационарных трехмерных течений и тепловых полей вязкой жидкости с постоянными свойствами. Эта система получена с использованием двух упрощенных линейных законов: вязкого трения Стокса и молекулярной теплопроводности Фурье. История математического моделирования показывает, что эти законы имеют достаточно широкую область применения в практически важных задачах.

В твердых телах $\mathbf{v}=0$, и данное уравнение переходит в уравнение теплопроводности, а в жидкостях и газах, при наличии движения, конвекция, как правило, играет определяющую роль в переносе тепла.

2.2.5. Плоские течения и преобразованные переменные

Математическое описание течений с помощью уравнений Навье-Стокса и конвективной теплопроводности подразумевало постановку краевых задач, в которых искомыми функциями были скорость $\mathbf{v} = (u, v, w)$; давление p ; температура T ; плотность ρ . В *несопряженных* задачах свойства жидкости (вязкость, плотность) несжимаемой жидкости считаются заданными, и задача для скорости и давления отделяется от тепловой задачи, т.е. может быть решена независимо. Число неизвестных в гидродинамической задаче сокращается до четырех: u, v, w, p . Такие уравнения и задачи называются задачами Навье-Стокса в *естественных переменных*.

Оказывается, что можно сформулировать математические задачи в других переменных, которые также полно описывают течение жидкости.

В частности, при моделировании двумерных (плоских) течений широко используются такие величины, как *завихренность* ω и *функция тока* ψ . Они называются *преобразованными переменными* и связаны с естественными переменными формулами

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.21)$$

Основная идея введения новых преобразованных переменных состоит в том, чтобы вместо трех уравнений в естественных переменных (двух уравнений Навье - Стокса и уравнения неразрывности) получить два уравнения для ω и ψ .

Физически ψ задает расход жидкости. Изолинии функции тока $\psi = \text{const}$ являются линиями тока, т.е. такими линиям, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором скорости. Чем чаще линии тока, тем больше расход в данном сечении.

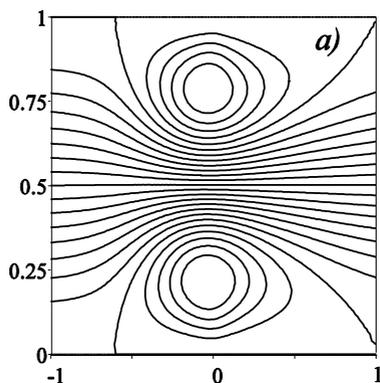


Рис. 2.2. Пример линий тока в термоконвективных течениях

Функция тока замечательна тем, что определенные по формуле (2.21) компоненты скорости автоматически удовлетворяют уравнению неразрывности. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \equiv 0.$$

Для функции тока получается простое уравнение. Продифференцируем $u = \partial \psi / \partial y$ по y , а $v = -\partial \psi / \partial x$ по x и вычтем второе из первого. Получим уравнение Пуассона с вихрем в правой части,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

или

$$-\Delta \psi \equiv \omega. \quad (2.22)$$

Осталось вывести уравнение для завихренности ω . Используем для этого двумерные уравнения Навье-Стокса

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + g_x, \quad (2.23)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + g_y. \quad (2.24)$$

Продифференцируем (2.23) по y , а (2.24) – по x и вычтем из второго первое. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = \\ &= \frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega + f, \quad f \equiv \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Итак, вместо трех уравнений Навье-Стокса (2 уравнения для u, v и уравнение неразрывности для p) получились два уравнения для преобразованных переменных – завихренности ω и функции тока ψ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega + f, \\ -\Delta \psi = \omega; \quad f = \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Заметим, что давление не входит в постановку задачи. Если требуется найти u, v, p , то в рамках модели переноса завихренности поступают так: вначале для всех t решают систему (2.25), находят функции ω, ψ , а заодно по формулам (2.21) и скорости u, v . После того, как задача решена, для отдельных моментов времени решается самостоятельная задача для давления. Уравнение для p получают из уравнений импульсов (2.23), (2.24). Первое дифференцируют по x , второе по y и складывают. В результате получается уравнение Пуассона для давления

$$-\Delta p = 2\rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.26)$$

2.2.6. Уравнения пограничного слоя

Многочисленные наблюдения за скоростью жидкости показали, что при внешнем обтекании тел и внутренних течениях в трубах и каналах вязкость жидкости оказывает влияние на поток только вблизи границы контакта между жидкостью и поверхностью тела. Таким образом, поток условно делится на две зоны: вязкое течение в пограничном слое и потенциальное течение в основном потоке за границей этого слоя. Это используется для расчета обтекания тел по следующим причинам.

- 1) Потенциальное течение описывается простыми уравнениями типа интегралов Коши – Лагранжа или Бернулли.
- 2) Внутри пограничного слоя уравнение Навье – Стокса значительно упрощаются, поскольку сам этот слой при больших числах Рейнольдс-

са очень тонкой, так что градиенты гидродинамических характеристик поперек слоя намного больше, чем в продольном.

Отмеченные особенности течения находят свое отражение в специальных упрощенных уравнениях, предназначенных для моделирования течений данного класса.

Динамический пограничный слой. При обтекании тел потоком вязкой жидкости происходит ее торможение на твердых стенках (прилипание), и благодаря вязкости это торможение, ослабевая, распространяется от стенки вглубь потока на некоторое расстояние δ , за пределами которого жидкость движется без значительных деформаций, и вязкие силы там не играют существенной роли. Таким образом, эффект вязкости проявляется в сравнительно тонком слое, который называется пограничным слоем. Для простоты рассмотрим продольное обтекание плоской стенки (рис. 10.1) однородным потоком со скоростью u_e (e – external – внешний).

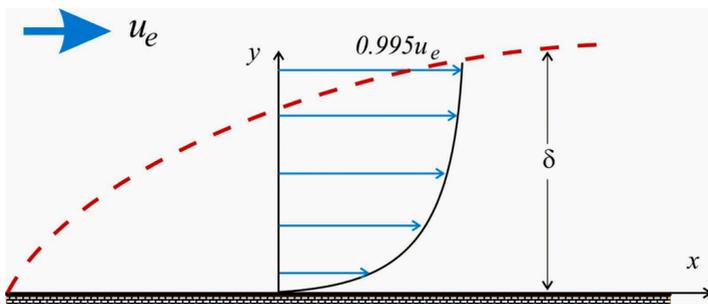


Рис. 2.3. Динамический пограничный слой при продольном обтекании плоской пластины

Выведем уравнения пограничного слоя из двумерных уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Введем масштабы длины в продольном направлении l , длины в поперечном направлении δ ; продольной скорости u_e ; поперечной скорости v_0 ; давления p_0 ; времени t_0 . Среди этих масштабов u_e задан, l ассоциируем с продольной координатой x , а значения δ , v_0 , p_0 , t_0 пока не известны. Перепишем систему (2.27) в безразмерных переменных

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{\delta}, U = \frac{u}{u_0}, V = \frac{v}{v_0}, P = \frac{p}{p_0}, \tau = \frac{t}{t_0}. \tag{2.28}$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{u_0}{l} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{v_0}{\delta} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,$$

откуда находим масштаб поперечной скорости

$$v_0 = \varepsilon u_0, \quad \varepsilon = \delta / l. \tag{2.29}$$

С учетом этого соотношения преобразуем уравнение импульса в направлении x .

$$\begin{aligned}
\frac{u_0}{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{u_0^2}{l} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\varepsilon u_0^2}{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} &= \\
= -\frac{p_0}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu u_0}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\nu u_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}.
\end{aligned}$$

Разделим это уравнение на u_0^2 / l и обозначим через Re безразмерный комплекс $u_0 l / \nu$ - число Рейнольдса. Будем иметь

$$\frac{l}{u_e t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{p_0}{\rho u_e^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right). \quad (2.30)$$

Выбор масштабов времени $t_0 = l/u_0$ и давления $p_0 = \rho u_0^2$ теперь очевиден, причем последний вполне согласуется с давлением вне пограничного слоя, где течение происходит по уравнению Бернулли

$$p + \frac{\rho u_e^2}{2} = \text{const}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (2.31)$$

В динамическом пограничном слое инерция потока в продольном направлении x компенсируется сдвиговыми вязкими напряжениями, пропорциональными градиенту скорости в поперечном направлении y . Это означает, что в уравнении (2.30) необходимо положить коэффициент при $\partial^2 U / \partial Y^2$ равным единице. Тогда

$$\frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{или } \delta(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu l}{u_e}} \quad (2.32)$$

Соотношение (2.32) показывает, что при больших числах Рейнольдса пограничный слой является тонким, $\varepsilon \ll 1$, причем его толщина растет как квадратный корень от расстояния в продольном направлении (масштаб l можно заменить на x), и тем больше, чем выше вязкость жидкости и ниже ее скорость.

Итак, с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^2)$ x - уравнение движения (2.30) в пограничном слое принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \quad (2.33)$$

Преобразуем теперь второе уравнение импульсов (2.27), используя безразмерные переменные (2.28), (2.29).

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon u_e}{l/u_e} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon u_e^2}{l} U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\varepsilon^2 u_e^2}{\delta} v \frac{\partial V}{\partial Y} = \\ = -\frac{u_e^2}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v \varepsilon u_e}{l^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{v \varepsilon u_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

Поделим это уравнение на u_e^2 / δ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \varepsilon^2 U \frac{\partial V}{\partial X} + \varepsilon^2 V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, из второго уравнения движения следует, что с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$

$$\partial p / \partial y = 0. \quad (2.34)$$

Это значит, что давление поперек пограничного слоя не меняется и равно давлению во внешнем потоке, где p подчиняется уравнению Бернулли (2.31). Это позволяет исключить давление из рассмотрения и записать уравнения плоского динамического пограничного слоя в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

в которых только две неизвестных: компоненты безразмерной скорости U и V , а скорость внешнего потока $U_e(x) \sim 1$ задана.

Тепловой пограничный слой. Уравнение теплового пограничного слоя получается из двумерного уравнения конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.36)$$

аналогично тому, как это было сделано для первого уравнения импульсов. Будем изучать то же обтекание пластины, но добавим условие, что внешний поток имеет температуру T_e , а стенка – температуру $T_w < T_e$. Безразмерные переменные для уравнения (2.36) вводятся по формулам с (2.28), (2.29), которые мы перепишем с учетом полученных выше оценок:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{\delta}, U = \frac{u}{u_e}, V = \frac{v}{\varepsilon u_e}, P = \frac{p}{\rho u_e^2}, \tau = \frac{t u_e}{l}, \\ \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{Re} = \frac{u_e l}{\nu}, \quad \text{Pe} = \frac{u_e l}{a}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь введены новые величины: θ - безразмерная температура, Pe - число Пекле, $\text{Pr} = \text{Pe} / \text{Re}$ - число Прандтля. Подстановка переменных (2.37) в уравнение (2.36) даёт

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Pe}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right),$$

откуда с точностью $O(\varepsilon^2)$ получается уравнение теплового пограничного слоя

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (2.38)$$

Структура этого уравнения свидетельствует о том, что в тепловом пограничном слое конвективный поток тепла в продольном направлении уравнивается теплопроводностью в поперечном направлении. Толщину теплового пограничного слоя δ_T можно оценить, скорректировав масштаб для поперечной координаты y так, чтобы безразмерный множитель при правой части уравнения (2.38) стал равным единице. Оче-

видно, для этого достаточно положить $Y_T = y / \delta_T = Y \sqrt{\text{Pr}} = y \sqrt{\text{Pr}} / \delta$, откуда следует равенство $\delta_T = \delta / \sqrt{\text{Pr}}$, или

$$\delta_T(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\text{Pr}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \quad (2.39)$$

Число Прандтля Pr является теплофизическим свойством жидкости; в общем случае Pr зависит от температуры.

Нетрудно заметить, что при $\text{Pr} = 1$ и отсутствии градиента давления безразмерные уравнения для продольной скорости и температуры совпадают, а значит, совпадают и их графики. Для высоковязких жидкостей с низкой теплопроводностью (тяжелые масла, битумы) число Прандтля больше единицы, и тепловой пограничный слой тоньше динамического. Для маловязких жидкостей с высокой теплопроводностью (жидкие металлы) $\text{Pr} \ll 1$, и $\delta_T > \delta$.

2.2.7. Конвективный теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины потоком несжимаемой жидкости

Рассмотрим задачу стационарного обтекания тонкой плоской пластины с постоянной температурой, расположенной на полуоси $x > 0$, однородным горячим потоком несжимаемой вязкой жидкости. Поскольку пластинка тонкая, будем считать, что течение происходит без падения давления. В безразмерных переменных (2.37) уравнения пограничного слоя, описывающие конвективный теплообмен пластины с потоком, имеют вид (за безразмерными величинами сохраняем исходные обозначения)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.42)$$

Граничными условиями будут условия прилипания на пластине и отсутствие возмущений продольной скорости и температуры за пределами пограничного слоя:

$$y = 0: u = v = T = 0; \quad y = \infty: u = T = 1. \quad (2.43)$$

Поскольку в задаче отсутствует продольный масштаб, то можно ожидать, что решение задачи будет автомодельным. Построим его. Для этого удобно вначале ввести функцию тока ψ по обычным формулам

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.44)$$

так, что уравнение неразрывности (2.41) выполняется автоматически. Подстановка (2.44) в уравнение (2.40) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (2.45)$$

Чтобы определить автомодельную переменную η , выполним над уравнением (2.45) и граничными условиями (2.43) однопараметрическое преобразование растяжения

$$x = A^{\alpha_x} \bar{x}, \quad y = A^{\alpha_y} \bar{y}, \quad \psi = A^{\alpha_\psi} \bar{\psi}, \quad (2.46)$$

и получим

$$A^{2\alpha_\psi - 2\alpha_x - \alpha_y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - A^{2\alpha_\psi - 2\alpha_x - \alpha_y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = A^{\alpha_\psi - 3\alpha_y} \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3},$$

$$\bar{y} = 0: \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = 0; \quad \bar{y} = \infty: A^{\alpha_\psi - \alpha_y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = 1.$$

Исходные уравнения (2.45), (2.43) будут инвариантны относительно преобразования (2.46), только если

$$\alpha_\psi = \alpha_y, \quad 2\alpha_\psi - 2\alpha_y - \alpha_x = \alpha_\psi - 3\alpha_y.$$

Данная система уравнений имеет решение $\alpha_\psi = \alpha_y = 1$, $\alpha_x = 2$. Подставим эти значения в (2.46) и запишем

$$A = \left(\frac{x}{\bar{x}} \right)^{1/2} = \frac{y}{\bar{y}} = \frac{\psi}{\bar{\psi}}.$$

Из этих равенств следует

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} = \eta, \quad \frac{\psi}{\sqrt{x}} = \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{\bar{x}}} = f(\eta).$$

Данное преобразование называется *преобразованием Фолкнера-Скэн* и обычно записывается в виде

$$\psi = \sqrt{x}f(\eta), \quad \eta = y / \sqrt{x}. \quad (2.47)$$

Здесь $f(\eta)$ - новая искомая функция – автомодельная функция тока.

Получим уравнение для f , выполнив замену (2.47) в уравнении (2.45). Для этого необходимо вычислить производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\sqrt{x}}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= f' \equiv \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{f''}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{f'''}{x}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{f}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}f' \frac{\eta}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f - \eta f'), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}}(f - \eta f') \right\} = -\frac{\eta f''}{2x}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (2.45) и после несложных преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (2.48)$$

с граничными условиями, которые следуют из условий (2.43) и определений (2.44), (2.47):

$$\eta = 0: f = 0, f' = 0; \eta = \infty: f' = 1. \quad (2.49)$$

Метод решения нелинейной задачи (2.48), (2.49) обсудим позже, а теперь выполним преобразование Фолкнера-Скэн для уравнения (2.42). При этом учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\eta T'}{2x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T'}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T''}{x}, \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = f', \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\eta f' - f}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.42), после несложных преобразований получим линейную задачу для автомодельной температуры в пограничном слое

$$\frac{1}{\text{Pr}} T'' + \frac{f}{2} T' = 0, \quad T(0) = 0, \quad T(\infty) = 1. \quad (2.50)$$

Получим ее решение. Для этого обозначим $p = T'$ и запишем уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{d\eta} + \frac{\text{Pr}}{2} f p = 0,$$

или

$$\frac{dp}{p} = d(\ln p) = -\frac{\text{Pr}}{2} f(\eta) d\eta.$$

Интегрируем это уравнение и находим

$$p(\eta) = C \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\xi) d\xi \right] = \frac{dT}{d\eta}.$$

Здесь C - постоянная интегрирования. Проинтегрируем полученное уравнение еще раз с учетом граничного условия $T(0) = 0$. Будем иметь

$$T(\eta) = C \int_0^{\eta} \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^z f(\xi) d\xi \right] dz.$$

Константу C найдем из условия на бесконечности $T(\infty) = 1$, и окончательно запишем решение задачи в виде

$$T(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^z f(\xi) d\xi \right] dz}{\int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} f(\xi) d\xi \right] d\eta}. \quad (2.51)$$

Практическое применение формулы (2.51) предполагает вычисление интеграла от функции тока f . Непосредственно из (2.48) получаем

$$f = -2 \frac{f'''}{f''} = -2 \frac{d(\ln f'')}{d\eta},$$

$$\int_0^{\eta} f d\eta = -2 \int_0^{\eta} d(\ln f'') = -2 \ln \left[\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right].$$

Поэтому подынтегральное выражение в (2.51) равно

$$\exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} f(\xi) d\xi \right] = \exp \left[\text{Pr} \ln \left(\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right) \right] = \left(\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right)^{\text{Pr}},$$

а решение (2.51) записывается в виде

$$T(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} [f''(z)]^{\text{Pr}} dz}{\int_0^{\infty} [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta} \quad (2.52)$$

Используем эту формулу для решения главной задачи конвективно-го теплообмена – вычисления безразмерного коэффициента теплоотдачи (2.2). В нашем случае горизонтальной пластинки имеем

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} = \frac{\bar{T}'(0)}{\sqrt{x}}. \quad (2.53)$$

Здесь мы вновь помечаем безразмерные переменные чертой сверху, чтобы отличать их от размерных. Производную T' найдем дифференцируя (2.52):

$$\bar{T}'(0) = \frac{[f''(0)]^{\text{Pr}}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta} \equiv a_1(\text{Pr}). \quad (2.54)$$

Функцию (2.54) табулировал Польгаузен, он показал, что $a_1(\text{Pr}) \approx 0.322 \text{Pr}^{1/3}$. Подставим это формулу в (2.53):

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{x/l}} 0.332 \text{Pr}^{1/3}.$$

Вместо числа Nu вводят локальный критерий $\text{Nu}_x = \alpha x / \lambda = \text{Nu} x / \delta$. Ранее было установлено, что $\delta = l / \sqrt{\text{Re}}$, $\text{Re} = u_e l / \nu$, поэтому последнюю формулу можно записать так

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= \sqrt{\frac{l}{x}} 0.332 \text{Pr}^{1/3} \frac{x}{l} \sqrt{\text{Re}} = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \sqrt{\frac{x u_e l}{l \nu}}, \\ &= 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

где местное число Рейнольдса равно $\text{Re}_x = u_e x / \nu$. Подчеркнем, что степень $1/2$ для числа Рейнольдса в формуле (2.55) для местного числа Нуссельта – это строгий математический результат, а степень $1/3$ для числа Прандтля – это результат аппроксимации кривой (2.54). Зная местное число Нуссельта, можно подсчитать среднюю интенсивность теплоотдачи на участке пластины длиной L :

$$\langle \text{Nu} \rangle_L = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}_x dx, \quad \text{Nu}_x = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2}, \quad \text{Re}_x = \frac{u_e x}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Задание 4. Решить задачу (2.48), (2.49) численно, вычислив при этом не только значение функции, но и двух ее производных.

Указания. 1) Вместо бесконечности взять точку $\eta^0 = 10$. 2) Уравнение третьего порядка представить в виде системы уравнений первого и второго порядка

$$\begin{cases} 2p'' + f p' = 0, & p(0) = 0, & p(\eta^0) = 1; \\ f' = p, & f(0) = 0. \end{cases}$$

Решать методом последовательных приближений.

2.2.8. Конвективный теплообмен в турбулентных течениях

Наблюдения за течением жидкости в природе и технических устройствах в различных условиях позволяют выделить два режима течения: 1) *ламинарное* – слоистое, когда все жидкие частицы двигаются в доминирующем направлении, а поперечные движения отсутствуют, при этом перемешивания «слоев» жидкости не происходит; и 2) *турбулентное* – переплетающееся течение, характеристикой которого является интенсивное перемешивание жидкости в поперечном направлении (см. рис. 2.4 и 2.5). Переход от ламинарного течения к турбулентному определяется критическим числом Рейнольдса Re^* : при $Re < Re^*$ наблюдается ламинарное, а при $Re > Re^*$ – турбулентное течение. Для течения вязкой жидкости в трубе $Re^* \approx 2300$.

Турбулентное перемешивание жидкости приводит к резкому повышению эффективной вязкости жидкости и интенсивности теплообмена. Подавляющее большинство важных для человека течений в природе и технике являются турбулентными.

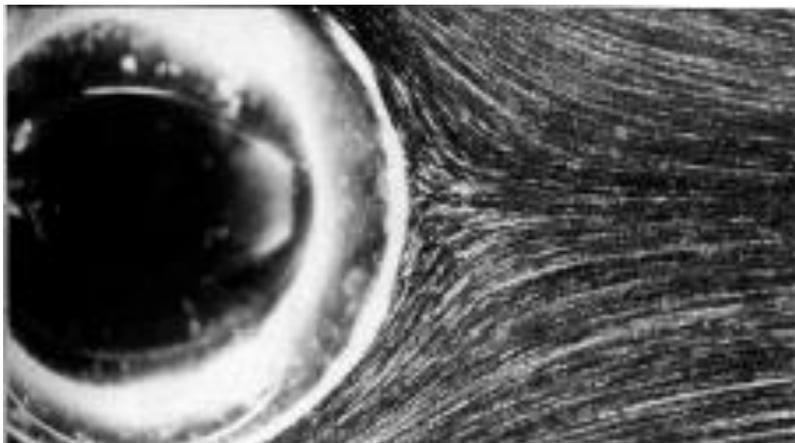


Рис. 2.4. Безотрывное стационарное ламинарное обтекание шара при $Re=8.15$.

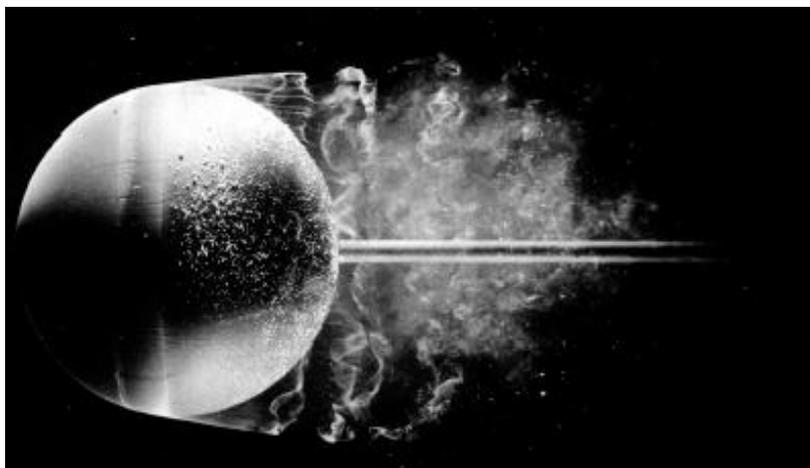


Рис. 2.5. Обтекание шара при $Re=15\ 000$. Ламинарный пограничный слой отрывается перед экватором, но остается ламинарным на длине, почти равной радиусу. Затем слой становится неустойчивым и превращается в турбулентный.

Уравнения Рейнольдса

Замеры реального поведения характеристик турбулентного потока дают следующую картину, рис. 2.6, которая позволила О. Рейнольдсу представить мгновенную характеристику как сумму среднего \bar{u} и пульсации u' .

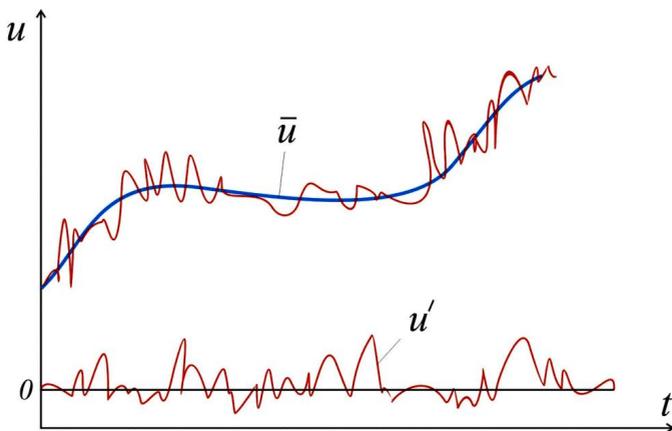


Рис. 2.6. Среднее и пульсация

Представление вида $u = \bar{u} + u'$ тем более продуктивно, что в инженерных приложениях интерес представляют именно средние поля. Под средним значением f в каждый момент времени t понимаем величину

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\tau) d\tau \quad (2.40)$$

где период осреднения должен быть достаточно велик по сравнению с периодом пульсаций, чтобы среднее значение случайной пульсации было равно нулю, но и не столь большим, чтобы не сглаживались глобаль-

ные изменения средних во времени. В дальнейшем предполагается, что операция осреднения удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= 0; \quad \overline{\overline{f}} = \overline{f}; \quad \overline{\overline{f}g} = \overline{\overline{f}g} + \overline{\overline{f}g'} = \overline{f}g; \\ \overline{fg} &= \overline{(\overline{f} + f')(g + g')} = \overline{\overline{f}g} + \overline{\overline{f}g'} + \overline{g'f'} + \overline{fg'} = \overline{f}g + \overline{fg'}; \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}; \quad \overline{\int f ds} = \int \overline{f} ds, \quad s \in \{x, t\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Проведем осреднение по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + g_i; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Подставим в него разложение $u_i = \overline{u}_i + u'_i$, $p = \overline{p} + p'$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\overline{u}_j + u'_j) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta \overline{u}_i + \nu \Delta u'_i + g_i, \\ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned}$$

Применим к этим уравнениям оператор осреднения. Из-за первого и третьего свойств осреднения (2.41) все линейные вхождения пульсаций после осреднения пропадут. Останется

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \overline{u}_i + g_i; \\ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} &= 0; \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Используя уравнение неразрывности, можем записать

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}.$$

Произведение пульсаций называют их корреляцией второго порядка, а величины $\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$ называются *турбулентными напряжениями*,

которые образуют тензор напряжений Рейнольдса. Уравнения (2.42), переписанные в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \\ \tau_{ij} &= -\overline{\rho u_i' u_j'}; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

называются *уравнениями Рейнольдса* (черта над средними опущена). Сравнивая (2.43) с исходной системой уравнений Навье-Стокса, легко заметить, что в осредненных уравнениях появились дополнительный член - дивергенция тензора турбулентных напряжений. Очевидно, модель (2.43) не замкнута, и требуется дополнительно 6 уравнений для компонент симметричного тензора $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Простейший способ замыкания уравнений Рейнольдса состоит в том, чтобы выразить τ_{ij} через характеристики осредненного течения, например

$$\tau_{ij} = \mu_T e_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.44)$$

Коэффициент μ_T называется турбулентной вязкостью, который в отличие от молекулярной вязкости μ не является свойством жидкости, а зависит от особенностей конкретного турбулентного течения. Определение турбулентной вязкости μ_T через средние характеристики потока составляет предмет так называемых полуэмпирических моделей турбулентности.

Тем не менее, выражение (2.44) можно подставить в уравнения (2.43) и получить окончательно уравнения Рейнольдса в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + g_i; \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad v_T = \frac{\mu_T}{\rho}.$$

Простым способом замыкания уравнений (2.45) является модель пути смешения Прандтля, которую для внутренних течений можно сформулировать так:

$$v_T = l^2 |e|, \quad |e| = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad l = \kappa y, \quad (2.46)$$

где l – длина пути смешения, e – тензор скоростей деформаций, $\kappa \approx 0.4$ – постоянная Прандтля, y – расстояние до стенки.

Существуют и другие, более сложные алгебраические, эмпирические и дифференциальные подходы к замыканию уравнений Рейнольдса, большинство из которых сводится к выражению турбулентной вязкости v_T через параметры осредненного течения. Изучение этих моделей турбулентности выходит за рамки настоящего учебного пособия; они являются предметом специального курса «Модели и методы расчета турбулентных течений» [5].

Осредненное уравнение конвективной теплопроводности

Температурное поле в турбулентном потоке тоже испытывает пульсации: $T = \bar{T} + T'$. Если подставить это разложение в линейное уравнение конвективной теплопроводности (2.20), получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial T'}{\partial t} + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{T} + T') = a \Delta T + a \Delta T' + \phi. \quad (2.47)$$

Раскроем скобки в конвективном члене.

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$

При осреднении (2.41) уравнения (2.47) слагаемые с линейными вхождениями пульсаций, как и при выводе уравнений Рейнольдса, обратятся в ноль. В результате получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = a \Delta \bar{T} - \overline{u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}} + \phi. \quad (2.48)$$

Используя уравнение неразрывности для пульсаций скорости, можем представить нелинейный член справа в виде дивергенции турбулентного потока тепла $\overline{\partial(u'_i T') / \partial x_i}$. В отличие от молекулярного потока Фурье $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ этот поток имеет конвективную природу: пульсация температуры T' переносится пульсацией скорости u'_i .

Если умножить уравнение (2.48) на $c\rho$ и вернуться от оператора Лапласа к дивергенции теплового потока \mathbf{q} , получим осредненное уравнение конвективной теплопроводности при турбулентном течении

$$c\rho \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - c\rho \overline{u'_i T'} \right) + f. \quad (2.49)$$

По аналогии с тем, как был введен коэффициент турбулентной вязкости в уравнениях Рейнольдса, можно ввести коэффициент турбулентной теплопроводности λ_T выразив пульсационный поток $q_i^T = -c\rho \overline{u'_i T'}$ через градиент среднего температурного поля:

$$c\rho \overline{u'_i T'} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (2.50)$$

Подставив (2.50) в (2.49), опуская черту над средними и вновь деля на $c\rho$, окончательно получим уравнение для средней температуры в турбулентном потоке

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(a + a_T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \phi, \quad a_T = \frac{\lambda_T}{c\rho}. \quad (2.51)$$

Здесь a_T – турбулентная температуропроводность, которая, в отличие от молекулярной температуропроводности a , не имеет физического смысла. При моделировании турбулентного теплообмена обычно используют турбулентное число Прандтля, чтобы выразить a_T через вихревую вязкость ν_T :

$$\text{Pr}_T = \frac{\nu_T}{a_T}. \quad (2.52)$$

В простейших сдвиговых течениях значение Pr_T близко к единице (равно $0.5 \div 0.9$). Выражение (2.52) позволяет «переложить» все проблемы построения модели турбулентности на определение турбулентной вязкости, при этом турбулентная температуропроводность, входящая в уравнение (2.51), определяется как $a_T = \nu_T / \text{Pr}_T$.

Итак, для моделирования конвективного теплообмена в турбулентных течениях используются уравнения (2.45) и (2.51), (2.52) и дополнительные уравнения для определения вихревой вязкости ν_T ; одно из них имеет вид (2.46).

2.3. Теплообмен в термоконвективных течениях

При нагреве жидкость расширяется, уменьшается ее плотность. Если температурное поле неравномерно, то соответственно распределена и плотность. В поле массовых сил (например, силы тяжести, центробежной силы при вращении) это приводит к возникновению выталкивающих сил и «всплыванию» более легких частей жидкости. Течение, вызванное изменением плотности, называется *естественной* или *свободной* конвекцией. Если изменение плотности вызвано температурой, говорят о термоконвективном течении.

Данный тип течения имеет широкое распространение в природе и технике. Ежедневно мы наблюдаем его при разогреве воды в чайнике или грея руки над батареей отопления или наблюдая дым, поднимающийся из труб промышленных предприятий и жилых домов. На принципе термоконвекции основаны конструкции большинства теплообменных аппаратов – от вентиляции и отопления помещений до охлаждения ядерных реакторов.

2.3.1. Основные уравнения термоконвекции

За основу математического описания термоконвекции возьмем неизотермические уравнения Навье-Стокса. Для простоты и наглядности ограничимся двумерной моделью и декартовой системой координат x, y с вертикальной осью x , направленной против вектора массовых сил $\mathbf{g} = (-g, 0)$. Если изменения плотности не очень велики, то можно принять линейный закон расширения жидкости

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2.53)$$

и *приближение Буссинеска*, согласно которому изменение плотности учитывается только в одном члене уравнений, определяющем плотность массовых сил; в целом же используется модель несжимаемой жидкости.

Определяющая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \rho g, \\ \rho_0 \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{dT}{dt} &= a \Delta T; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

В законе (2.53) β - коэффициент температурного расширения жидкости, а ρ_0 и T_0 - равновесные поля плотности и температуры, при которых движение отсутствует, $u, v = 0$. В состоянии равновесия из (2.54) получаем уравнения гидростатики: $T = T_0, \rho = \rho_0, \partial p_0 / \partial x = -\rho_0 g, \partial p_0 / \partial y = 0$. Они определяют гидростатическое давление p_0 . При $T \neq T_0, \rho \neq \rho_0$ давление будет отличаться от гидростатического на величину \tilde{p} , и можно записать

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \rho_0 g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}.$$

Подставим это выражение и формулу (2.53) в первые два уравнения движения. Будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho_0 g - \rho_0 g [1 - \beta(T - T_0)], \\ \rho_0 \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \mu \Delta v. \end{aligned}$$

В дальнейшем именно отклонение \tilde{p} от гидростатического p_0 будем называть давлением и обозначать буквой p , а вместо ρ_0 будем писать ρ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + g \beta (T - T_0), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Рассмотрим задачу, в которой термоконвективное течение вызвано наличием в жидкости нагревателя размера l с температурой поверхности $T_1 > T_0$. Для такой задачи введем безразмерные переменные

$$\bar{x}, \bar{y} = \frac{x, y}{l}, \quad \bar{t} = \frac{tu_0}{l}, \quad \bar{u}, \bar{v} = \frac{u, v}{u_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \tag{2.56}$$

и перепишем уравнения (2.55) и последние два уравнения (2.54) в виде

$$\begin{aligned}\frac{u_0^2}{l} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{u_0^2}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\nu u_0}{l^2} \bar{\Delta u} + g\beta(T_1 - T_0)\bar{T}, \\ \frac{u_0^2}{l} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{u_0^2}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\nu u_0}{l^2} \bar{\Delta v}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{u_0}{l} \frac{d\bar{T}}{dt} &= \frac{a}{l^2} \bar{\Delta T};\end{aligned}$$

В формулах перехода (2.56) использован масштаб скорости термоконвекции u_0 , который подлежит определению. Поделим первые два уравнения на u_0^2/l , а последнее уравнение – на u_0/l . Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \bar{\Delta u} + \text{Ri} \bar{T}, \quad \text{Ri} = \frac{g\beta l(T_1 - T_0)}{u_0^2}; \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \bar{\Delta v}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 l}{\nu}; \\ \frac{d\bar{T}}{dt} &= \frac{1}{\text{Pe}} \bar{\Delta T}, \quad \text{Pe} = \frac{u_0 l}{\nu};\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы число Ричардсона Ri равнялось единице. Это определяет характерную скорость термоконвекции $u_0 = \sqrt{g\beta l(T_1 - T_0)}$. В результате получим окончательную систему уравнений теплообмена при естественной конвекции (черту над безразмерными величинами опускаем):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + T; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v;\end{aligned}\tag{2.56}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T.$$

Заметим, что согласно (2.56) безразмерная равновесная температура равна нулю, а температура нагревателя – единице; относительный размер нагревателя порядка единицы.

Решение задачи (2.56) определяется двумя критериями подобия – числами Рейнольдса и Пекле. В теории термоконвекции часто используют два других параметра – числа Грасгофа и Прандтля

$$\text{Gr} = \text{Re}^2 = \frac{g \beta l^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}}. \quad (2.57)$$

2.3.2. Естественная конвекция в канале с нагревателем

Уравнения (2.56) используем для моделирования теплообмена при естественной конвекции в открытом вертикальном канале с теплоизолированными стенками и помещенным внутрь нагревателем. Схема течения показана на рис. 2.7.

Граничные условия для этой задачи будут следующими. На боковых стенках γ_0, γ_2 задаются условия прилипания и теплоизоляции

$$x, y \in \gamma_0, \gamma_2: u, v = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (2.58)$$

На поверхности нагревателя γ_1 ставятся условия прилипания, и задается температура нагревателя:

$$x, y \in \gamma_1: u_n, u_s = 0, \quad T = 1, \quad (2.59)$$

где n и s – нормаль и касательная к контуру γ_1 .

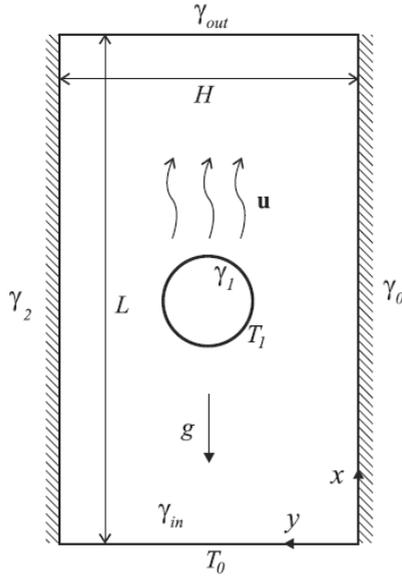


Рис. 2.7. Схема термоконвективного течения в вертикальном канале

Подчеркнем, что здесь и далее нормаль n - внешняя к границе области, а касательная s совпадает с таким направлением обхода границы, при котором локальная система координат s, n является правой. Так, для правой стенки канала γ_0 $n = -y, s = -x$, для левой стенки γ_2 $n = y, s = x$, для поверхности круглого нагревателя γ_1 нормаль направлена к его центру, а положительное направление s соответствует обходу контура против часовой стрелки.

На входной границе γ_{in} задаются равновесные температура и давление, а также отсутствие поперечной компоненты скорости:

$$x, y \in \gamma_{in} : u = Q(t) / H, v = 0, T = 0, p = 0. \quad (2.60)$$

В выходном сечении канала γ_{out} следует поставить «мягкие» граничные условия, обеспечивающие свободный выход потока. Обычно для этого используются те же уравнения (2.56), в которых отброшены вяз-

кость и теплопроводность, т.е. $Pe^{-1} = Re^{-1} = 0$. Кроме того, следует задать $p = 0$. Подчеркнем, что специфика задачи о свободной конвекции состоит в том, что расход Q жидкости в канале заранее не известен; формула для продольной скорости в (2.60) задет лишь её равномерный профиль.

Теплосъём с поверхности нагревателя в каждой точке его поверхности местным числом Нуссельта, а в целом – интегральным числом Нуссельта

$$Nu = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma_1}, \quad \langle Nu \rangle = \frac{1}{|\gamma_1|} \int_{\gamma_1} Nu(s) ds.$$

Здесь n - внешняя нормаль к границе γ_1 , а ds - элемент длины обтекаемого контура.

Для численного решения поставленной плоской задачи теплообмена удобно перейти к преобразованным переменным, как это было сделано в п. 2.2.5. Определяющая система уравнений для функции тока ψ и завихренности ω имеет вид (2.25)

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \omega; \quad u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial\omega}{\partial t} + u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \Delta\omega - \frac{\partial T}{\partial y}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pe} \Delta T. \end{aligned} \quad (2.61)$$

При записи правой части второго уравнения этой системы было учтено, что в формулировке (2.25) источник $f = \partial g_y / \partial x - \partial g_x / \partial y$, а у нас $g_x = T$, $g_y = 0$.

Переформулируем граничные условия (2.58) – (2.60) в терминах преобразованных переменных ψ, ω . При этом будем пользоваться опреде-

лением функции тока и завихренности вблизи произвольно ориентированного участка границы γ с внешней нормалью n и касательной s :

$$u_s = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad u_n = -\frac{\partial \psi}{\partial s}; \quad \omega = \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial n} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right). \quad (2.62)$$

На твердой стенке $u_n = u_s = 0$, поэтому из (2.62) получаем условие прилипания

$$x, y \in \gamma: \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \psi = C(t); \quad \omega = -\frac{\partial u_s}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}. \quad (2.63)$$

Функции $C(t)$ для каждой твердой границы заранее не известны, однако, поскольку сама функция тока ψ является потенциалом и определяется с точностью до произвольной функции времени (в постановке задачи участвуют только её производные по пространственным координатам), на одной из границ можно положить $\psi = 0$. С учетом сказанного граничные условия (2.58) - (2.60) можно записать так:

$$x, y \in \gamma_0: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (2.64)$$

$$x, y \in \gamma_2: \quad \psi = Q(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (2.65)$$

$$x, y \in \gamma_1: \quad \psi = C(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad T = 1. \quad (2.66)$$

$$x, y \in \gamma_{in}: \quad \psi = \frac{Qy}{H}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad T = 0. \quad (2.67)$$

Мягкие граничные условия в выходном сечении γ_{out} называются *конвективными граничными условиями* и имеют вид

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0.$$

Функция $Q(t)$ в (2.65) - расход жидкости в канале, и функция $C(t)$ в (2.66) - расход между правой стенкой γ_0 и нагревателем γ_1 - подлежат определению. Для этого необходимы дополнительные соотношения. Получим их, спроектировав уравнение Навье-Стокса в естественных переменных (2.56) на границу обтекаемых тел γ_1 и γ_2 . Для произвольного, учитывая условия прилипания, получим

$$x, y \in \gamma: 0 = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} + T \cos(s, x)$$

Учитывая последнее равенство (2.63), можно записать $\partial^2 u_s / \partial n^2 = -\partial \omega / \partial n$, и

$$x, y \in \gamma: \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} + T \cos(s, x). \quad (2.68)$$

Данное граничное условие называется условием Пирсона. Оно, в частности, позволяет вычислить распределение давления по контуру тела, если известны температура и завихренность:

$$x, y \in \gamma: p(s) = p(0) + \int_0^s \left[-\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} + T \cos(s, x) \right] ds.$$

Если контур замкнутый, или разомкнутый, но на его концах давление одинаково, получаем интегральное условие Пирсона

$$x, y \in \gamma: \int_{\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \text{Re} \int_{\gamma} T \cos(s, x) ds. \quad (2.69)$$

Для контура γ_1 (нагреватель) $T = 1$, поэтому правая часть (2.69) равна нулю, т.к. интеграл функции $\cos(s, x)$ по замкнутому контуру равен нулю. Для разомкнутого контура γ_2 (левая вертикальная стенка) $\cos(s, x) = 1$, но $T \neq \text{const}$. Из (2.69) получаем два дополнительных нелокальных граничных условия

$$\int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0; \quad \int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} T ds, \quad (2.70)$$

которые можно использовать для определения функций $Q(t)$ и $C(t)$.

2.3.3. Метод численного решения

Дискретизация системы (2.61) по времени с шагом τ проводится таким образом, чтобы избавиться от нелинейности уравнения переноса завихренности:

$$\omega - \frac{\tau}{\operatorname{Re}} \Delta \omega = \tilde{\omega} - \tau \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tau F, \quad F = -\frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.71)$$

$$-\Delta \psi = \tilde{\omega} \quad (2.72)$$

$$T - \frac{\tau}{\operatorname{Pe}} \Delta T = \tilde{T} - \tau \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} \quad (2.73)$$

Здесь использовано стандартное обозначение $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$. На каждом временном слое $t_k = k\tau$ уравнения (2.72), (2.73) решаются с граничными условиями (2.64) – (2.66) на твердых стенках γ_i , причем условия Дирихле используется для уравнения (2.72), а с помощью «лишних» условий Неймана для ψ формулируются граничные условия первого рода для ω

$$x, y \in \gamma_i: \omega = \tilde{\omega}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.74)$$

Функция $\tilde{\omega}$ в (2.74) – это след на границе γ_i функции

$$\tilde{\omega}(x, y) = -\Delta \psi; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\gamma_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.75)$$

Запись (2.75) надо понимать следующим образом. Вначале решается уравнение (2.72) с граничными условиями 1-го рода (2.64) – (2.66), в результате определяется функция ψ . Затем эта функция «подправляется» на границе так, чтобы выполнялось граничное условие Неймана

(2.75). Поэтому функция $\tilde{\omega}$, вообще говоря, не равна функции $\check{\omega}$ в правой части уравнения (2.72).

На каждом временном слое функции $C(t_k), Q(t_k)$ суть константы. При этом в силу линейности полудискретизованной схемы (2.71) - (2.73) функция тока ψ и завихренность ω на текущем временном слое линейно зависит от констант C, Q :

$$\psi = \psi^* + C\psi^1 + Q\psi^2, \quad \omega = \omega^* + C\omega^1 + Q\omega^2. \quad (2.76)$$

Здесь $\psi^*, \psi^1, \psi^2, \omega^*, \omega^1, \omega^2$ - вспомогательные функции, для которых ниже будут получены определяющие уравнения, а C, Q - искомые константы. Чтобы получить для них систему двух алгебраических уравнений, подставим представление (2.76) для ω в нелокальные граничные условия (2.70):

$$\int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds + C \int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^1}{\partial n} ds + Q \int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^2}{\partial n} ds = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds + C \int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega^1}{\partial n} ds + Q \int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega^2}{\partial n} ds = \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} T ds;$$

или

$$\begin{cases} a_{11}C + a_{12}Q = f_1, \\ a_{21}C + a_{22}Q = f_2, \end{cases}$$

$$a_{11} = \int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^1}{\partial n} ds, \quad a_{12} = \int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^2}{\partial n} ds, \quad f_1 = - \int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds; \quad (2.77)$$

$$a_{21} = \int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega^1}{\partial n} ds, \quad a_{22} = \int_{\gamma_2} \frac{\partial \omega^2}{\partial n} ds, \quad f_2 = \int_{\gamma_2} \left(\operatorname{Re} T - \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \right) ds;$$

Коэффициенты $\{a_{ij}\}$ и правая часть f_i системы уравнений (2.77) могут быть вычислены, если известны функции $\omega^{*,1,2}, T$. Функции $\psi^*, \psi^{1,2}$

находятся из решений вспомогательных задач, полученных после подстановки представления (2.76) функции тока в линейное уравнение Пуассона (2.72):

$$-\Delta\psi^* - C\Delta\psi^1 - Q\Delta\psi^2 = \tilde{\omega}.$$

Константы C, Q следует рассматривать как независимые, поэтому последнее уравнение разбивается на три уравнения:

$$-\Delta\psi^* = \tilde{\omega}; \quad -\Delta\psi^1 = 0; \quad -\Delta\psi^2 = 0. \quad (2.78)$$

Граничные условия Дирихле для этих уравнений получаются подстановкой представления (2.76) в граничные условия первого рода из (2.64) - (2.67):

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_0 : \psi^* + C\psi^1 + Q\psi^2 &= 0; \\ x, y \in \gamma_1 : \psi^* + C\psi^1 + Q\psi^2 &= C; \\ x, y \in \gamma_2 : \psi^* + C\psi^1 + Q\psi^2 &= Q; \\ x, y \in \gamma_{in} : \psi^* + C\psi^1 + Q\psi^2 &= Qy / H; \end{aligned}$$

При произвольных C, Q эти равенства справедливы, если выполняются следующие граничные условия для уравнений (2.78):

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_0 : \psi^* &= 0, \quad \psi^1 = 0, \quad \psi^2 = 0; \\ x, y \in \gamma_1 : \psi^* &= 0, \quad \psi^1 = 1, \quad \psi^2 = 0; \\ x, y \in \gamma_2 : \psi^* &= 0, \quad \psi^1 = 0, \quad \psi^2 = 1; \\ x, y \in \gamma_{in} : \psi^* &= 0, \quad \psi^1 = 0, \quad \psi^2 = y / H; \end{aligned} \quad (2.79)$$

Вспомогательные задачи (2.78), (2.79) не содержат констант C, Q . Кроме того, уравнения для ψ^1 и ψ^2 не зависят от времени, поэтому могут быть решены один раз до начала счета. Аналогично, подставляя представление (2.76) функции ω в уравнение (2.71), можно получить

уравнения для вспомогательных функций ω^* , ω^1 , ω^2 , которые мы запишем в операторном виде:

$$\begin{aligned} A\omega^* &= b; \quad A\omega^1 = 0, \quad A\omega^2 = 0, \\ A &= E - \frac{\tau}{\text{Re}} \Delta, \quad b = -\tau \check{\mathbf{u}} \cdot \nabla \check{\omega} + \tau F + \check{\omega}, \quad F = -\frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Здесь E - единичный оператор. Граничные условия для уравнений (2.80) на твердых стенках получаются в результате подстановки (2.76) в граничные условия (2.74) и уравнения (2.75). Приравнивая множители при C, Q , получим

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \omega^* &= \check{\omega}^*; \quad \check{\omega}^*(x, y) = -\Delta \psi^*, \quad \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right|_{\gamma_i} = 0; \quad i = 0, 1, 2; \\ x, y \in \gamma_i : \omega^1 &= \check{\omega}^1; \quad \check{\omega}^1(x, y) = -\Delta \psi^1, \quad \left. \frac{\partial \psi^1}{\partial n} \right|_{\gamma_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2; \\ x, y \in \gamma_i : \omega^2 &= \check{\omega}^2; \quad \check{\omega}^2(x, y) = -\Delta \psi^2, \quad \left. \frac{\partial \psi^2}{\partial n} \right|_{\gamma_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2; \end{aligned} \quad (2.81)$$

На входной границе γ_{in} при однородной эпюре входной скорости завихренность $\check{\omega}^* = \check{\omega}^1 = \check{\omega}^2 = 0$; на γ_{out} для всех функций ставятся конвективные граничные условия.

В уравнениях (2.80) для ω^1, ω^2 правые части равны нулю, а граничные условия для них зависят только от ψ^1, ψ^2 , которые, как отмечалось ранее, не меняются со временем. Следовательно, и функции $\omega^{1,2}$ могут быть найдены до начала вычислений. Непосредственно на каждом временном слое нужно решить задачи лишь для функций ψ^*, ω^* после чего

найти константы C, Q из системы (2.77). Тогда значения искомого функций ψ, ω на временном слое будут получены по формулам (2.76).

Для определения коэффициентов a_{ij} и правой части f_i системы (2.77) необходимо найти значения нормальных производных $\partial\omega^*/\partial n, \partial\omega^j/\partial n$ на твердых стенках. Ниже представлен способ вычисления этих производных в рамках метода конечных элементов.

Чтобы определить значение производной $\partial\omega^*/\partial n$ в узле $p_i = (x_i, y_i)$ конечноэлементной (МКЭ) сетки, лежащем на границе γ . Для этого первое из уравнений (2.80) домножается на базисную функцию $\phi_i(x, y)$, равную единице в узле p_i и нулю во всех остальных. После интегрирования по области с использованием формулы Гаусса-Остроградского можно записать соотношение

$$\int_{\gamma} \frac{\partial\omega^*}{\partial n} \phi_i' ds = \frac{\text{Re}}{\tau} \int_D (\omega^* \phi_i + \frac{\tau}{\text{Re}} \nabla\omega^* \cdot \nabla\phi_i - b\phi_i) dD \equiv \Phi_i^* \quad (2.82)$$

где ϕ_i' – след базисной функции ϕ_i на границе γ . Интеграл в левой части уравнения (2.82) вычислим с помощью квадратурной формулы

$$\int_{\gamma} f(s) ds \approx \sum_j f(s_j) h_j, \quad h_j = \int_{\gamma} \phi_j' ds$$

в которой s_j – узлы квадратуры, совпадающие с узлами сетки, а h_j – весовые коэффициенты. Заменяя в этой формуле f на $\phi_i' \partial\omega^*/\partial n$ и учитывая свойство базисной функции $\phi_i'(p_j) = \delta_i^j$, можно записать

$$\int_{\gamma} \frac{\partial\omega^*}{\partial n} \phi_i' ds \approx \sum_j \frac{\partial\omega_j^*}{\partial n} \phi_i'(p_j) h_j = \frac{\partial\omega_i^*}{\partial n} h_i. \quad (2.83)$$

Тогда после замены левой части (2.82) на (2.83) искомую производную в граничном узле p_i можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial \omega_i^*}{\partial n} = \frac{\Phi_i^*}{\hbar_i}. \quad (2.84)$$

Аналогичные выражения для узловых значений $\partial \omega_i^j / \partial n$ имеют вид

$$\frac{\partial \omega_i^{1,2}}{\partial n} = \frac{\Phi_i^{1,2}}{\hbar_i}, \quad \Phi_i^{1,2} = \int_D \left(\frac{\text{Re}}{\tau} \omega^{1,2} \phi_i + \nabla \omega^{1,2} \cdot \nabla \phi_i \right) dD \quad (2.85)$$

Итак, алгоритм численного решения нестационарной задачи (2.61) состоит из шага инициализации и цикла по времени.

На шаге инициализации сначала решаются задачи (2.78) с граничными условиями Дирихле (2.79) для вспомогательных функций ψ^1, ψ^2 . Эти функции подставляются в соотношения (2.81), из которых находятся функции $\tilde{\omega}^{1,2} = \omega^{1,2} \Big|_\gamma$. Сами функции $\omega^{1,2}(x, y)$ находятся как решения задач (2.80) с граничными условиями (2.81). По формулам (2.85) подсчитываются производные $\partial \omega_i^{1,2} / \partial n$, после чего вычисляются коэффициенты a_{ij} системы уравнений (2.77).

На каждом шаге временного цикла сначала решается одна задача Дирихле (2.78), (2.79) для вспомогательной функции ψ^* . Она подставляется в соотношение (2.81), из которого находятся функция $\tilde{\omega}^* = \omega^* \Big|_\gamma$. Затем рассчитывается температура T с помощью уравнения (2.73) при граничных условиях (2.64) – (2.67). Полученное решение T подставляется в правую часть b уравнения (2.80), решением которого является функция ω^* . Далее, по формуле (2.84) подсчитываются производные $\partial \omega_j^* / \partial n$ и определяются значения f_1, f_2 правой части системы уравне-

ний (2.77). Решение этой алгебраической системы дает константы C, Q , которые вместе с найденными вспомогательными функциями $\psi^*, \psi^i, \omega^*, \omega^i$ позволяет получить решение ψ, ω задачи на текущем временном слое по формулам (2.76).

2.3.4. Результаты численного моделирования термоконвекции

В данном разделе будут представлены некоторые результаты численного моделирования свободной конвекции около одиночных изопериметрических нагревателей круговой (с диаметром 1) и профилированной (NACA 0040) формы при $Pr = 0.72, 10^3 < Gr < 10^5$. Нагреватель в каждом примере был расположен в канале длины $L=60$ ширины $H=5$ на расстоянии 15 от входного сечения.

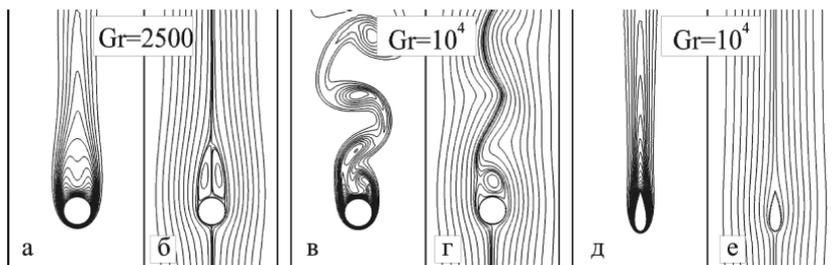


Рис. 2.8: Изотермы (а, в, д) и линии тока (б, г, е) конвективного течения

Для кругового нагревателя в зависимости от числа Gr наблюдается стационарное ($Gr < Gr^* \approx 3 \cdot 10^3$) либо периодическое ($Gr > Gr^*$) течение. Изотермы и линии тока установившегося стационарного обтекания при $Gr = 2500$ представлены на рис. 2.8 а,б. При $Gr > Gr^*$ термоконвективное течение характеризуется периодическим срывом вихрей с цилиндра и формированием вихревой дорожки Кармана в следе (рис. 2.8 в, г). Для профилированного нагревателя в указанном диапазоне параметров течение стационарно (рис. 2.8 д, е).

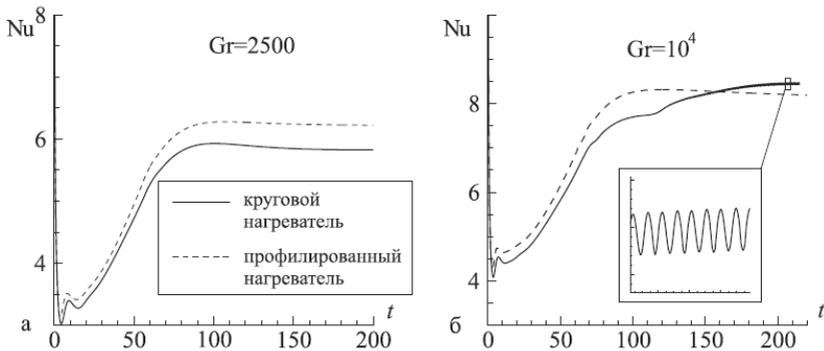


Рис. 2.9. Установление во времени интегрального числа Нуссельта при конвекции около одиночных нагревателей при $Gr = 2500$, $Gr = 10^4$

На рис. 2.9 показано установление интегрального числа Нуссельта для $Gr = 2500$ и $Gr = 10^4$. Видно, что для установившегося течения при $Gr = 2500$ теплоотдача профилированного нагревателя превышает теплоотдачу кругового. Этот эффект объясняется двумя факторами: во-первых, круговой цилиндр создает большее сопротивление потоку и сильнее препятствует росту расхода в канале, что, в свою очередь, ведет к меньшей интенсивности конвективного теплообмена; во-вторых, стационарный режим обтекания кругового цилиндра характеризуется наличием застойной вихревой зоны в хвостовой части цилиндра, где теплообмен особенно затруднен. В случае же $Gr=10^4$ формирование вихревой дорожки в следе за круговым нагревателем в момент $t \approx 130$ значительно повышает интенсивность теплообмена. Большее количество подведенного в жидкость тепла, в свою очередь, повышает и суммарный расход жидкости в канале. В этом случае значения Nu для кругового нагревателя превышают соответствующие значения для профиля.

На рис. 2.10 представлена зависимость интегрального критерия теплообмена Nu и местного числа Рейнольдса Re от числа Грасгофа Gr . Сравнение значений Nu для кругового и профилированного нагревате-

лей показывает, что в указанном диапазоне параметров при $Gr > Gr^*$ теплоотдача кругового нагревателя оказывается более интенсивной.

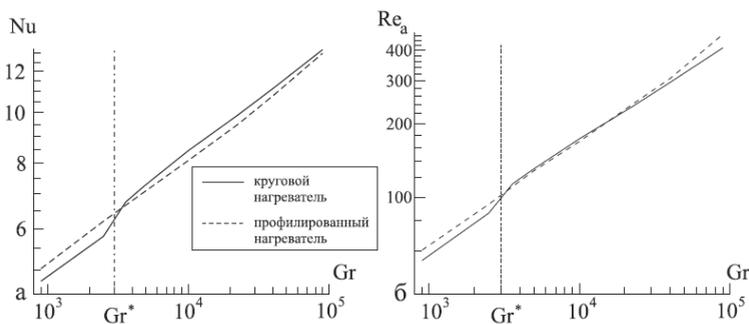


Рис. 2.10. Интегральное число Нуссельта и местное число Рейнольдса в зависимости от числа Грасгофа

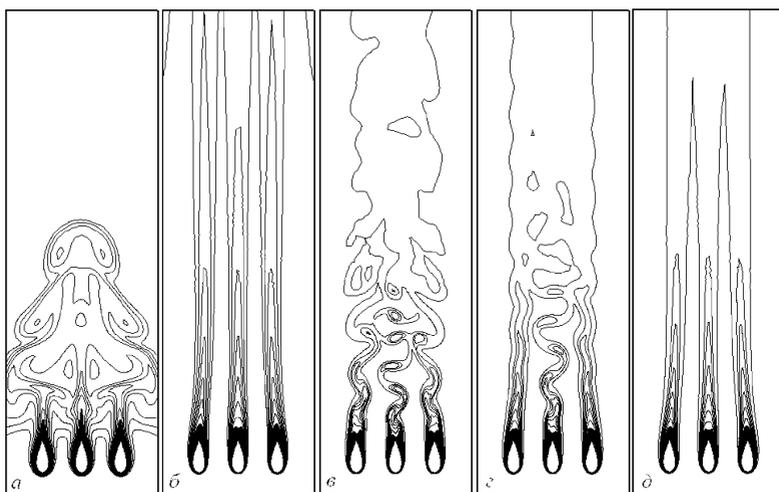


Рис. 2.11. Поле температур при течении около профилированных нагревателей на моменты времени а) $t = 20$, б) $t = 50$, в) $t = 80$, г) $t = 140$, д) $t = 360$

Скорость течения жидкости в канале с круговым нагревателем превышает скорость конвекции около профилированного нагревателя в диапазоне $Gr < Gr^* < 1.5 \cdot 10^4$. Таким образом, при $Gr > 1.5 \cdot 10^4$ в случае

профилированного нагревателя на течение с большей скоростью тратится меньше тепловой энергии.

В заключение раздела заметим, что представленный выше метод расчета термоконвективных течений без труда обобщается на случай нескольких нагревателей, а также на режим смешанной конвекции.

На рис. 2.11 показано развитие температурного поля над тремя профилированными нагревателями. На начальном этапе над нагревателями образуются температурные факелы, которые объединяются в один (рис. а). При этом конвекция в основном наблюдается около нагреваемых тел, скорость течения непосредственно над ними максимальна. С расширением зоны прогрева жидкости увеличивается тяга канала, а нагреватели становятся препятствиями для течения, и в ближнем следе над нагревателями продольная скорость достигает локальных минимумов. В это же время течение разгоняется до больших скоростей между телами (рис. б), увеличивается расход, что приводит к нарушению симметрии конвективного течения и образованию вихревой дорожки (рис. в). Однако нагрев жидкости сосредоточен непосредственно над нагревателями, а жидкость у стенок остается непрогретой. Поэтому течение начинает постепенно замедляться, а вихревая дорожка затухать. Из-за того, что скорость в середине канала больше, чем около стенок, сначала пропадает дорожка над крайними телами (рис. г), а затем и над средним (рис. д). Таким образом, течение выходит на стационарный режим.

Глава 3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

В природе и технике часто встречаются процессы конвекции и теплопроводности в условиях, при которых происходит изменение фазового (агрегатного) состояния вещества: плавление-кристаллизация, испарение-конденсация. В природе регулярно наблюдаем плавление и кристаллизацию воды в виде замерзания водоемов поздней осенью и таяния льдов весной. В быту мы имеем дело с плавлением и кристаллизацией кулинарных жиров, испарением и конденсацией воды в процессе приготовления пищи, а также при сушке белья. Широкое распространение фазовые превращения получили в технике: они составляют основу технологий металлургии и сварки, используются в разнообразных теплообменных аппаратах – от бытового кондиционера до промышленной градирни. В каждом из этих фазовых переходов наблюдается поглощение (при плавлении и испарении) либо выделение (при кристаллизации и конденсации) энергии.

С точки зрения математического описания все виды фазовых переходов имеют много общего, поскольку сводятся к формулировке баланса тепловой энергии на границе γ раздела фаз (жидкость – пар при испарении или конденсации, расплав – твердое тело при плавлении или кристаллизации). Однако следует отметить характерные особенности каждого из них.

Конденсация. При соприкосновении пара со стенкой, температура которой ниже температуры насыщения при данном давлении, происходит конденсация, т.е. выпадение жидкости (конденсата) на стенке в виде пленки или капель. Возможна и смешанная конденсация, когда часть поверхности покрыта пленкой, а часть – каплями. В большинстве техни-

ческих устройств встречается пленочная конденсация. Капельная конденсация наблюдается только на несмачивающихся поверхностях. Освобождающееся при конденсации тепло передается холодной стенке. При пленочной конденсации теплопередача осуществляется через слой конденсата, который создает значительное термическое сопротивление. При капельной конденсации возможен непосредственный контакт пара со стенкой, поэтому теплообмен протекает намного более интенсивно.

При пленочной конденсации перегретого пара температура конденсата на поверхности пленки несколько ниже температуры насыщения из-за термического сопротивления, обусловленного фазовым переходом. Для водяного пара при атмосферном давлении эта разница составляет сотые доли градуса, поэтому в инженерных расчетах не учитывается. Однако при понижении давления данный эффект может быть заметным.

При пленочной конденсации на вертикальной стенке конденсат стекает вниз под действием гравитации. При этом толщина пленки и скорость течения возрастают в направлении движения. Поэтому неизбежно, что на начальном участке (в верхней части) движение пленки ламинарно, затем на поверхности пленки возникают микроволны, благодаря которым средняя толщина пленки и её термическое сопротивление снижаются, а интенсивность теплопередачи растет. Далее вниз по течению возникают турбулентные пульсации скорости, и теплообмен резко возрастает.

Если пар содержит примеси неконденсируемых газов, то они скапливаются около межфазной поверхности и значительно снижают интенсивность теплообмена. Так, 2% воздуха в водяном паре снижают коэффициент теплоотдачи почти в 3 раза.

Термическое сопротивление пленки пропорционально её толщине. Поэтому шероховатость стенки, снижающая скорость течения, способ-

ствует росту толщины пленки и ухудшает теплообмен. Спутный поток пара разгоняет и утоньшает пленку, что приводит к интенсификации теплообмена. Противоток, напротив, тормозит и утолщает пленку конденсата, что приводит к ухудшению теплопередачи.

Испарение. При испарении жидкости с поверхности пленки имеет место тот же баланс тепловой энергии, что и при конденсации. Часть тепла, подводимая от горячего газового потока к межфазной поверхности, тратится на испарение, а оставшаяся часть расходуется на подогрев жидкости. Если на испарение расходуется вся тепловая энергия, то пленка приобретет постоянную температуру, и тепло в стенку передаваться не будет. Такой процесс испарения называется адиабатическим, он используется для тепловой защиты.

Аналогично протекает процесс испарения твердого тела. Если температура поверхности меньше температуры в тройной точке фазовой диаграммы, вещество переходит из твердого состояния в газообразное, минуя жидкую фазу. Такой процесс называется сублимацией или возгонкой.

Следует отметить еще одну особенность испарения жидкости в поток парогазовой смеси. Обозначим через m_V, m_G концентрации пара и газа у поверхности испарения γ с внутренней нормалью n . Справедливы очевидные соотношения

$$m_V + m_G = 1, \quad \frac{\partial m_V}{\partial n} = -\frac{\partial m_G}{\partial n}. \quad (3.1)$$

Для простоты примем равенство плотностей $\rho_v = \rho_g = \rho$. Молекулярный поток пара от поверхности испарения и молекулярный поток газа к этой поверхности вычисляется по закону Фика

$$q_V^m = -\rho D \frac{\partial m_V}{\partial n} > 0, \quad q_G^m = -\rho D \frac{\partial m_G}{\partial n} < 0, \quad (3.2)$$

где D - коэффициент диффузии. Но поверхность γ непроницаема для газа, поэтому молекулярный приток газа к поверхности приводит к неограниченному росту газового слоя. Стационарное состояние возможно лишь в том случае, когда молекулярный приток q_G^m компенсируется конвективным потоком парогазовой смеси со скоростью $u > 0$, чтобы полный поток газа был равен нулю:

$$q_G = \rho m_G u - \rho D \frac{\partial m_G}{\partial n} = 0.$$

Отсюда с учетом формул (3.1), (3.2) находим скорость *стефанового потока*

$$u = \frac{D}{m_G} \frac{\partial m_G}{\partial n} = -\frac{D}{m_G} \frac{\partial m_V}{\partial n}.$$

Полный поток пара от поверхности γ будет равен

$$\begin{aligned} q_V &= \rho m_V u + q_V^m = -\rho m_V \frac{D}{m_G} \frac{\partial m_V}{\partial n} - \rho D \frac{\partial m_V}{\partial n} = \\ &= -\rho \left(\frac{m_V}{m_G} + 1 \right) D \frac{\partial m_V}{\partial n} = -\rho \left(\frac{m_V + m_G}{m_G} \right) D \frac{\partial m_V}{\partial n} = -\frac{\rho D}{m_G} \frac{\partial m_V}{\partial n}. \end{aligned}$$

Эту формулу иногда называют уравнением Стефана. При малых скоростях испарения конвективный стефанов поток можно не учитывать и записать

$$q_V = -\rho D \frac{\partial m_V}{\partial n} \Big|_{\gamma} = \beta (m_V - m_e). \quad (3.3)$$

Здесь β - коэффициент массоотдачи, а m_e - концентрация пара в основном потоке, за пределами диффузионного пограничного слоя. Последнее соотношение удобно переписать в безразмерных переменных

$$C = \frac{m_V - m_e}{m_0 - m_e}, \quad m_0 = m_s(T_0); \quad y = \frac{n}{\delta}, \quad \text{Nu}_D = \frac{\beta\delta}{\rho D},$$

где $m_s(T_0)$ - концентрация насыщенного пара при температуре T_0 поверхности γ , δ - толщина пограничного слоя, а Nu_D - диффузионное число Нуссельта. В этих терминах соотношение $(3m_V|_\gamma = m_0, m_V|_\infty = m_e.3)$ и равенства приобретает вид граничных условий

$$y = 0: -\frac{\partial C}{\partial y} = \text{Nu}_D, \quad C = 1; \quad C(\infty) = 0$$

для задачи о концентрации пара в пограничном слое. Решив эту задачу, можно найти коэффициенты массообмена Nu_D и β , и в дальнейшем в расчетах пользоваться простой формулой (3.3).

Плавление и кристаллизация. Плавление твердых тел происходит под действием источников тепла (нагревателей). Это могут быть внутренние массовые источники, как при плавлении металла в индукционных печах; распределенные поверхностные, как в электродуговых печах; концентрированные поверхностные, как при электродуговой сварке, либо сосредоточенные внутренние, как при электронно-лучевой или лазерной сварке. Вначале материал нагревается, сохраняя кристаллическую структуру, но при достижении в некоторой точке или области вблизи источника температуры плавления T_f происходит превращение в жидкое состояние с образованием расплава. При этом повышения температуры не происходит, а тепловая энергия нагревателя расходуется на плавление. Разумеется, если вкладывать энергию в жидкую фазу, то её температура будет повышаться (при $T > T_f$ говорят о перегретом расплаве), однако на межфазной границе температура постоянна и равна T_f . При кристаллизации, напротив, происходит охлаждение перегретого

расплава до точки плавления T_f и возникновение кристаллов, которые формируют решетку и обеспечивают превращение жидкой фазы в твердую. При этом выделяется такое же количество энергии, какое было поглощено при плавлении.

При плавлении и кристаллизации чистых веществ наблюдается четкая граница между фазами. Фазовые переходы в металлических сплавах и других веществах сложного строения сопровождаются образованием переходных зон конечного размера, в которых вещество находится в промежуточном состоянии при температуре T_f .

3.1. Классическая двухфазная задача Стефана

Приводятся в контакт две фазы: жидкая (ликвидус) при температуре $T_l > T_f$ и твердая (солидус) при температуре $T_s < T_f$. Здесь T_f - температура фазового перехода, т.е. температура плавления и кристаллизации. Для воды $T_f = 273K$, для стали $T_f = (1400 + 273) K$. Фазовый переход сопровождается поглощением тепловой энергии при плавлении и выделении энергии при кристаллизации. Для каждого чистого вещества это константа L , Дж/кг. Для воды $L = 0.334 \cdot 10^6$ Дж/кг, а для стали $L = 0.205 \cdot 10^6$ Дж/кг.

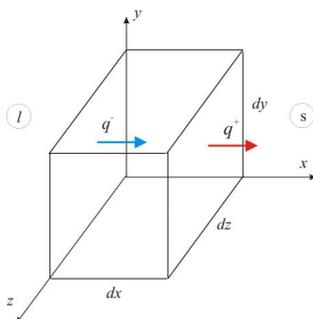


Рис. 3.1. К выводу граничного условия Стефана

Для вывода соотношения на контакте ликвидуса и солидуса рассмотрим тепловой баланс при плавлении элементарного объема вещества $dV = dx dy dz = dx dS$ за время dt , когда межфазная граница x_f переместилась слева - направо на расстояние $dx = v dt$, $v \equiv dx_f / dt$, $dS = dy dz$, рис. 17. За это время слева (со стороны ликвидуса) в контрольный объем поступило тепло, равное

$$Q^- = -q_n^- dS dt = \lambda^- \frac{\partial T^-}{\partial n} dS dt = -\lambda^- \frac{\partial T^-}{\partial x} dS dt > 0.$$

Знак минус появился для того, чтобы положительным считался поток тепла, направленный *внутрь* объема (n - внешняя нормаль). Часть его отвелась через правую грань в область солидуса:

$$Q^+ = -q_n^+ dS dt = \lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial n} dS dt = -\lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial x} dS dt < 0,$$

а другая часть

$$Q_f = \rho dV L = \rho L v dt dS > 0$$

пошла на расплавление вещества. Баланс тепа выглядит так:

$Q^- + Q^+ = Q_f$, или

$$\lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial T^-}{\partial x} \equiv \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \rho L v = \rho L \frac{dx_f}{dt}. \quad (3.4)$$

Это соотношение описывает движение межфазной границы и вместе с равенством $T(x_f) = T_f$ называется условием Стефана. Производные T по x , входящие в (3.4) и значения коэффициента теплопроводности, помеченные значками \pm , следует понимать как предельные значения соответствующих величин при стремлении x к границе x_f с разных сторон;

$$[p]_{x=x_f} = \lim_{x \rightarrow x_f + 0} p - \lim_{x \rightarrow x_f - 0} p$$

- скачок функции p в точке x_f .

Классическая формулировка двухфазной задачи Стефана имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f,$$

$$x \in D_l = (-\infty, x_f(t)), \quad x \in D_s = (x_f(t), \infty), \quad t > 0. \quad (3.5)$$

$$t = 0: T = \begin{cases} T_l > T_f, & x < x_f^0, \\ T_f, & x = x_f^0, \quad x_f = x_f^0. \\ T_s < T_f, & x > x_f^0; \end{cases}$$

$$x \rightarrow -\infty: T \rightarrow T_l, \quad x \rightarrow \infty: T \rightarrow T_s.$$

$$x = x_f: \begin{cases} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \rho L v, \quad v = \frac{dx_f}{dt} \\ T = T_f \end{cases}$$

3.1.1. Автомоделное решение

задачи Стефана (3.5) можно получить, если теплофизические коэффициенты считать постоянными, а правую часть f положить равной нулю.

Для упрощения выкладок предварительно приведем задачу к безразмерному виду.

$$\bar{x} = \frac{x - x_f^0}{l}, \quad \bar{t} = \frac{ta}{l^2}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_f}{T_l - T_f}, \quad \bar{v} = \frac{vl}{a}, \quad K_f = \frac{\rho La}{\lambda(T_l - T_f)} = \frac{L}{c(T_l - T_f)}$$

Здесь K_f - число фазовых переходов (число Стефана, критерий Коссовича). Получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}, \quad \bar{x} \in D_l = (-\infty, \bar{x}_f(\bar{t})), \quad x \in D_s = (\bar{x}_f(\bar{t}), \infty), \quad \bar{t} > 0.$$

$$\bar{t} = 0: \bar{T} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \quad \bar{x}_f = 0. \\ \bar{T}_s < 0, & x > 0; \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\bar{x} \rightarrow -\infty : \bar{T} \rightarrow 1, \quad \bar{x} \rightarrow \infty : T \rightarrow \bar{T}_s,$$

$$\bar{x} = \bar{x}_f : \begin{cases} \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] = K_f \bar{v}, & \bar{v} = \frac{d\bar{x}_f}{d\bar{T}}, \\ \bar{T} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Как и прежде, введем безразмерную переменную $\eta = x/(2\sqrt{t})$, и вычислим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{dT}{d\eta}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{dT}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}.$$

Уравнение (3.6) примет вид $(\eta_f = x_f(t)/(2\sqrt{t}) = const)$

$$-2\eta \frac{dT}{d\eta} = \frac{d^2 T}{d\eta^2}, \quad \eta \in D_l = (-\infty, \eta_f), \quad \eta \in D_s = (\eta_f, \infty). \quad (3.8)$$

Здесь и далее черта над безразмерными величинами опущена. Закон движения фронта плавления/кристаллизации в (3.7) запишется следующим образом:

$$v = \frac{dx_f}{dt} = \frac{d(\eta_f 2\sqrt{t})}{dt} = \frac{\eta_f}{\sqrt{t}}, \quad (3.9)$$

а само условие Стефана будет выглядеть так

$$\eta = \eta_f : \begin{cases} T = 0; \\ [dT/d\eta] = 2\eta_f K_f. \end{cases} \quad (3.10)$$

Получим решения уравнения (3.8) в каждой из фаз. Обозначим $p = T'$ и запишем уравнение $p' = -2\eta p$, общее решение которого имеет вид $p = Ce^{-\eta^2}$. Найдем константу $C = C_l$ для ликвидуса. Интегрируем $p = T'$ в пределах от η до η_f . Имеем

$$\begin{aligned}
 0 - T(\eta) &= C_l \int_{\eta}^{\eta_f} e^{-\xi^2} d\xi = C_l \left[\int_{\eta}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{\eta_f} e^{-\xi^2} d\xi \right] = \\
 &= C_l \left[-\int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{\eta_f} e^{-\xi^2} d\xi \right] = \frac{C_l \sqrt{\pi}}{2} [\operatorname{erf} \eta_f - \operatorname{erf} \eta],
 \end{aligned}$$

или $T(\eta) = \frac{C_l \sqrt{\pi}}{2} [\operatorname{erf} \eta_f - \operatorname{erf} \eta]$. При $\eta \rightarrow -\infty$ $T \rightarrow T_l = 1$, $\operatorname{erf} \eta \rightarrow -1$,

поэтому в зоне ликвидуса

$$C_l = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_l}{1 + \operatorname{erf} \eta_f}, \quad T(\eta) = T_l \frac{\operatorname{erf} \eta_f - \operatorname{erf} \eta}{1 + \operatorname{erf} \eta_f}, \quad \eta < \eta_f. \quad (3.11)$$

Для солидуса интегрируем $p = T'$ в пределах от η_f до η . Получаем

$$\begin{aligned}
 T(\eta) &= C_s \int_{\eta_f}^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi = C_s \left[\int_{\eta_f}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi \right] = \\
 &= C_s \left[-\int_0^{\eta_f} e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi \right] = \frac{C_s \sqrt{\pi}}{2} [-\operatorname{erf} \eta_f + \operatorname{erf} \eta].
 \end{aligned}$$

При $\eta \rightarrow \infty$ $T \rightarrow T_s$, $\operatorname{erf} \eta \rightarrow 1$, поэтому в зоне солидуса

$$C_s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_s}{1 - \operatorname{erf} \eta_f}, \quad T(\eta) = T_s \frac{\operatorname{erf} \eta - \operatorname{erf} \eta_f}{1 - \operatorname{erf} \eta_f}, \quad \eta > \eta_f. \quad (3.12)$$

Осталось найти «точку фронта» - константу η_f . Воспользуемся условием Стефана (3.10), решением $p = Ce^{-\eta^2}$ и значениями константы C для разных фаз (3.11), (3.12). Получим трансцендентное уравнение

$$[dT / d\eta] = e^{-\eta_f^2} [C_s - C_l] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta_f^2} \left[\frac{T_s}{1 - \operatorname{erf} \eta_f} + \frac{T_l}{1 + \operatorname{erf} \eta_f} \right] = 2\eta_f K_f,$$

или

$$\eta_f = \frac{e^{-\eta_f^2}}{\sqrt{\pi} K_f} \left[\frac{T_s}{1 - \operatorname{erf} \eta_f} + \frac{T_l}{1 + \operatorname{erf} \eta_f} \right], \quad (3.13)$$

которое легко решается численно, например методом деления отрезка пополам, либо методом простой итерации с начальным приближением $\eta_f = 0$. Нетрудно видеть, что если температурные напоры одинаковы, т.е. $T_s = -T_l$, то межфазная граница неподвижна, $\eta_f = 0$.

Задание 5. Решить задачу (3.13) для положения фронта для разных значений температуры солидуса и ликвидуса. Исследовать влияние числа Стефана на автомодельное решение. Построить графики температуры в зоне ликвидуса (3.11) и солидуса (3.12).

3.2. Обобщенная постановка задачи Стефана

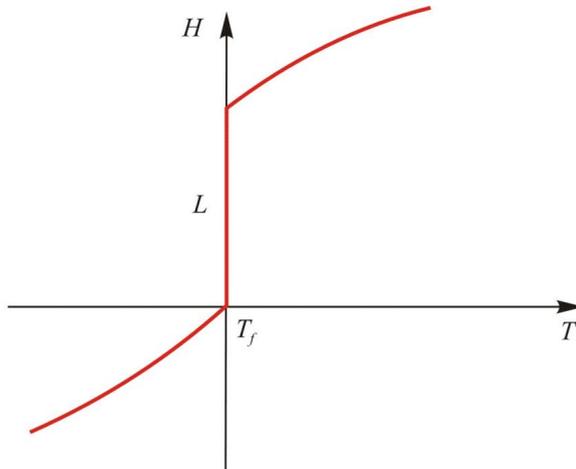


Рис. 3.2. Энтальпия со скачком в задаче Стефана

Вводится функция удельной *энтальпии* или *теплосодержания* $H(T)$, Дж/кг. Эта функция терпит разрыв L в точке фазового перехода $T = T_f$. Вообще говоря, теплоемкость C определяется как производная

dH/dT ; очевидно, при $T = T_f$ $C = +\infty$. В простейшем линейном случае энтальпия со скачком может быть записана как

$$H(T) = \begin{cases} C(T - T_f), & T < T_f, \\ C(T - T_f) + L, & T > T_f, \\ H_f \in [0, L], & T = T_f \end{cases} \quad (3.14)$$

или с использованием символической (обобщенной) функции Хевисайда h :

$$H(T) = C \cdot (T - T_f) + Lh(T - T_f), \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Уравнение теплопроводности для процесса с фазовыми превращениями представляет собой, по существу, закон изменения полной энтальпии ρH . При постоянной плотности имеем

$$\rho \frac{\partial H(T)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (3.16)$$

Задача (3.15) – (3.16) называется энтальпийной или обобщенной постановкой задачи Стефана, она обобщает классическую формулировку задачи. В самом деле, из нее непосредственно следует условие Стефана на межфазной границе. В одномерном случае при постоянных коэффициентах и нулевой правой части безразмерная форма уравнений (3.15) – (3.16) имеет вид

$$\frac{\partial H(T)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad H(T) = T + K_f h(T). \quad (3.17)$$

Пусть $x_f(t)$ - координата фронта плавления, $T(x_f) = 0$. Проинтегрируем (57) по его малой окрестности с применением правила Лейбница:

$$\int_{x_f - \varepsilon}^{x_f + \varepsilon} \frac{\partial H(T)}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_f - \varepsilon}^{x_f + \varepsilon} H(T) dx - H(x_f + \varepsilon) \frac{dx_f}{dt} + H(x_f - \varepsilon) \frac{dx_f}{dt}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем условие Стефана

$$-\left[H_{solidus} - H_{liquidus} \right] \frac{dx_f}{dt} = K_f v = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

3.3. Численные методы решения задачи Стефана

Существуют разные численные методы решения задачи Стефана, как в классической, так и в обобщенной постановке.

Классическая постановка, как правило, ограничена одномерными моделями, численные методы её решения можно разделить на два класса: а) методы «с ловлей фронта в узел сетки» и б) методы сквозного счёта. Методы а) основаны на замене переменных, которая сводит области ликвидуса и солидуса к фиксированным отрезкам, которые и покрываются пространственной сеткой. При этом в уравнениях теплопроводности в каждой фазе появляются дополнительные конвективные слагаемые, а положение фронта $x_f(t)$ для каждого момента времени t является дополнительным искомым параметром, который определяется с помощью условия Стефана. Методы сквозного счета предполагают построение сетки и сеточной схемы во всей области; положение фронта фазовых переходов на каждом временном слое определяется апостериори как решение уравнения $T(x) = T_f$.

Для практических расчетов в многомерных областях применяется энтальпийная постановка задачи, методы её численного решения разнообразны, основаны на идее «сквозного счета». Мы рассмотрим два из них.

3.3.1. Метод регуляризации скачка энтальпии

Метод можно применять к нелинейным уравнениям общего вида

$$\rho \frac{\partial H(T)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) + f, \quad H(T) = CT + Lh(T). \quad (3.18)$$

Пользуясь правилами дифференцирования обобщенных функций, преобразуем левую часть уравнения (3.18):

$$\frac{\partial H(T)}{\partial t} = C \frac{\partial T}{\partial t} + L \frac{dh}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = (C + L\delta(T)) \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Здесь $\delta(T)$ - дельта-функция Дирака, обладающая следующими свойствами:

$$\delta(T) = \begin{cases} 0, & x > 0, x < 0, \\ \infty, & x = 0; \end{cases} \quad \int_{-a}^b \delta(T) dT = 1 \quad \forall a, b > 0. \quad (3.19)$$

Понятно, что при расчетах на сетке с конечным шагом h невозможно представить такую функцию. Регуляризация (размазывание) δ -функции состоит в том, что вводят гладкую функцию $\delta_\varepsilon(T)$, «похожую» на δ и удовлетворяющую второму свойству (3.19), см. рис. 3.3. Здесь $\varepsilon > h$ характеризует размер носителя размазанной функции. Простейшим примером может служить функция

$$\delta_\varepsilon(T) = \begin{cases} 0, & |T| > \varepsilon, \\ 2/\varepsilon, & |T| < \varepsilon. \end{cases}$$

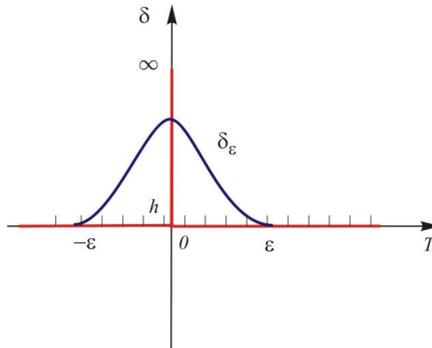


Рис. 3.3. Регуляризация функции Дирака

После введения такой функции можно обозначить $S(T) = \rho[C + L\delta_\varepsilon(T)]$ и записать нелинейную задачу без особенностей в коэффициентах

$$S(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) + f,$$

которая может быть линеаризована на каждом временном слое, например так:

$$S(\tilde{T}) \frac{T - \tilde{T}}{\tau} = \operatorname{div}(\lambda(\tilde{T}) \operatorname{grad} T) + f. \quad (3.20)$$

Пространственная аппроксимация полудискретизованного уравнения (3.20) строится, например, методом конечных элементов.

Схема (3.20) имеет два существенных недостатка. Первый связан со сглаживанием (регуляризацией) скачка энтальпии, что неизбежно приводит к размазыванию межфазной границы на несколько сеточных ячеек. Второй недостаток связан с нелинейностью задачи, что приводит к необходимости сборки матриц масс и жесткости на каждом временном слое; это сильно замедляет расчет.

3.3.2. Метод линеаризации Кирхгофа

В большинстве прикладных коммерческих пакетов (например MSC.Marc-Mentat) задают теплофизические свойства материала в зависимости от температуры, а именно теплоемкость, теплопроводность, плотность. В области фазовых переходов эти функции могут иметь особенности. На рис. 3.4 слева показаны функции $c(T)$, $\lambda(T)$ для одного из авиационных алюминиевых сплавов в широком диапазоне изменения температуры.

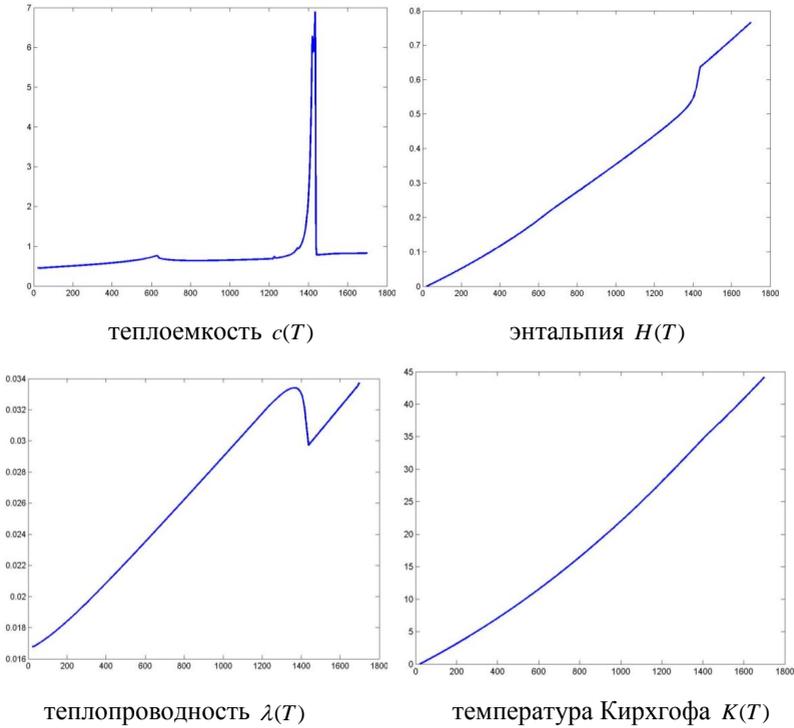


Рис. 3.4. Теплоемкость и энтальпия, теплопроводность и «температура» Кирхгофа в зависимости от температуры для одного из авиационных сплавов

Уравнение теплопроводности учитывает эти нелинейности:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) = f \quad (3.21)$$

Линеаризация уравнения (3.21) осуществляется введением функции энтальпии

$$H(T) = \rho \int_{T_{\min}}^T c(\xi) d\xi \quad (3.22)$$

и «температуры Кирхгофа»

$$K(T) = \int_{T_{\min}}^T \lambda(\xi) d\xi. \quad (3.23)$$

Принципиально важно, что функции H, K являются монотонно-возрастающими функциями температуры. Подставив (3.22), (3.23) в уравнение (3.21), получим линейное относительно H, K уравнение

$$\frac{\partial H(T)}{\partial t} - \Delta K(T) = f, \quad (3.24)$$

в котором Δ - оператор Лапласа.

Алгоритм численного решения задачи (3.22) - (3.24) состоит в следующем.

1. Проводится кусочно-линейная аппроксимация функций $H(T)$ и $K(T)$. Интервал возможного изменения температуры $[T_{\min}, T_{\max}]$ разбивается на N_T равных частей с границами $T_i = T_{\min} + ih_T$, $i = \overline{0, N_T}$, $h_T = (T_{\max} - T_{\min}) / N_T$. В каждой точке этого разбиения вычисляются значения функций $H_i = H(T_i)$ и $K_i = K(T_i)$; в каждом температурном интервале $[T_i, T_{i+1}]$ принимается линейное представление функций H и K :

$$\begin{aligned} H(T) &= \alpha_H^i T + \beta_H^i, \quad K(T) = \alpha_K^i T + \beta_K^i, \\ \alpha_H^i &= (H_{i+1} - H_i) / h_T, \quad \beta_H^i = H_i - \alpha_H^i T_i, \\ \alpha_K^i &= (K_{i+1} - K_i) / h_T, \quad \beta_K^i = K_i - \alpha_K^i T_i. \end{aligned} \quad (3.25)$$

2. Полудискретизация уравнения (3.24) по времени с постоянным шагом τ приводит к неявной схеме

$$\frac{H(T, t) - H(T, t - \tau)}{\tau} + \Delta K(T, t) = f$$

а последующая пространственная аппроксимация (например, методом конечных элементов) даёт систему линейных по H и K , но нелинейных по T уравнений

$$\mathbf{M} \frac{H - \check{H}}{\tau} + \mathbf{A}K = f \quad (3.26)$$

где элементы матриц масс \mathbf{M} и жесткости \mathbf{A} вычисляются по формулам

$$m_{ij} = S \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx dy dz \right), \quad a_{ij} = S \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy dz \right), \quad i, j = \overline{1, N}$$

Здесь $\{\varphi_i(x, y, z), i = \overline{1, N}\}$ - базисные функции, а символ S означает квадратурную формулу трапеций (точки интегрирования совпадают с узлами сетки) для вычисления соответствующего интеграла.

Заметим, что нелинейная система (3.26) на каждом температурном интервале $[T_i, T_{i+1}]$ является линейной по T , поскольку является линейной комбинацией представления (3.25) функций H и K на этом интервале.

Решение системы алгебраических уравнений (3.25), (3.26) проводится с помощью итерационного метода релаксационного типа (SOR, SSOR). При этом на n -ом шаге этого метода последовательно для всех узлов сетки $j = \overline{1, N}$ необходимо решать уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} m_{jj} (\alpha_H^i T_j + \beta_H^i) + a_{jj} (\alpha_K^i T_j + \beta_K^i) &= F, \\ F &= f_j - \sum_{k < j} a_{jk} K(T_k^{(n+1)}) - \sum_{k > j} a_{jk} K(T_k^{(n)}) + \frac{1}{\tau} m_{jj} \check{H}_j, \end{aligned} \quad (3.27)$$

в котором $\check{H} = H(t - \tau)$, а коэффициенты $\alpha_H^i, \beta_H^i, \alpha_K^i, \beta_K^i$ для каждого интервала $[T_i, T_{i+1}]$ определены формулами (3.25). Подчеркнем, что применение метода последовательной релаксации даёт возможность яв-

ного вычисления правой части в уравнении (3.27). Его решение имеет простой вид

$$T_j = \frac{F - \frac{1}{\tau} m_{jj} \beta_H^i - a_{jj} \beta_K^i}{\frac{1}{\tau} m_{jj} \alpha_H^i + a_{jj} \alpha_K^i}. \quad (3.28)$$

Найденное значение T_j подправляется с помощью релаксации

$$T_j^{(n+1)} = \omega T_j + (1 - \omega) T_j^{(n)} \quad (3.29)$$

где $\omega < 2$ - параметр релаксации метода SOR.

В методе (3.27) - (3.29) необходимо определить температурный интервал $[T_i, T_{i+1}]$, который содержит решение уравнения (3.27) для каждого узла j , чтобы выбрать соответствующие коэффициенты α^i, β^i кусочно-линейной аппроксимации (3.25). Поскольку значения H_i и K_i монотонно возрастают с ростом i , левая часть уравнения (3.27) также монотонно возрастает с ростом i ; следовательно, существует единственный интервал $T_j \in [T_i, T_{i+1}]$, на котором выполняется следующее условие

$$F \in [\tau^{-1} m_{jj} H_i + a_{jj} K_i, \tau^{-1} m_{jj} H_{i+1} + a_{jj} K_{i+1}].$$

Индекс i , который определяет этот интервал, легко найти рядом с соответствующим значением на нижнем временном слое, применяя линейный поиск.

Ниже приводятся некоторые **результаты численного моделирования** тепловых процессов при электронно-лучевой сварке трехмерных металлических конструкций с использованием описанного выше метода.

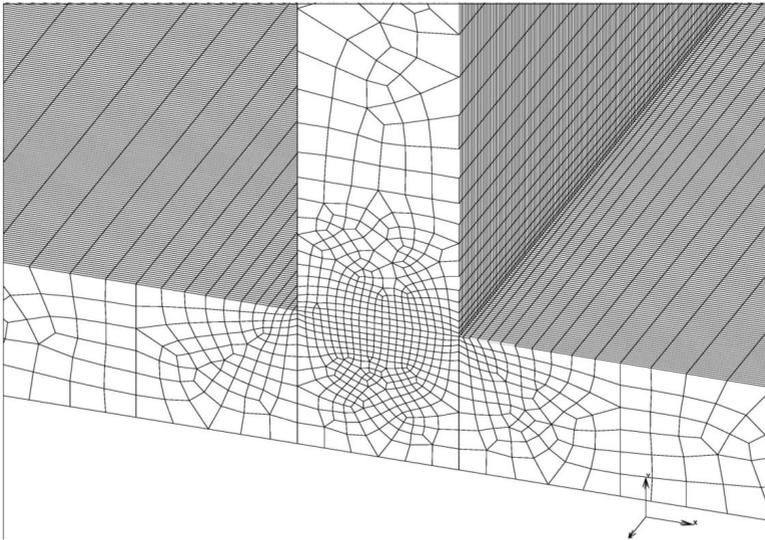


Рис. 3.5. МКЭ-сетка в конструкции «тавр» (фрагмент)

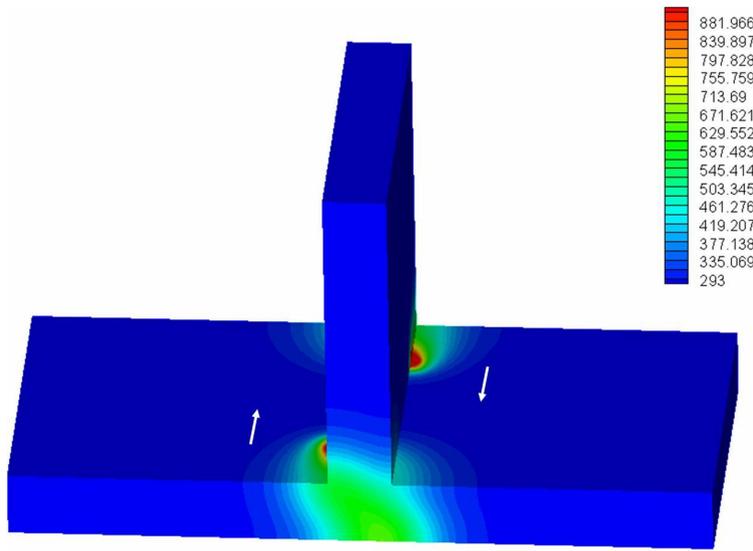


Рис. 3.6. Общий вид температурного поля при сварке тавра двумя электронными лучами,двигающимися в разных направлениях

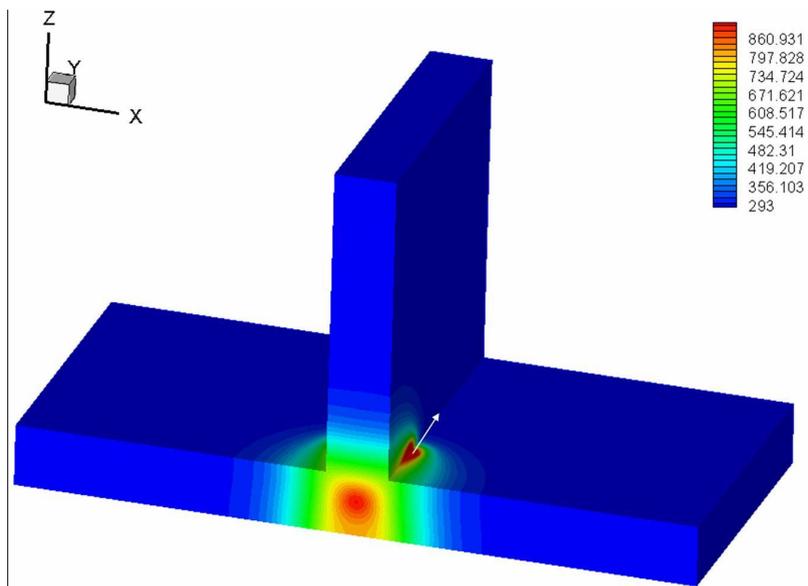


Рис. 3.7. Общий вид температурного поля при сварке тавра двумя электронными лучами,двигающимися в одном направлении

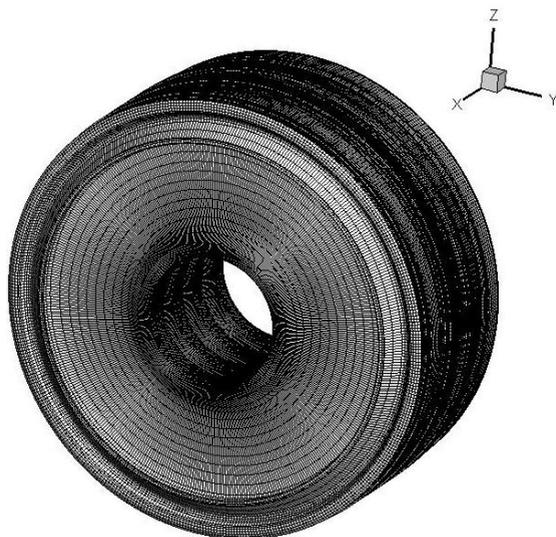


Рис. 3.8. МКЭ-сетка в составной цилиндрической конструкции

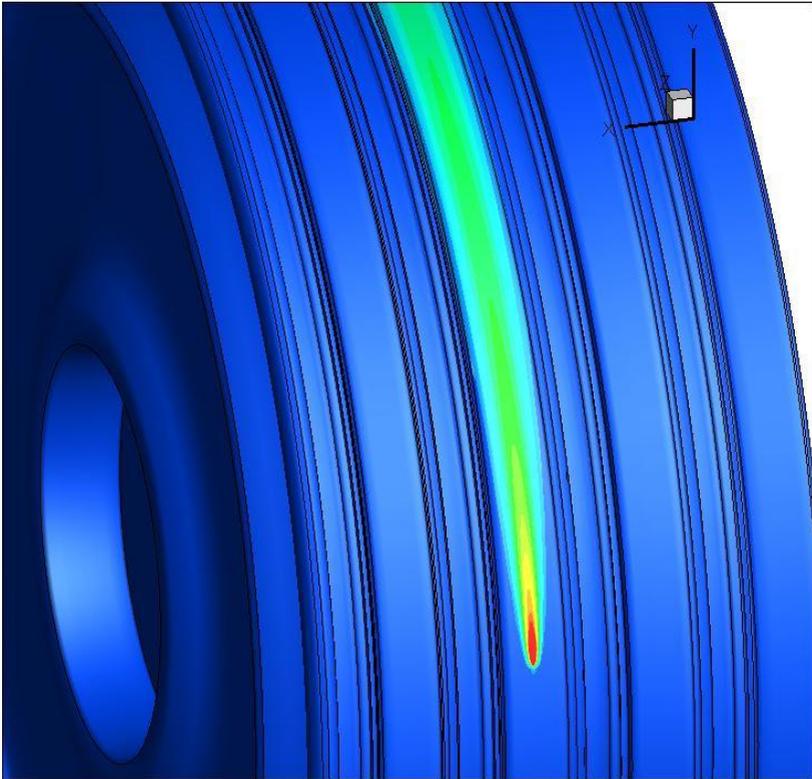


Рис. 3.9. Температурное поле при электронно-лучевой сварке составной цилиндрической конструкции движущимся источником

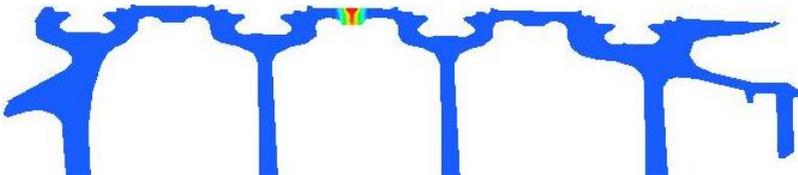


Рис. 3.10. Температурное поле при электронно-лучевой сварке составной цилиндрической конструкции (фрагмент поперечного сечения)

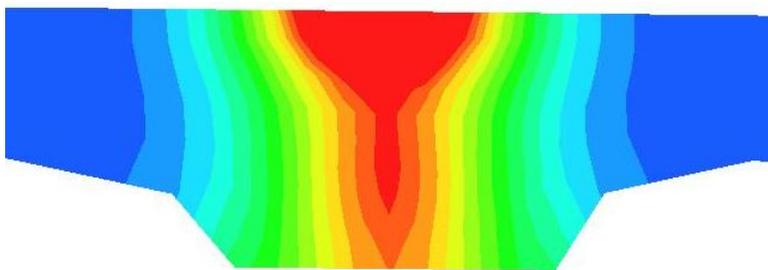


Рис. 3.11. Температурное поле в окрестности сварочной ванны (увеличенный фрагмент)

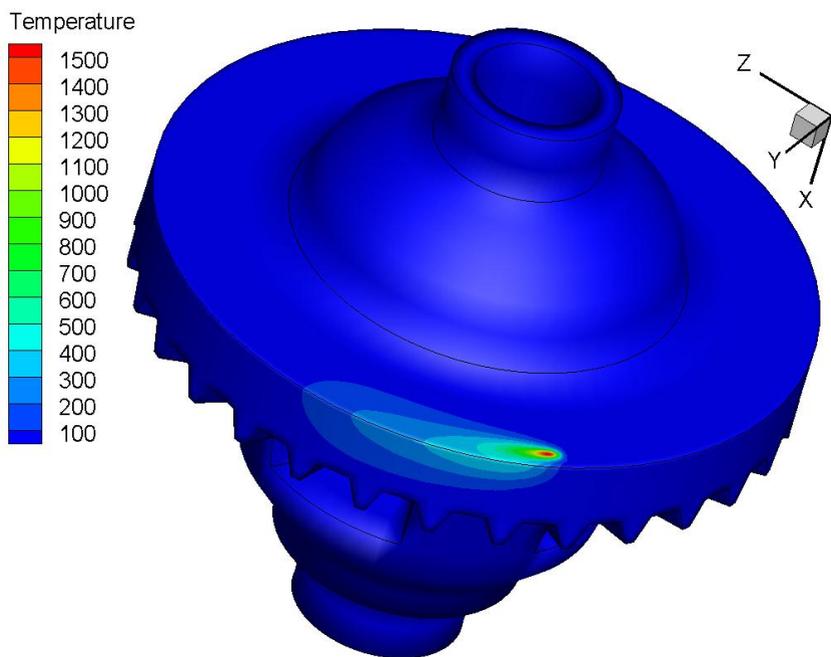


Рис. 3.12. Приварка высокопрочной рабочей части к ротору шестерни движущимся лучом, ориентированным вертикально. Стадия сварки

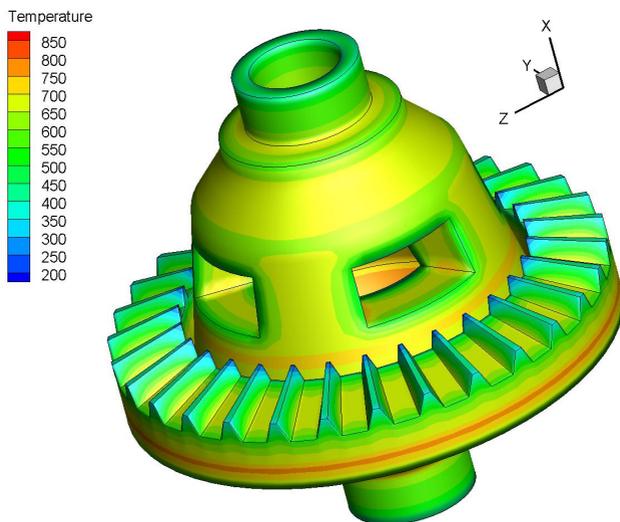


Рис. 3.13. Приварка высокопрочной рабочей части к ротору шестерни движущимся лучом, ориентированным горизонтально. Стадия охлаждения

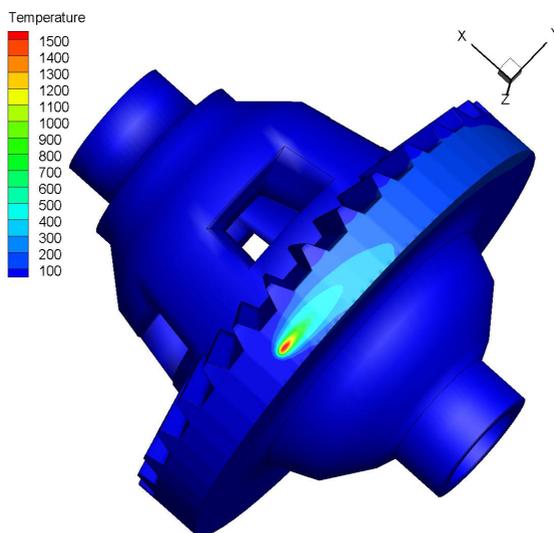


Рис. 3.14. Приварка высокопрочной рабочей части к ротору шестерни движущимся лучом, ориентированным горизонтально. Стадия сварки

3.4. Теплообмен при пленочной конденсации насыщенного пара на вертикальной пластине

Теория теплоотдачи при пленочной конденсации насыщенного пара на вертикальной стенке была разработана Нуссельтом в начале XX века при ряде упрощающих допущений. Течение вязкой несжимаемой жидкости в пленке считалось ламинарным и безынерционным. Гидродинамическое взаимодействие поверхности пленки с потоком пара сводилось к заданию постоянного касательного напряжения на межфазной поверхности; температура на поверхности пленки принималась постоянной и равной температуре насыщенного пара при заданном давлении.

3.4.1. Постановка задачи

Стационарные поля продольной u и поперечной v скорости жидкости в пленке конденсата толщиной $\delta(x)$ описываются уравнениями Навье-Стокса в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \delta(x).\end{aligned}\tag{3.30}$$

Здесь x, y - декартовы координаты, причем ось x вертикальна и совпадает по направлению с ускорением силы тяжести g ; ν - кинематическая вязкость. Температура T в пленке удовлетворяет уравнению

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\tag{3.31}$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ - температуропроводность, λ - теплопроводность, ρ - плотность конденсата. На стенке задается условие прилипания для жидкости и фиксированная температура T_w :

$$y = 0: \quad u, v = 0; \quad T = T_w.\tag{3.32}$$

Над пленкой движется поток насыщенного пара со скоростью u_V при температуре T_s и плотности ρ_V . При $T_s > T_w$ на поверхности $y = \delta(x)$ происходит конденсация пара с выделением тепла. Этот процесс можно описать граничным условием

$$y = \delta(x): q \equiv \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{y=\delta} = \rho r v_c; \quad T = T_s, \quad (3.33)$$

где q - плотность теплового потока; $v_c > 0$ - скорость конденсации; r - теплота парообразования; n - внешняя в поверхности пленки нормаль. Трение на границе пленки конденсата и потока пара вызывает касательное напряжение $\tau = 0.5\xi\rho_V|w|w$, где w - относительная скорость, а ξ - коэффициент гидравлического сопротивления. Будем считать, что скорость пара много больше скорости пленки, а коэффициент сопротивления постоянен. В этом случае можно записать

$$y = \delta: \rho v \frac{\partial u}{\partial n} = \tau = 0.5\xi\rho_V|u_V|u_V = const \quad (3.34)$$

Положение межфазной границы подчиняется кинематическому уравнению

$$y = \delta(x): v = -v_c + u\delta'. \quad (3.35)$$

Требуется найти профиль поверхности δ , поле скорости u, v и температуру T , и на этой основе определить локальный коэффициент теплообмена $\alpha(x)$, который позволяет рассчитать тепловой поток по простой формуле

$$q(x) = \alpha(x)(T_s - T_w), \quad (3.36)$$

а также средний для участка стенки $0 < x < l$ коэффициент теплоотдачи $\langle \alpha \rangle$ в формуле

$$\langle q \rangle = \langle \alpha \rangle (T_s - T_w) = \frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx \quad (3.37)$$

для среднего теплового потока.

3.4.2. Безразмерные переменные и критерии подобия

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{l}; \quad \bar{y}, \bar{\delta} = \frac{y, \delta}{\delta_0}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}; \quad \bar{v}, \bar{v}_c = \frac{v, v_c}{v_0}, \quad v_0 = \frac{\lambda \Delta T}{\delta_0 \rho r}; \\ \bar{T} &= \frac{T - T_w}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_s - T_w. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь масштабы u_0 , δ_0 пока не определены. Из уравнения неразрывности (3.30) получаем

$$u_0 = \frac{l}{\delta_0} v_0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (3.39)$$

Подставим (3.38), (3.39) в уравнение движения (3.30). Будем иметь

$$\frac{u_0^2}{l} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu u_0}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + g.$$

Полагая, что в пленке сила тяжести уравновешена вязкими напряжениями, получаем

$$\frac{\nu u_0}{\delta_0^2} = g, \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{u_0 \nu}{g}}. \quad (3.41)$$

при этом уравнение принимает вид

$$\varepsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 1, \quad \varepsilon = \text{Re} \frac{\delta_0}{l}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 \delta_0}{\nu} \quad (3.42)$$

В дальнейшем предполагаем, что относительная толщина пленки мала, $\delta_0 / l \ll 1$, а число Рейнольдса не велико, так что параметр ε в (3.42) можно считать малым.

Аналогично приводится к безразмерному виду уравнение теплопереноса (3.31):

$$\varepsilon \text{Pr} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (3.43)$$

Будем рассматривать жидкости, у которых число Прандтля не велико, и множитель $\varepsilon \text{Pr} \ll 1$.

Граничные условия (3.32) - (3.36) в безразмерных переменных примут вид

$$\bar{y} = 0: \bar{u}, \bar{v} = 0; \bar{T} = 0 \quad (3.44)$$

$$\bar{y} = \bar{\delta}(\bar{x}): \bar{v}_c = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{\delta}}; \quad \bar{T} = 1; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau \delta_0}{\rho \nu u_0}; \quad (3.45)$$

$$\bar{v} = -\bar{v}_c + \bar{u} \bar{\delta}'. \quad (3.46)$$

Наконец, соотношение (3.36) приводит к определению местного числа Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta_0}{\lambda} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{\delta}}. \quad (3.47)$$

3.4.3. Решение задачи. Безинерционное приближение

Получим решение задачи, положив $\varepsilon = 0$, т.е. отбросив конвективные члены в уравнениях (3.42), (3.43). Черту над безразмерными величинами в дальнейшем опускаем. Получаем упрощенную постановку задачи

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta(x), \quad 0 < x < 1; \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1, \quad u(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \tau \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad T(0) = 0, \quad T(\delta) = 1; \quad (3.50)$$

$$y = \delta(x): \quad v_c = \frac{\partial T}{\partial y}; \quad v = -v_c + u\delta'. \quad (3.51)$$

Температура в пленке – решение задачи (3.50) – выражается простой формулой

$$T(x, y) = y / \delta(x). \quad (3.52)$$

При этом безразмерная скорость конденсации v_c в (3.51) и местное число Нуссельта (3.47) равны

$$v_c(x) = \text{Nu}(x) = 1 / \delta(x) \quad (3.53)$$

Интегрирование задачи (3.49) дает эпюру продольной скорости

$$u(x, y) = (\tau + \delta(x))y - y^2 / 2 \quad (3.54)$$

а поперечную скорость можно найти из уравнения неразрывности (3.48):

$$u' = y\delta', \quad v(x, y) = -\int_0^y u'dy = -\frac{y^2}{2}\delta'(x) \quad (3.55)$$

С помощью формул (3.54), (3.55) вычислим u , u' на межфазной границе

$$v(\delta) = -\frac{\delta^2\delta'}{2}, \quad u(\delta) = \frac{\delta^2}{2} + \tau\delta,$$

и вместе с выражением (3.53) для v_c подставим в уравнение (3.51). Получим уравнение для толщины пленки $\delta^3\delta' + \tau\delta^2\delta' = 1$, или

$$\frac{1}{4}(\delta^4)' + \frac{\tau}{3}(\delta^3)' = 1, \quad \delta' = \frac{1}{\delta^2(\tau + \delta)} \quad (3.56)$$

Интегрируя это уравнение, получим решение

$$\frac{1}{4}\delta^4 + \frac{\tau}{3}\delta^3 = x + C \quad (3.57)$$

где C - постоянная интегрирования.

Если пар движется сверху вниз, и касательное напряжение $\tau \geq 0$ ускоряет течение в пленке, то можно поставить граничное условие $\delta(0) = 0$. При этом из (3.57) следует $C = 0$, а согласно (3.57) производная $\delta' > 0$, что означает утолщение пленки в направлении движения. При $x \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ из (3.56), (3.57) при $\tau \geq 0$ получаем асимптотику $\delta = (3x/\tau)^{1/3}$, $\delta' \rightarrow +\infty$.

Расход конденсата в пленке, согласно (3.54), равен

$$Q(x) = \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy = \delta^2 \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\delta}{3} \right) \quad (3.58)$$

При $\tau \geq 0$ функция $Q(x) = 0$ монотонно возрастает и $Q(0) = 0$.

В режиме противотока касательное напряжение $\tau < 0$, и при малых толщинах δ формулы (3.54), (3.58) дают $u < 0$, $Q < 0$. Более того, из второй формулы (3.56) следует, что при малых δ и $\tau < 0$ наклон $\delta' \rightarrow -\infty$, что приводит к отрицательным значениям толщины пленки. Эти нефизические свойства решения означают, что при движении пара снизу-вверх условие $\delta(0) = 0$ ставить нельзя. В общем случае проблема постановки адекватного граничного условия предполагает рассмотрение течения пленки за пределами охлаждаемого участка $0 < x < 1$; в настоящем разделе мы принимаем условие

$$x = 0, \tau < 0: Q = 0, \delta = \delta_* = -1.5\tau > 0 \quad (3.59)$$

При этом из (3.57) находим

$$C = \frac{1}{4} \delta_*^4 + \frac{\tau}{3} \delta_*^3$$

Производная δ' (3.58) в данном случае положительна и ограничена, а расход $Q(x)$ монотонно возрастает.

Практически важной характеристикой является средний по длине l стенки коэффициент теплообмена $\langle \alpha \rangle$. Его безразмерным аналогом является среднее число Нуссельта

$$\langle \text{Nu} \rangle = \int_0^1 \text{Nu}(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\delta(x)}. \quad (3.60)$$

Решение (4.30), (4.31), (4.25) – (4.28) описывает теплообмен при пленочной конденсации пара на вертикальной стенке при различных режимах течения пара:

- а) неподвижный пар, $\tau = 0$;
- б) спутный поток пара сверху-вниз, $\tau > 0$;
- в) противоток пара снизу-вверх, $\tau < 0$.

Выпишем решение задачи Нуссельта в безразмерной форме для двух режимов: а) и асимптотического б) для быстродвижущегося пара, когда $\tau \gg \delta$.

- *Неподвижный пар.* В общем решении полагаем $\tau = 0$.

$$\delta = (4x)^{1/4}, \quad \delta' = \frac{1}{\delta^3}, \quad v = -\frac{y^2}{2\delta^3}, \quad u = \delta y - \frac{y^2}{2}, \quad (3.61)$$

$$\text{Nu} = (4x)^{-1/4}, \quad \langle \text{Nu} \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

- *Быстрый спутный поток пара.* В общем решении пренебрегаем членами порядка δ / τ , y / τ .

$$\delta = \left(\frac{3}{\tau} x \right)^{1/3}, \quad v = 0, \quad u = \tau y, \quad (3.62)$$

$$\text{Nu} = \left(\frac{\tau}{3x} \right)^{1/3}, \quad \langle \text{Nu} \rangle = \frac{(9\tau)^{1/3}}{2}.$$

На рис. 3.15 – 3.18 показаны результаты решения задачи в полной постановке при различных режимах течения пара.

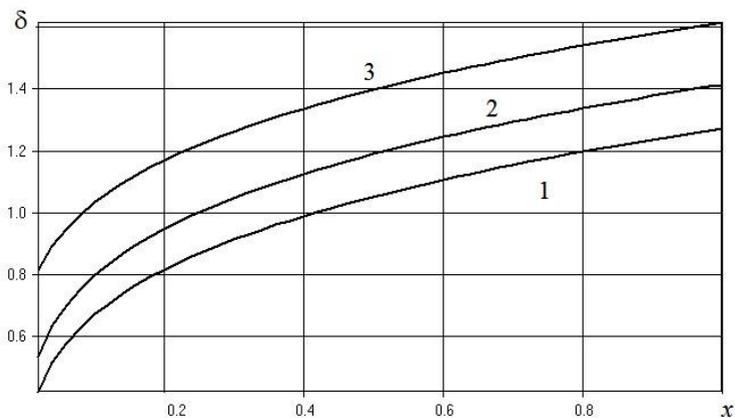


Рис. 3.15. Безразмерная толщина пленки конденсата. 1 – спутный поток пара, $\tau = +0.5$; 2 – неподвижный пар, $\tau = 0$; 3 – противоток, $\tau = -0.5$.

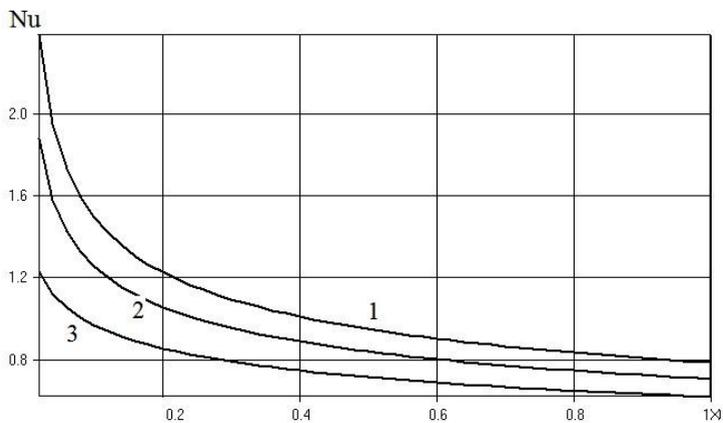


Рис. 3.16. Местное число Нуссельта. 1 – спутный поток пара, $\tau = +0.5$; 2 – неподвижный пар, $\tau = 0$; 3 – противоток, $\tau = -0.5$.

На рис. 3.15 видно, как изменяется безразмерная толщина $\delta(x)$ пленки конденсата в зависимости от касательного напряжения τ на ее поверхности. Спутный поток пара ($\tau > 0$) разгоняет и утоньшает пленку,

а противоток ($\tau < 0$) - тормозит и утолщает её. В обратной пропорции меняется число Нуссельта, рис. 3.16.

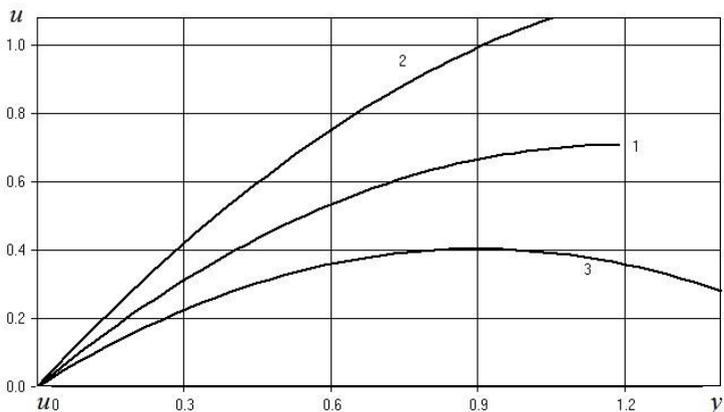


Рис. 3.17. Эпюра продольной скорости в сечении $x=0.5$. 2 – спутный поток пара, $\tau=+0.5$; 1 – неподвижный пар, $\tau=0$; 3 – противоток, $\tau=-0.5$

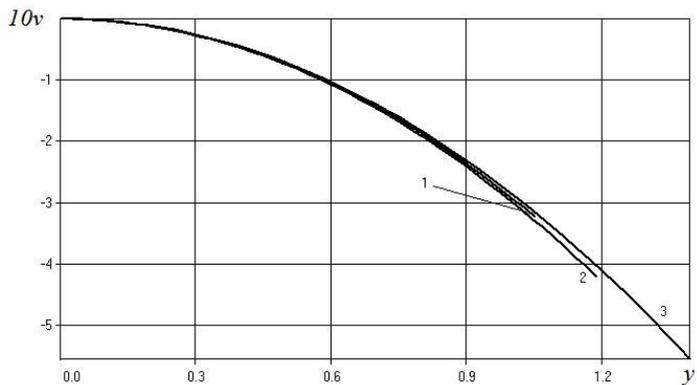


Рис. 3.18. Эпюра поперечной скорости в сечении $x=0.5$. 1 – спутный поток пара, $\tau=+0.5$; 2 – неподвижный пар, $\tau=0$; 3 – противоток, $\tau=-0.5$

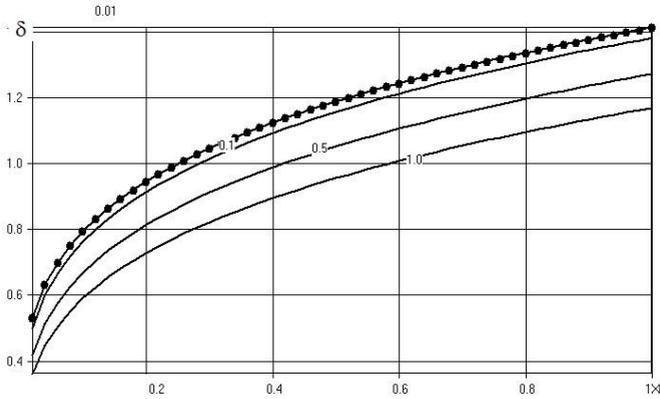


Рис. 3.19. Сходимость решения задачи $\delta(x)$ (сплошные линии) к асимптотическому при малых скоростях пара (маркеры). Числа у кривых – значения напряжения сдвига τ

Влияние потока пара на эпюру продольной скорости показано на рис. 3.17. Спутный поток увеличивает скорость на поверхности, в противоток, наоборот, снижает. В результате профиль $u(y)$ становится немоноктонным (кривая 3), а при значительных $\tau < 0$ скорость на поверхности становится отрицательной. На профиль вертикальной скорости внешний поток практически не оказывает влияния, рис. 3.18

Была проведена серия расчетов по полной модели при различных $\tau > 0$, чтобы выяснить условия применимости асимптотических формул (3.62) для быстрого спутного потока и (3.63) для неподвижного пара. Сравнивались как распределения толщины $\delta(x)$, рис. 3.19, 3.20, и местного числа Нуссельта $Nu(x)$, так и среднее интегральное значение $\langle Nu \rangle$, рис. 3.21. Оказалось, что формулы для неподвижного пара дают удовлетворительные результаты при $|\tau| < 0.1$, а асимптотика «быстрого» пара работает при $\tau > 5$.

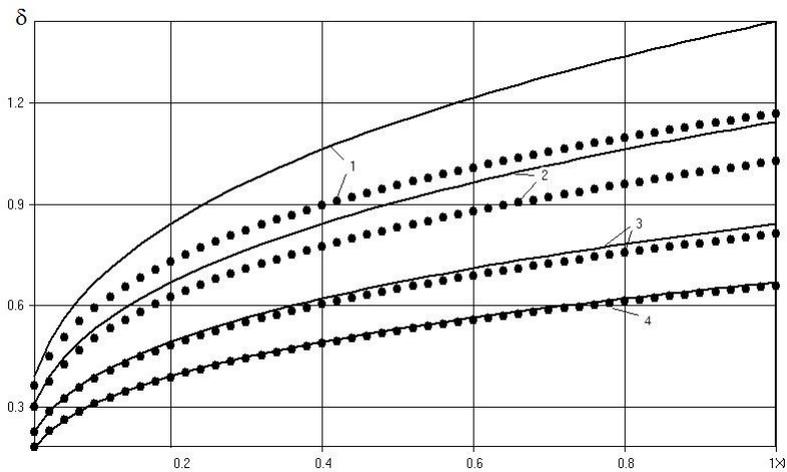


Рис. 3.20. Сходимость решения задачи $\delta(x)$ (сплошные линии) к асимптотическому (маркеры) при больших скоростях пара. 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 5$, 4 – $\tau = 10$.

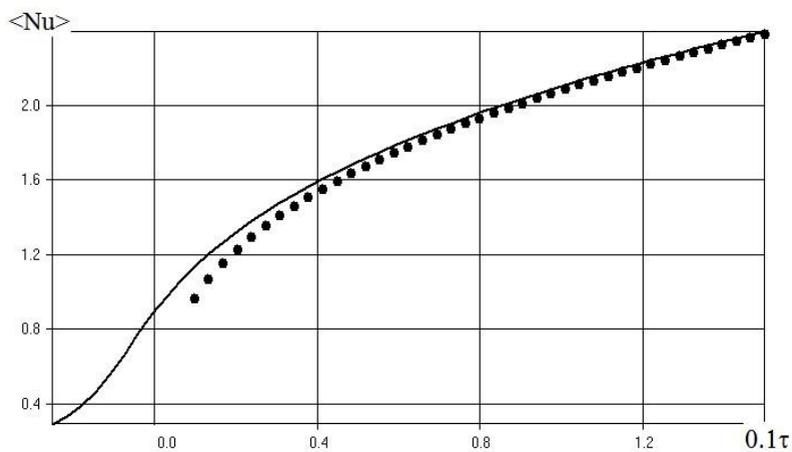


Рис. 3.21. Сходимость среднего числа Нуссельта $\langle Nu \rangle(\tau)$ (сплошная линия) к асимптотическому при больших скоростях пара (маркеры).

Таким образом, установлено, что существует значительная область режимов движения пара, а именно $\tau < -0.1$, $0.1 < \tau < 5$, в которой упрощенные формулы (3.61), (3.63) не пригодны, и необходимо применять расчетную методику, описанную выше.

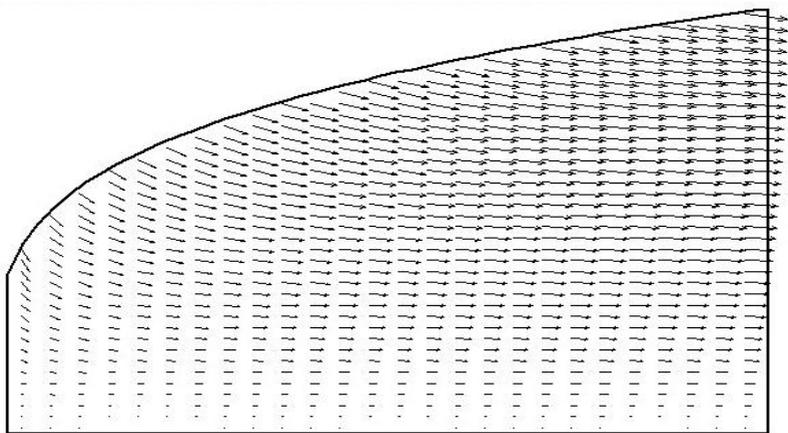


Рис. 3.22. Поле скоростей в пленке жидкости при конденсации из неподвижного пара, $\tau = 0$.

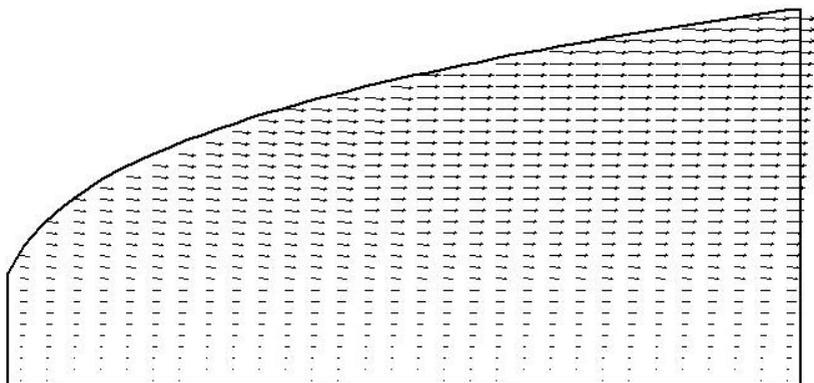


Рис. 3.23. Поле скоростей в пленке конденсата в режиме спутного потока пара, $\tau = +1.5$.

Большой интерес с точки зрения гидродинамики представляет поле скоростей в пленке при конденсации. На рис. 3.22 для неподвижного пара это векторное поле показано стрелками. Видно, что поверхность пленки является «проницаемой» для конденсата.

Сходную картину течения можно наблюдать на рис. 3.23 и при наличии спутного потока пара. Видно, что при $\tau > 0$ направление векторов ближе к горизонтальному, чем при $\tau = 0$. Это объясняется тем, что поперечная компонента v с ростом τ практически не меняется, в то время как продольная u растет. Это было показано на рис. 3.18, 3.17.

Значительно более сложная и интересная картина течения в пленке конденсата наблюдается при движении пара снизу-вверх, когда касательное напряжение τ отрицательно и вызывает торможение жидкости на поверхности, или даже движение в обратном (снизу-вверх) направлении. Именно такая гидродинамическая ситуация показана на рис. 3.24, 3.25 для $\tau = -1.5$. На первом рисунке поле скорости изображено стрелками, а на втором – линиями тока. Ясно видно, что пленка как бы делится на две части. В пристенной области доминирует сила тяжести, и происходит течение вязкой жидкости сверху-вниз. Вблизи поверхности $y = \delta(x)$ течение определяется касательным напряжением $\tau < 0$, возникающем из-за трения с противотоком пара. В результате конденсат здесь течет снизу-вверх. Две названные зоны разделены тонкой областью, в которой поток разворачивается. Зона разворота яснее видна на рис. 3.25.

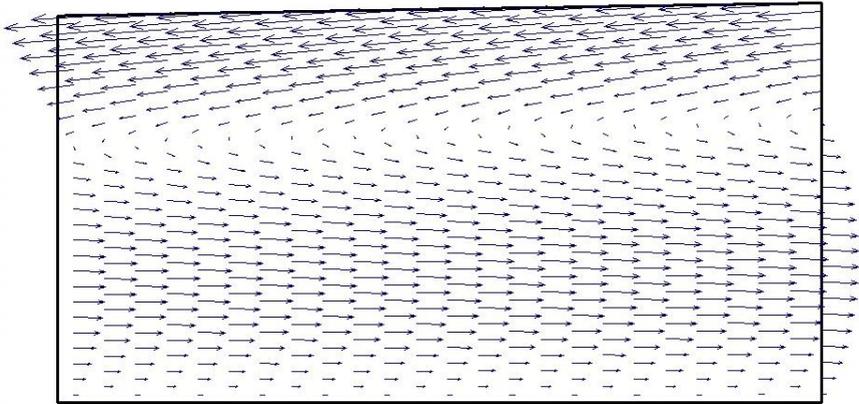


Рис. 3.24. Поле скоростей в пленке конденсата в режиме противотока, $\tau = +1.5$.

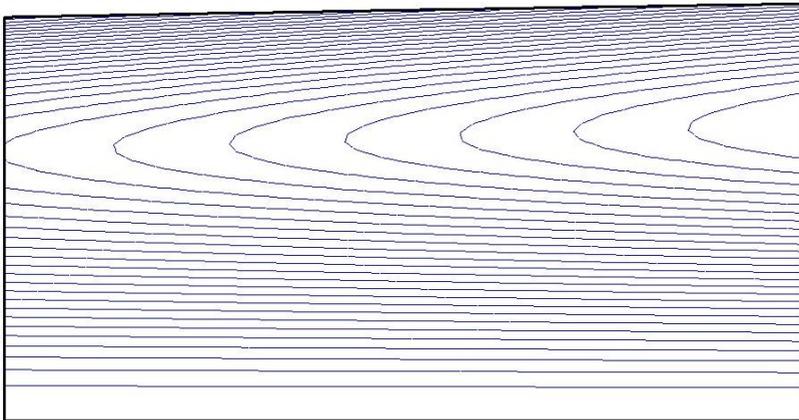


Рис. 3.25. Линии тока в пленке конденсата в режиме противотока, $\tau = -1.5$.

3.4.4. Оценка касательного напряжения на границе пленки

В развитой выше теории касательное напряжение τ на границе раздела «пар-жидкость» считается заданным. В определяющей его формуле

(3.32) оценке подлежит коэффициент сопротивления ξ . Для этого используется подход И.Г. Шекриладзе, согласно которому течение пара с пленочной конденсацией моделируется течением жидкости в пограничном слое без градиента давления с отсосом на стенке; роль отсоса играет конденсация. Ниже приводится соответствующее решение в форме, удобной для применения в нашей модели пленочной конденсации.

Уравнения пограничного слоя для пара над плоской пленкой конденсата имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (3.63)$$

$$y = +\infty: u = u_\infty; \quad y = 0: u = 0, \quad v = -v_c.$$

Здесь u, v - компоненты скорости пара (индекс V для этих и всех других величин опущен, чтобы не загромождать выкладки), $v_c > 0$ - заданная скорость конденсации (отсоса), которая в данном случае считается постоянной. Сразу заметим, что данное предположение противоречит полученному нами результату (3.53), поэтому значение ξ , которое будет выписано ниже, следует рассматривать как приближенную оценку.

Коэффициент сопротивления определяется следующей формулой

$$\xi = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \frac{2}{\rho u_\infty^2} = \frac{2\nu}{\rho u_\infty^2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (3.64)$$

В безразмерных переменных

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\Delta}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_c}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}; \quad \Delta = \frac{v_c}{u_\infty} l \quad (3.65)$$

из (3.66) получим (черта над безразмерными опущена)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$y = +\infty: u = 1; \quad y = 0: u = 0, \quad v = -1. \quad (3.66)$$

$$\xi = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \text{Re} = \frac{u_\infty \Delta}{\nu}, \quad \eta = \frac{1}{\text{Re} \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{v_c}{u_\infty}$$

Решение задачи ищем в виде $v = -1$, $\partial u / \partial x = 0$. При этом для профиля скорости пара $u(y)$ из (3.66) получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{du}{dy} = \eta \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad y > 0; \quad y = +\infty: u(0) = 0; \quad u(\infty) = 1,$$

решение которой имеет вид

$$u(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\eta}\right), \quad \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\eta}. \quad (3.67)$$

Подставив этот результат в (3.66), получим искомую оценку для коэффициента сопротивления потока пара над пленкой конденсата:

$$\xi = \frac{2}{\eta \text{Re}} = 2\varepsilon = \frac{2v_c}{u_\infty}. \quad (3.68)$$

Заметим, что коэффициент сопротивления (3.68) не зависит от вязкости пара, он определяется потерей импульса при конденсации.

Скорость конденсации v_c в оценке (3.68) можно взять в соответствии с (3.37), а вместо u_∞ взять u_V . Тогда

$$v_c = \frac{\lambda \Delta T}{\delta_0 \rho r}, \quad \xi = \frac{2 \lambda \Delta T}{|u_V| \delta_0 \rho r},$$

размерное касательное напряжение на поверхности пленки (3.33) равно

$$\tau = \frac{\lambda \Delta T}{\delta_0 \rho r} \rho_V u_V$$

а его безразмерный аналог согласно (3.44) равен

$$\bar{\tau} = \frac{\tau \delta_0}{\rho \nu u_0} = \frac{\lambda \Delta T \rho_p u_p}{\rho r \nu u_0} = \frac{1}{\text{K Pr}} \frac{u_p}{u_0} \frac{\rho_p}{\rho}, \quad (3.69)$$

где критерий фазовых превращений K и число Прандтля жидкости определяются как

$$\text{K} = \frac{r}{c \Delta T}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad a = \frac{\lambda}{c \rho}. \quad (3.70)$$

Характерную скорость течения пленки с помощью формул (3.38), (3.37), (3.39) выразим через исходные данные задачи:

$$u_0 = \sqrt{\frac{\lambda \Delta T l g}{\nu \rho r}} = \sqrt{g l} (\text{K Pr})^{-1/2}. \quad (3.71)$$

Подставим эту формулу в (3.69) и окончательно получим

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\text{K Pr}}} \frac{\rho_p}{\rho} \frac{u_p}{\sqrt{g l}}. \quad (3.72)$$

В заключение укажем некоторые важные формулы, следующие из полученных выше результатов.

Характерная толщина пленки, согласно (3.38) и (3.45), равна

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{u_0 \nu}{g}} = \frac{l}{(\text{Pr K Ga})^{1/4}}, \quad \text{Ga} = \frac{g l^3}{\nu^2}, \quad (3.73)$$

где Ga - критерий Галилея. Используя эту формулу, легко пересчитать полученный критерий Нуссельта $\text{Nu} = \alpha \delta_0 / \lambda$ в размерный коэффициент теплообмена

$$\alpha = \text{Nu} (\text{K Pr Ga})^{1/4} \frac{\lambda}{l}.$$

В технической литературе часто используется число Нуссельта, вычисленное не по характерной толщине пленки, а по длине стенки, $Nu_l = \alpha l / \lambda$. Очевидно,

$$Nu_l = (K Pr Ga)^{1/4} Nu, \quad \langle Nu \rangle_l = (K Pr Ga)^{1/4} \langle Nu \rangle.$$

В частности, подставив в последнюю формулу значение $\langle Nu \rangle$ из (3.61), получим классический результат

$$\langle Nu \rangle_l = \frac{2\sqrt{2}}{3} (K Pr Ga)^{1/4}$$

для теплоотдачи при конденсации жидкости из неподвижного пара. Для быстродвижущегося спутного потока пара из (3.52) и (3.69) получаем

$$\langle Nu \rangle_l = \frac{1}{2} (K Pr)^{1/12} Ga^{1/4} \left(9 \frac{\rho_p}{\rho} \frac{u_p}{\sqrt{gl}} \right)^{1/3}.$$

Задание 6.

1. Решить уравнение (3.57) методом Ньютона с граничными условиями $\delta(0) = 0$ и проверить асимптотику $\delta(x) = (3x/\tau)^{1/3}$, $x \rightarrow 0$.

2. Решить то же уравнение с граничными условиями (3.59) для противотока.

3. Подсчитать местное число Нуссельта (3.60) и построить графики $Nu(x)$. Сравнить с асимптотическими результатами (3.61) и (3.62)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. Изд. 2-е. М.: Энергия, 1977. – 344 с.
2. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. — Изд. 5-е перераб. и доп. — М: Атомиздат, 1979. - 416 с.
3. *Исаев С.И. и др.* Теория тепломассообмена / Под ред. *А.И. Леонтьева.* – М.: Высшая школа. 1979. – 495 с.
4. *Мухачев Г.А., Шукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. М.: Высшая школа, 1991. - 480 с.
5. *Себиси Т., Брэдишоу П.* Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. – 592 с.
6. *Михатулин Д.С., Чирков А.Ю.* Конспект лекций по тепломассообмену. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана., 2009. – 152 с.
7. *Мазо А.Б.* Моделирование процессов горячей обработки металлов. Казань: Казанский фонд «Математика», 1996. - 209 с.
8. *Мазо А.Б.* Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости. Учебное пособие. Казань: КГУ, 2007. - 209 с.
9. *Калинин Е.И., Мазо А.Б.* Численное моделирование естественной конвекции в вертикальном канале с системой нагревателей // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 2010, № 6. - С. 19-23.
10. *Калинин Е.И., Мазо А.Б.* Численное решение задач обтекания системы тел в переменных функция тока-завихренность // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки, 2009. Т. 151, № 3. - С. 144-153
11. *Калинин Е.И., Мазо А.Б.* Влияние формы нагревателей на теплообмен при естественной термоконвекции в вертикальном канале // Тепловые процессы в технике, 2011, № 4. - С. 159-163.
12. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. – 544 с.
13. *Игнатьева М.А., Кадыров Р.Ф., Мазо А.Б.* Расчет температурного поля при электронно-лучевой сварке пластин // Ученые записки Казанского университета. Сер. "Физ.-мат. науки". Т.178, кн.3. 2006. - С. 23-35.
14. НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского гос. университета. 2003 – 2007 гг. Колл. монография под ред. *А.М. Елизарова.* – Казань: Изд-во КГУ, 2008. – 600 с.: *Мазо А.Б., Кадыров Р.Ф.* Численные алгоритмы расчета тепловых полей при электронно-лучевой сварке трехмерных конструкций. - С. 338-352

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Теплопроводность	7
1.1. Основные понятия теории теплопроводности	7
1.2. Теплопроводность различных материалов	10
1.3. Классическое уравнение теплопроводности	15
1.4. Уравнение теплопроводности в энтальпийной форме ..	17
1.5. Граничные и начальные условия	20
1.6. Безразмерные переменные и подобие.....	21
1.7. Простейшие инженерные задачи теплопроводности.....	25
1.7.1. Стационарная теплопередача через плоскую стенку	25
1.7.2. Теплопередача через цилиндрическую стенку	29
1.7.3. Теплоотдача ребренных труб. Прямое ребро	36
1.7.4. Теплоотдача ребренных труб. Кольцевое ребро	39
1.8. О точных решениях нестационарного уравнения	42
1.8.1. Автомодельная задача Дирихле	42
1.8.2. Автомодельная задача Неймана	45
Глава 2. Конвективный теплообмен	48
2.1. Основные понятия, определения и задачи	48
2.2. Уравнения конвективного теплообмена.....	49
2.2.1. Уравнение неразрывности	49
2.2.2. Уравнения движения	51
2.2.3. Уравнения Навье-Стокса.....	54
2.2.4. Уравнение конвективного теплопереноса.....	55
2.2.5. Плоские течения и преобразованные переменные....	57

2.2.6. Уравнения пограничного слоя.....	60
2.2.7. Теплообмен при обтекании плоской пластины	66
2.2.8. Теплообмен в турбулентных течениях	72
2.3. Теплообмен в термоконвективных течениях	79
2.3.1. Уравнения термоконвекции	80
2.3.2. Естественная конвекция в канале с нагревателем.....	83
2.3.3. Метод численного решения	88
2.3.4. Результаты численного моделирования	94
Глава 3. Теплообмен при фазовых превращениях.....	97
3.1. Классическая двухфазная задача Стефана	103
3.1.1. Автомодельное решение	105
3.2. Обобщенная постановка задачи Стефана.....	108
3.3. Численные методы решения	110
3.3.1. Метод регуляризации скачка энтальпии	110
3.3.2. Метод линеаризации Кирхгофа.....	112
3.4. Конденсация пара на вертикальной пластине	122
3.4.1. Постановка задачи	122
3.4.2. Безразмерные переменные и критерии подобия	124
3.4.3. Решение задачи. Безинерционное приближение.....	125
3.4.4. Касательное напряжение на границе пленки	135
Литература	140

Для заметок

Александр Бенцианович Мазо

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ
РАСЧЕТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ**

Учебное пособие

Выходит в авторской редакции

Подписано в печать 25.10.2013.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 8,37.
Уч.-изд. л. 2,77. Тираж 60 экз. Заказ 137/10

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28