КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра теории и технологий преподавания

математики и информатики

Фалилеева М.В.

Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром

Учебное пособие

Казань – 2014

УДК 512
ББК 22.1я72
Ф19

Печатается по решению кафедры теории и технологий
преподавания математики и информатики
Протокол № от 25 июня 2014 года

Рецензенты:
доктор педагогических наук,
заведующая кафедрой теории и технологий преподавания
математики и информатики КФУ **Л.Р. Шакирова,**
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и математического
моделирования КФУ **М.И. Киндер**

Фалилеева М.В.
Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром: Учебное пособие / М.В. Фалилеева. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 111 с.

В учебном пособии рассматривается решение простейших линейных, дробно-рациональных, квадратных, иррациональных уравнений и неравенств с параметром на основе оригинального методического подхода, связанного с применением неполной индукции. Пособие предназначено для учителей, студентов педагогических отделений, учащихся общеобразовательных учреждений.

Содержание

Предисловие

Наш уважаемый друг!
Учащийся, будущий учитель, учитель!

> Задача с параметром — естественный этап в решении любой математической задачи.
> *П. М. Эрдниев*

Что такое задачи с параметром? Почему один учащийся решает их легко, а другой не может? Как научиться и научить других решать задачи с параметром? Надеемся, что именно на эти вопросы поможет Вам ответить наше учебное пособие.

Наверное, Вы легко решаете линейные и квадратные уравнения без параметра, но, видя параметр, теряетесь. Это связано с двумя формами усвоения учебного материала. Первая — репродуктивная, когда действия выполняются по образцу, по алгоритму. Часто в этом случае образуется навык, который приводит к решению простейших уравнений «автоматически», «формально» по алгоритму. Вторая форма усвоения учебного материала — продуктивная. Она невозможна без репродуктивной формы усвоения учебного материала, но требует иного качественного подхода к решению задач. В этом случае необходимы четкое понимание теории метода, творческий подход и трудолюбие.

Ведущей идеей нашего методического подхода стало использование неполной индукции (частных случаев) в обучении решению задач с параметрами. Именно он позволяет практически реализовать связь между репродуктивным и продуктивным уровнем усвоения материала по теме «Уравнения и неравенства» (7-9 классы).

В объяснениях часто будет встречаться термин «параметризация», давно известный математикам. О параметризации математики говорят тогда, когда занимаются обобщением ряда задач путем введения параметра. Параметризировать можно любую математическую задачу, при этом ввести не только один, но и даже несколько параметров. Исходя из этой логики, все уравнения и неравенства можно разделить на две группы — без параметров и с параметрами. Отсюда будем рассматривать решение уравнений и неравенства с параметрами как качественное обобщение и систематизацию по теме «Уравнения и неравенства в 7-9 классах». Решайте самостоятельно, сравнивайте с нашими решениями.

Желаем Вам радости достижений!

Автор

§ 1. Понятие уравнений и неравенств с параметром

Параметр в уравнении или неравенстве — это неизвестная величина, но в решении задачи она принимает любое числовое значение из заданного числового множества.

Например, дана задача: Решите уравнение $ax = 2$ с параметром a.

Имеется в виду: какое решение будет иметь уравнение $ax = 2$ при любом действительном a, т. е. при $a \in (-\infty; +\infty)$.

Найдем решения уравнения $ax = 2$ при нескольких, произвольно выбранных значениях параметра a:

- при $a = -1{,}5$ уравнение принимает вид $-1{,}5x = 2$ и имеет решением $x = -\frac{4}{3}$;
- при $a = 3\sqrt{2}$ уравнение принимает вид $3\sqrt{2}\,x = 2$ и имеет решением $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$;
- при $a = 0$ уравнение принимает вид $0x = 2$ и не имеет решений.
- при $a = 100$ уравнение принимает вид $100x = 2$ и имеет решением $x = -0{,}02$; и. т. д.

Получаем: если $a = -1{,}5$, то $x = -\frac{4}{3}$; если $a = 3\sqrt{2}$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$; если $a = 0$, то нет решений; если $a = 100$, то $x = -0{,}02$.

Все эти решения при конкретных значениях параметра будем называть **частными решениями уравнения с параметром при $a = -1{,}5$, $a = 3\sqrt{2}$, $a = 0$, $a = 100$**.

Наша задача — найти решение уравнения при **любом действительном значении параметра**.

Здесь на помощь нам приходит знание свойств уравнений соответствующего вида с последующим обобщением. Так, уравнение $ax = 2$ при всех взятых значениях, кроме $a = 0$, принимает вид линейного, поэтому по свойству тождественных преобразований решается делением свободного члена на коэффициент при неизвестной, т. е. $x = -\frac{2}{a}$.

Перейдем к формулировке ответа с параметром. Если Вас просят в задании решить уравнение с параметром при заданных значениях параметра, ответ *правильно формулируется и записывается так*:

Если $a = \text{const}$, то $x = f(a)$.

При этом значения параметра должны быть представлены элементом или промежутком, принадлежащим числовому множеству, а значение переменной x — либо числовым или пустым множеством, либо алгебраическим выражением через параметр a.

Например, в разобранной ранее задаче ответ формулируется так:

Ответ: если $a = 0$, то нет корней;

если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = -\frac{2}{a}$.

Видим, что если $a = 0$, то пустое множество, если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = f(a)$.

Обратите внимание, что *при объединении всех значений параметра a* в ответе должно получиться *множество действительных чисел* (заданное множество), т.е.:

$$a \in \{0\} \cup (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = (-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}.$$

В данном примере параметр a принадлежит множеству действительных чисел, но в некоторых задачах параметр может принадлежать другим множествам чисел (*целым, положительным действительным, неотрицательным действительным и др.*).

Подведем итог: **понятие уравнения (неравенства) с параметром** включает в себя понимание того, что:

- **Уравнение (неравенство) с параметром — это *семейство уравнений* (*неравенств*) одного вида при одних значениях параметра, другого вида — при других значениях параметра, при каких-то значениях параметра в это семейство входят верные или неверные равенства (числовые неравенства).**

- **Решение уравнения (неравенства) может включать в себя *несколько методов решения*, соответствующих каждому виду уравнения при определенных значениях параметра.**

Практическая реализация этих идей будет представлена в следующих разделах.

§ 2. Параметризация линейных уравнений

Самые простые уравнения школьного курса математики — линейные. Поэтому первыми рассмотрим уравнения вида $ax + b = 0$ с параметризацией:

1) **свободного члена** (например, $2x = a - 4$, $3x + 2a = 0$);

2) **коэффициента при переменной** (например, $ax - 2x = 4$, $ax + 4 = 0$);

3) **свободного члена и коэффициента при переменной** (например, $ax - 2x = 4a$, $ax = a - 4$).

Для решения данных видов уравнений будем обращаться к частным случаям.

Задача 2.1. Решите уравнение $2x = a - 4$ с параметром a.

Решение. Определим, какой вид принимает уравнение $2x - a + 4 = 0$ при некоторых значениях параметра a. Если $a = -1$; 0; 2; 4 или 6, то получаем соответственно $2x + 5 = 0$; $2x + 4 = 0$; $2x + 3 = 0$; $2x = 0$ или $2x - 2 = 0$. Обратите внимание, какими общими свойствами обладают перечисленные уравнения без параметра?

Коэффициент при неизвестной равен 2, свободный член может принимать любые числовые значения. Таким образом, уравнение $2x = a - 4$ всегда (т.е. при любом значении параметра a) имеет решение $x = \dfrac{a-4}{2}$.

Ответ: <u>если</u> $a \in \boldsymbol{R}$, <u>то</u> $x = \dfrac{a-4}{2}$.

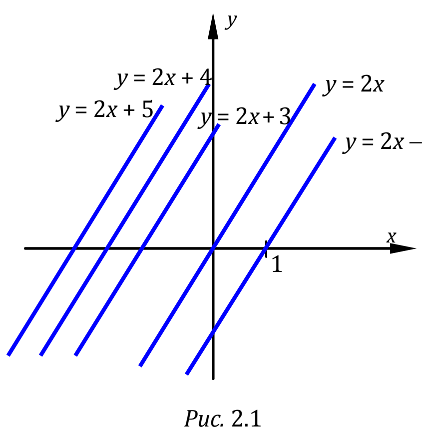


Рис. 2.1

Параллельно с аналитическим решением простейших уравнений и неравенств начнем обращаться к функционально-графической и геометрической интерпретациям. На начальном этапе это не будет связано с функционально-графическим методом решения, а только с расширением понятия «уравнение с параметром» или «неравенство с параметром».

Комментарии к задаче. Перенесем вправо все одночлены уравнения задачи 2.1 и введем функцию $y = 2x - a + 4$. При взятых значениях параметра $a = -1$ получим $y = 2x + 5$; $a = 0$, $y = 2x + 4$; $a = 1$, $y = 2x + 3$; $a = 4$, $y = 2x$; $a = 6$, $y = 2x - 4$. Графики данных линейных функций — это множество параллельных прямых (рис. 2.1). Абсциссы точки пересечения этих прямых с осью абсцисс соответствуют решениям уравнения $2x = a - 4$ при различных значениях параметра a.

Задача 2.2. Решите уравнение $ax - 2x = 4$ с параметром a.

Решение. Для проведения анализа и сравнений поместим частные случаи в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="4">Частные случаи</th><th colspan="2">Решение уравнения $ax - 2x = 4$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>*Если*</td><td>$a = 3$,</td><td>$a = 1{,}5$,</td><td>$a = 0$,</td><td>$a = 2$,</td><td>$a = 2$,</td><td>$a \neq 2$,</td></tr>
<tr><td>*То*</td><td>$3x - 2x = 4$</td><td>$1{,}5x - 2x = 4$</td><td>$0x - 2x = 4$</td><td>$2x - 2x = 4$</td><td>$2x - 2x = 4$</td><td>$ax - 2x = 4$</td></tr>
<tr><td>*Приведем подобные:*</td><td>$x = 4$</td><td>$-0{,}5x = 4$</td><td>$-2x = 4$</td><td>$0 = 4$</td><td>$0 = 4$</td><td>$(a - 2)x = 4$</td></tr>
<tr><td>*Уравнение:*</td><td colspan="3">линейное</td><td rowspan="2">неверное числовое равенство</td><td rowspan="2">неверное числовое равенство</td><td>линейное</td></tr>
<tr><td>*Преобразуем:*</td><td>-</td><td>$x = \frac{4}{0{,}5}$, т.е. $x = -8$</td><td>$x = \frac{4}{-2}$; т. е. $x = -2$</td><td>$x = \frac{4}{a - 2}$</td></tr>
<tr><td>*Ответ*:</td><td>$x = 4$</td><td>$x = -8$</td><td>$x = -2$</td><td>нет корней</td><td>нет корней</td><td>$x = \frac{4}{a - 2}$</td></tr>
</table>

Читать эту таблицу следует так (1-й и 2-й столбцы): «Если $a = 3$, то уравнение с параметром примет вид $3x - 2x = 4$. Приведем подобные и получим $x = 4$ — линейное уравнение, преобразований здесь не требуется, поэтому в ответе получим $x = 4$ — корень уравнения $ax - 2x = 4$ при $a = 3$».

Анализ частных случаев показывает, что этапы решения при $a \neq 2$ повторяются, поскольку уравнение при различных значениях параметра a принимает вид линейного с различными коэффициентами при неизвестной x и одинаковым свободным членом. Решение данного уравнения записаны в двух последних столбцах таблицы 2.2.

Ответ: <u>если</u> $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \dfrac{4}{a-2}$; <u>если</u> $a = 2$, то нет корней.

Комментарий к задаче. Для графической интерпретации уравнения $(a-2)x = 4$ можно ввести функцию $y = (a-2)x - 4$, график которой состоит из множества прямых, проходящих через точку $(0; -4)$ и углы наклона которых относительно OX различны.

Задача 2.3. Решите уравнение $ax - 2x = 4a$ с параметром a.

Решение. Разместим решения частных случаев и решение данного уравнения с параметром в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			**Решение уравнения $ax - 2x = 4$**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Если	$a = 3$,	$a = 1{,}5$,	$a = 0$,	$a = 2$,	$a \neq 2$,
То	$3x - 2x = 12$	$1{,}5x - 2x = 6$	$0x - 2x = 0$	$2x - 2x = 8$	$ax - 2x = 4$
Приведем подобные:	$x = 12$	$-0{,}5x = 6$	$-2x = 0$	$0 = 8$	$(a-2)x = 4a$
Уравнение:	линейное			неверное	линейное

Преобразуем:	-	$x=\dfrac{6}{-0{,}5}$, т.е. $x=-12$	$x=\dfrac{0}{-2}$; т.е. $x=0$	числовое равенство	$x=\dfrac{4a}{a-2}$
Ответ:	$x=12$	$x=-12$	$x=0$	нет корней	$x=\dfrac{4a}{a-2}$

При решении уравнения с параметром обращаем внимание на значение $a=2$, при котором коэффициент при неизвестной x обращается в ноль. Этот случай мы рассматриваем отдельно: подставляем его в исходное уравнение, решаем, делаем выводы (6 столбец табл. 2.3).

Ответ: <u>если</u> $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x=\dfrac{4a}{a-2}$; <u>если</u> $a=2$, то нет корней.

Покажем решения уравнений с другими видами параметризации.

Задача 2.4. Решите уравнение $\dfrac{x-a}{a-2}=0$ с параметром *a*.

Решение. Определим вид уравнения при различных значениях параметра. Рассмотрим частные случаи при $a=5$, $a=2$, $a=-10$ и $a=14$ (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Этапы рассуждений	**Частные случаи**				**Решение уравнения $\dfrac{x-a}{a-2}=0$**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Если	$a=5$,	$a=2$,	$a=-10$,	$a=14$,	$a=2$,	$a\neq 2$,
То	$\dfrac{x-5}{3}=0$	$\dfrac{x-2}{0}=0$	$\dfrac{x+10}{-12}=0$	$\dfrac{x-14}{12}=0$	$\dfrac{x-2}{0}=0$	$\dfrac{x-a}{a-2}=0$
Уравнение:	линейное	неверное равенство	линейное		неверное равенство	линейное
Тогда	$x-5=0$		$x+10=0$	$x-14=0$		$x-a=0$
Ответ:	$x=5$	нет корней	$x=-10$	$x=14$	нет корней	$x=a$

Обратим внимание на значение a, при котором выражение в знаменателе обращается в ноль (3-й столбец табл. 2.4). Этот случай отдельно представим в решении уравнения с параметром (6 столбец).

Ответ: <u>если</u> $a = 2$, то нет корней; <u>если</u> $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = a$.

Задача 2.5. Решите уравнение $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$ с параметром a.

Решение. Рассмотрим частный случай, например, при $a = 1$ (2-й столбец табл. 2.5). Подставив это значение, получим линейное уравнение. Аналогичное решение получим при $a = -2$ (3-й столбец табл. 2.5).

Таблица 2.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнения $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Если	$a = 1$,	$a = -2$,	$a = 2$,	$a = 3$,	$a \neq 2$, $a \neq 3$,
То	$2x = -3$	$20x = 0$	$0x = 0$ или $0 = 0$	$0x = 5$ или $0 = 5$	$(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$
Уравнение:	линейное		верное числовое равенство	неверное числовое равенство	линейное
Преобразуем:	$x = -\frac{3}{2}$	$x = \frac{0}{20}$			$x = \frac{a^2 - 4}{a^2 - 5a + 6}$, $x = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)}$
Ответ:	$x = -\frac{3}{2}$	$x = 0$	любое x	нет корней	$x = \frac{a+2}{a-3}$

Таким образом, если коэффициент при переменной x не равен нулю, то уравнение линейное. Исходя из этого, действуем аналогично в общем случае (6-й столбец табл. 2.5). Разложим числитель и знаменатель на множители $x = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)}$, при этом *рекомендуем ничего не сокращать, не отбрасывать при решении* *уравнения* (в этом уравнении была возможность сократить $a - 2$, но мы этого не сделали!). Любое значение a, которое обращает в ноль числитель или знаменатель выражения, определяющего x, необходимо проверить, то есть подставить в *исходное* уравнение. Здесь эти значения –2, 2, и 3 (3-й, 4-й и 5-й столбцы табл. 2.4). Тогда при $a = -2$ получим линейное уравнение, при $a = 2$ — числовое тождество, а при $a = 3$ — неверное равенство. Поскольку при $a = -2$ решение соответствует решению в общем виде, мы не будем его выделять, а решения частных случаев при $a = 2$ и $a = 3$ представим особо в решении исходного уравнения с параметром.

Только после исключения значений a при равном 2 и 3 можно записать, что при остальных значениях параметра $x = \dfrac{a+2}{a-3}$.

Ответ: <u>если</u> $a = 2$, то x — любое действительное число; <u>если</u> $a = 3$, то нет корней; <u>если</u> $a \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x = \dfrac{a+2}{a-3}$.

> Уравнения с параметром вида $ax + b = 0$ в зависимости от значений параметра могут принимать вид *линейных уравнений*, *верных* или *неверных числовых равенств*.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения с параметром a:

2.6. $3x = a + 6$;

2.7. $3x + ax + 9 = 0$;

2.8. $4x + 2ax - 6a + 3 = 0$;

2.9. $(a^2 - 4)x = a + 2$.

Ответы

2.6. если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x = \dfrac{a+6}{3}$;

2.7. если $a = -3$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, то $x = \dfrac{-9}{a+3}$;

2.8. если $a = -2$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, то $x = \dfrac{3(2a-1)}{2(a+2)}$;

2.9. если $a = 2$, то нет корней; если $a = -2$, то x — любое действительное; если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \dfrac{1}{a-2}$.

§ 3. Простейшие дробно-рациональные уравнения с параметром

Дробно-рациональные уравнения с двучленами первой степени в числителе и знаменателе, содержащими параметр, можно решать уже в 7 классе. Выделим следующие виды параметризации:

1) **свободного члена в числителе** (например, $\frac{x+2a}{x-6}=0$);

2) **свободного члена в знаменателе** (например, $\frac{x+2}{x-6a}=0$, $\frac{2}{x-a}=0$);

3) **свободных членов в числителе и в знаменателе** (например, $\frac{x+2a}{x-a}=0$);

4) **коэффициентов при переменной в числителе или знаменателе** (например, $\frac{ax+2}{x-6a}=0$).

Рассмотрим решения приведенных примеров.

Задача 3.1. Решите уравнение $\frac{x+2a}{x-6}=0$ с параметром a.

Представим решения частных случаев при $a=5$, $a=0$ и $a=-10$ в таблице 3.1.

При $a=5$ уравнение $\frac{x+10}{x-6}=0$ — дробно-рациональное (2-й столбец табл. 3.1). Оно может иметь числовое решение при равенстве числителя нулю (т.е. $\frac{0}{x-6}=0$), иначе оно будет неверным числовым равенством. Важно, чтобы полученное значение корня $x=-10$ не обращало знаменатель в ноль.

Решения уравнения при $a=0$ и $a=-10$ (3-й и 4-й столбцы табл. 3.1) аналогичны.

Таблица 3.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			**Решение уравнения $\frac{x+2a}{x-6}=0$**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Если	$a=5$,	$a=0$,	$a=-10$,	$a=-3$,	$a\neq-3$,
То	$\frac{x+10}{x-6}=0$	$\frac{x}{x-6}=0$	$\frac{x-20}{x-6}=0$	$\frac{x-6}{x-6}=0$, т. е. $1=0$	$\frac{x+2a}{x-6}=0$
Уравнение:	дробно-рациональное			неверное числовое равенство	дробно-рацион.
Решение: уравнение равносильно системе	$\begin{cases}x+10=0,\\ x-6\neq0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-10,\\ x\neq6;\end{cases}$ $-10\neq6$	$\begin{cases}x=0,\\ x-6\neq0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=0,\\ x\neq6;\end{cases}$ $0\neq6$	$\begin{cases}x-20=0,\\ x-6\neq0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=20,\\ x\neq6;\end{cases}$ $20\neq6$		$\begin{cases}x+2a=0,\\ x-6\neq0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-2a,\\ x\neq6;\end{cases}$ $-2a\neq6$ при $a\neq-3$
Ответ:	$x=-10$	$x=0$	$x=20$	нет корней	$x=-2a$

Решение. Данное уравнение $\frac{x+2a}{x-6}=0$ равносильно уравнению $x+2a=0$ при условии, что полученное значение x не обращает знаменатель в ноль (6-й столбец табл. 3.1). Для этого решим уравнение $-2a=6$, корень которого дает отдельное частное решение исходного уравнения (5-й столбец табл. 3.1)

Ответ: если $a=-3$, то нет корней; если $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$, то $x=-2a$.

Проверка ответа

Рассмотренные *частные случаи можно использовать как проверку ответа*. Проведем проверку ответа задачи 3.1:

- обратимся к частному случаю при $a=5$ (1-й столбец табл. 3.1): «если $a=5$, то $x=-10$». Смотрим в *ответ* и определяем, какому из выделенных промежутков параметра a принадлежит $a=5$: $5\in(-3;+\infty)$, следовательно,

$x = -2a$. Подставим $a = 5$ в $x = -2a$ и получим $x = -2 \cdot 5 = -10$ — ответ в частном случае (2-й столбец) соответствует частному случаю ответа данного уравнения с параметром (7-й столбец табл. 3.1).

• обратимся к частному случаю при $a = -10$ (5-й столбец табл. 3.1): «если $a = -10$, то $x = 20$». В ответе $a = -10$ принадлежит промежутку $(-\infty; -3)$, которому соответствует $x = -2a$. Подставим $a = -10$ в $x = -2a$ и получим $x = -2 \cdot (-10) = 20$. Ответы соответствуют.

Такая проверка при решении любых уравнений и неравенств с параметром необходима, поскольку все бесконечное множество значений a и соответствующих каждому из них решений проверить невозможно, поэтому желательно проверять решения в частных случаях.

Задача 3.2. Решите уравнение $\frac{x+2}{x-6a} = 0$ с параметром a.

Представим решения частных случаев при $a = 2$, $a = -2$ и $a = 0$ в таблице 3.2 (2, 3 и 4-й столбцы). Как видим, параметр находится только в знаменателе, поэтому корень уравнения не содержит параметра.

Решение. Данное уравнение $\frac{x+2}{x-6a} = 0$ равносильно уравнению $x + 2 = 0$ при условии, что $x \neq 6a$ (6-й столбец табл. 3.2). Решив уравнение $-2 = 6a$, получим значение параметра $a = -\frac{1}{3}$, при котором рассмотрим частное решение исходного уравнения (5-й столбец табл. 3.2)

Таблица 3.2

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			**Решение уравнения** $\frac{x+2}{x-6a}=0$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Если	$a = 2$,	$a = -2$,	$a = 0$,	$a = -\frac{1}{3}$,	$a \neq -\frac{1}{3}$,
То	$\frac{x+2}{x-12} = 0$	$\frac{x+2}{x+12} = 0$	$\frac{x+2}{x} = 0$	$\frac{x+2}{x+2} = 0$, т.е. $1 = 0$	$\frac{x+2}{x-6a} = 0$
Уравнение:	дробно-рациональное			неверное числовое равенство	дробно-рац.
Решение: уравнение равносильно системе	$\begin{cases} x+2=0, \\ x-12 \neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2, \\ x \neq 12; \end{cases}$ $-2 \neq 12$	$\begin{cases} x+2=0, \\ x+12 \neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2, \\ x \neq -12; \end{cases}$ $-2 \neq 12$	$\begin{cases} x+2=0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $-2 \neq 0$		$\begin{cases} x+2=0, \\ x-6a \neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2, \\ x \neq 6a; \end{cases}$ $-2 \neq 6a$ при $a \neq -\frac{1}{3}$
Ответ:	$x = -2$	$x = -2$	$x = -2$	нет корней	$x = -2$

Ответ: если $a = -\frac{1}{3}$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$, то $x = -2$.

Следующее уравнение относится к тому же типу параметризации, что и в задаче 3.2, но имеет другое решение.

Задача 3.3. Решите уравнение $\frac{2}{x-a} = 0$ с параметром a.

Решение. Составим таблицу 3.3. Особенность этого уравнения в том, что по определению оно дробно-рациональное, и может иметь корни в случае равенства числителя нулю. В данном уравнении числитель равен 2, поэтому решений в действительных числах уравнение не имеет.

Таблица 3.3

Этапы рассуждений	Частные случаи			Решение уравнения $\frac{2}{x-a}=0$
Если	$a = 5$,	$a = -5$,	$a = 0$,	a — любое
То	$\frac{2}{x-5}=0$	$\frac{2}{x+5}=0$	$\frac{2}{x}=0$	$\frac{2}{x-a}=0$
Вид уравнения	дробно-рациональное			дробно-рациональное
Тогда	$2 = 0$ — неверное равенство	$2 = 0$ — неверное равенство	$2 = 0$ — неверное равенство	$2 = 0$ — неверное равенство
Ответ:	нет корней	нет корней	нет корней	нет корней

Ответ: если $a \in (-\infty; +\infty)$, то нет корней.

Задача 3.4. Решите уравнение $\frac{x+2a}{x-a}=0$ с параметром a.

Решения частных случаев при $a = 3$ и $a = -1$ представим в таблице 3.4. При $a = 3$ уравнение принимает вид дробно-рационального $\frac{x+6}{x-3}=0$ (3-й столбец табл. 3.4). Оно может иметь числовое решение в случае равенства числителя нулю (т.е. $\frac{0}{x-3}=0$), иначе оно будет неверным числовым равенством. Поэтому неравенство равносильно уравнению $x + 6 = 0$ при условии, что $x - 3 \neq 0$. Обычно, после нахождения корня $x = -6$ мы устно проверяем принадлежность корня области допустимых значений $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, так $-6 \in (-\infty; 2)$ (или $-6 \neq 3$). При решении уравнения с параметром это действие приводит к нахождению значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

Таблица 3.4

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнения** $\boldsymbol{\frac{x+2a}{x-a}=0}$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = 3$,	$a = -1$,	$a = 0$,	$a \neq 0$,
То	$\frac{x+6}{x-3} = 0$	$\frac{x-2}{x+1} = 0$	$\frac{x}{x} = 0$, т. е. $1 = 0$	$\frac{x+2a}{x-a} = 0$
Уравнение:	дробно-рациональное		неверное числовое равенство	дробно-рацион.
Решение: уравнение равносильно системе	$\begin{cases} x+6=0, \\ x-2\neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-6, \\ x\neq 2; \end{cases}$ $-6 \neq 2$	$\begin{cases} x-2=0, \\ x+1\neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2, \\ x\neq -1; \end{cases}$ $2 \neq -1$		$\begin{cases} x+2a=0, \\ x-a\neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2a, \\ x\neq a; \end{cases}$ $-2a \neq a$ при $a \neq 0$
Ответ:	$x = -6$	$x = 2$	нет корней	$x = -2a$

Решение. Уравнение $\frac{x+2a}{x-a} = 0$ имеет решение в случае равенства числителя нулю (т.е. $x + 2a = 0$) при условии, что полученные значения x не обращают знаменатель в ноль ($x - a \neq 0$) (5-й столбец табл. 3.4). Существует одно значение $a = 0$, являющееся решением равенства $-2a = a$, подстановка которого в исходное уравнение создает отдельное решение данного уравнения (4-й столбец табл. 3.4).

Ответ: если $a = 0$, то нет корней; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = -2a$.

Задача 3.5. Решите уравнение $\frac{ax+2}{x-6a} = 0$ с параметром a.

Составим таблицу 3.5, в которой представлены решения частных случаев во 2-м и 3-м столбцах.

Таблица 3.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнение** $\dfrac{ax+2}{x-6a}=0$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = 2$,	$a = -4$,	$a = 0$,	$a \neq 0$,
То	$\dfrac{2x+2}{x-12}=0$	$\dfrac{-4x+2}{x+24}=0$	$\dfrac{2}{x}=0$	$\dfrac{x+\frac{2}{a}}{x-6a}=0$
Уравнение:	дробно-рациональное		дробно-рациональное	
Тогда	$2x+2=0$ и $x-12\neq 0$	$-4x+2=0$ и $x+24\neq 0$	$2 = 0$ — неверное равенство	$x+\dfrac{2}{a}=0$ и $x-6a\neq 0$
Решим:	$x=-1$ и $x\neq 12$	$x=0{,}5$ и $x\neq -24$		$x=-\dfrac{2}{a}$ и $x\neq 6a$
Проверим:	$-1\neq 12$	$0{,}5\neq -24$		$-\dfrac{2}{a}\neq 6a$ при любых a
Ответ:	$x=-1$	$x=0{,}5$	нет корней	$x=-\dfrac{2}{a}$

Решение. Приведем уравнение к виду $\dfrac{a(x+\frac{2}{a})}{x-6a}=0$. Если $a\neq 0$, то оно равносильно уравнению $\dfrac{x+\frac{2}{a}}{x-6a}=0$ (5-й столбец табл. 3.5), то есть уравнение относится к виду уравнения из предыдущей задачи 3.4. Соответственно, находим значения параметра, при которых $x\neq 6a$, для этого решим уравнение $-\dfrac{2}{a}=6a$. В результате получим уравнение $\dfrac{2+6a^2}{a}=0$, которое не имеет решений в действительных числах. Таким образом, при $a\neq 0$ уравнение имеет корень $x=-\dfrac{2}{a}$.

Случай решения уравнения при $a = 0$ представлен в 4-м столбце таблицы 3.5.

Ответ: если $a = 0$, то нет корней; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x=-\dfrac{2}{a}$.

Таким образом, если параметр содержится в коэффициентах при переменной в простейшем дробно-рациональном уравнении вида $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ и $a\neq 0$, $c\neq 0$, то уравнение можно привести к виду $\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}=0$ и решать как простейшее дробно-рациональное уравнение с коэффициентами при *x*, равными единице.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения с параметром *a*:

3.6. $\frac{x+2-a}{x+3}=0;$

3.7. $\frac{x+3}{x-\frac{1}{a}}=0;$

3.8. $\frac{2a}{x+1}=0;$

3.9. $\frac{x+2a}{x-a}=0;$

3.10. $\frac{ax+2x+6}{x+2a}=0.$

Ответы

3.6. если $a = -1$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, то $x = a - 2$.

3.7. если $a = -\frac{1}{3}$, $a = 0$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = -3$.

3.8. если $a = 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то нет корней;

3.9. если $a = 0$, то нет корней; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $x = -2a$.

3.10. если $a = -3$, $a = -2$, $a = 1$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = -\frac{6}{a+2}$.

§ 4. Решение уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$

В уравнениях вида $ax^2 + bx + c = 0$ могут быть *параметризованы*:

1) **свободный член** (например, $x^2 - 2x + a + 3 = 0$);
2) **коэффициент при переменной 1-ой степени** (например, $x^2 - 2x + ax + 3 = 0$);
3) **коэффициент при старшем члене** (например, $ax^2 - 2x + 3 = 0$);
4) **коэффициенты при переменных разных степеней или свободный член** (например, $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$).

Задача 4.1. Решите уравнение $x^2 - 2x + a + 3 = 0$ с параметром a.

Составим таблицу 4.1. Частные случаи подобраны так, чтобы показать различные решения уравнения с параметром. При $a = 0$ корней нет, при $a = -6$ два корня (2-й и 3-й столбцы). Таким образом, решение данного квадратного уравнения с параметром a должно включать в себя эти варианты решений.

Таблица 4.1

Этапы рассуждений	Частные случаи		Решение уравнения $x^2 - 2x + a + 3 = 0$	
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = 0$,	$a = -6$,	$a \le -2$	$a > -2$
То	$x^2 - 2x + 3 = 0$	$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + a + 3 = 0$	
Уравнение	квадратное		квадратное	
Тогда	$\frac{D}{4} = -2$; $D < 0$, т.е. нет корней.	$\frac{D}{4} = 4$; поскольку $D > 0$, то $x_1 = 3, x_2 = -1$	$\frac{D}{4} = 1^2 - (a + 3) = -a - 2$	
			$D \ge 0$, т.е. $-a - 2 \ge 0$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a-2}$	$D < 0$, т.е. при $-a - 2 < 0$ нет корней
Ответ:	нет корней	$x_1 = 3, x_2 = -1$	$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a-2}$	нет корней

Решение. Выделение промежутков $a \le -2$ и $a > -2$ выполняется на этапе работы с дискриминантом D (только потом они записаны в строчку «Если») (4-й и 5-й столбцы табл. 4.1). Если $D = 0$ при $a = -2$, то $x_1 = x_2 = 1$. Отметим, что при совпадении корней уравнения в школьном курсе говорят, что уравнение имеет один корень. В высшей алгебре говорят, что корень квадратного уравнения $x = 1$ имеет кратность 2.

Учитывая, что можно отдельно выделить случай равенства дискриминанта нулю, ответ можно записать в одном из двух вариантов:

1) *Ответ*: если $a \in (-\infty; -2]$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a-2}$; если $a \in (-2; +\infty)$, то нет корней.

2) *Ответ*: если $a \in (-\infty; -2)$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a-2}$; если $a = -2$, то $x = 1$; если $a \in (-2; +\infty)$, то нет корней.

Комментарий к задаче. Для графической интерпретации уравнения $x^2 - 2x + a + 3 = 0$ введем функцию $y = x^2 - 2x + a + 3$. Приведем к виду $y = (x - 1)^2 + a + 2$, график состоит из множества парабол, с вершинами в точках $(1; a + 2)$ (т.е. вершины всех парабол расположены на прямой $x = 1$). Ветви парабол направлены вверх. Все параболы получены из графика $y = x^2$ параллельным переносом в точки $(1; a + 2)$.

Задача 4.2. Решите уравнение $x^2 - 2x + ax + 3 = 0$ с параметром a.

Представим частные случаи в таблице 4.2 (2 и 3 столбцы). Значения параметра подобраны так, что получаем различные решения: при $a = 0$ корней нет; при $a = -2$ два корня.

Решение. Приведем подобные и получим $x^2 + (a - 2)x + 3 = 0$ (4 и 5 столбцы табл. 4.2). Это квадратное уравнение с параметром при переменной 1-й степени, поэтому решения уравнения зависят от значений дискриминанта.

Таблица 4.2

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="2">Частные случаи</th><th colspan="2">Решение уравнения
$x^2 - 2x + ax + 3 = 0$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Если</td><td>$a = 0$,</td><td>$a = -2$,</td><td>$a \le 2 - 2\sqrt{3}$,
$a \ge 2 + 2\sqrt{3}$</td><td>$2 - 2\sqrt{3} < a <$
$2 - 2\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>То</td><td>$x^2 - 2x + 3 = 0$</td><td>$x^2 - 4x + 3 = 0$</td><td colspan="2">$x^2 + (a - 2)x + 3 = 0$</td></tr>
<tr><td>Уравнение:</td><td colspan="2">квадратное</td><td colspan="2">квадратное</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тогда</td><td rowspan="2">$\frac{D}{4} = -2$;
$D < 0$, поэтому корней нет</td><td rowspan="2">$\frac{D}{4} = 1$;
поскольку $D > 0$, то $x_1 = 3, x_2 = 1$</td><td colspan="2">$D = (a - 2)^2 - 4 \cdot 3 = a^2 - 4a - 8 =$
$(a - 2 + 2\sqrt{3})(a - 2 - 2\sqrt{3})$</td></tr>
<tr><td>$D \ge 0$ при
$a \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{3}] \cup$
$[2 + 2\sqrt{3}; +\infty)$;
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 8}$</td><td>$D < 0$ при
$a \in (2 - 2\sqrt{3}$;
$2 + 2\sqrt{3})$ нет корней</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>нет корней</td><td>$x_1 = 3, x_2 = 1$</td><td>$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 8}$</td><td>нет корней</td></tr>
</table>

Ответ: если $a \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{3}) \cup (2 + 2\sqrt{3}; +\infty)$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 8}$; если $a = 2 - 2\sqrt{3}$ или $a = 2 + 2\sqrt{3}$, то $x = 1$; если $a \in (2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3})$, то нет корней.

Комментарий к задаче. Для графической интерпретации уравнения $x^2 - 2x + ax + 3 = 0$ введем функцию $y = x^2 - 2x + ax + 3$. Приведем к виду $y = x^2 + (a - 2)x + 3$, график которой состоит из множества парабол, с вершинами в точках $(\frac{a-2}{2}; \frac{3(a-2)^2}{4} + 3)$ и проходящих через точку (0; 3). Ветви всех парабол направлены вверх. Параболы получаются из графика $y = x^2$ сжатием вдоль оси абсцисс с коэффициентами, зависящими от значений параметра a.

Обратите внимание на условие следующей задачи. Оно эквивалентно ранее использованной формулировке: «Решите уравнение $f(x) = 0$ с параметром a».

Задача 4.3. При всех значениях параметра a решите уравнение $ax^2 - 2x + 3 = 0$.

Решение. Составим таблицу 4.3. В уравнении коэффициент a при старшем члене может обращаться в ноль. В этом случае уравнение $ax^2 - 2x + 3 = 0$ «превращается» в линейное $-2x + 3 = 0$ (4-й столбец в табл. 4.3).

Заметим, что условия $a > 0$ и $a < 0$ не рассматриваем, но обращение к этим двум случаям является обязательным при решении *квадратных неравенств* с параметризацией коэффициента при старшем члене.

Таблица 4.3

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="2">Частные случаи</th><th colspan="3">Решение уравнения
$ax^2 - 2x + 3 = 0$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Если</td><td>$a = -1$,</td><td>$a = 1$,</td><td>$a = 0$,</td><td colspan="2">$a \neq 0$,</td></tr>
<tr><td>То</td><td>$-x^2 -2x +3 =0$</td><td>$x^2 -2x +3 =0$</td><td>$-2x +3 =0$</td><td colspan="2">$ax^2 + 2x + 3 = 0$</td></tr>
<tr><td>Уравнение:</td><td colspan="2">квадратное</td><td>линейное</td><td colspan="2">квадратное</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тогда</td><td rowspan="2">$\frac{D}{4} = 4$;
поскольку $D > 0$, то
$x_1 = -3$, $x_2 = 1$</td><td rowspan="2">$\frac{D}{4} = -2$; $D < 0$,
поэтому корней нет</td><td rowspan="2">$x = 1{,}5$</td><td colspan="2">$\frac{D}{4} = 1^2 - 3a = 1 - 3a$</td></tr>
<tr><td>$D \geq 0$ при $a \leq \frac{1}{3}$;
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3a}$</td><td>$D < 0$ при
$a > \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>$x_1 = -3$, $x_2 = 1$</td><td>нет корней</td><td>$x = 1{,}5$</td><td>$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3a}$</td><td>нет корней</td></tr>
</table>

Обратите внимание, что условие $D \geq 0$ накладывает ограничение на параметр a и должно учитываться вместе с условием $a \neq 0$ при формировании ответа.

Ответ: если $a = 0$, то $x = 1{,}5$; если $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0; \frac{1}{3}]$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3a}$; если $a \in (\frac{1}{3}; +\infty)$, то нет корней.

Комментарий к задаче. Для графической интерпретации уравнения $ax^2 - 2x + 3 = 0$ введем функцию $y = ax^2 - 2x + 3$, график которой состоит из прямой (при $a = 0$) из множества парабол (при $a \neq 0$), проходящих через точку $(0; 3)$, с вершинами $(\frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + 3)$. При $a > 0$ ветви всех парабол направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Параболы получаются из графика $y = x^2$ сжатием вдоль оси абсцисс с коэффициентами, зависящими от значений параметра a.

Задача 4.4. Для каждого значения a решите уравнение $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$.

Решение. Составим таблицу 4.4. Данное аналитическое решение принципиально не отличатся от решения задачи 4.3.

Таблица 4.4

Этапы	**Частные случаи**		**Решение уравнения $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$**		
Если	$a = -1$,	$a = 1$,	$a = 0$,	$a \neq 0$,	
То	$-x^2 - x + 3 = 0$	$x^2 - 3x + 3 = 0$	$-2x + 3 = 0$	$ax^2 + (2 + a)x + 3 = 0$	
Уравнение:	Квадратное		линейное	квадратное	
Решение:	$D = 13$; поскольку $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$	$D = -4$; $D < 0$, поэтому корней нет	$x = 1{,}5$	$D = (2 + a)^2 - 12a = (a - 4 - 2\sqrt{3})(a - 4 + 2\sqrt{3})$	
				$D \geq 0$ при $a \leq 4 - 2\sqrt{3}$, $a \geq 4 + 2\sqrt{3}$; $x_{1,2} = 1 \pm$ $\pm\sqrt{-a^2 - 4a - 8}$	$D < 0$ при $4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3}$ — корней нет
Ответ:	$x_1 = -3$, $x_2 = 1$	нет корней	$x = 1{,}5$	$x_{1,2} = 1 \pm$ $\pm\sqrt{-a^2 - 4a - 8}$	нет корней

Ответ: если $a = 0$, то $x = 1{,}5$; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4 - 2\sqrt{3}] \cup [4 + 2\sqrt{3}; +\infty)$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a^2 - 4a - 8}$; если $a = 4 - 2\sqrt{3}$ или $a = 4 + 2\sqrt{3}$, то $x = 1$; если $a \in (4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3})$, то нет корней.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения с параметром a:

4.5. $2x^2 - 5x + 3a = 0$;

4.6. $-x^2 - 2ax + 3 = 0$;

4.7. $(a-1)x^2 - 4x + 5 = 0$;

4.8. $ax^2 - 4x + 5 - a = 0$;

4.9. $(a-2)ax^2 - 4(a-2)x + 5(a^2 - 4) = 0$.

Ответы

4.5. если $a \in (1\frac{1}{24}; +\infty)$, то нет корней; если $a \in (-\infty; 1\frac{1}{24}]$, то $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24a}}{4}$.

4.6. если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 3}$;

4.7. если $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 1{,}8]$, то $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{9 - 5a}}{a - 1}$; если $a = 1$, то $x = 1{,}25$; если $a \in (1{,}8; +\infty)$, то нет корней.

4.8. если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup [4; +\infty)$, то $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{a^2 - 5a + 4}}{a}$; если $a = 0$, то $x = 1{,}25$; если $a \in (1; 4)$, то нет корней.

4.9. если $a \in (-\infty; \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{5}; 2) \cup (2; +\infty)$, то нет корней; если $a \in [\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{5}; 0) \cup (0; \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{5}]$, то $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-5a^2 - 10a + 4}}{a}$; если $a = 0$, то $x = 2{,}5$; если $a = 2$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

§ 5. Нахождение значений параметра при заданных свойствах корней

После решения задач с формулировкой «Решите уравнение $F(x, a) = 0$ с параметром a» перейдем к решению задач-следствий.

Задача 5.1. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$ имеет ровно одно решение.

Первое решение. Заметим, что решение данного уравнения $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$ при любом значении параметра a рассмотрено в задаче 4.4, из которого легко вычленить решение данной задачи. Из таблицы 4.4 видим, что ровно одно решение возможно:

1) при $a = 0$, когда уравнение с параметром принимает вид линейного;

2) при $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$, когда уравнение с параметром принимает вид квадратного с дискриминантом равным нулю.

Таким образом, если Вы не знаете, как подступиться к задаче с такой формулировкой, то решаем задачу 4.4 и далее отбираем случаи, соответствующие условию задачи 5.1.

Второе решение.

<u>1 случай</u>. Выясним, при каких значениях a старший коэффициент уравнения обращается нуль. В этом случае уравнение $ax^2 - (2 + a)x + 3 = 0$ принимает вид линейного. (Как нам известно, линейные уравнения имеют один корень). Данное уравнение принимает вид линейного $-2x + 3 = 0$ при $a = 0$, корень которого равен $x = 1{,}5$.

<u>2 случай</u>. При $a \neq 0$ данное уравнение принимает вид квадратного. Оно имеет одно решение, если дискриминант равен нулю. Тогда $D = (2 + a)^2 - 12a = a^2 - 8a + 4 = 0$ при $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$.

Ответ: $a = 0$, $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$.

В задаче 5.1 мы впервые использовали формулировку «ровно одно решение», а не «ровно один корень». В чем отличие? В учебнике 7-го класса дается следующее определение: *корень уравнения* — это число, при подстановке которого вместо неизвестного получаем верное числовое равенство. Некоторые авторы корень уравнения называют также *решением уравнения*.

Задача 5.2. Найдите все значения a, при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2 = 0$:

1) имеет два решения;
2) не имеет решений;
3) имеет одно решение.

Найдите корни.

Решение. Определим вид уравнения при различных значениях параметра.

Таблица 5.2

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнения $ax^2 + 3x + 2 = 0$**			
Если	$a = 3$,	$a = -2$,	$a = 0$,	$a \neq 0$,		
То	$3x^2 + 3x + 2 = 0$	$-2x^2 + 3x + 2 = 0$	$3x + 2 = 0$	$ax^2 + 3x + 2 = 0$		
Уравнение:	квадратное		линейное	квадратное		
Решение:	$D = -15$,	$D = 25$, $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$, $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$	$3x = -2$, $x = -\frac{2}{3}$	$D = 9 - 8a$, $D > 0$ при $a < 1\frac{1}{8}$, $x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-8a}}{2a}$	$D = 0$ при $a = 1\frac{1}{8}$, тогда $x = -\frac{4}{3}$	$D < 0$ при $a > 1\frac{1}{8}$, тогда нет корней
Ответ:	нет корней	2 корня	1 корень	2 корня	1 корень	нет корней

При $a = 0$ данное уравнение принимает вид линейного, при $a = 3$ — корней нет, при $a = -2$ — два корня (табл. 5.2). Это позволяет однозначно сделать вывод о том, что решение квадратного уравнения при $a \neq 0$ необходимо разделить на три случая, зависимых от значений дискриминанта (табл. 5.2) и отдельно рассмотреть случай при $a = 0$.

Тогда из таблицы 5.2 общего решения видим:

- Если $a = 0$, то исходное уравнение принимает вид линейного, которое имеет одно решение.
- Если $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 + 3x + 2 = 0$ — квадратное, дискриминант которого равен $D = 9 - 8a$. $D > 0$ при $a < 1\frac{1}{8}$, $D = 0$ при $a = 1\frac{1}{8}$, соответственно, $D < 0$ при $a > 1\frac{1}{8}$.

Несмотря на то, что в таблице для определенности представлены значения корней исходного уравнения с параметром, в решении и ответе достаточно указать значения параметра в каждом из заданных случаев.

Ответ: 1) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1\frac{1}{8})$; 2) $a = 0$, $a = 1\frac{1}{8}$; 3) $a \in (1\frac{1}{8}; +\infty)$.

Задача 5.3. Найдите все значения a, при которых уравнение $ax^2 - 4 = 0$ не имеет решений.

В этой задаче решать само уравнение в целом не нужно. Подставляя различные значения параметра a, получим:

1) Если $a = 5$, то уравнение примет вид $5x^2 - 4 = 0$ или $x^2 - \frac{4}{5} = 0$. Это неполное квадратное уравнение, которое имеет два корня. Следовательно, значение $a = 5$ не входит в ответ задачи.

Подставляя и другие положительные значения a, будем получать два корня.

2) Если $a = -5$, то уравнение примет вид $-5x^2 - 4 = 0$ или $x^2 + \frac{4}{5} = 0$. Это неполное квадратное уравнение, которое не имеет действительных корней. Значит, $a = -5$ входит в ответ задачи.

При других отрицательных значениях a уравнение также не будет иметь корней.

3) Если $a = 0$, то уравнение имеет вид неверного числового равенства $-4 = 0$, т. е. корней нет.

Решение. Если $a > 0$, то неполное квадратное уравнение можно привести к виду $x^2 - \frac{4}{a} = 0$ и $\frac{4}{a} > 0$, тогда уравнение будет иметь два действительных корня.

При $a = 0$ уравнение имеет вид неверного числового равенства $-4 = 0$, и корней нет.

Если $a < 0$, то $\frac{4}{a} < 0$, и неполное квадратное уравнение $x^2 - \frac{4}{a} = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ: $(-\infty; 0]$.

Задача 5.4. Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{x-a}{x+4} = 0$ имеет ровно одно решение.

Данное уравнение относится к первому виду уравнений, рассмотренных ранее в § 3. Поэтому подробное решение можно построить аналогично решению задачи 3.1 (стр. 15).

Обратимся к частным случаям уравнения с параметром.

1) Если $a = 1$, то уравнение примет вид $\frac{x-1}{x+4} = 0$. Данное уравнение равносильно линейному уравнению $x - 1 = 0$, которое имеет ровно одно решение. Следовательно, $a = 1$ — одно из решений задачи.

2) Если $a = -4$, то уравнение примет вид $\frac{x+4}{x+4} = 0$ или $1 = 0$. Это неверное числовое равенство, т.е. $a = -4$ не входит в ответ задачи.

Обобщим наши рассуждения.

Решение. Уравнение вида $\frac{x-a}{x+4}=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его числитель равен нулю и знаменатель отличен от нуля (причем важно одновременное соблюдение этих условий). Получим $x-a=0$ и $x+4\neq 0$, т.е. $x-a\neq x+4$ или $a\neq -4$. Тогда можно сказать, что при $a\neq -4$ дробно-рациональное уравнение $\frac{x-a}{x+4}=0$ равносильно линейному уравнению $x-a=0$, которое имеет единственное решение $x=a$.

Подставим $a=-4$ в исходное уравнение и получим $\frac{x+4}{x+4}=0$ или $1=0$, т.е. нет корней.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

5.5. Найдите все значения a, при которых уравнение $ax-x+2=0$ не имеет корней.

5.6. Найдите все значения a, при которых уравнение $ax^2+2ax-2x+a-3=0$ имеет ровно одно решение.

5.7. Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{x-3}{ax+2}=0$ не имеет корней.

Ответы

5.5. $a=1$.

5.6. $a=0$, $a=-1$.

5.7. $a=-2/3$.

§ 6. Задачи с параметром на теорему Виета

В этом параграфе покажем решения различных классических задач с параметрами, в решении которых можно использовать теорему Виета.

Мы не будем обращаться к частным случаям, поскольку ответы можно проверить прямой подстановкой.

Задача 6.1. Найдите все целые значения параметра a, при которых данное уравнение имеет целые корни $x^2 + ax + 6 = 0$.

Решение. По теореме Виета: $x_1x_2 = 6$. Значения целых множителей могут быть: $x_1x_2 = 6 \cdot 1 = (-6) \cdot (-1) = 3 \cdot 2 = (-3) \cdot (-2)$. Получаем соответствующие пары корней: 6 и 1, –6 и –1, 3 и 2, –3 и –2. Сумма корней x_1 и x_2 по теореме Виета равна $(-a)$, т. е.

$$-a = 6 + 1 = 7,$$
$$-a = (-6) + (-1) = -7,$$
$$-a = 3 + 2 = 5,$$
$$-a = (-3) + (-2) = -5.$$

Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет целые корни при $a = -7, 7, -5, 5$.

Сделаем проверку, решив уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x^2 + 7x + 6 = 0$. Соответственно получим пары целых корней: 2, 3; –2, –3; 1, 6; –1, –6.

Ответ: –7, 7, –5, 5.

Задача 6.2. Разность корней уравнения $2x^2 + ax + 2 = 0$ равна 1,5. Найдите значения параметра a.

Решение. По условию и теореме Виета:

$$x_1 - x_2 = 1{,}5, \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2}, \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 = 1. \qquad (3)$$

Сложим равенства (1) и (2), в результате получим $x_1 = \frac{-a+3}{4}$. Вычтем из (2)-го равенства (1)-е, получим $x_2 = \frac{-a-3}{4}$. Подставим в (3) полученные значения корней: $\frac{-a+3}{4} \cdot \frac{-a-3}{4} = 1$. Используя формулы сокращенного умножения, найдем значения $a_1 = 5$ и $a_2 = -5$.

Подставим найденные значения параметра в исходное уравнение и получим $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $2x^2 + 5x + 2 = 0$. У первого уравнения корни 2 и 0,5, у второго — (–2) и –0,5. Обе пары корней удовлетворяют условию задачи, их разность 1,5.

Ответ: 5 и –5.

Задача 6.3. Разность квадратов корней уравнения $2x^2 - 5x + a = 0$ равна 0,25. Найдите возможные значения параметра a.

Решение. По условию и теореме Виета:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0{,}25; \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 2{,}5; \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 = \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

По формулам сокращенного умножения (1) приведем к виду $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0{,}25$ и подставим в это равенство (2), тогда получим:

$$x_1 - x_2 = 0{,}1 \qquad (4)$$

Равенства (2), (3) и (4) образуют условия задачи 6.2. Аналогично решаем: сложим (2) и (4) и выразим $x_1 = 1{,}3$; вычтем (4) из (2) и выразим $x_2 = 1{,}2$. Подставим полученные значения корней в (3) и найдем $a = 3{,}12$.

Проверку ответа проведите самостоятельно: найдите корни уравнения $2x^2 - 5x + 3{,}12 = 0$ и проверьте их в соответствии с условием задачи.

Ответ: 3,12.

Задача 6.4. В уравнении $x^2 + 4x + a = 0$ один из корней уравнения в 3 раза больше второго. Найдите a и корни уравнения.

Решение. По условию и теореме Виета:

$$3x_1 = x_2, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = -4, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 = a. \quad (3)$$

Подставим (1) в (2) и получим $x_1 + 3x_1 = -4$, $x_1 = -1$, соответственно, $x_2 = -3$. Подставим полученные значения корней в (3) и получим $a = 3$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $a = 3$.

Задача 6.5. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 4x + a = 0$ равна 6. Найдите a.

Решение. По условию и теореме Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = 6, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = -4, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 = a. \quad (3)$$

Возведем в квадрат сумму корней: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ и подставим числовые значения из равенств (1) и (2). Получим $16 = 6 + 2a$ или $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

Комментарий к задаче. Проверку в этой задаче можно осуществлять только с помощью теоремы Виета, так как уравнение $x^2 + 4x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

Задачи для самостоятельного решения

6.6. Докажите, что уравнение $12x^2 + 70x + a^2 + 1 = 0$ при любых значениях параметра a не имеет положительных корней.

6.7. Частное корней уравнения $4x^2 + ax + 27 = 0$ равно -3. Найдите значения параметра a.

6.8. Корни квадратного уравнения $2ax^2 + 5x + a + 1 = 0$ взаимно обратные числа (a — параметр, $a \neq 0$). Найдите корни уравнения.

6.9. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (3a - 5)x + (3a^2 - 11a - 6) = 0$ равна 65. Найдите значение параметра a и корни уравнения.

Ответы

6.6. *Указание*: произведение корней положительно при любых a, отсюда корни одновременно либо положительны, либо отрицательны. Исходя суммы корней, устанавливается доказываемое утверждение.

6.7. $a = 24$, $a = -24$.

6.8. $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$ ($a = 1$).

6.9. если $a = -2$, то $x_1 = 4$, $x_2 = 7$; если $a = 14/3$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -8$.

§ 7. Линейные неравенства и их системы с параметром. Интерпретации на числовой прямой

Сначала обратимся к простейшим неравенствам вида $ax + b > 0$ ($ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$) с параметризацией:

1) **свободного члена** (например, $2x > a - 4$, $3x + 2a \geq 0$);
2) **коэффициента при переменной** (например, $ax - 2x < 4$, $ax - 2x \geq 4$);
3) **свободного члена и коэффициента при переменной** (например, $ax - 2x \leq 4a$, $ax > a - 4$).

В приведенных неравенствах правые и левые части соответствуют левым и правым частям уравнений, разобранным в задачах § 2. Сравните и найдите отличия в решениях, чтобы возникло четкое понимание отличий в решениях уравнений и неравенств с параметром.

Задача 7.1. Решите неравенство $2x > a - 4$ с параметром a.

Решение. Составим таблицу 7.1.

Таблица 7.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**				**Решение неравенства $2x > a - 4$**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Если	$a = -1$,	$a = 0$,	$a = 1$,	$a = 6$,	$a \in \boldsymbol{R}$,
То	$2x > -5$	$2x > -4$	$2x > -3$	$2x > 2$	$2x > a - 4$
Неравенство:	линейное				линейное
Преобразуем:	$x > -\frac{5}{2}$, т.е. $x > -2{,}5$	$x > -\frac{4}{2}$; т.е. $x > -2$	$x > -\frac{3}{2}$; т.е. $x > -1{,}5$	$x > \frac{2}{2}$; т.е. $x > 1$	$x > \frac{a-4}{2}$
Ответ:	$x \in (-2{,}5; +\infty)$	$x \in (-2; +\infty)$	$x \in (-1{,}5; +\infty)$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (\frac{a-4}{2}; +\infty)$

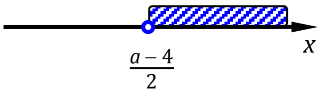


Рис. 7.1

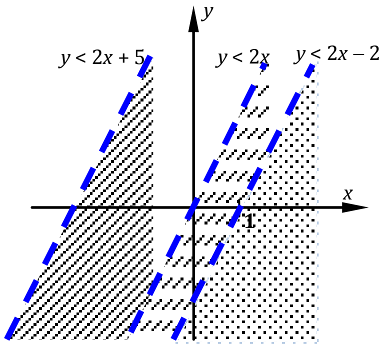


Рис. 7.2

Какими общими вами обладают ленные неравенства без параметра? Коэффициент при неизвестной равен 2, свободный член может принимать любые числовые значения. Коэффициент при x положителен $(2 > 0)$, поэтому при делении правой и левой части неравенств на 2 знак неравенства сохраняется.

На числовой прямой OX решение данного неравенства будет выглядеть просто (рис. 7.1).

Ответ: если $a \in(-\infty; +\infty)$, то $x \in\left(\dfrac{a-4}{2}; +\infty\right)$.

Комментарий к задаче. Графически множество точек, удовлетворяющих неравенству $y < 2x - a + 4$, — это множество полуплоскостей, лежащих ниже параллельных прямых $y = 2x - a + 4$ (сама прямая не входит в ответ). При $a = -1$, $a = 4$ и $a = 6$ полуплоскости изображены на рисунке 7.2.

Напоминание. Сравните решения и ответы задач 7.1 и 2.1.

Задача 7.2. Для каждого действительного значения параметра a решите неравенство $ax - 2x < 4$.

Решение. Поместим частные случаи в таблицу 7.2. Частные случаи подобраны так, чтобы коэффициенты при неизвестной были положительны и отрицательны, поскольку это принципиально влияет на решение неравенства. Анализ частных случаев показывает, что решения при $a \neq 2$ делятся на два случая $a > 2$ и $a < 2$, когда коэффициент при x может быть положительным или отрицательным.

Таблица 7.2

Этапы рассуждений	Частные случаи		Решение неравенства $ax - 2x < 4$		
Если	$a = 4$,	$a = 0$,	$a = 2$,	$a \neq 2$,	
То	$2x < 4$	$-2x < 4$	$0 < 4$	$(a-2)x < 4$	
Неравенство:	линейное		верное числовое неравенство	линейное	
Преобразуем:	$(2 > 0)$ $x < \frac{4}{2}$, $x < 2$	$(-2 < 0)$ $x > \frac{4}{-2}$, $x > -2$		Если $a - 2 > 0$ или $a > 2$, то $x < \frac{4}{a-2}$ $(x > 0)$	Если $a - 2 < 0$ или $a < 2$, то $x > \frac{4}{a-2}$ $(x < 0)$
Ответ:	$x \in (-\infty; 2)$	$x \in (-2; +\infty)$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in (-\infty; \frac{4}{a-2})$	$x \in (\frac{4}{a-2}; +\infty)$

Обратите внимание на то, что: 1) из условия $a - 2 > 0$ следует, что значение $\frac{4}{a-2}$ положительно, и $x < \frac{4}{a-2}$; 2) из $a - 2 < 0$, следует, что $\frac{4}{a-2}$ отрицательно, и $x > \frac{4}{a-2}$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in (\frac{4}{a-2}; +\infty)$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; \frac{4}{a-2})$; если $a = 2$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Напоминание. Сравните решения задач и ответы задач 2.2 и 7.2. Для самостоятельной графической интерпретации неравенства $(a-2)x < 4$ проанализируйте графические интерпретации задач 2.2 и 7.1.

Задача 7.3. При всех значениях параметра a решите неравенство $ax - 2x \ge 4$.

Решение. Данное неравенство отличается от предыдущего (задачи 7.2) знаком неравенства (вместо “<” знак “≥”). Возьмем те же частные случаи и сравним таблицы 7.2 и 7.3.

Таблица 7.3

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение неравенства** $\boldsymbol{ax - 2x \ge 4}$		
Если	$a = 4$,	$a = 0$,	$a = 2$,	$a \ne 2$,	
То	$2x \ge 4$	$-2x \ge 4$	$0 \ge 4$	$(a-2)x \ge 4$	
Неравенство:	линейное		неверное числовое неравенство	линейное	
Преобразуем:	$(2 > 0)$ $x \ge \frac{4}{2}$, $x \ge 2$	$(-2 < 0)$ $x \le \frac{4}{-2}$, $x \le -2$		Если $a - 2 > 0$ или $a > 2$, то $x \ge \frac{4}{a-2}$	Если $a - 2 < 0$ или $a < 2$, то $x \le \frac{4}{a-2}$
Ответ:	$x \in [2; +\infty)$	$x \in (-\infty; -2]$	нет корней	$x \in [\frac{4}{a-2}; +\infty)$	$x \in (-\infty; \frac{4}{a-2}]$

В данном примере логика решения та же, но ответы имеют противоположные значения.

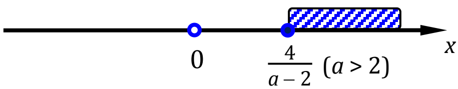


Рис. 7.4, *а*

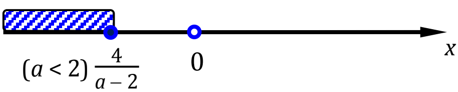


Рис. 7.4, *б*

Аналогично решению задачи 7.2 обратим внимание на то, что:

1) из $a - 2 > 0$ следует, что значение $\frac{4}{a-2}$ положительно, и $x \ge \frac{4}{a-2}$ (рис. 7.4, *а*);

2) из $a - 2 < 0$, следует, что $\frac{4}{a-2}$ отрицательно, и $x \le \frac{4}{a-2}$ (рис. 7.4, *б*).

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in (-\infty; \frac{4}{a-2}]$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in [\frac{4}{a-2}; +\infty)$; если $a = 2$, то нет корней.

Напоминание. Сравните, пожалуйста, решения и ответы задач 7.2 и 7.3.

Задача 7.4. Для каждого значения a решите неравенство $ax - 2x \le 4a$.

Решение. Составим таблицу 7.4 к решению данного неравенства с параметризацией коэффициента при неизвестной и свободного члена.

Таблица 7.4

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="2">Частные случаи</th><th colspan="3">Решение неравенства с параметром $ax - 2x \le 4a$</th></tr>
<tr><td>Если</td><td>$a = 3$,</td><td>$a = 0$,</td><td>$a = 2$,</td><td colspan="2">$a \ne 2$,</td></tr>
<tr><td>То</td><td>$x \le 12$</td><td>$-2x \le 0$</td><td>$0 \le 8$</td><td colspan="2">$(a-2)x \le 4a$</td></tr>
<tr><td>Неравенство:</td><td colspan="2">линейное</td><td rowspan="2">верное числовое неравенство</td><td colspan="2">линейное</td></tr>
<tr><td>Преобразуем:</td><td>-</td><td>$(-2 < 0)$
$x \ge \frac{0}{-2}$;
т.е. $x \ge 0$.</td><td>Если $a - 2 > 0$
или $a > 2$,
то $x \le \frac{4a}{a-2}$</td><td>Если $a - 2 < 0$
или $a < 2$,
то $x \ge \frac{4a}{a-2}$</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>$x \in (-\infty; 12]$</td><td>$x \in [0; +\infty)$</td><td>$x \in \boldsymbol{R}$</td><td>$x \in (-\infty; \frac{4a}{a-2}]$</td><td>$x \in [\frac{4a}{a-2}; +\infty)$</td></tr>
</table>

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in [\frac{4a}{a-2}; +\infty)$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; \frac{4a}{a-2}]$; если $a = 2$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Напоминание. Сравните решения и ответы задач 2.3 и 7.4.

Задача 7.5. Для каждого действительного значения параметра a решите систему неравенств $\begin{cases} ax - 2x - 4 < 0, \\ 3x - 1 + 2a \geq 0 \end{cases}$.

Решение. Первое неравенство системы отличается от неравенства из задачи 7.3 знаком неравенства (вместо "≥" поставлен "<"). Второе неравенство относится к самому простому виду параметризации линейных неравенств (параметризация свободного члена).

Рассмотрим частные случаи (табл. 7.5.1).

Таблица 7.5.1

Этапы	**Частные случаи**			
Если	$a = 4$,	$a = 0$,	$a = 10$,	$a = -4$,
То	$\begin{cases} 2x < 4, \\ 3x \geq -7 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x < 4, \\ 3x \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x < 4, \\ 3x \geq -19 \end{cases}$	$\begin{cases} -6x < 4, \\ 3x \geq 9 \end{cases}$
Неравенства:	линейные			
Преобразуем:	$\begin{cases} x < 2, \\ x \geq -2\frac{1}{3}. \end{cases}$ $-2\frac{1}{3} < 2$, поэтому $-2\frac{1}{3} \leq x < 2$	$\begin{cases} x > -2, \\ x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$ $-2 < \frac{1}{3}$, поэтому $\frac{1}{3} \leq x$	$\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \geq -6\frac{1}{3}. \end{cases}$ $-6\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, поэтому $-6\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} x > -\frac{2}{3}, \\ x \geq 3. \end{cases}$ $-\frac{2}{3} < 3$, поэтому $3 \leq x$
Ответ:	$x \in [-2\frac{1}{3}; 2)$	$x \in [\frac{1}{3}; +\infty)$	$x \in [-6\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$	$x \in [3; +\infty)$

Отметим схожие структуры решений и ответов при $a = 4$ и $a = 10$ (коэффициент при неизвестной в 1-м неравенстве положителен), а также при $a = -4$ и $a = 0$ (коэффициент при неизвестной в 1-ом неравенстве отрицателен).

В таблице 7.5.2 представлено решение системы неравенств с параметром.

Таблица 7.5.2

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="3">Решение системы неравенств $\begin{cases}(\boldsymbol{a}-\mathbf{2})\boldsymbol{x}<\mathbf{4},\\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}\ge\mathbf{1}-\mathbf{2}\boldsymbol{a}\end{cases}$</th></tr>
<tr><td>Если</td><td>$a = 2$,</td><td colspan="2">$a \neq 2$,</td></tr>
<tr><td>То</td><td>$\begin{cases}-4<0,\\ 3x\ \ge -3\end{cases}$</td><td colspan="2">$\begin{cases}(a-2)x<4,\\ 3x\ge 1-2a\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Неравенства системы:</td><td>1) верное числовое неравенство;
2) линейное</td><td colspan="2">линейные</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Преобразуем:</td><td rowspan="5">$\begin{cases}-4<0,\\ x\ \ge -1\end{cases}$

Решение 1-го неравенства — любое действительное значение x, поэтому решением системы является 2-е неравенство $x \ge -1$.</td><td>Если $a-2>0$ ($a>2$),
то $\begin{cases}x<\frac{4}{a-2},\\ x\ge\frac{1-2a}{3}.\end{cases}$ (1)</td><td>Если $a-2<0$ ($a<2$),
то $\begin{cases}x>\frac{4}{a-2},\\ x\ge\frac{1-2a}{3}.\end{cases}$ (2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислим, при каких значениях a значение $x=\dfrac{4}{a-2}$ больше или меньше $x=\dfrac{1-2a}{3}$.
Пусть
$$\frac{4}{a-2}>\frac{1-2a}{3}. \qquad (3)$$
Приведем к общему знаменателю и преобразуем к виду $\dfrac{2a^2+5a+14}{3(a-2)}>0$, — числитель положителен при любых a ($D<0$, коэффициент при a^2 положителен), знаменатель…</td></tr>
<tr><td>положителен по условию, поэтому (3) имеет решение при любом a.</td><td>отрицателен по условию, поэтому (3) <u>не</u> имеет решений ни при каких a.</td></tr>
<tr><td>Пересечение множеств решений (1) и (3):
$\dfrac{1-2a}{3}\le x<\dfrac{4}{a-2}$</td><td>Если (3), то нет корней</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пусть $\dfrac{4}{a-2}<\dfrac{1-2a}{3}$, (4)
тогда $\dfrac{2a^2+5a+14}{3(a-2)}<0$, — числитель по-</td></tr>
</table>

		ложителен при любых a, знаменатель...	
		положителен по условию, поэтому (4) <u>не </u>имеет решений.	отрицателен по условию, поэтому (4) имеет решение при любом a.
		Если (4), то нет корней	Пересечение множеств решений (2) и (4): $\frac{1-2a}{3} \le x$
Ответ:	$x \in [-1; +\infty)$	$x \in [\frac{1-2a}{3}; \frac{4}{a-2})$	$x \in [\frac{1-2a}{3}; +\infty)$

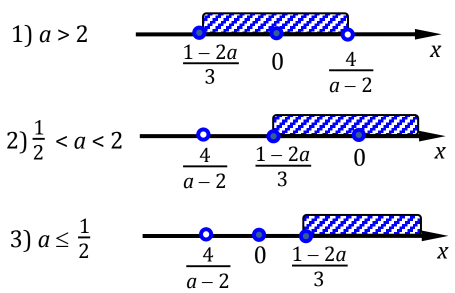


Рис. 7.6

Отметим новый важный момент в решении задачи — необходимость сравнения двух значений x, содержащих параметр a (3). Это необходимо для определения верного промежутка, в каждом из случаев при $a > 2$ или $a < 2$.

Изображая множество решений на числовой оси Ox, обратим внимание на то, что $x = \frac{1-2a}{3}$ меняет знак при $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{4}{a-2}$ — при $a = 2$. Следовательно, на каждом из промежутков параметра a значения x имеют различные значения (рис. 7.6).

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in [\frac{1-2a}{3}; +\infty)$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in [\frac{1-2a}{3}; \frac{4}{a-2})$; если $a = 2$, то $x \in [-1; +\infty)$.

Задача 7.6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x + 4a < 0, \\ x + ax + a < 0 \end{cases}$ при всех значениях параметра a.

Рассмотрим частные случаи (табл. 7.6).

Таблица 7.6

Этапы рассуждений	Частные случаи			
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = -2$,	$a = -1$,	$a = -0{,}5$,	$a = 2$,
то	$\begin{cases} x - 8 < 0, \\ -x - 2 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 4 < 0, \\ -1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ 0{,}5x - 0{,}5 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 8 < 0, \\ 3x + 2 < 0 \end{cases}$
Неравенства:	линейные	линейное, числовое	линейные	линейные
Преобразуем:	$\begin{cases} x < 8, \\ x > -2; \end{cases}$ $-2 < x < 8.$	$\begin{cases} x < 4, \\ -1 < 0; \end{cases}$ $x < 4.$	$\begin{cases} x < 2, \\ x < 1; \end{cases}$ $x < 1.$	$\begin{cases} x < -8, \\ x < -\frac{2}{3}; \end{cases}$ $x < -8.$
Ответ:	$x \in (-2; 8)$	$x \in (-\infty; 4)$	$x \in (-\infty; 1)$	$x \in (-\infty; -8)$

Отметим отличия в решениях при $a = -2$, $a = -1$, $a = -0{,}5$ и $a = 2$ (табл. 7.6):

1) при $a = -1$, $a = -0{,}5$ и $a = 2$ коэффициенты при неизвестных положительны или равны нулю, в ответе получаем бесконечный промежуток (столбцы 3, 4 и 5 табл. 7.6);
2) решением систем при $a = -1$ и $a = 2$ являются первые неравенства; при $a = -0{,}5$ — второе неравенство;
3) если $a = -2$, то коэффициент при неизвестной во втором неравенстве отрицательный, что приводит к интервалу в ответе (столбец 2 табл. 7.6).

Опираясь на логику решений частных случаев, представим решение системы неравенств с параметром.

Решение. Приведем данную систему к виду:

$$\begin{cases} x < -4a, \\ (1 + a)x < -a. \end{cases} \qquad (1)$$

Во втором неравенстве системы (1) коэффициент при неизвестной содержит параметр a, следовательно, рассмотрим случаи, когда этот коэффициент может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

1) Если $a = -1$, то $x < 4$ (3-й столбец табл. 7.6).

2) Если $1 + a > 0$ или $a > -1$, то над вторым неравенством системы можно провести равносильные преобразования, и система примет вид:

$$\begin{cases} x < -4a, \\ x < -\frac{a}{1+a}. \end{cases} \tag{2}$$

Чтобы решить (2) необходимо определить расположение точек $x = -4a$ и $x = -\dfrac{a}{1+a}$ на числовой прямой OX. Пусть $-4a$ будет расположена левее $-\dfrac{a}{1+a}$, тогда решим неравенство $-4a < -\dfrac{a}{1+a}$. После равносильных преобразований получим неравенство:

$$\frac{4a(a-0{,}75)}{a+1} > 0, \tag{3}$$

решением которого являются промежутки: $a \in (-1; -0{,}75) \cup (0; +\infty)$.

Соответственно в случае иного расположения точек, когда $-4a > -\dfrac{a}{1+a}$, решением будут являться промежутки: $a \in (-\infty; -1) \cup (-0{,}75; 0)$.

Учитывая $a > -1$, получим (рис. 7.6):

- Если $a \in (-1; -0{,}75) \cup (0; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -4a)$.
- Если $a \in (-0{,}75; 0)$, то $x \in (-\infty; -\dfrac{a}{1+a})$.

Подставим в исходную систему значения $a = -0{,}75$ и $a = 0$, которые не являются решениями (3).

- Если $a = -0{,}75$, то система примет вид $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ 0{,}25x - 0{,}75 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 3, \\ x < 3 \end{cases}$. Получим при $a = -0{,}75$ решение $x \in (-\infty; 3)$.
- Если $a = 0$, то $\begin{cases} x < 0, \\ x < 0 \end{cases}$ или $x \in (-\infty; 0)$.

3) Если $1 + a < 0$ или $a < -1$, то система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x < -4a, \\ x > -\frac{a}{1+a}. \end{cases} \qquad (4)$$

Условие расположения точек $x = -4a$ и $x = -\dfrac{a}{1+a}$ при $a < -1$ мы определили ранее при решении неравенства (3): $-4a > -\dfrac{a}{1+a}$ (рис. 7.6). Тогда решение системы (4) — $x \in (-\dfrac{a}{1+a}; -4a)$.

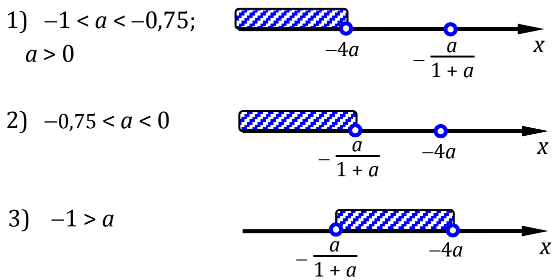


Рис. 7.6

Ответ: если $a \in (-\infty; -1)$, то $x \in (-\dfrac{a}{1+a}; -4a)$;

если $a = -1$, то $x \in (-\infty; 4)$;

если $a \in (-1; -0{,}75) \cup (0; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -4a)$;

если $a = -0{,}75$, то $x \in (-\infty; 3)$;

если $a \in (-0{,}75; 0)$, то $x \in (-\infty; -\dfrac{a}{1+a})$;

если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0)$.

Напоминание. Проверьте ответ в частных случаях. Для этого можно воспользоваться частными случаями из таблицы 7.6.

Задачи для самостоятельного решения

7.7. Решите неравенство $5x - 2a + 3 \le 0$ с параметром a.

7.8. Для каждого a решите неравенство $2ax + x - 5 \ge 0$.

7.9. Для каждого действительного значения a решите неравенство $3x - 2ax - 2a + 3 < 0$.

7.10. При всех значениях параметра a решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - ax + 2 > 0, \\ 3 - 2ax \ge 0 \end{cases}$.

7.11. При каких значениях параметра a неравенство $ax + a \le 0$ не имеет решений.

Ответы

7.7. если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x \in (-\infty; \frac{2a-3}{5}]$.

7.8. если $a \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, то $x \in (-\infty; \frac{5}{2a+1}]$; если $a \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$, то $x \in [\frac{5}{2a+1}; +\infty)$; если $a = -\frac{1}{2}$, то нет решений.

7.9. если $a \in (-\infty; 1{,}5)$, то $x \in (-\infty; -1)$; если $a \in (1{,}5; +\infty)$, то $x \in (-1; +\infty)$; если $a = -1{,}5$, то нет решений.

7.10. если $a \in (-\infty; -6)$, то если $x \in [\frac{3}{2a}; +\infty)$; $a = -6$, то $(-0{,}25; +\infty)$; если $a \in (-6; 0)$, то $x \in (\frac{2}{a-2}; +\infty)$; если $a = 0$, то $(-1; +\infty)$; если $a \in (0; 2)$, то $x \in (\frac{2}{a-2}; \frac{3}{2a}]$; если $a = 2$, то $x \in (-\infty; 0{,}75]$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; \frac{3}{2a}]$.

7.11. ни при каких, так как неравенство всегда имеет решение при любых действительных значениях параметра.

§ 8. Решение квадратных неравенств функционально-графическим методом

Метод, которым мы решали ранее все уравнения и неравенства, часто называют *аналитическим*. Он опирается на использование равносильных преобразований над уравнениями или неравенствами (прибавление одного и того же числа к левой и правой части; умножение на число; приведение подобных; разложение квадратного трехчлена на множители и т. п.)

Основная идея *функционально-графического* метода при решении уравнений и неравенств заключается во введении одной или нескольких функций, связанных с алгебраическими выражениями, составляющими уравнение или неравенство, и использование свойств функций и их графиков в решении.

Важным этапом данного метода в решении уравнений и неравенств является функционально-графическая интерпретация условия задачи. Выделим несколько основных функционально-графических интерпретаций условий задач, связанных с решением уравнений и неравенств с параметром.

1. Решите уравнение $f(x; a) = 0$ с параметром a.

Функционально-графическая интерпретация: Введем функцию $y = f(x; a)$. Тогда по условию задачи найдем такие значения x, при которых график функции $y = f(x; a)$ пересекает ось абсцисс.

2. Решите неравенство $f(x; a) > 0$ ($f(x; a) < 0$) с параметром a.

Функционально-графическая интерпретация: Введем функцию $y = f(x; a)$, тогда по условию задачи найдем все значения x, при которых график функции $y = f(x; a)$ лежит выше (ниже) оси абсцисс.

3. Решите неравенство $f(x;\, a) \geq 0$ $(f(x;\, a) \leq 0)$ с параметром a.

Функционально-графическая интерпретация: Введем функцию $y = f(x;\, a)$, тогда по условию задачи найдем все значения x, при которых график функции $y = f(x;\, a)$ лежит выше (ниже) или на оси абсцисс.

В неравенствах вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), как и в простейших квадратных уравнениях, могут быть параметризированы:

1) **свободный член** (например, $x^2 - 2x + 2a > 0$);

2) **коэффициент при переменной 1-ой степени** (например, $x^2 + 2ax + 2 \geq 0$);

3) **коэффициент при переменной 2-ой степени** (например, $ax^2 - 2x + 2 \leq 0$);

4) **коэффициенты при переменных разных степеней или свободный член** (например, $2ax^2 - x + a > 0$).

Задача 8.1. Для каждого значения a решите неравенство $x^2 - 2x + 2a > 0$.

Решение. Введем функцию $y = x^2 - 2x + 2a$ и найдем все значения x, при которых значения функции положительны.

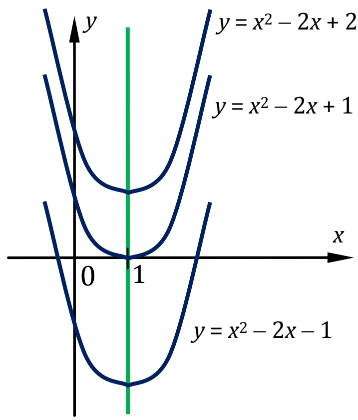


Рис. 8.1

График функции $y = x^2 - 2x + 2a$ представляет семейство парабол. Коэффициент при старшем члене равен 1, и значит, ветви парабол направлены вверх. Кроме того, все параболы получены параллельными переносами графика $y = x^2$. Вершины парабол имеют координаты $x_0 = 1$ и $y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2a = -1 + 2a$, т. е. расположены на прямой $x = 1$ с ординатами, зависящими от параметра a.

Для лучшего понимания идеи решения рассмотрим несколько частных случаев. Изобразим семейство парабол функции $y = x^2 - 2x + 2a$ на рисунке 8.1 с вершинами в точках с ординатами $y_0 = -2$, $y_0 = 0$, $y_0 = 1$. Подставляя эти значения в $y_0 = -1 + 2a$, получим следующие соответствия:

- если $a = -\frac{1}{2}$, то $y = x^2 - 2x - 1$. (Проверьте вычисления, подставив в полученное уравнение координаты вершины $x_0 = 1$ и $y_0 = -2$);
- если $a = \frac{1}{2}$, то $y = x^2 - 2x + 1$ ($x_0 = 1, y_0 = 2$);
- если $a = 1$, то $y = x^2 - 2x + 2$ ($x_0 = 1, y_0 = 1$).

Положительные значения функции соответствуют точкам графика, которые лежат выше оси абсцисс.

Возможны два расположения парабол.

В первом случае параболы лежат выше оси абсцисс (например, $y = x^2 - 2x + 2$), — квадратный трёхчлен $x^2 - 2x + 2a$ имеет отрицательный дискриминант, т. е. $D = 4 - 4 \cdot 2a = 4(1 - 2a) < 0$ при $a > \frac{1}{2}$.

Во втором случае параболы пересекают ось абсцисс. Решение неравенства соответствует участкам графика, лежащим выше оси абсцисс. Например, графики квадратных трёхчленов $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x^2 - 2x - 1$ касаются или пересекают ось Ox. Эти квадратичные функции имеют неотрицательный дискриминант и их правые части раскладываются на множители. В общем случае, $D = 4(1 - 2a) \geq 0$ при $a \leq \frac{1}{2}$, и $x_1 = 1 + \sqrt{1 - 2a}$, $x_2 = 1 - \sqrt{1 - 2a}$ — нули функции, причем $x_1 \geq x_2$. Значения функции $y = x^2 - 2x + 2a$ положительны на промежутках $(-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a})$ и $(1 + \sqrt{1 - 2a}$ $; +\infty)$.

«Переведем» полученный ответ с функционально-графического языка на аналитический. Если $a > \frac{1}{2}$, то неравенство $x^2 - 2x + 2a > 0$ имеет решением любое действительное число; если $a \le \frac{1}{2}$, то решением является объединение промежутков $(-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a})$ и $(1 + \sqrt{1 - 2a}; +\infty)$.

Ответ: если $a \in (-\infty; \frac{1}{2})$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a \in [\frac{1}{2}; +\infty)$, то $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a}) \cup (1 + \sqrt{1 - 2a}; +\infty)$.

Рекомендуем ответить на *следующие вопросы к задаче* 8.1:

1. Существуют ли такие значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2x + 2a > 0$ не имеет корней?

2. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2x + 2a > 0$ имеет решением любое действительное значение x?

Задача 8.2. Решите неравенство $x^2 + 2ax + 2 \ge 0$ с параметром a.

Решение. Введем функцию $y = x^2 + 2ax + 2$ и найдем все значения x, при которых значения функции неотрицательны.

График функции $y = x^2 + 2ax + 2$ — семейство парабол. Поскольку коэффициент при x^2 равен 1, ветви парабол направлены вверх, каждая парабола получена параллельным переносом графика функции $y = x^2$.

Выделим полный квадрат в правой части функции, т. е. $y = (x + a)^2 + 2 - a^2$. Вершины парабол имеют координаты $x_0 = -a$ и $y_0 = -a^2 + 2$.

Интересно, что если значение a из равенства $x_0 = -a$ подставим в равенство $y_0 = -a^2 + 2$, то получим уравнение $y_0 = -x_0^2 + 2$. График этой квадратичной функции показывает расположение вершин парабол функции $y = x^2 + 2ax + 2$. У параболы $y_0 = -x_0^2 + 2$ ветви направлены вниз, вершина параболы находится в точке (0; 2) (рис 8.2).

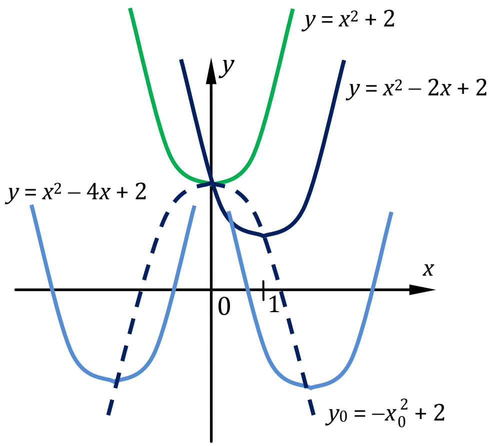


Рис. 8.2

На рисунке 8.2 изобразим семейство парабол функции $y = x^2 + 2ax + 2$ с вершинами в абсциссах $x_0 = -2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$. Подставляя значения a в $x_0 = -a$ и $y_0 = -x_0^2 + 2$, находим следующие значения параметра x_0 и y_0 (табл. 8.2):

Таблица 8.2

№ п/п	a	$x_0 = -a$	$y_0 = -x_0^2 + 2$ ($y_0 = x_0^2 + 2ax_0 + 2$)	**Частные случаи функции** $y = x^2 + 2ax + 2$
1	2	–2	–2	$y = x^2 + 4x + 2$
2	0	0	2	$y = x^2 + 2$
3	–1	1	1	$y = x^2 - 2x + 2$
4	–2	2	–2	$y = x^2 - 4x + 2$

Положительные или равные нулю значения функции соответствуют точкам графика, расположенным выше оси абсцисс или на оси абсцисс. Аналогично решению задачи 8.1 должны выполняться два условия:

1) если параболы лежат выше оси OX, то $D = 4a^2 - 4 \cdot 2 = 4(a^2 - 2) < 0$, что возможно при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$;

2) если параболы пересекают или касаются оси OX, то $D = 4(a^2 - 2) \geq 0$ при $a \leq -\sqrt{2}$ или $a \geq \sqrt{2}$ и $x_1 = -a + \sqrt{a^2 - 2}$, $x_2 = -a - \sqrt{a^2 - 2}$ — нули функции, причем $x_1 \geq x_2$ при любых значениях параметра. Получаем, что значения функции $y = x^2 + 2ax + 2$ положительны на промежутках $(-\infty; -a - \sqrt{a^2 - 2}]$ и $[-a + \sqrt{a^2 - 2}; +\infty)$.

«Переведем» полученный ответ с функционально-графического языка на аналитический: если $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, то неравенство $x^2 + 2ax + 2 < 0$ имеет решением любое действительное число; если $a \leq -\sqrt{2}$ или $a \geq \sqrt{2}$, то решением является объединение промежутков $(-\infty; -a - \sqrt{a^2 - 2}\,]$ и $[-a + \sqrt{a^2 - 2}; +\infty)$.

Ответ: если $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$, то $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a}) \cup (1 + \sqrt{1 - 2a}; +\infty)$.

В следующем неравенстве, как и в уравнениях вида $ax^2 + bx + c = 0$, необходимо обратить внимание на значение параметра, обращающих в ноль коэффициент при x^2.

Задача 8.3. При всех a решите неравенство $ax^2 - 2x + 2 \leq 0$.

Решение. Введем функцию $y = ax^2 - 2x + 2$ и найдем все значения x, при которых значения функции не положительны (отрицательны или равны нулю).

Если $a = 0$, то функция примет вид $y = -2x + 2$. Это линейная функция, графиком которой является прямая. Отрицательные и равные нулю значения легко найти из неравенства $-2x + 2 \leq 0$, то есть $x \in [1; +\infty)$.

Если $a \neq 0$, то функция $y = ax^2 - 2x + 2$ — квадратичная, и графиком ее являются параболы. Поскольку коэффициент при x^2 зависит от параметра a, необходимо рассмотреть два случая: $a > 0$ и $a < 0$. Сжатие графика функции вдоль оси абсцисс зависит от значений параметра.

Вершины парабол имеют координаты $x_0 = \frac{1}{a}$ и $y_0 = -\frac{1}{a} + 2 = \frac{2a-1}{a}$. В координатах вершин выразим a через x_0 и подставим в y_0, то получим уравнение $y_0 = -x_0 + 2$. Эта линейная функция по-

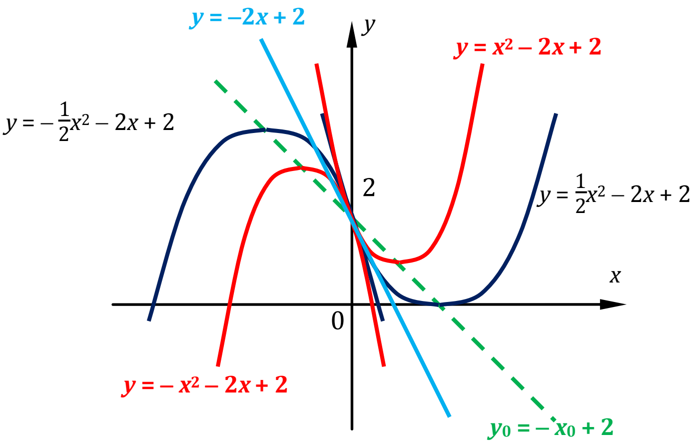


Рис. 8.3

казывает расположение вершин парабол функции $y = ax^2 - 2x + 2$ (рис. 8.3).

Изобразим графики частных случаев функции $y = ax^2 - 2x + 2$ на рисунке 8.3, используя данные из таблицы 8.3:

Таблица 8.3

№ п/п	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x_0 = \frac{1}{a}}$	$\boldsymbol{y_0 = -x_0 + 2}$	**Частные случаи функции** $\boldsymbol{y = ax^2 - 2x + 2}$
1	$-\frac{1}{2}$	-2	4	$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$
2	-1	-1	3	$y = -x^2 - 2x + 2$
3	1	1	1	$y = x^2 - 2x + 2$
4	$\frac{1}{2}$	2	0	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

Как видим, все графики как линейной, так и квадратичной функций проходят через точку (0; 2). Заметим симметрию графиков функций относительно этой точки при противоположных значениях параметра. По мере удаления вершин парабол от точки (0; 2) по прямой $y = -x + 2$ параболы «расширяются». Сформировав функционально-графические представления о функции $y = ax^2 - 2x + 2$, перейдем непосредственно к решению.

Условия, при которых возможны различные положения парабол, связаны со значением дискриминанта квадратного трёхчлена $ax^2 - 2x + 2$: $\frac{D}{4} = 1 - 2a$ и $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{a}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{a}$ — нули функции.

При $\underline{a > 0}$ ветви парабол направлены вверх, отсюда возможно три положения парабол относительно оси абсцисс: выше, касание или пересечение. По условию задачи требуется найти отрицательные или равные нулю значения функции:

- если параболы лежат выше оси OX, то отрицательных или равных нулю значений нет, — здесь $D < 0$, что возможно при $a > \frac{1}{2}$;
- если парабола касается оси OX сверху, то существует только одно равное нулю значение функции, — тогда $D = 0$ при $a = \frac{1}{2}$ и $x = 2$;
- если парабола пересекает в двух точках OX, то существуют отрицательные и равные нулю значения, — в этом случае $D > 0$ при $a < \frac{1}{2}$. Поскольку данные случаи рассматриваем при условии $a > 0$, получаем $0 < a < \frac{1}{2}$. Обратите внимание на положение x_1 и x_2 на числовой оси OX: при $a > 0$ значение x_1 больше x_2. (Это также можно определить, решив $\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{a} < \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{a}$.) Итак, если $0 < a < \frac{1}{2}$, то $x \in [\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{a}; \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{a}]$.

При $\underline{a < 0}$ ветви парабол направлены вниз, отсюда возможно три положения парабол относительно оси абсцисс: ниже, касание или пересечение:

- если параболы лежат ниже оси OX или касаются ее, то все значения функции отрицательны или равны нулю, — $D \le 0$ при $a \ge \frac{1}{2}$. Поскольку условия $a \ge \frac{1}{2}$ и $a < 0$ несовместны, — решений нет (на рис. 8.3 видно, что парабол при $x < 0$ касающихся или лежащих ниже оси абсцисс нет);
- если парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, то отрицательные значения существуют при условиях $D > 0$, т. е. при $a < \frac{1}{2}$. Пересечение условий $a < 0$ и $a < \frac{1}{2}$ дает $a < 0$. В данном случае $x_1 > x_2$, поэтому функция отрицательна на промежутках $x \in (-\infty; \frac{1+\sqrt{1-2a}}{a}]$ и $[\frac{1-\sqrt{1-2a}}{a}; -\infty)$.

Обратите внимание, что при $a > 0$ были рассмотрены три случая положений графика функции и каждый расписан отдельно, а при $a < 0$ два рассуждения из трех объединены в один пункт. И то, и другое верно. Для начинающих рекомендуем расписывать каждый случай отдельно (как при $a > 0$). При более глубоком понимании материала Вы сами начнете некоторые случаи объединять, увидев общие свойства изучаемых объектов.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in (-\infty; \frac{1+\sqrt{1-2a}}{a}] \cup [\frac{1-\sqrt{1-2a}}{a}; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \in [1; +\infty)$; если $a \in (0; \frac{1}{2})$, то $x \in [\frac{1-\sqrt{1-2a}}{a}; \frac{1+\sqrt{1-2a}}{a}]$; если $a = \frac{1}{2}$, то $x = 2$; если $a \in (\frac{1}{2}; +\infty)$, то нет решений.

Прежде чем ответить на вопросы, давайте вспомним, чем отличаются промежуток, интервал, отрезок, полуинтервал, бесконечный промежуток?

Самым широким понятием на числовой прямой является *промежуток числовой прямой* или сокращенно *промежуток*.

Если промежуток состоит из множества чисел числовой прямой, заключенных между двумя действительными числами x и y, то такой промежуток называют *конечным*.

Если у конечного промежутка числа x и y $(x \leq y)$ (*концы промежутка*) входят в промежуток, то его называют *отрезком* $[x; y]$.

Если же концы промежутка x и y $(x < y)$ не входят в конечный промежуток, то этот промежуток называют *интервалом* $(x; y)$.

Третий вид конечных промежутков — это *полуинтервалы*, которые образуются, если один конец промежутка входит в промежуток, а второй — не входит $(x; y]$, $[x; y)$.

Кроме этих промежутков нам известны *бесконечные промежутки*, когда одним из концов промежутка являются $-\infty$ или $+\infty$.

Ответьте на *вопросы* к задаче 8.3:

1. Существуют ли значения параметра, при которых решением неравенства является любое значение x?
2. Существуют ли значения параметра, при которых неравенство не имеет решений?
3. При каких значениях a, решением является отрезок?
4. При каких значениях a, неравенство имеет единственное решение?
5. При каких значениях a, неравенство имеет решением бесконечный промежуток или объединение бесконечных промежутков?

Ответы на вопросы: 1. Нет; 2. $a \in (\frac{1}{2}; +\infty)$; 3. $a \in (0; \frac{1}{2})$; 4. $a = \frac{1}{2}$; 5. $a \in (-\infty; 0]$.

Задача 8.4. Для каждого значения a решите неравенство $2ax^2 - x + a > 0$.

Решение. Введем функцию $y = 2ax^2 - x + a$, тогда найдем все значения x, при которых значения функции положительны.

Если $a = 0$, то функция примет вид $y = -x$. Это линейная функция, графиком которой является прямая. Положительные значения функция имеет на промежутке $x \in (-\infty; 0)$

Если $a \neq 0$, то функция $y = 2ax^2 - x + a$ — квадратичная, и графиком ее являются параболы. Поскольку коэффициент при x^2 содержит параметр a, то необходимо рассматривать два случая: $2a > 0$ и $2a < 0$.

У данной функции сложные формулы вершин парабол, графики функций, тяжело находится местоположение вершин парабол, поэтому используем более удобную форму функционально-графического метода — общие представления о квадратичной функции и примерные, схематические графики функции. Этим приемом следует пользоваться только тогда, когда вы набрали достаточно опыта решения, т. е. умеете определять свойства функции с параметром без использования частных случаев, точного расположения графика функции.

Изобразим *схематически* возможные положения графика функции $y = 2ax^2 - x + a$ на рисунке 8.4.

Условия, при которых возможны различные положения парабол, связаны со значением дискриминанта выражения правой части функции $2ax^2 - x + a$: $D = 1 - 8a^2$, при $a \in (-\frac{1}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{8}})$ $D > 0$ и $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}$ — нули функции. При $a > 0$ знаменатель положителен, поэтому $x_1 \geq x_2$, при $a < 0$ — отрицателен, поэтому $x_1 \leq x_2$.

Обратимся к свойствам графика функции с параметром.

При $\underline{a > 0}$ ветви парабол направлены вверх, отсюда воз-

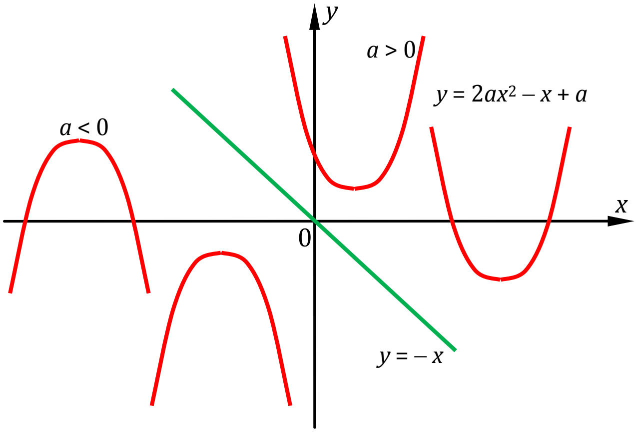


Рис. 8.4

можны три положения парабол относительно оси абсцисс: выше, касание или пересечение. По условию задачи, требуются положительные значения функции, тогда:

- если параболы лежат выше оси OX, то все значения функции положительны, — здесь $D < 0$, что возможно при $a \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{8}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{8}}; +\infty)$. Учитывая $a > 0$, получим значения параметра $a \in (\frac{1}{\sqrt{8}}; +\infty)$.
- если парабола пересекает в двух точках или касается OX, то всегда существуют положительные значения функции, — в этом случае $D \geq 0$ при $a \in [-\frac{1}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{8}}]$ и $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a}) \cup (\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a}; +\infty)$. Учитывая $a > 0$, получим условие $a \in (0; \frac{1}{\sqrt{8}}]$.

При $a < 0$ ветви парабол направлены вниз, отсюда возможно три положения парабол относительно оси абсцисс: ниже, касание или пересечение:

- если параболы лежат ниже оси OX или касаются ее, то положительных значений нет, — $D \le 0$ при $a \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{8}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{8}}; +\infty)$. Учитывая условие $a < 0$, получим $a \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{8}}]$;
- если парабола пересекает в двух точках OX, то положительные значения существуют при $D > 0$, т.е. при $a \in (-\frac{1}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{8}})$. Учитывая условие $a < 0$, получим при $a \in (-\frac{1}{\sqrt{8}}; 0)$ функция положительна на промежутке $x \in (\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a}; \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a})$.

Ответ: если $a \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{8}}]$, нет решений;

если $a \in (-\frac{1}{\sqrt{8}}; 0)$, то $x \in (\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a}; \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a})$;

если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0)$;

если $a \in (0; \frac{1}{\sqrt{8}}]$, то $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a}) \cup (\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a}; +\infty)$;

если $a \in (\frac{1}{\sqrt{8}}; +\infty)$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

Следующая задача 8.5 относится к задачам § 5, связанных с нахождением значений параметра при заданных свойствах корней.

Задача 8.5. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x^2 - x + a > 0$ верно при любом значении x.

Решение. Коэффициент при квадрате переменной не содержит параметра, поэтому это квадратичное неравенство при всех значениях параметра.

Рассмотрим частные случаи при $a = 3$ и $a = -2$ (2 и 3 столбцы табл. 8.5).

Таблица 8.5

<table>
<tr><th>Этапы рассуждений</th><th colspan="2">Частные случаи</th><th colspan="2">Решение задачи</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Если</td><td>$a = 3$,</td><td>$a = -2$,</td><td colspan="2">$a \neq 0$,</td></tr>
<tr><td>То</td><td>$2x^2 - x + 3 > 0$</td><td>$2x^2 - x - 2 > 0$</td><td colspan="2">$2x^2 - x + a > 0$</td></tr>
<tr><td>Неравенство:</td><td colspan="4">квадратное</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Решим:</td><td rowspan="2">$f(x) = 2x^2 - x + 3$ Определим существование нулей $f(x)$: $D = -23$. Нулей функции нет, ветви параболы направлены вверх, следовательно, $f(x)$ принимает только положительные значения.</td><td rowspan="2">$f(x) = 2x^2 - x - 2$ Определим существование нулей $f(x)$: $D = 17$. Следовательно, два нуля функции, и $f(x)$ принимает положительные и отрицательные значения.</td><td colspan="2">$f(x) = 2x^2 - x + a$. Определим существование нулей функции $f(x)$:
$D = 1 - 8a$,</td></tr>
<tr><td>Если $D \geq 0$ (т.е. $a \leq \frac{1}{8}$), то $f(x)$ имеет нули и принимает положительные и отрицательные значения.</td><td>Если $D < 0$ (т.е. $a > \frac{1}{8}$), то нулей функции нет. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $f(x)$ принимает только положительные значения.</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>верно при любом значении x</td><td>неверно для любых значений x</td><td colspan="2">$a \in (\frac{1}{8}; +\infty)$</td></tr>
</table>

Рассмотрев частные случаи, делаем вывод, что в зависимости от значений дискриминанта $D = 1 - 8a$ функция $f(x) = 2x^2 - x + a$ либо имеет нули, либо не имеет (5-й и 4-й столбцы табл. 8.5).

Ответ: $a \in (\frac{1}{8}; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

8.5. Решите неравенство $3x^2 - 2ax + 3 \le 0$ с параметром a.

8.6. При всех значениях параметра a решите неравенство $(a-2)x^2 + 2x - 5 \ge 0$.

8.7. При всех a решите неравенство $x^2 - 2ax - 2a + 3 < 0$.

8.8. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $3x^2 - 2ax + 3 > 0$ не имеет решений.

Ответы

8.5. если $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, то $x \in \left[\frac{a-\sqrt{a^2-9}}{3}; \frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}\right]$; если $a \in (-3; 3)$, то нет решений.

8.6. если $a \in (-\infty; 1{,}8)$, то нет решений; если $a \in [1{,}8; 2)$, то $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{5a-9}}{a-2}; \frac{-1-\sqrt{5a-9}}{a-2}\right]$; если $a = 2$, то $x \in [2{,}5; +\infty)$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5a-9}}{a-2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5a-9}}{a-2}; +\infty\right)$;

8.7. если $a \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$, то нет решений; если $a \in (-3; 1)$, то $x \in (a - \sqrt{a^2+2a-3}; a + \sqrt{a^2+2a-3})$;

8.7. $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

§ 9. Простейшие иррациональные уравнения с параметром

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что **возведение в квадрат** правой и левой частей простейшего иррационального уравнения, это **не тождественное преобразование**, то есть уравнение $f^2(x) = g^2(x)$, полученное возведением в квадрат правой и левой частей уравнения $f(x) = g(x)$, может быть как равносильным, так и неравносильным исходному уравнению $f(x) = g(x)$.

Например, при каком-то значении x_0 уравнение $f(x) = g(x)$ примет вид неверного равенства $4 = -4$. Возведя в квадрат обе части равенства, получим, что $f^2(x) = g^2(x)$ при x_0 примет вид верного числового равенства $16 = 16$. Таким образом, x_0 не является корнем $f(x) = g(x)$, но является решением $f^2(x) = g^2(x)$. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^2(x) = g^2(x)$ имеют различные решения, и, следовательно, неравносильны.

Данное рассуждение, еще раз обосновывает то, что возводить в квадрат следует только правые и левые части равенств, имеющие одинаковые знаки. Именно поэтому существует требование $g(x) \geq 0$ при решении уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Другой пример. Рассмотрим уравнение:

$$x - 1 = 2x + 3. \tag{1}$$

Это линейное уравнение, которое всегда имеет один корень. После приведения подобных, определим значение корня $x = -4$.

Покажем пример образования посторонних корней и необходимости ограничений. Возведем в квадрат правую и левую части исходного уравнения (1), и после приведения подобных получим квадратное уравнение:

$$3x^2 + 14x + 8 = 0, \tag{2}$$

имеющее своим решением два корня $x_1 = -4$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$. Поскольку множества корней уравнений (1) и (2) не совпадают, то эти уравнения неравносильны.

На этом примере хорошо видно, что после возведения в квадрат необходимо «отсортировать» корни. Этого умения не требовалось ранее при решении линейных, квадратных уравнений, поэтому расскажем об этом подробнее. Отбор корней можно провести двумя способами.

Первый способ — подстановка корней уравнения в исходное уравнение. Так, при подстановке корней $x_1 = -4$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$ уравнения (2) в (1) соответственно получим верное ($-5 = -5$) и неверное ($-\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$) равенства, — что позволяет определить верный корень уравнения. Этот способ не всегда удобен при решении уравнений и неравенств с параметрами.

Второй способ — составление системы условий, логически ограничивающих ошибочные корни. Главная идея была выделена ранее — одинаковые знаки у левой и правой части уравнения. Например, при возведении (1) в квадрат используем совокупность систем следующих условий: правая и левая части (1) одновременно либо положительны, либо отрицательны, либо обе равны нулю. Математически запишем так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2x + 3 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0, \\ 2x + 3 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первой системе совокупности оба корня не удовлетворяют ($x_1 = -4$ не удовлетворяет 1-му и 2-му неравенства, $x_2 = -\frac{2}{3}$ — 1-му неравенству). Во второй системе корень $x_1 = -4$ обращает оба неравенства в верные числовые равенства, а $x_2 = -\frac{2}{3}$ — оба неравенства в неверные равенства. Таким образом, только $x = -4$ — решение совокупности систем.

Подобные рассуждения и используют при решении иррациональных неравенств.

Если неизвестная в уравнении содержится под знаком радикала (квадратного, кубического и т. д.), то такое уравнение называют *иррациональным*. Простейшее иррациональное уравнение можно записать в виде $\sqrt{f(x)} = c$, где c — действительное число. Соответственно виду уравнения существуют параметризации:

1) выражения, стоящего под знаком квадратного радикала (например, $\sqrt{x + 2a} = 3$);
2) выражения вне знака квадратного радикала (например, $\sqrt{x + 2} = a + 3$);
3) выражений под знаком радикала и вне знака радикала (например, $\sqrt{x + 2a} = 3 + a$).

Задача 9.1. При всех действительных значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x + 2a} = -3$.

Решение. Левая часть уравнения — арифметический квадратный корень, который по определению всегда положителен или равен нулю. Правая часть уравнения — отрицательное число. Поэтому при любых значения параметра a уравнение не имеет корней.

Ответ: при любых $a \in \boldsymbol{R}$ нет решений.

Задача 9.2. Для каждого значения a решите уравнение $\sqrt{x + 2a} = 3$.

Решение. В частных случаях рассмотрим два противоположных значения параметра 5 и –5 (2 и 3 столбцы табл. 9.2).

Правая и левая части уравнения — положительны, поэтому можем возводить в квадрат обе части уравнения. По определению квадратного корня в действительных числах подкоренное выражение должно быть неотрицательным ($x + 2a \geq 0$), поэтому включим это условие в систему, равносильную исходному уравнению. В эту систему включаем возведенное в квадрат исходное уравнение.

Таблица 9.2

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнения $\sqrt{x+2a} = 3$**
1	**2**	**3**	**4**
Если	$a = 5$,	$a = -5$,	a — любое,
То	$\sqrt{x+10} = 3$	$\sqrt{x-10} = 3$	$\sqrt{x+2a} = 3$
Неравенство	иррациональное		
Решим: уравнение равносильно системе:	$\begin{cases} \left(\sqrt{x+10}\right)^2 = 3^2, \\ x+10 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+10 = 9, \\ x+10 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ x \geq -10. \end{cases}$ Поскольку $-1 \geq -10$, то $x = -1$.	$\begin{cases} \left(\sqrt{x-10}\right)^2 = 3^2, \\ x+10 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-10 = 9, \\ x-10 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 19, \\ x \geq 10. \end{cases}$ Поскольку $19 \geq 10$, то $x = 19$.	$\begin{cases} \left(\sqrt{x+2a}\right)^2 = 3^2, \\ x+2a \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+2a = 9, \\ x+2a \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9-2a, \\ x \geq -2a. \end{cases} \quad (1)$ Поскольку $9-2a \geq -2a \quad (2)$ или $9 \geq 0$, т.е. при любых a решение $x = 9-2a$ принадлежит области допустимых значений x.
Ответ:	$x = -1$	$x = 19$	$x = 9-2a$

Обратим внимание на отбор корней. Простое действие по отбору корней без параметра, показанные во 2-м и 3-м столбцах табл. 9.2 ($-1 \geq -10$ и $19 \geq 10$), при решении системы с параметром (1) превращается в решение неравенства с одной неизвестной (столбец 4 табл. 9.2). В случае нашей задачи решением (2) является любое a, но при решении других уравнений и неравенств ответом может быть промежуток значений a (при a, принадлежащих найденному промежутку, решение есть; при остальных a — решений нет).

Ответ: при всех $a \in \boldsymbol{R}$ $x = 9 - 2a$.

Задача 9.3. При всех значениях параметра a решите уравнение $\sqrt{x+2} = a + 3$.

Решение. Решения в частных случаях показывают две ситуации, когда иррациональное равенство имеет смысл и когда не имеет (2-й и 3-й столбцы табл. 9.3). Так левая часть уравнения положительна или равна нулю по определению арифметического корня, а правая $a + 3$ может принимать как положительные, так и отрицательные или равные нулю значения (4-й и 5-й столбцы табл. 9.3).

Таблица 9.3

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение уравнения $\sqrt{x+2} = a + 3$**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = 5$,	$a = -5$,	$a \geq -3$	$a < -3$
То	$\sqrt{x+2} = 8$	$\sqrt{x+2} = -2$	$\sqrt{x+2} = a + 3$	
Неравенство	иррациональное		иррациональное	
Решим:	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x+2 = 64, \\ x+2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 62, \\ x \geq -2. \end{cases}$ Поскольку $62 \geq -2$, то $x = 62$.	$\sqrt{x+2} \geq 0$ и $-2 < 0$, противоречие.	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x+2 = (a+3)^2, \\ x+2 \geq 0, \\ a+3 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a^2 + 6a + 7, \\ x \geq -2, \\ a \geq -3. \end{cases}$ Поскольку $a^2 + 6a + 7 \geq -2$ или $(a+3)^2 \geq 0$, т.е. при $a \geq -3$ решение $x = a^2 + 6a + 7$ удовлетворяет условию $x \geq -2$.	$\sqrt{x+2} \geq 0$ и $a + 3 < 0$, противоречие.
Ответ:	$x = 62$	нет корней	$x = a^2 + 6a + 7$	нет корней

Отсюда при решении уравнения с параметром рассматриваем два случая, когда значения параметра таковы, что правая часть уравнения: 1) положительна или равна нулю ($a \geq -3$); 2) отрицательна ($a < -3$) (столбцы 4 и 5 табл. 9.3).

Ответ: если $a \in [-3; +\infty)$, то $x = a^2 + 6a + 7$; если $a \in (-\infty; -3)$, то нет корней.

Рассмотрим решение уравнения с параметром, содержащимся как под знаком корня, так и вне корня. В таком, уравнении соответственно необходимо учитывать одновременно специфические особенности решений задач 9.2 и 9.3.

Задача 9.4. Для каждого действительного значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x + 2a} = a + 3$.

Составим таблицу 9.4 частных случаев при $a = -5$, $a = -2$ и $a = 5$. При решении этого уравнения, как и в задаче 9.3, рассматриваем различные значения правой части. В частных случаях этапы алгоритм решения аналогичен решениям в частных случаях уравнения задачи 9.3, но в решение задачи с параметром имеет отличия. (Сравните частные случаи таблицы 9.4 с решениями частных случаев задачи 9.3.)

Таблица 9.4

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
Если	$a = -5$,	$a = -2$,	$a = 5$,
То	$\sqrt{x - 10} = -2$	$\sqrt{x - 4} = 1$	$\sqrt{x + 10} = 8$
Неравенство:	иррациональное		
Решим:	$\sqrt{x - 10} \geq 0$ и $-2 < 0$, противоречие.	уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x - 4 = 1, \\ x - 4 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ x \geq 4. \end{cases}$ Поскольку $5 \geq 4$, то $x = 5$.	уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x + 10 = 64, \\ x + 10 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 54, \\ x \geq -10. \end{cases}$ Поскольку $54 \geq -10$, то $x = 54$.
Ответ:	нет корней	$x = 5$	$x = 54$

Решение. Правая часть уравнения $\sqrt{x+2a} = a + 3$ не может быть отрицательной, поэтому при $a < -3$ уравнение не имеет решений.

Пусть правая часть положительна или равна нулю, то есть $a \geq -3$. В этом случае данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 2a = (a+3)^2, \\ \quad x + 2a \geq 0. \end{cases}$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} x = a^2 + 4a + 9, & (1) \\ x \geq -2a, & (2) \end{cases}$$

Определим при каких значениях a (1) удовлетворяет (2): $a^2 + 4a + 9 \geq -2a$ или $(a+3)^2 \geq 0$, то есть при любом действительном неотрицательном a полученное значение $x = a^2 + 4a + 9$ является решением данного уравнения.

Ответ: если $a \in [-3; +\infty)$, то $x = a^2 + 4a + 9$; если $a \in (-\infty; -3)$, то нет корней.

Задача 9.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} = a$ имеет два решения.

Решим уравнение при $a = -2$, $a = 1$ и $a = 2$ (табл. 9.5). В первом случае при $a = -2$ решений нет (2-й столбец), поэтому это значение не будет входить в решение задачи. При $a = 1$ и $a = 2$ корней два, поэтому эти значения будут входить в решение данной задачи.

Решение. Уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} = a$ не имеет решений в случае $a < 0$ ($\sqrt{x^2 - a^2} > 0$, $a < 0$, поэтому исходное равенство неверно), иначе при $a \geq 0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - a^2 \geq 0, \\ x^2 - a^2 = a^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Таблица 9.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
1	**2**	**4**	**5**
Если	$a = -2$,	$a = 1$,	$a = 2$,
то	$\sqrt{x^2 - 4} = -2$	$\sqrt{x^2 - 1} = 1$	$\sqrt{x^2 - 4} = 2$
Уравнение:	иррациональное		
Решение:	Поскольку $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ и $-2 < 0$, то неверное равенство	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ x^2 - 1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \text{ или } x \leq -1, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$ Решение системы: $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 - 4 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \text{ или } x \leq -2, \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$ Решение системы: $x_1 = 2\sqrt{2}$ и $x_2 = -2\sqrt{2}$
Ответ:	нет решений	два решения	два решения

Решением неравенства системы (1) являются $x \geq a$ или $x \leq -a$. Решением уравнения — $x_1 = a\sqrt{2}$, $x_2 = -a\sqrt{2}$. Проиллюстрируем на числовой прямой полученные решения (рис. 9.5).

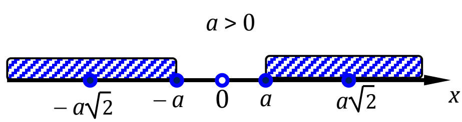


Рис. 9.5

На рисунке показано, что корни уравнения при $a > 0$ всегда принадлежат промежуткам, являющимся решением неравенства, поскольку неравенства $a\sqrt{2} > a$ и $-a\sqrt{2} < -a$ при любых положительных значениях a.

Проверим отдельно решение данного уравнения при $a = 0$. Уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} = a$ примет вид: $\sqrt{x^2} = 0$ или $x = 0$. Таким образом, при $a = 0$ уравнение имеет одно решение.

Ответ: уравнение имеет два решения при $a \in (0; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

9.6. Решите уравнение $\sqrt{a-2x} = 1$ с параметром a.

9.7. При всех значениях a решите уравнение $\sqrt{3x+2} = 2 - a$.

9.8. Для каждого действительного значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x+a-2} = 2a$.

9.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a} = -a$ не имеет решений.

Ответы

9.6. если $a \in \boldsymbol{R}$, то $x = \frac{a-1}{2}$;

9.7. если $a \in (-\infty; 2]$, то $x = \frac{a^2-4a+2}{3}$; если $a \in (2; +\infty)$, то нет решений;

9.8. если $a \in [0; +\infty)$, $x = 4a^2 - a + 2$; если $a \in (-\infty; 0)$, то нет решений;

9.9. $a \in (0; +\infty)$.

§ 10. Решение уравнений и неравенств с параметром, содержащих модуль

Для решения любых уравнений, неравенств и функций, содержащих модуль, необходимо знать и свободно использовать определение модуля числа.

Определение. Модуль положительного или равного нулю числа — это само число, модуль отрицательного числа — это противоположное ему число.

Данное определение можно представить в виде:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 0, \\ |x| = x; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ |x| = -x. \end{cases}\end{array}\right. \qquad (1)$$

Возможно, Вы впервые встречаете определение (1) в форме совокупности. Скорее всего, сталкивались с ниже следующей формой записи:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Такая форма так же верна, но не соответствует словесной формулировке, представленной выше. Если этот вопрос Вас заинтересовал, то можете изучить этот вопрос подробнее в статье В. Г. Болтянского «Фигурная скобка в определении модуля» [2].

Основное свойство модуля числа — это его «неотрицательность», т.е. $|x| \geq 0$ при любом действительном значении x.

При решении уравнений и неравенств, содержащих модуль, ключевой идеей является обращение к случаям, которые в определении (1) представлены знаком совокупности. В каждом из случаев получаем решение и ответ, которые далее объединяем.

При решении уравнений и неравенств с модулем, будем использовать некоторые свойства:

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = |-x|$;

3. $|kx| = k|x|$, где $k \ge 0$;
4. если $|x| \le c$, то $-c \le x \le c$ $(c \ge 0,\ c \in R)$;
   если $|x| < c$, то $-c < x < c$ $(c > 0,\ c \in R)$;
5. если $|x| = 0$, то $x = 0$.

Разделим простейшие уравнения и неравенства с параметрами по принципу параметризации на три вида:

1) **параметр находится вне знака модуля: $|f(x)| = g(a)$, $|f(x)| > g(a)$, $|f(x)| < g(a)$, $|f(x)| \ge g(a)$ и $|f(x)| \le g(a)$.** (например, $|x| = a$, $|x-2| \ge 2a$, $|2x+1| < 2-a$);
2) **параметр находится под знаком модуля: $|f(x,a)| = c$, $|f(x,a)| > c$, $|f(x,a)| < c$, $|f(x,a)| \ge c$, $|f(x,a)| \le c$, где c – const** (например, $|x-a| = 2$, $|x+3a| \ge 6$, $|2a-x| < 4$);
3) **параметр находится как под знаком модуля, так и вне знака модуля $|f(x,a)| = g(a)$** (например, $|x-2a| = a-2$, $|2x+3a| > a+4$, $|2+a-x| \le 2a$).

Решение уравнений (неравенств) *с параметром* и *с модулем* требует конструктивно более сложных рассуждений, поэтому решения задач представляем с подробными объяснениями.

Задача 10.1. Решите уравнение $|x| = a$ с параметром a.

Составим таблицу 10.1. Рассмотрим различные значения параметра (положительные, отрицательные и равные нулю).

Так при $a = -2$ (2-й столбец табл. 10.1) получаем противоречащее определению модуля неверное равенство $|x| = -2$. Частные случаи уравнения $|x| = a$ при $a = 0$, $a = 2$ и $a = 5$ имеют решения (3, 4 и 5-й столбцы).

Обобщив частные случаи, получаем логику решения исходного уравнения (6, 7 и 8-й столбцы табл. 10.1).

Решение. Параметр находится в правой части данного уравнения, следовательно, в зависимости от значений a может быть положительна, отрицательна или равна нулю. Соответственно выделим два случая: 1) выражение, равное модулю, отрицательно ($a < 0$); 2) выражение, равное модулю, положительно или равно нулю ($a \geq 0$).

Таблица 10.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**				**Решение уравнения $\|x\| = a$**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Если	$a = -2$,	$a = 0$,	$a = 2$,	$a = 5$,	$a < 0$,	$a = 0$,	$a > 0$,
То	$\|x\| = -2$	$\|x\| = 0$	$\|x\| = 2$	$\|x\| = 5$	$\|x\| = a$	$\|x\| = a$	
По 1-му свойству модуля	$\|x\| \geq 0$ и $-2 < 0$, т.е. $\|x\| = -2$ — неверное равенство	$\|x\| \geq 0$ и $a \geq 0$, поэтому уравнения имеют решение			$a < 0$, т.е. неверное равенство	$\|x\| \geq 0$, данное уравнение имеет решение	
Раскроем знак модуля:	-	$x = 0$	$x_1 = 2$, $x_2 = -2$	$x_1 = 5$, $x_2 = -5$		$x = 0$	$x_1 = a$, $x_2 = -a$
Ответ:	нет корней	$x = 0$	$x_{1,2} = \pm 2$	$x_{1,2} = \pm 5$	нет корней	$x = 0$	$x_{1,2} = \pm a$

1) при $a < 0$ уравнение $|x| = a$ не имеет решений, так как положительное или равное нулю выражение $|x|$ равно отрицательному a (6-й столбец);
2) при $a \geq 0$ (7 и 8-й столбцы) уравнение $|x| = a$ в соответствии с определением модуля числа представим:

$$|x| = a \text{ равносильно } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = a; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x = a; \end{cases} \end{array}\right. \text{ то есть } x = \pm a.$$

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то нет решений; если $a \in [0; +\infty)$, то $x_{1,2} = \pm a$.

Комментарий к задаче 10.1. Данную задачу легко решить используя функционально-графический подход. Введем две функции $f(x) = |x|$ и $g(x) = a$. В соответствии с определением модуля получим: 1) при $x > 0$ графиком функции $f(x)$ будет прямая $y = x$; 2) при $x < 0$ графиком функции $f(x)$ будет прямая $y = -x$ (рис. 10.1, *а*). Минимальное значение $f(x)$ принимает в точке с координатами (0, 0). Графиком $g(x) = a$ является семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Решением неравенства являются нахождение абсцисс точек пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ (рис. 10.1, *б*):

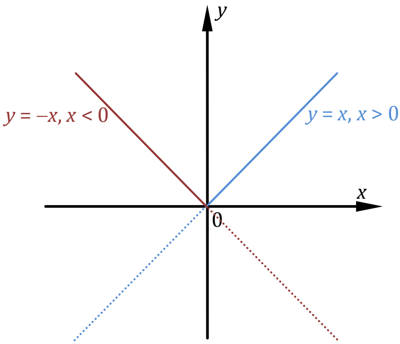


Рис. 10.1, *а*

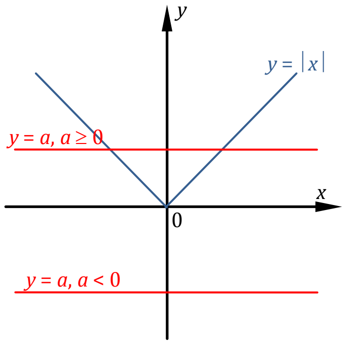


Рис. 10.1, *б*

- Если $a < 0$, то графики не пересекаются.
- Если $a = 0$, то графики пересекаются в одной точке (0; 0).
- Если $a > 0$, то графики пересекаются в двух точках с противоположными значениями абсцисс $x = \pm a$.

Обратимся к решению неравенств с модулем. Обратим внимание на следующие свойства простейших неравенств с модулем.

Если неравенство имеет вид $|f(x)| > g(a)$ или $|f(x)| \geq g(a)$, то $g(a)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тогда:

$$|f(x)| > g(a) \text{ равносильно } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(a) < 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} g(a) \geq 0, \\ |f(x)| > g(a). \end{cases} \end{array}\right. \quad (1)$$

$$|f(x)| \geq g(a) \text{ равносильно } \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(a) \leq 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} g(a) > 0, \\ |f(x)| \geq g(a). \end{cases}\end{array}\right. \qquad (2)$$

Сравните (1) и (2) и проанализируйте отличия.

Задача 10.2. При всех a решите неравенство $|x-2| \geq 2a$.

Составим таблицу 10.2.1 частных решений данного неравенства при $a = -4$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 3$.

Таблица 10.2.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = -4$,	$a = 0$,	$a = \frac{1}{2}$	$a = 3$,
То	$\|x-2\| \geq -8$	$\|x-2\| \geq 0$	$\|x-2\| \geq 6$	$\|x-2\| \geq 6$
Решение:	$\|x-2\| \geq 0$ и $-8 < 0$, поэтому неравенство верно для любых значений x	По 1-му свойству модуля неравенство верно для любых значений x	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-2 \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0, \\ -x+2 \geq 1, \end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \leq 1. \end{cases}\end{array}\right.$ После решения систем получим: $\left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq 1. \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-2 \geq 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0, \\ -x+2 \geq 6, \end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \leq -4. \end{cases}\end{array}\right.$ После решения систем получим: $\left[\begin{array}{l} x \geq 8, \\ x \leq -4. \end{array}\right.$
Ответ:	любое x	любое x	$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$	$x \in (-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$

Частные случаи иллюстрируют преобразования (2), представленные выше.

При $a = -4$ получаем неравенство, в котором модуль больше отрицательного числа (2 столбец табл. 10.2.1), поэтому неравенство верно для любого действительного значения x. При $a = \frac{1}{2}$ и $a = 3$ решения аналогичны, — по определению модуля рассматриваем два случая, которые математиками записываются в виде совокупности систем (4 и 5 столбцы табл. 10.2.1). Обобщим рассуждения и представим решение в таблице 10.2.2.

Таблица 10.2.2

Этапы рассуждений	**Решение уравнения $\|x-2\| \geq 2a$**	
1	**2**	**3**
Пусть	$a \leq 0$,	$a > 0$,
Тогда	$2a \leq 0$ и $\|x-2\| \geq 0$, неравенство верно для любых значений x	$\|x-2\| \geq 2a$ по определению модуля неравенство равносильно $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-2 \geq 2a; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0, \\ -x+2 \geq 2a, \end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq 2a+2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x \leq 2-2a. \end{cases}\end{array}\right.$ Поскольку $a > 0$, то $2-2a < 2 < 2+2a$. Отсюда решение систем приводит к совокупности: $\left[\begin{array}{l} x \geq 2+2a, \\ x \leq 2-2a. \end{array}\right.$
Ответ:	любое x	$x \in (-\infty; 2-2a] \cup [2+2a; +\infty)$

Решение. Выражение под знаком модуля находится в левой части неравенства, числовое выражение с параметром — в правой части. Соответственно при решении неравенства $|x-2| \geq 2a$ рассмотрим два случая:

1) при $2a \leq 0$ неравенство верно при любых значениях x (положительный или равный нулю $|x-2|$ больше отрицательного или равного нулю $2a$) (столбец 2 табл. 10.2.2);

2) при $2a > 0$ неравенство решаем по определению модуля (столбец 3 табл. 10.2.2).

Ответ: если $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a \in (0; +\infty)$, то $x \in (-\infty; 2-2a] \cup [2+2a; +\infty)$.

Комментарий к задаче 10.2. Выделим основные этапы решения задачи функционально-графическим методом. Введем две функции $f(x) = |x - 2|$ и $g(x) = 2a$. Аналогично, как и в комментариях к задаче 10.1 строим график функции $f(x)$ (рис. 10.2). Минимальное значение $f(x)$ принимает в точке с координатами (2; 0). Графиком $g(x) = 2a$ является семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Решением неравенства являются нахождение промежутков x, на которых значения $f(x)$ больше значений $g(x)$ (рис. 10.2):

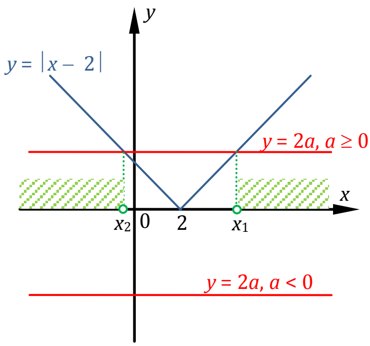


Рис. 10.2

- Если $a < 0$, то график $f(x)$ лежит выше $g(x)$, т.е. все значения $f(x)$ больше значений $g(x)$, — что и требуется условием.
- Если $a = 0$, то график $f(x)$ лежит выше $g(x)$, и в точке пересечения (2; 0) функции имеют равные значения,— отсюда $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Если $a > 0$, то выше $g(x)$ лежат части графика $f(x)$ на промежутках $(-\infty; x_2)$ и $(x_1; +\infty)$ (рис. 10.2).

Задача 10.3. При всех значениях параметра a решите неравенство $|2x + 1| < 2 - a$.

Составим таблицу 10.3 частных решений данного неравенства при $a = -3$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 5$.

Решения при $a = -3$, $a = 0$ и $a = 1$ аналогичны, поскольку правые части неравенств положительные числа. При раскрытии модуля используем 4-е свойство модуля:

$$|x| < a \text{ равносильно } -a < x < a \quad (a > 0). \qquad (1)$$

Таблица 10.3

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			
Если	$a = -3$,	$a = 0$,	$a = 1$,	$a = 5$,
То	$\lvert 2x + 1 \rvert < 5$	$\lvert 2x + 1 \rvert < 2$	$\lvert 2x + 1 \rvert < 1$	$\lvert 2x + 1 \rvert < -3$
Решение:	По свойству (1): $-5 < 2x + 1 < 5$, $-6 < 2x < 4$, $-3 < x < 2$	По свойству (1): $-2 < 2x + 1 < 2$, $-3 < 2x < 1$, $-1{,}5 < x < 0{,}5$	По свойству (1): $-1 < 2x + 1 < 1$, $-2 < 2x < 0$, $-1 < x < 0$	неверное равенство
Ответ:	$x \in (-3; 2)$	$x \in (-1{,}5; 0{,}5)$	$x \in (-1; 0)$	нет корней

При $a = 5$ получаем неверное равенство (модуль меньше отрицательного числа). Обобщим рассуждения и представим решение задачи.

Решение. Модуль может быть меньше только положительного числа, поэтому найти решение неравенства $\lvert 2x + 1 \rvert < 2 - a$ возможно при условии, что $2 - a > 0$. Отсюда рассмотрим два случая:

1) если $2 - a \le 0$, то неравенство не имеет решений;
2) если $2 - a > 0$, то неравенство равносильно:

$$a - 2 < 2x + 1 < 2 - a \quad \text{или}$$

$$\frac{a-3}{2} < x < \frac{1-a}{2}.$$

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in \left(\frac{a-3}{2}; \frac{1-a}{2}\right)$; если $a \in [2; +\infty)$, то нет решений.

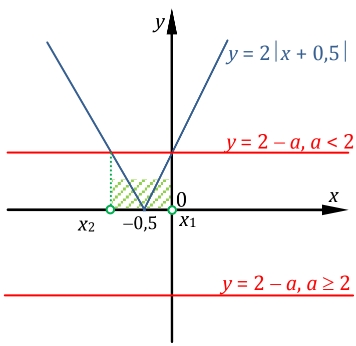


Рис. 10.3

Комментарий к задаче 10.3. Выделим основные этапы решения задачи функционально-графическим методом. Введем две функции $f(x) = \lvert 2x + 1 \rvert$ и $g(x) = 2 - a$. Воспользуемся свойством 3 и приведем $f(x)$ к виду $f(x) = 2|x + 0{,}5|$. Отсюда график $f(x)$ можно получить сжатием графика $y = |x|$ относительно оси абсцисс с коэффициентом, равным 2, и сдвигом влево на 0,5 единиц вдоль OX. Минимальное значение $f(x)$ принимает в точке с координатами $(–0{,}5; 0)$. Графиком $g(x) = 2 – a$ является семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Решением неравенства являются нахождение значений x, при которых значения $f(x)$ меньше значений $g(x)$ (рис. 10.3):

- Если $2 – a \le 0$, то график $f(x)$ лежит выше $g(x)$, т.е. не существует значений x, при которых значения $f(x)$ меньше значений $g(x)$.
- Если $2 – a > 0$, то ниже $g(x)$ лежит часть графика $f(x)$ на промежутке $(x_2; x_1)$ (рис. 10.3).

Решения следующих задач показывают примеры решения простейших уравнений и неравенств, в которых параметр находится под знаком модуля.

Задача 10.4. При всех действительных значениях параметра a решите уравнение $|x – a| = 2$.

Составим таблицу 10.4 частных решений данного неравенства при $a = –2$, $a = 1$, $a = 5$.

Решения во всех частных случаях аналогичны: по определению модуля строим равносильную данному уравнению совокупность систем; все системы имеют решения; отсюда во всех частных случаях уравнения имеют два решения (2, 3 и 4-й столбцы табл. 10.4).

Несмотря на то, что *уравнение* решается практически «устно», мы расписали решение в соответствии с определением, чтобы в дальнейшем избежать ошибочного, аналогичного решения *неравенств, содержащих модуль*.

Решение. По определению модуля числа данное уравнение равносильно совокупности (1). После несложных преобразований уравнений и неравенств совокупности (5-й столбец табл. 10.4) получаем, что полученные значения $x = a - 2$ и $x = a + 2$ удовлетворяют всем условиям.

Таблица 10.4

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			**Решение уравнение $\lvert x-a\rvert = 2$**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = -2$,	$a = 1$,	$a = 5$,	a — любое,
То	$\lvert x+2\rvert = 2$	$\lvert x-1\rvert = 2$	$\lvert x-5\rvert = 2$	$\lvert x-a\rvert = 2$
Решение: по определению модуля:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\ge 0,\\ x+2=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x+2<0,\\ -x-2=2\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -2,\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-2,\\ x=-4\end{cases}\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x-1=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0,\\ -x+1=2\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1,\\ x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<1,\\ x=-1\end{cases}\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-5\ge 0,\\ x-5=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-5<0,\\ -x+5=2\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 5,\\ x=7;\end{cases}\\ \begin{cases}x<5,\\ x=3\end{cases}\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-a\ge 0,\\ x-a=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-a<0,\\ -x+a=2\end{cases}\end{array}\right.$ (1) или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge a,\\ x=a+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x<a,\\ x=a-2.\end{cases}\end{array}\right.$ $a - 2 < a < a + 2$ при любых a.
Ответ:	$x = -4, x = 0$	$x = -1, x = 3$	$x = -1, x = 3$	$x = a - 2, x = a + 2$

Ответ: если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x = a - 2$, $x = a + 2$.

Комментарий к задаче 10.4. Выделим основные этапы решения задачи функционально-графическим методом. Введем две функции $f(x) = \lvert x-a\rvert$ и $g(x) = 2$. График функции $f(x)$ можно полу-

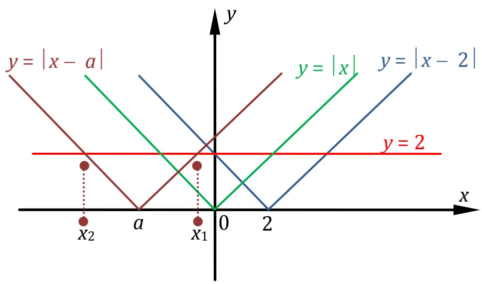


Рис. 10.4

чить сдвигом графика $y = \lvert x \rvert$ на a единиц вдоль оси абсцисс. Графиком $g(x) = 2$ — прямая, пересекающая ось ординат $(0; 2)$ и параллельная оси абсцисс. Решением уравнения являются значения абсцисс точек пересечений графиков $f(x)$ и $g(x)$ (рис. 10.4). Расстояние от точки a до точек x_1 и x_2 равно 2 единицам, поэтому $x_1 = a + 2$ и $x_2 = a - 2$.

Задача 10.5. Для каждого значения a решите неравенство $\lvert x + 3a \rvert \geq 6$.

Составим таблицу 10.5 частных решений данного неравенства при $a = -1$, $a = 1$ и $a = 2$.

Решения во всех частных случаях аналогичны: по определению модуля строим равносильную данному неравенству совокупность систем; все системы имеют решением объединение двух бесконечных промежутков; расстояние между точками, ограничивающими эти промежутки равно 12 (2, 3 и 4-й столбцы табл. 10.5).

Таблица 10.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			**Решение неравенства $\lvert x + 3a \rvert \geq 6$**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = -1$,	$a = 1$,	$a = 2$,	a — любое,
То	$\lvert x - 3 \rvert \geq 6$	$\lvert x + 3 \rvert \geq 6$	$\lvert x + 6 \rvert \geq 6$	$\lvert x + 3a \rvert \geq 6$
Решение: по определению модуля:	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x - 3 \geq 0,\\ x - 3 \geq 6;\end{cases}\\&\begin{cases}x - 3 < 0,\\ -x + 3 \geq 6\end{cases}\end{aligned}\right.$ или $\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x \geq 3,\\ x \geq 9;\end{cases}\\&\begin{cases}x < 3,\\ x \leq -3\end{cases}\end{aligned}\right.$	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x + 3 \geq 0,\\ x + 3 \geq 6;\end{cases}\\&\begin{cases}x + 3 < 0,\\ -x - 3 \geq 6\end{cases}\end{aligned}\right.$ или $\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x \geq -3,\\ x \geq 3;\end{cases}\\&\begin{cases}x < -3,\\ x \leq -9\end{cases}\end{aligned}\right.$	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x + 6 \geq 0,\\ x + 6 \geq 6;\end{cases}\\&\begin{cases}x + 6 < 0,\\ -x - 6 \geq 6\end{cases}\end{aligned}\right.$ или $\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x \geq -6,\\ x \geq 0;\end{cases}\\&\begin{cases}x < -6,\\ x \leq -12\end{cases}\end{aligned}\right.$	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x + 3a \geq 0,\\ x + 3a \geq 6;\end{cases}\\&\begin{cases}x + 3a < 0,\\ -x - 3a \geq 6\end{cases}\end{aligned}\right. \quad (2)$ или $\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x \geq -3a,\\ x \geq 6 - 3a;\end{cases}\\&\begin{cases}x < -3a,\\ x \leq -6 - 3a\end{cases}\end{aligned}\right. \quad (3)$
Ответ:	$x \in (-\infty; -3] \cup [9; +\infty)$	$x \in (-\infty; 3] \cup [-9; +\infty)$	$x \in (-\infty; -12] \cup [0; +\infty)$	$x \in (-\infty; -3a - 6] \cup [-3a + 6; +\infty)$

Решение. По определению модуля числа данное неравенство равносильно совокупности (2) (5-й столбец табл. 10.5). После несложных преобразований неравенств совокупности (2) получаем совокупность (3), решение которой покажем на числовой прямой (рис. 10.5, *а*).

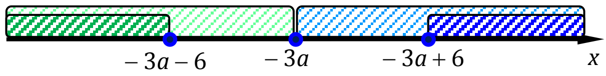


Рис. 10.5, *а*

Заметим, промежутки ответа симметричны относительно точки $-3a$.

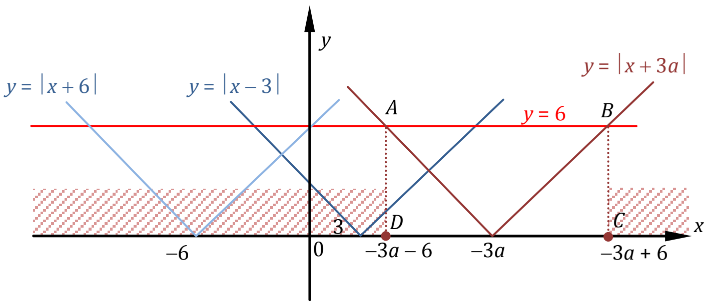


Рис. 10.5, *б*

Ответ: если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -3a - 6] \cup [-3a + 6; +\infty)$.

Комментарий к задаче 10.5. Обратимся к решению задачи функционально-графическим методом, для этого введем две функции $f(x) = |x + 3a|$ и $g(x) = 6$. График функции $f(x)$ можно получить преобразованиями графика $y = |x|$ сдвигом на $-3a$ единиц вдоль оси абсцисс. График $g(x) = 6$ — прямая, пересекающая ось ординат в точке $(0, 6)$ и параллельная оси абсцисс. Решение данного неравенства — это значения x, при которых значения $f(x)$ больше или равны значениям $g(x)$ (рис. 10.5, *б*).

- Если $x+3a<0$ $(x<-3a)$, то найдем точку пересечения прямых $y=-x-3a$ и $y=6$. Это точка имеет координаты $(-3a-6;\ 6)$. График $f(x)$ лежит выше или пересекается с $g(x)$ на промежутке $x\in(-\infty;-3a-6]$.
- Если $x+3a\geq 0$ $(x\geq -3a)$, то найдем точку пересечения прямых $y=x+3a$ и $y=6$. Это точка имеет координаты $(-3a+6;\ 6)$. График $f(x)$ лежит выше или пересекается с $g(x)$ на промежутке $x\in[-3a+6;+\infty)$.

Обратим внимание на прямоугольник $ABCD$, где точка $-3a$ делит CD пополам, а прямая $x=-3a$ делит прямоугольник $ABCD$ на квадраты со стороной 6. Тогда в прямоугольнике стороны $AD=BC=6$ и $AB=CD=12$. Отсюда точки C и D имеют соответственно координаты $(-3a+6;\ 0)$ и $(-3a-6;\ 0)$. Это рассуждение называют геометрическим подходом и его можно использовать в функционально-графическом решении задачи.

Задача 10.6. При всех значениях параметра a решите неравенство $|2a-x|<4$.

Покажем в таблице 10.6 частные решения данного неравенства при $a=-2$ и $a=2$. Полученные неравенства можно решать аналогично задаче 10.5, но при данном знаке неравенства более рационально использовать следствие из определения модуля как в задаче 10.3. Покажем различные решения при $a=-2$ (неравенство решим как в задаче 10.5) и при $a=2$ (как в задаче 10.3).

Заметим, что решение при $a=2$ решение более рациональное, чем при $a=-2$ (столбцы 2 и 3 табл. 10.6). Поэтому при решении неравенства с параметром будем придерживаться того же подхода.

Решение. Приведем исходное неравенство $|2a-x|<4$ к виду $|x-2a|<4$ по 2-му свойству модуля $|-x|=|x|$. Далее по решению, представленному в 4-м столбце таблицы 10.6, воспользуемся 4-м свойством модуля числа для неравенств вида $|x|<a$. В результате несложных преобразований получим ответ.

Таблица 10.6

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		**Решение неравенства** $\mathbf{\lvert 2a - x\rvert < 4}$
1	**2**	**3**	**4**
Если	$a = -2$,	$a = 2$,	a — любое,
То	$\lvert -4 - x\rvert < 4$	$\lvert 4 - x\rvert < 4$	$\lvert 2a - x\rvert < 4$
Решение:	По определению модуля: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4 - x \ge 0,\\ -4 - x < 4;\end{cases}\\ \begin{cases}-4 - x < 0,\\ 4 + x < 4\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -4,\\ x > -8;\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}x > -4,\\ x < 0\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$ Решение системы (1) — $x \in (-8; -4]$, решение системы (2) — $x \in (-4; 0)$. Объединив, получим ответ.	По 2-му свойству модуля числа: $\lvert 4 - x\rvert = \lvert x - 4\rvert$. По 4-му свойству из определения модуля: $-4 < x - 4 < 4$, $0 < x < 8$	По свойству 2-му модуля числа: $\lvert 2a - x\rvert = \lvert x - 2a\rvert$. По 4-му свойству из определения модуля: $-4 < x - 2a < 4$, $2a - 4 < x < 2a + 4$
Ответ:	$x \in (-8; 0)$	$x \in (0; 8)$	$x \in (2a - 4; 2a + 4)$

Ответ: если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x \in (2a - 4; 2a + 4)$.

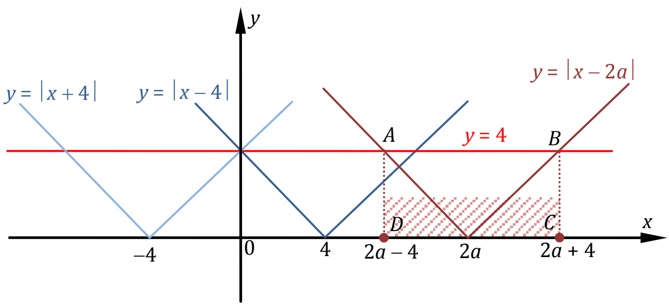


Рис. 10.6

Комментарий к задаче 10.6. Введем функции $f(x) = \lvert x - 2a\rvert$ и $g(x) = 4$. График $f(x)$ можно получить преобразованиями графика $y = \lvert x\rvert$ сдвигом на $2a$ единиц вдоль оси абсцисс. График $g(x) = 4$ —

прямая, пересекающая ось ординат в точке (0; 4) и параллельная оси абсцисс. Решение данного неравенства — это значения x, при которых значения $f(x)$ меньше значений $g(x)$ (рис. 10.6). Найдем точки пересечения $f(x)$ и $g(x)$:

- Если $x - 2a < 0$ ($x < 2a$), то прямые $y = -x + 2a$ и $y = 4$ пересекаются в точке с координатами $(2a - 4; 4)$.
- Если $x - 2a \geq 0$ ($x \geq 2a$), то прямые $y = x - 3a$ и $y = 4$ пересекутся в точке $(2a + 4; 4)$.

График $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$ на промежутке $x \in (2a - 4; 2a + 4)$.

Можно использовать в решении и геометрические рассуждения как в предыдущей задаче.

Рассмотрим простейшие уравнения и неравенства с модулем, в которых параметр находится как под знаком модуля, так и вне значка модуля. Эти уравнения и неравенства обладают свойствами первых двух видов уравнений. Соответственно, с одной стороны, в решениях будем использовать ранее использованные рассуждения, но, с другой стороны, совокупность этих рассуждений — это новая конструкция, которая может вызвать затруднения при решении задач.

Задача 10.7. Для каждого значения a решите уравнение $|x - 2a| = a - 2$.

Составим таблицу 10.7 частных решений данного уравнения при $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$ и $a = 3$.

Решения при $a = -3$ и $a = 0$ приводят неверному равенству (столбцы 2 и 3 табл. 10.7), при $a = 2$ корень один (4 столбец); при $a = 3$ два корня (5 столбец табл. 10.7).

Обобщим рассуждения и представим решение задачи.

Решение. Для нахождения корней данного уравнения $|x - 2a| = a - 2$ правая часть должна быть положительна или равна нулю. Если $a - 2 < 0$ ($a < 2$), то уравнение не имеет решений.

Таблица 10.7

Этапы рассуж-дений	Частные случаи			
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a = -3$,	$a = 0$,	$a = 2$,	$a = 3$,
То	$\lvert x+6\rvert = -5$	$\lvert x\rvert = -2$	$\lvert x-4\rvert = 0$	$\lvert x-6\rvert = 1$
Решение:	$\lvert x+6\rvert \geq 0$ и $-5 < 0$, поэтому $\lvert x+6\rvert = -5$ — неверное равенство	$\lvert x\rvert \geq 0$ и $-2 < 0$, поэтому $\lvert x\rvert = -2$ — неверное равенство	По 5-му свойству модуля числа: $x - 4 = 0$	По определению модуля числа уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-6\geq 0,\\ x-6=1;\end{cases}\\ \begin{cases} x-6<0,\\ -x+6=1;\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geq 6,\\ x=7;\end{cases}\\ \begin{cases} x<6,\\ x=5.\end{cases}\end{array}\right.$ Решениями систем являются $x = 7$ и $x = 5$.
Ответ:	нет корней	нет корней	$x = 4$	$x = 7,\ x = 5$.

Если $a - 2 \geq 0$ ($a \geq 2$), то по определению модуля числа уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2a\geq 0,\\ x-2a=a-2;\end{cases}\\ \begin{cases} x-2a<0,\\ -x+2a=a-2;\end{cases}\end{array}\right. \quad\text{или}\quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x\geq 2a,\\ x=3a-2;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases} x<2a,\\ x=a+2.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Проверим в каждой системе принадлежность полученных значений x решениям неравенств:

1) в системе (1): $3a - 2 \geq 2a$ или $a \geq 2$, т.е. при любом $a \geq 2$ значение $x = 3a - 2$ — решение системы (1);
2) в системе (2): $a + 2 < 2a$ или $a > 2$, т.е. при $a > 2$ значение $x = a + 2$ — решение системы (2).

Объединив эти решения получаем, что при $a > 2$ уравнение имеет два решения $x = 3a - 2$ и $x = a + 2$.

Отдельно рассмотрим исходное уравнение при $a = 2$, в результате получим единственный корень (подробное решение в 4-м столбце табл. 10.7).

Ответ: если $a \in (-\infty; 2)$, то нет решений; если $a = 2$, то $x = 4$; $a \in (2; +\infty)$, то $x = 3a - 2$, $x = a + 2$.

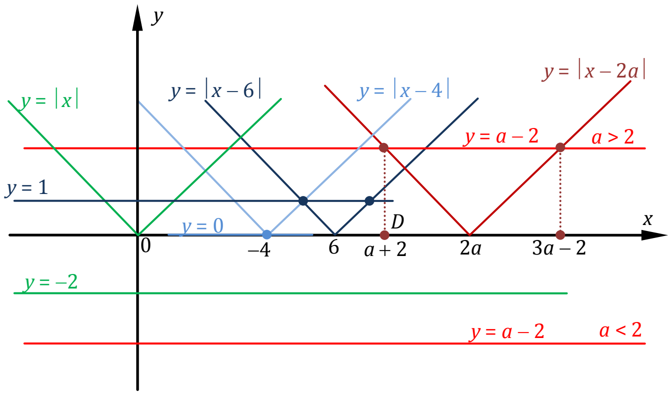


Рис. 10.7

Комментарий к задаче 10.7. Введем две функции $f(x) = |x - 2a|$ и $g(x) = a - 2$. График $f(x)$ можно получить сдвигом графика $y = |x|$ на $2a$ единиц вдоль оси абсцисс. Графиком $g(x) = a - 2$ является семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Решение уравнения — это абсциссы точек пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ (рис. 10.7).

На рисунке 10.7 изображены графики функций частных случаев, представленных в таблице 10.7 (3, 4 и 5-й столбцы табл. 10.7). На примере этих случаев показаны различные случаи расположения графиков $f(x)$ и $g(x)$.

Покажем динамически (в движении) расположения графиков относительно друг друга:

- при $a = 2$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную точку пересечения (на рис. 10.7 график $f(x) = |x - 4|$ и $g(x) = 0$);
- двигая график $f(x)$ в отрицательном направлении OX, график $g(x)$ будет соответственно двигаться в отрицательном направлении OY и, отсюда точек пересечения не будет (т.е. при уменьшении значений a графики будут друг от друга «отдаляться»);

• двигая график $f(x)$ в положительном направлении OX, график $g(x)$ будет двигаться в положительном направлении OY, соответственно, точек пересечения будет две (при увеличении значений a расстояние между точками пересечения будет увеличиваться).

Задача 10.8. Для каждого значения параметра a решите неравенство $|2x + 3a| > a + 4$.

Составим таблицу 10.8 частных решений данного неравенства при $a = -5$, $a = -4$, $a = 1$.

Решения в рассмотренных случаях различны: любое действительное x (2-й столбец); любое действительное x, кроме $x = 6$ (3-й столбец); объединение двух промежутков (4-й столбец).

Таблица 10.8

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
1	**2**	**3**	**4**
Если	$a = -5$,	$a = -4$,	$a = 1$,
То	$\lvert 2x - 15\rvert > -1$	$\lvert 2x - 12\rvert > 0$	$\lvert 2x - 3\rvert > 5$
Решение:	Поскольку $\lvert 2x - 15\rvert \geq 0$ и $-1 < 0$, то верное равенство при любых x.	Поскольку по 1 свойству $\lvert 2x - 12\rvert \geq 0$, то $\lvert 2x - 12\rvert > 0$ верно для всех x, кроме $x = 6$.	По определению модуля неравенство равносильно: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3 \geq 0,\\ 2x+3 > 5;\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3 < 0,\\ -2x-3 > 5\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq -1{,}5;\\ x > 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x < -1{,}5;\\ x < -4.\end{cases}\end{array}\right.$ Решение систем приводит к совокупности: $\left[\begin{array}{l}x > 1,\\ x < -4.\end{array}\right.$
Ответ:	любое x	$x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$	$x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

Решение. Правая часть данного неравенства $|2x + 3a| > a + 4$ в зависимости от значений параметра a, может иметь положительные, равное нулю и отрицательные значения.

Если $a + 4 < 0$ ($\underline{a < -4}$), то положительный модуль $|2x + 3a|$ меньше отрицательного $a + 4$. Отсюда при любом $a < -4$ решение уравнения — любое действительное число.

Решение неравенства при $a + 4 = 0$ ($a = -4$) представлено в 3-м столбце таблицы 10.8. Заметим, что в целом идея решения аналогична со случаем $a = -5$, но знак строго неравенства «требует» исключить из множества действительных чисел числовое значение x, при котором $|2x - 12| = 0$.

Если $a + 4 > 0$ ($\underline{a > -4}$), то по определению модуля числа данное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x + 3a \geq 0, \\ 2x + 3a > a + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 3a < 0, \\ -2x - 3a > a + 4. \end{cases}\end{array}\right.$$

После несложных преобразований неравенств совокупности получаем совокупность (1), решение которой представим на числовой прямой (рис. 10.8, a).

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq -1{,}5a, \\ x > -a + 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1{,}5a, \\ x < -2a - 2. \end{cases}\end{array}\right. \qquad (1)$$

Расположим на числовой прямой $x = -1{,}5a$, $x = -a + 2$ и $x = -2a - 2$. Пусть точка $x = -1{,}5a$ расположена левее точки $x = -a + 2$, то есть $-a + 2 > -1{,}5a$, — решим неравенство и получим $a > -4$. Вывод: при $a > -4$ точка $x = -1{,}5$ расположена левее $x = -a + 2$; при $a < -4$ соответственно $x = -1{,}5$ расположена правее $x = -a + 2$.

Аналогично определяем расположение точек $x = -1{,}5a$ и $x = -2a - 2$: при $a > -4$ точка $x = -1{,}5$ лежит правее $x = -a + 2$; при $a < -4$ — левее.

Учитывая условие $\underline{a > -4}$, получим, что при $a > -4$ возможно единственное расположение точек на числовой прямой, представленное на рис. 10.8, а.

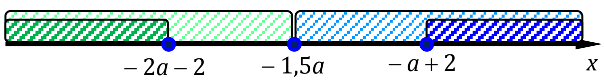


Рис. 10.8, *а*

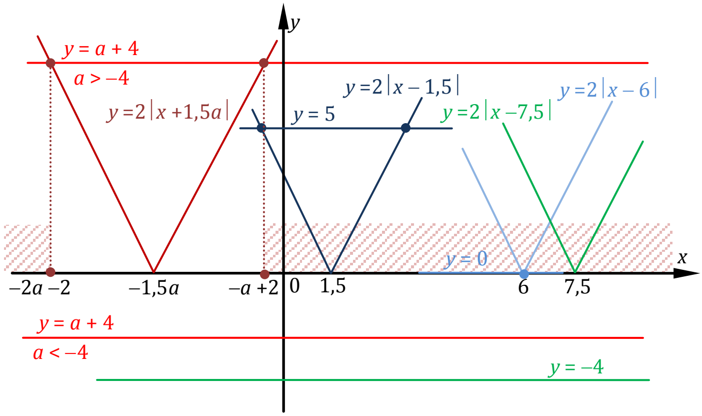


Рис. 10.8, б

Ответ: если $a \in (-\infty; -4)$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = -4$, то $x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$; если $a \in (-4; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -2a-2) \cup (-a+2; +\infty)$.

Комментарий к задаче 10.8. Введем две функции $f(x) = 2|x + 1{,}5a|$ и $g(x) = a + 4$. График функции $f(x)$ можно получить сжатием графика функции $y = |x|$ относительно OX с коэффициентом, равным 2, и его сдвигом на $-1{,}5a$ единиц вдоль оси абсцисс. График $g(x) = a + 4$ — семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Решение данного неравенства — это значения x, при которых значения $f(x)$ больше значений $g(x)$ (рис. 10.8, *б*).

- Если $a + 4 < 0$, то график $f(x)$ лежит выше $g(x)$, т.е. при всех $a < 4$ решение неравенства — любое действительное значение x.
- Если $a + 4 = 0$, то график $f(x)$ пересекаются с $g(x)$ в точке (6; 0), и при всех остальных x значения $f(x)$ больше значений $g(x)$.
- Если $a + 4 > 0$, графики функций пересекаются в точках $(-2a-2; a+4)$ и $(-a+2; a+4)$. График $f(x)$ лежит выше $g(x)$ на промежутках $x \in (-\infty; -2a-2) \cup (-a+2; +\infty)$.

Задача 10.9. Решите неравенство $|2 + a - x| \le 2a$ для каждого значения параметра a.

Составим таблицу 10.9 частных решений данного неравенства при $a = -2$, $a = 0$ и $a = 2$.

Решение. По 2-му свойству приведем данное неравенство $|2 + a - x| \le 2a$ к виду:

$$|x - 2 - a| \le 2a. \tag{1}$$

Таблица 10.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
1	**2**	**3**	**4**
Если	$a = -2,$	$a = 0$	$a = 2,$
То	$\|-x\| \le -4$	$\|2 - x\| \le 0$	$\|4 - x\| \le 4$
Решение:	По 1-му свойству $\|-x\| \ge 0$, а $-4 < 0$, поэтому $\|-x\| < -4$ — неверное равенство	По 1-му свойству $\|2 - x\| \ge 0$, а по условию $\|2 - x\| \le 0$, поэтому $a > -4$ единственное решение $\|2 - x\| = 0$. По 5-му свойству модуля $2 - x = 0$.	По 2-му свойству модуля числа: $\|4 - x\| = \|x - 4\|$. Тогда по 4-му свойству модуля: $-4 < x - 4 < 4$, $0 < x < 8$
Ответ:	нет корней	$x = 2$	$x \in (0; 8)$

Модуль в неравенстве (1) может быть меньше положительного числа или равен нулю, поэтому при $a < 0$ неравенство не имеет решений. При $a \ge 0$ неравенство (1) равносильно неравенству:

$$-2a \le x - 2 - a \le 2a. \tag{2}$$

После несложных преобразований неравенства (2) получим:

$$2 - a \le x \le 3a + 2.$$

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то нет решений; если $a \in [0; +\infty)$, то $x \in [2 - a; 3a + 2]$.

Задачи для самостоятельного решения

10.10. Решите уравнение $|x| = -a$ с параметром a.

10.11. Для каждого значения параметра a решите неравенство $|3x - a| > 6$.

10.12. При всех значениях параметра a решите неравенство $|x - a| \leq a - 2$.

Ответы

10.10. если $a \in (-\infty; 0]$, то $x = \pm a$; если $a \in (0; +\infty)$, то нет решений;

10.11. если $a \in (-\infty; +\infty)$, то $x \in (-\infty; \frac{a-6}{3}) \cup (\frac{a+6}{3}; +\infty)$;

10.12. если $a \in (-\infty; 2)$, то нет решений; если $a = 2$, то $x = a$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in [2; 2a - 2]$.

§ 11. Решение «непростейших» уравнений и неравенств

Представляем Вашему вниманию примеры решений задач с параметрами, которые не относятся к рассмотренным видам простейших уравнений и неравенств.

Задача 11.1. При каждом значении параметра a решите уравнение $\frac{x^2-49}{x+a}=0$.

Рассмотрим частные случаи при $a=5$, $a=-2$ (2 и 3 столбцы табл. 11.1). В том и другом случае в ответах получаем значения переменной 7 и −7. Но в то же время аналогичные значения мы встречаем при разложении знаменателя на множители, поэтому необходимо рассмотреть частные случаи уравнения при $a=7$, $a=-7$ (4 и 5 столбцы табл. 11.1).

Таблица 11.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**			
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Если	$a=5$,	$a=-2$,	$a=7$,	$a=-7$,
То	$\frac{x^2-49}{x+5}=0$	$\frac{x^2-49}{x-2}=0$	$\frac{x^2-49}{x+7}=0$	$\frac{x^2-49}{x-7}=0$
Уравнение:	дробно-рациональное			
Разложим на множители числитель:	$\frac{(x-7)(x+7)}{x+5}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x-2}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x+7}=0$, $x-7=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x-7}=0$, $x+7=0$
Ответ:	$x=7, x=-7$	$x=7, x=-7$	$x=7$	$x=-7$

Решение. Разложим числитель левой части уравнения на множители и получим $\frac{(x-7)(x+7)}{x+a}=0$. Числитель левой части данного уравнения обращается в ноль при $x=7$ и $x=-7$, а знаменатель не может быть равен нулю, то есть $x\neq -a$. Тогда при $a=7$ и $a=-7$

уравнение будет не удовлетворять условию $x \neq -a$, поэтому отдельно рассмотрим три случая:

1. если $a \neq 7$, $a \neq -7$, то получим два решения уравнения $x = 7$ и $x = -7$;
2. если $a = 7$, то одно решение — $x = 7$ (столбец 4 табл. 11.1);
3. если $a = -7$, то $x = -7$ (столбец 5 табл. 11.1).

Ответ: если $a = 7$, то $x = 7$; если $a = -7$, то $x = -7$; если $a \in (-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$, то $x = 7$, $x = -7$.

Задача 11.2. При всех a решите уравнение

$$a^2 - \frac{a^2 - 1}{2x - x^2} = \frac{x + 2}{x - 2}.$$

Рассмотрим решение только одного частного случая при $a = 2$, который дает представление о методе решения дробно-рационального уравнения с параметром. При решении уравнения

$$4 - \frac{3}{2x - x^2} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

при $a = 2$ выделяем следующие этапы решения:

- приведение к общему знаменателю,
- приведение подобных членов,

$$\frac{3x^2 - 10x + 3}{x\,(x - 2)} = 0;$$

- нахождение области допустимых значений x,

$$\text{О. Д. З.: } x \neq 0,\ x \neq 2;$$

- решение квадратного уравнения через дискриминант,

$$3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 16,\ \ x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{3};$$

- проверка принадлежности корней квадратного уравнения области допустимых значений,

$$x_1 \neq 0,\ x_1 \neq 2,\ x_2 \neq 0,\ x_2 \neq 2;$$

- формирование ответа.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Все эти этапы полностью соответствуют этапам решения в общем виде.

Таблица 11.2

Этапы рассуждений	**Решение уравнения** $a^2 - \dfrac{a^2-1}{2x-x^2} = \dfrac{x+2}{x-2}$		
Если	$a = 1, a = -1,$	$a = 3, a = -3,$	$a \neq 1, a \neq -1, a \neq 3, a \neq -3,$
То	$1 = \dfrac{x+2}{x-2}$	$9 - \dfrac{8}{2x-x^2} = \dfrac{x+2}{x-2}$	$a^2 - \dfrac{a^2-1}{2x-x^2} = \dfrac{x+2}{x-2}$
Уравнение:	неверное равенство	дробно-рациональное	
Решение:	Если дробь равна единице, то числитель равен знаменателю: $x - 2 = x + 2$, или $-2 = 2$ — неверное числовое равенство, т.е. уравнение $1 = \dfrac{x+2}{x-2}$ не имеет корней.	Приведем к общему знаменателю и приведем подобные члены: $\dfrac{2x^2-5x+2}{x(x-2)} = 0.$ О. Д. З.: $x \neq 0, x \neq 2.$ Решим уравнение: $2x^2 - 5x + 2 = 0,$ $D = 9,$ $x_1 = 2, x_2 = \dfrac{1}{2}.$ Проверим принадлежность корней О. Д. З.: $x_1 \neq 0,\ x_1 = 2,$ $x_2 \neq 0,\ x_2 \neq 2.$	Приведем к общему знаменателю и приведем подобные члены в числителе: $\dfrac{(a^2-1)x^2 - 2(a^2+1)x + (a^2-1)}{x(x-2)} = 0.$ О. Д. З.: $x \neq 0, x \neq 2.$ Найдем решения уравнения: $(a^2-1)x^2 - 2(a^2+1)x + (a^2-1) = 0,$ $\dfrac{D}{4} = (a^2+1)^2 - (a^2-1)^2 = 4a^2,$ $x_1 = \dfrac{a^2+1-2a}{a^2-1} = \dfrac{a-1}{a+1},$ $x_2 = \dfrac{a^2+1+2a}{a^2-1} = \dfrac{a+1}{a-1}.$ Проверим принадлежность корней О. Д. З.: 1) $x_1 \neq 0,\ \dfrac{a-1}{a+1} \neq 0, a \neq 1;$ 2) $x_1 \neq 2,\ \dfrac{a-1}{a+1} \neq 2, a \neq -3;$ 3) $x_2 \neq 0,\ \dfrac{a+1}{a-1} \neq 0, a \neq -1;$ 4) $x_2 \neq 2,\ \dfrac{a+1}{a-1} \neq 2, a \neq 3.$
Ответ:	нет корней	$x = \dfrac{1}{2}$	$x_1 = \dfrac{a-1}{a+1},\ x_2 = \dfrac{a+1}{a-1}$

Решение. Особенность этого примера в том, что параметр в уравнении всегда в квадрате. Это показывает то, что ответы при $a = m$ и $a = -m$ всегда будут одинаковы.

Обратите внимание, что особые случаи при $a = 1$, $a = -1$ можно определить еще до решения уравнения с параметром, а случаи при $a = 3$, $a = -3$ возникают после проверки принадлежности области допустимых значений x (О. Д. З.). Поэтому «$a \neq 3$, $a \neq -3$» мы дописали в строку «Если» уже после решения в общем виде. Соответственно особый случай при $a = 3$, $a = -3$ был решен в последнюю очередь.

Ответ: если $a = -3$, $a = 3$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a = -1$, $a = 1$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 1)\ ) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$; $x_2 = \frac{a-1}{a+1}$.

Задача 11.3. Найдите все значения a такие, что уравнение $|x + 3| - 1 = |2x - a|$ имеет единственное решение.

Решение. Введем функции $f(x) = |x + 3| - 1$ и $g(x) = |2x - a|$. Найдем такие значения параметра a, при которых графики функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются ровно в одной точке.

Исследуем функции $f(x)$ и $g(x)$.

График $f(x)$ получен сдвигом графика элементарной функции $y = |x|$ на 3 единицы влево вдоль оси OX и на 1 единицу вниз вдоль оси OY, и значит, точка $(-3; -1)$ — точка минимума (рис. 11.3). Нули функции $(-4; 0)$ и $(-2; 0)$.

Запишем функцию $g(x)$ в виде $g(x) = 2\left|x - \frac{a}{2}\right|$, ее график также получен преобразованиями графика $y = |x|$:

1) сжатием графика относительно оси абсцисс с коэффициентом, равным 2;

2) сдвигом вдоль оси абсцисс на $\frac{a}{2}$ единиц вправо (если $a > 0$) или влево (если $a < 0$) (рис. 11.3).

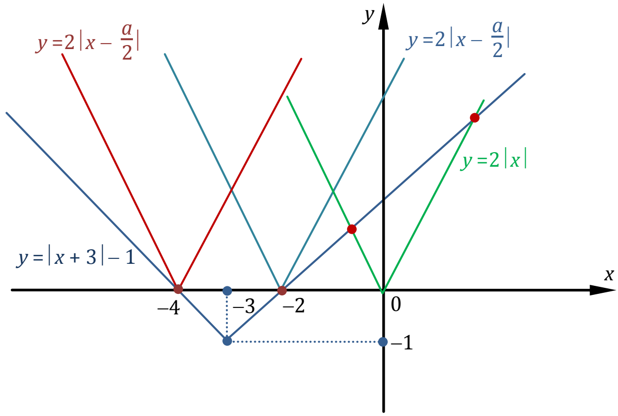


Рис. 11.3

При движении графика $y = g(x)$ вдоль оси OX на интервалах $(-\infty; -4)$ и $(-2; +\infty)$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ будут иметь две точки пересечения (на рис. 11.3 изображен график $g(x)$ при $a = 0$); на интервале $(-2; -4)$ — не будут иметь точек пересечения; при $x = -2$ и $x = -4$ — одну общую точку (вершина графика $g(x)$ лежит на графике $f(x)$). Тогда единственное решение уравнение $f(x) = g(x)$ будет иметь при $\frac{a}{2} = -2$ и $\frac{a}{2} = -4$, т.е. $a = -4$ и $a = -8$.

Ответ: –4, –8.

Напоминание: Сделайте проверку ответа, то есть решите в частных случаях данное уравнение с параметром ($|x + 3| - 1 = |2x + 4|$, $|x + 3| - 1 = |2x + 8|$).

Задача 11.4. Найдите все значения a такие, что для любого x выполняется $2x + 2|x - a| + |x - 1| > 3$.

Обратимся к частным случаям при $a = -1$ и $a = 2$ (табл. 11.4.1). Если в результате решения получим любое действвительное x, то это значение параметра a будет входить в решение данного неравенства.

Таблица 11.4.1

Этапы рассуждений	**Частные случаи**	
1	**2**	**3**
Если	$a = -1$,	$a = 2$,
То	$2x + 2\lvert x+1\rvert + \lvert x-1\rvert > 3$	$2x + 2\lvert x-2\rvert + \lvert x-1\rvert > 3$
Неравенство равносильно совокупности систем:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -1, \\ 2x - 2(x+1) - (x-1) > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 2x + 2(x+1) - (x-1) > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ 2x + 2(x+1) + (x-1) > 3. \end{cases}\end{array}\right.$ Преобразуем неравенства: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -1, \\ x < -4; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x > 0{,}4. \end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x < -4, \\ 0 < x \le 1, \\ x > 1. \end{array}\right.$ После объединения промежутков получим, что $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2, \\ 2x + 2(x-2) + (x-1) > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ 2x - 2(x-2) + (x-1) > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ 2x - 2(x-2) - (x-1) > 3. \end{cases}\end{array}\right.$ Преобразуем неравенства: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2, \\ x > 1{,}6; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x < 2. \end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x > 2, \\ 1 \le x \le 2, \\ x < 1. \end{array}\right.$ После объединения промежутков получим, что $x \in (-\infty; +\infty)$.
Ответ:	при $a = -1$ неравенство <u>не выполняется</u> для любого x	при $a = 2$ неравенство <u>выполняется</u> для любого x

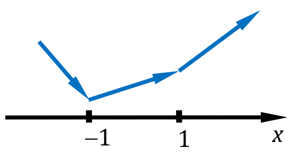
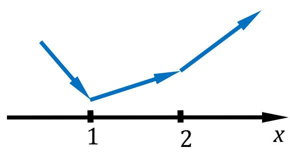
При $a = -1$ для решения необходимо рассмотреть три случая: $x < -1$, $-1 \le x \le 1$ и $x > 1$ (столбец 2 табл. 11.4.1). В результате решения объединение полученных промежутков x не дает множество действительных чисел.

При $a = 2$ решение неравенства показано в 3-м столбце таблицы 11.4.1. В результате получили, что неравенство имеет решением любое действительное x.

В частных случаях представлено аналитическое решение неравенства. Аналогично можно решать неравенство с параметром, но это будет не рациональный способ решения, поскольку придется решить две совокупности с тремя системами неравенств с параметром. Поэтому решим данную задачу функционально-графическим методом. Для сравнения покажем решение тех же частных случаев функционально-графическим методом.

Сначала введем функцию $f(x) = 2x + 2\lvert x - a\rvert + \lvert x - 1\rvert$ и покажем, будет ли график функции при $a = -1$ и $a = 2$ лежать выше прямой $y = 3$ (табл. 11.4.2).

Таблица 11.4.2

Этапы рассуждений	**Частные случаи**	
1	**2**	**3**
Если	$a = -1$,	$a = 2$,
То	$f(x) = 2x + 2\lvert x + 1\rvert + \lvert x - 1\rvert$	$f(x) = 2x + 2\lvert x - 2\rvert + \lvert x - 1\rvert$
Раскроем знаки модуля при различных значениях x:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < -1,\\ f(x) = -x - 1;\end{cases}\\ \begin{cases}-1 \le x \le 1,\\ f(x) = 3x + 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1,\\ f(x) = 5x + 1.\end{cases}\end{array}\right.$ Покажем промежутки возрастания и убывания на числовой прямой:  Минимум функции находится в точке с абсциссой $x = -1$. Если $f(-1) > 3$ — верное неравенство, то график функции лежит выше $y = 3$. $f(-1) = 0$ и $0 < 3$, поэтому су-	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < 1,\\ f(x) = -x + 5;\end{cases}\\ \begin{cases}1 \le x \le 2,\\ f(x) = x + 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 2,\\ f(x) = 5x - 5.\end{cases}\end{array}\right.$ Покажем промежутки возрастания и убывания на числовой прямой:  Минимум функции находится в точке с абсциссой $x = 1$. Если $f(1) > 3$ — верное неравенство, то график функции лежит выше $y = 3$. $f(1) = 4$ и $4 > 3$, поэтому все

	ществуют значения функции меньшие 3.	значения функции больше 3.
Ответ:	при $a = -1$ неравенство не выполняется для любого x	при $a = 2$ неравенство выполняется для любого x

Решение. Введем функцию $f(x) = 2x + 2|x - a| + |x - 1|$ и найдем такие значения параметра a, что все значения $f(x)$ будут больше 3 (соответственно, график функции должен лежать выше прямой $y = 3$).

1. Если $x > 1$, то $f(x) = 3x - 1 + 2|x - a|$. Обратим внимание на то, что при любом значении модуля $f(x)$ будет возрастающей функцией. А именно:
   1.1. если $\underline{x - a < 0}$ $(x < a)$, то $f(x) = x - 1 + 2a$ — возрастающая;
   1.2. если $\underline{x - a \geq 0}$ $(x \geq a)$, то $f(x) = 5x - 1 - 2a$ — возрастающая.
2. Если $x \leq 1$, то функция примет вид $f(x) = x + 1 + 2|x - a|$. В этом случае:
   2.1. если $\underline{x - a < 0}$ $(x < a)$, то $f(x) = -x + 1 + 2a$ — убывающая функция;
   2.2. если $\underline{x - a \geq 0}$ $(x \geq a)$, то $f(x) = 3x + 1 - 2a$ — возрастающая.

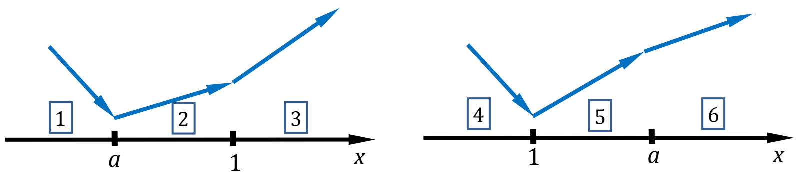


Рис. 11.4

Обобщим вышеизложенное и изобразим схематически возрастание и убывание функции на числовой прямой OX (рис. 11.4). Для этого необходимо рассмотреть два случая: $a < 1$ и $a > 1$. Тогда промежутки показанные на числовой прямой соответствуют случаям: $\boxed{1}$ и $\boxed{4}$ — случаю 2.1, $\boxed{3}$ и $\boxed{6}$ — случаю 1.2, $\boxed{2}$ — случаю 2.2, $\boxed{5}$ — случаю 1.1.

Значит, минимальное значение функция принимает либо в точке с абсциссой $x = 1$, либо $x = a$. Тогда значения $f(x)$ будут больше 3, если минимум функции больше 3, то есть $f(a) > 3$ и $f(1) > 3$. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} f(a) > 3, \\ f(1) > 3; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2a + |a-1| > 3, \\ 2 + 2|1-a| > 3. \end{cases}$$

Приведем систему к виду: $\begin{cases} |a-1| + 2a > 3, \\ |a-1| > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решим систему:

1. Если $a > 1$, то $\begin{cases} a - 1 + 2a > 3, \\ a - 1 > \frac{1}{2}. \end{cases}$ После несложных преобразований получим систему неравенств $\begin{cases} a > \frac{4}{3}, \\ a > \frac{3}{2} \end{cases}$ или $a > 1{,}5$.

2. Если $a \le 1$, то $\begin{cases} -a + 1 + 2a > 3, \\ -a + 1 > \frac{1}{2}. \end{cases}$ После преобразований получим $\begin{cases} a > 2, \\ a < \frac{1}{2}, \end{cases}$ или система не имеет решений.

Ответ: $a \in (1{,}5;\ +\infty)$.

Задача 11.5. Решите уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ при различных значениях параметра a.

В данном иррациональном уравнении присутствует два корня $\sqrt{x+a}$ и $\sqrt{x}$, параметр присутствует как под знаком радикала, так и вне знака. Поэтому при возведении правой и левой частей уравнения в квадрат необходимо учитывать несколько условий, которые сначала выделим при решении частных случаев данного уравнения при $a = 4$ и $a = -3$ (табл. 11.5).

При $a = 4$ учитываем следующие условия: поскольку $\sqrt{x+4} \geq 0$, то $4 - \sqrt{x} \geq 0$; подкоренные выражения $x + 4 \geq 0$, $x \geq 0$.

При $a = -3$ одна часть уравнения положительна, а вторая — отрицательна при любом x, поэтому оно не имеет корней (3-й столбец табл. 11.5).

При $a = 0$ получаем единственное решение.

Таблица 11.5

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
1	**2**	**3**	**4**
Если	$a = 4$,	$a = -3$,	$a = 0$,
То	$\sqrt{x+4} = 4 - \sqrt{x}$	$\sqrt{x-3} = -3 - \sqrt{x}$	$\sqrt{x} = -\sqrt{x}$
Уравнение:	иррациональное		
Решение:	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 4 - \sqrt{x} \geq 0, \\ x + 4 = (4 - \sqrt{x})^2. \end{cases}$ Преобразуем неравенства и уравнение: $\begin{cases} x \geq -4, \\ x \geq 0, \\ 0 \leq x \leq 16, \\ x = 2\frac{1}{4}. \end{cases}$ Решение уравнения системы покажем ниже: $x + 4 = 16 + x - 8\sqrt{x}$, $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$, $x = \frac{9}{4}$. Решением неравенств системы является $x \in [0; 16]$. $2{,}25 \in [0; 16]$.	$\sqrt{x-3} \geq 0$ и $-3 - \sqrt{x} < 0$, поэтому $\sqrt{x-3} = -3 - \sqrt{x}$ — неверное равенство.	$\sqrt{x} \geq 0$ и $-\sqrt{x} \leq 0$, поэтому $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ имеет решение только при $x = 0$.
Ответ:	$x = 2{,}25$	нет корней	$x = 0$

Эти рассуждения повторим в решении уравнения с параметром.

Решение. При $a < 0$ правая часть данного уравнения $a - \sqrt{x} < 0$, в тоже время левая часть уравнения $\sqrt{x+a} \geq 0$. Таким образом, данное уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ при $a < 0$ не имеет смысла, и, следовательно, не имеет корней.

При $a = 0$ уравнение имеет единственное решение (4 столбец табл. 11.5).

Если параметр $a > 0$, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a - \sqrt{x} \geq 0, \\ x + a = (a - \sqrt{x})^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Покажем решение уравнения системы (1):

$$x + a = (a - \sqrt{x})^2,$$

$$x + a = a^2 + x - 2a\sqrt{x},$$

$$2a\sqrt{x} = a^2 - a.$$

Поскольку $a > 0$, то разделим обе части полученного уравнения на a и получим $2\sqrt{x} = a - 1$. Правая часть полученного уравнения должна быть неотрицательной, поэтому оно равносильно системе:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ (2\sqrt{x})^2 = (a-1)^2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \geq 1, \\ x = \frac{(a-1)^2}{4}. \end{cases}$$

Преобразуем неравенства системы (1) и учтем решение уравнения:

$$\begin{cases} x \geq -a, \\ x \geq 0, \\ 0 \leq x \leq a^2, \\ a \geq 1, \\ x = \frac{(a-1)^2}{4}. \end{cases}$$

Решение первых трех неравенств системы можно записать в виде $0 \leq x \leq a^2$. Поэтому необходимо проверить принадлежность корня $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ решению неравенства, то есть найти значения параметра a удовлетворяющие неравенству:

$$0 \le \frac{(a-1)^2}{4} \le a^2 \text{ или } (a-1)^2 \le (2a)^2.$$

Получим неравенство $(2a)^2 - (a-1)^2 \ge 0$, в решении которого используем формулу сокращенного умножения $(2a - a + 1)(2a + a - 1) \ge 0$. Приведя подобные члены, получим неравенство $(a+1)(a-\frac{1}{3}) \ge 0$, решение которого $a \in (-\infty; -1) \cup (1/3; +\infty)$. Учитывая все условия, налагаемые на параметр a, получим, что при $a \in [1; +\infty)$ корень уравнения — $x = \frac{(a-1)^2}{4}$.

Ответ: если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то нет корней; если $a \in [1; +\infty)$, то $x = \frac{(a-1)^2}{4}$.

Задача 11.6. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 7x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Найдем число точек максимума при $a = -3$, $a = 0$ и $a = 2$ (табл. 11.6).

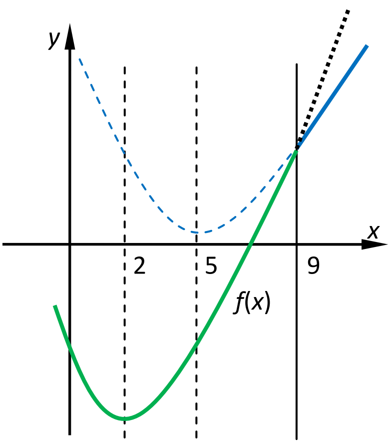


Рис. 11.6, *а*

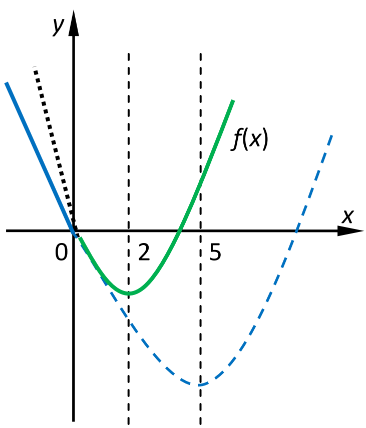


Рис. 11.6, *б*

Таблица 11.6

Этапы рассуждений	**Частные случаи**		
Если	$a = -3$,	$a = 0$,	$a = 2$,
то функция примет вид	$f(x) = x^2 - 3\lvert x - 9\rvert - 7x$	$f(x) = x^2 - 3\lvert x\rvert - 7x$	$f(x) = x^2 - 3\lvert x - 4\rvert - 7x$
Функция	квадратичная при любом раскрытии знака модуля.		
График $f(x)$ —	состоит из двух кусков парабол, ветви которых направлены вверх.		
1 *случай* (выражение под знаком модуля положительно):	Если $x - 9 \geq 0$, то $f(x) = x^2 - 10x + 27$.	Если $x \geq 0$, то $f(x) = x^2 - 10x$.	Если $x - 4 \geq 0$, то $f(x) = x^2 - 10x + 12$.
Вершина параболы имеет координаты:	$x_0 = 5$, $y_0 = 3$.	$x_0 = 5$, $y_0 = -25$.	$x_0 = 5$, $y_0 = -13$.
Для абсциссы вершины параболы $f(x)$	не выполняется $x - 9 \geq 0$.	выполняется $x \geq 0$.	выполняется $x - 4 \geq 0$.
2 *случай* (выражение под знаком модуля положительно):	Если $x - 9 < 0$, то $f(x) = x^2 - 4x - 27$.	Если $x < 0$, то $f(x) = x^2 - 4x$.	Если $x - 4 < 0$, то $f(x) = x^2 - 4x - 12$.
Вершина параболы имеет координаты:	$x_0 = 2$, $y_0 = -31$	$x_0 = 2$, $y_0 = -4$	$x_0 = 2$, $y_0 = -16$
Для абсциссы вершины параболы $f(x)$	выполняется $x - 9 < 0$.	не выполняется $x < 0$.	выполняется $x - 4 < 0$.
Построим график	Рис. 2.1.	Рис. 2.2.	Рис. 2.3.
Вывод: функция $f(x)$	не имеет точек максимума.	Не имеет точек максимума.	Имеет 1 точку максимума в точке с абсциссой $x = 4$.
Ответ:	—	—	при $a = 2$ функция имеет хотя бы одну точку максимума.

Проанализировав частные случаи, показывающие графики функции при различных значениях параметра, легко выдвинуть гипотезу о том, что максимум возможен, если график функции имеет вид с рисунка 11.6, *в*, то есть $2 < a^2 < 5$.

Решение задачи проведем по аналогии с решениями частных случаев.

*Решение***.** Рассмотрим два случая (в соответствии с определением модуля):

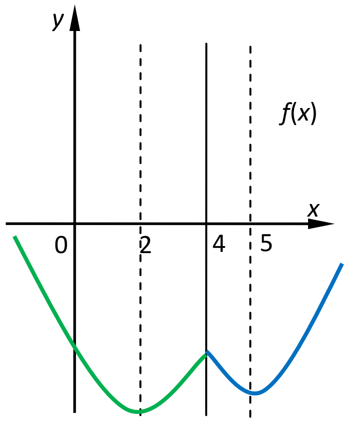


Рис. 11.6, *в*

<u>1-ый случай.</u> Если $x - a^2 \geq 0$, функция примет вид: $f(x) = x^2 - 10x + 3a^2$ (на графике область определения этого случая правее прямой $x = a^2$). Координаты вершины: $x_0 = 5$, $y_0 = 3a^2 - 25$.

<u>2-ой случай.</u> Если $x - a^2 < 0$, функция примет вид: $f(x) = x^2 - 4x - 3a^2$ (на графике область определения этого случая левее прямой $x = a^2$). Координаты вершины: $x_0 = 2$, $y_0 = -3a^2 - 4$.

По определению максимума функции следует, что значения функции по мере возрастания значений x должны возрастать до точки максимума, а потом убывать. Если $x \in (-\infty; 2)$, то значения функции в обоих случаях возрастают; если $x \in (2; 5)$, то в первом случае — функция $f(x)$ возрастает, а во втором — убывает; если $x \in (5; +\infty)$, то значения функции в обоих случаях убывают. Таким образом, если критическая точка функции с абсциссой a^2 находится между абсциссами вершин парабол графиков функций $f(x) = x^2 - 10x + 3a^2$ и $f(x) = x^2 - 4x - 3a^2$, то точка максимума одна; иначе точки максимума не будет. Следовательно, решение неравенства $2 < a^2 < 5$ приведет к искомому ответу.

Ответ: $a \in (-\sqrt{5}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{5})$.

Литература

1. Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / *Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова*; Под ред. С.А. Теляковского. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 1996. — 239 с.
2. *Болтянский В. Г.* Фигурная скобка в определении модуля // Математика в школе. — 1976. — № 6. — С. 47-48.
3. *Горнштейн П. И.* Задачи с параметрами / *П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир*. — Киев, 1992. — 336 с.
4. *Козко А. И., Чирский В. Г.* Задачи с параметром и другие сложные задачи. — М.:МЦНМО, 2007. — 296 с.
5. *Кочагин В.* Курс «Уравнения и неравенства с параметрами» // Математика. — 2002. — № 33. — С.24-26.
6. *Маргулис А. Я.* Внимание: в уравнении — параметр!/ *А. Я. Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский*// Квант. — 1970. — № 9. — С. 19-25.
7. *Виленкин Н. Я.* Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 8 кл. с углубл. изучением математики/ *Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др.* — М.: Просвещение, 2001. — 256 с.
8. Математика: алгебра. Функции. Анализ данных: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений /[Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2005. — 287 с.
9. *Мордкович А. Г. и др*. Алгебра. 8 кл: Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / *А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская.* — 5-е изд. — М.: Мнемозина, 2003. — 239 с.
10. *Фалилеева М. В.* Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4 (часть 5). – С. 1230-1235.
11. *Фалилеева М. В.* Частные случаи и задачи с параметрами // Магариф (Просвещение). – Казань, 2012. – № 11, С. 52-55.
12. *Фалилеева М. В.* Частные случаи при решении уравнений и неравенств с параметрами // Математика. Методический журнал для учителей математики. М: Издательский дом «Первое сентября», 2011. — № 14, С. 4-11.