КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра высшей математики и математического моделирования

А.М. НИГМЕДЗЯНОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ 1: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2014

УДК 514.7
ББК В 22.1

Принято на заседании кафедры высшей математики и математического моделирования
Протокол № 19 от 8 июля 2014 года

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук,
доцент кафедры теории относительности и гравитации, КФУ
С.В. Сушков;

Нигмедзянова А.М.
Дифференциальная геометрия. Часть 1: Дифференциальная геометрия кривых. / А.М. Нигмедзянова. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 56 с.

Методическое руководство содержит основные сведения по дифференциальной геометрии, а также задачи для аудиторной, домашней и самостоятельной работы. Упражнения для аудиторной работы сопровождаются подробными решениями.

Настоящее учебно-методическое руководство адресовано, в первую очередь, студентам таких специальностей, как «Математика, информатика и информационные технологии», «Математика и иностранный язык (английский)» и т.д., а также широкому кругу читателей, интересующихся данной тематикой.

Методические указания

В данном учебном пособии рассматривается «Дифференциальная геометрия кривых». Материал каждой темы разбит на три части. В первой части приводятся основные определения, теоремы, свойства и т.д. Для студента эта часть может играть роль краткого конспекта лекций при подготовке к зачету или экзамену, или при решении задач, заданных на самостоятельную работу. Преподаватель, проводящий практическое занятие по одной из указанных тем, может использовать приведенный в учебном пособии теоретический материал для повторения в аудитории основных определений и свойств, необходимых для решения задач. Вторая часть содержит упражнения для аудиторной работы. Их можно рекомендовать преподавателям для разбора на занятиях. Упражнения сопровождаются подробными решениями, они могут быть использованы также студентами для самостоятельного освоения изучаемой темы. Третья часть содержит задачи для домашней и самостоятельной работы студентов. Кроме того, преподаватель может использовать задачи из этой части для составления контрольных заданий.

<u>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ</u>

Тема 1. Способы задания кривых в E_2 и E_3

Зададим плоскую кривую.

<u>Определение.</u> Если вектор-функция $r : I \to E_2,\ t \to r(t)$ является параметризацией линии или кривой, то равенство

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.1}$$

называется *векторным уравнением линии (кривой).*

<u>Определение</u>. Если $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ относительно прямоугольных декартовых координат $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ в E_2, то уравнение (1.1) равносильно двум *параметрическим уравнениям*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Частным случаем параметрического задания (1.2) является *явное задание линии (кривой*)

$$y = f(x). \tag{1.3}$$

<u>Определение</u>. Исключая параметр из уравнений кривой (1.2), мы можем перейти к соотношению вида

$$F(x, y) = 0\ , \tag{1.4}$$

которое называется *неявным уравнением плоской кривой***.**

Вместо декартовых прямоугольных координат можно использовать и полярные координаты.

<u>Определение.</u> Если вектор-функция $r : I \to E_3,\ t \to r(t)$ является параметризацией линии или кривой, то равенство

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.5}$$

называется *векторным уравнением линии (кривой).*

Определение. Если кривая $r: I \to E_3,\ t \to r(t)$ задана в трехмерном евклидовом пространстве, то, вводя декартову систему координат $R\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, для *координатно-параметрического вида* задания кривой получим

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Исключая параметр *t* из формул (1.6) получим два уравнения

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}, \tag{1.7}$$

где векторы $\operatorname{grad}\varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi)$ и $\operatorname{grad}\psi = (\partial_x \psi, \partial_y \psi, \partial_z \psi)$ неколлинеарны.

Таким образом, неявное уравнение пространственной кривой определяется двумя уравнениями, каждое из этих уравнений описывает некоторую поверхность в пространстве. Поэтому это уравнение кривой называют еще и уравнением кривой, заданной в виде пересечения двух поверхностей.

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. Записать уравнение кривой в неявном виде.

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}t \\ y = b\,\mathrm{sh}t \end{cases}.$$

Решение. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = ch^2 t - sh^2 t = 1$. Значит, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Пример 2. Записать уравнение кривой в неявном виде

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases}.$$

Решение. Для решения задачи необходимо исключить параметр t из системы уравнений. Сложим первое и третье уравнения системы, результат возведем в квадрат: $x^2 + 2xz + z^2 - 36t^2 = 0$. Согласно второму уравнению системы $t^2 = \frac{1}{3}y$, тогда имеем

$$x^2 + 2xz + z^2 - 12xy = 0.$$

Вычитая из третьего уравнения системы первое уравнение и возводя его в квадрат, имеем $27z^2 - 54xz + 27x^2 - 108t^6 = 0$. Сделав замену $t^6 = \frac{1}{27}y^2$, получим

$$27z^2 - 54xz + 27x^2 - 4y^3 = 0$$

Итак, уравнение кривой в неявном виде

$$\begin{cases} x^2 + 2xz + z^2 - 12xy = 0 \\ 27z^2 - 54xz + 27x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+z)^2 - 12xy = 0 \\ 27(x-z)^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}.$$

Пример 3. Записать уравнение кривой в параметрическом виде.

$$\begin{cases} x^2 = 2z \\ 2y^2 + z^2 = 6 \end{cases}.$$

Решение. Данные уравнения определяют поверхности второго порядка: параболический и эллиптический цилиндры.

Кривая расположена на полупространстве $z > 0$. Преобразуем второе уравнение

$$\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$

Тогда можно ввести параметр t: .

Подставляя $z=\sqrt{6}\cos t$ в первое уравнение, находим $x=2\sqrt{3\cos t}$.

Итак, уравнение кривой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=2\sqrt{3\cos t} \\ y=\sqrt{3}\sin t \\ z=\sqrt{6}\cos t \end{cases}.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Напишите уравнение плоской фигуры, состоящей из всех точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 ($|F_1F_2|=2b$) есть величина постоянная, равная a^2 (овалы Кассини).

2. Дана окружность с диаметром OA длины $2a$ и касательная к ней в точке A. Через точку O проведен луч OC, и на нем отложен отрезок OM, конгруэнтный отрезку BC, заключенному между окружностью и касательной AB. При вращении луча OC вокруг точки O точка M движется по траектории, которая называется циссоидой Диоклеса. Составьте уравнение этой траектории.

3. Отрезок AB постоянной длины $2a$ скользит своими концами по осям прямоугольной системы координат xOy. Из начала координат к прямой AB проведен перпендикуляр OM. Составьте уравнение фигуры, образованной точками M (четырехлепестковая роза).

4. Отрезок AB постоянной длины a скользит своими концами по осям прямоугольной системы координат. Прямые AC и BC, параллельные координатным осям, пересекаются в точке C, из которой проведен

перпендикуляр CM к прямой AB. Напишите уравнение фигуры, состоящей из точек M. (астроида).

5. Дана кривая

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = t^2 - 2 \end{cases}.$$

Лежат ли на ее образе точки $M(-1,-1)$, $N(4,2)$, $P(1,2)$? Найдите точки пересечения кривой с координатными осями. Запишите неявное уравнение кривой.

6. Найдите неявные уравнения следующих кривых

a) $x = t^2 - t + 1,\ y = t^2 + t + 1.$

b) $x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1$

c) $x = a\sin^2 t,\ y = b\cos^2 t$

d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$

e) $x = 3^t + 3^{-t},\ y = 3^t - 3^{-t}$

f) $x = \dfrac{a-t}{a+t},\ y = \dfrac{t}{a+t}$

g) $x = a\,\mathrm{ch}t,\ y = a\,\mathrm{sh}t,\ z = at$

h) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$

7. Укажите, какие линии задаются в полярных координатах следующими уравнениями:

a) $r = 4$;

b) $r = 2a\cos\varphi$;

c) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$;

е) $r = \dfrac{b}{\sin\varphi}$.

8. Представьте кривую $x = t,\ y = t^2,\ z = e^t$ в виде пересечения двух поверхностей.

9. Покажите, что кривая $x = \sin 2t,\ y = 1 - \cos 2t,\ z = 2\cos t$ лежит на сфере и является пересечением параболического и кругового цилиндров.

10. Покажите, что кривая $x = a\sin^2 t,\ y = b\sin t\cos t,\ z = c\cos t$ лежит на эллипсоиде.

Тема 2. Касание. Уравнение касательной прямой и нормали

Уравнения касательных к плоским линиям (кривым), заданных уравнениями (1.1)-(1.4), имеют соответственно вид

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \dot{\vec{r}},$$

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}},$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$(x - x_0)F_x - \left(y - y_0\right)F_y = 0,$$

где x, y - текущие координаты точки на касательной, $\vec{\rho}$ - радиус-вектор этой точки, x_0, y_0 - координаты точки касания.

Уравнения нормалей соответственно имеют вид

$$(\vec{\rho} - \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0,$$

$$(x - x_0)\dot{x} + (y - y_0)\dot{y} = 0,$$

$$x - x_0 + (y - y_0) f'(x) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y}.$$

Уравнения касательных к пространственным линиям (кривым), заданных уравнениями (1.6)-(1.7), имеют соответственно вид

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}},$$

$$\frac{x - x_0}{T_1} = \frac{y - y_0}{T_2} = \frac{z - z_0}{T_3},$$

где x, y, z - текущие координаты точки на касательной, x_0, y_0, z_0 - координаты точки касания,

$$\vec{T}=(T_1,T_2,T_3)=\left[\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}$$

касательный вектор к кривой.

Уравнения нормальной плоскости соответственно имеют вид

$$(x-x_0)\dot{x}+(y-y_0)\dot{y}+(z-z_0)\dot{z}=0,$$

$$(x-x_0)T_1+(y-y_0)T_2+(z-z_0)T_3=0.$$

<u>Определение</u>. Если для двух линий, имеющих общую точку M_0, существуют такие их параметризации $\vec{r}_1=\vec{r}_1(t),\ \ \vec{r}_2=\vec{r}_2(t)$, что $\vec{r}_1(t_0)=\vec{r}_2(t_0)=M_0$ и при $t=t_0$

$$\vec{r}_1=\vec{r}_1(t),\ \ \vec{r}_2=\vec{r}_2(t)\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\frac{d\vec{r}_2}{dt},\ \dots\ ,\frac{d^k\vec{r}_1}{dt^k}=\frac{d^k\vec{r}_2}{dt^k},\ \ \frac{d^{k+1}\vec{r}_1}{dt^{k+1}}\neq\frac{d^{k+1}\vec{r}_2}{dt^{k+1}},$$

то эти линии имеют в точке M_0 *касание* k*-го порядка*.

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. Написать уравнения касательной прямой и нормали к кривой $x^3+y^3-3axy=0$ в точке $A\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$.

Решение. Кривая задана неявно. Тогда $F_x=3x^2-3ay,\ \ F_y=3y^2-3ax$.

Вычислим функции в данной точке $F_x\Big|_A=\frac{9a^2}{4},\ \ F_y\Big|_A=\frac{9a^2}{4}$. Подставляя полученные значения в уравнения касательной прямой и нормали, имеем

$$\frac{9a^2}{4}\left(x-\frac{3a}{2}\right)+\frac{9a^2}{4}\left(y-\frac{3a}{2}\right)=0\ , \qquad \text{и} \qquad \frac{x-\frac{3a}{2}}{\frac{9a^2}{4}}=\frac{y-\frac{3a}{2}}{\frac{9a^2}{4}}$$

$$\text{или}\quad x+y-3a=0\quad \text{и}\qquad x-y=0.$$

Пример 2. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии $\vec{r}(a\cos t, a\sin t, bt)$ при $t=0$.

Решение. $\vec{r}(a\cos t, a\sin t, bt)_{t=0} = \vec{r}(a,0,0)$.

Отсюда следует, что точка касания $M(a,0,0)$. Найдем производную $\dot{\vec{r}}(-a\sin t, a\cos t, b)_{t=0} = (0,a,b)$. Тогда $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z}{b}$ – уравнение касательной, $0(x-a)+ay+bz=0 \Rightarrow$ $ay+bz=0$ – уравнение нормальной плоскости.

Пример 3. Найти точки, в которых касательная к кривой

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases}$$

параллельна плоскости $x+y-z-1=0$.

Решение. Задача состоит в нахождении точек, в которых касательный вектор к кривой $\dot{\vec{r}}(t)$ ортогонален нормальному вектору плоскости $\vec{n}(1,1,-1)$, т.е. $\vec{n}\cdot\dot{\vec{r}}(t)=0$.

Найдем координаты касательного вектора кривой $\dot{\vec{r}}(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (3-3t^2, 6t, 3+3t^2)$. Приравнивая скалярное произведение векторов $\vec{n}(1,1,-1)$ и $\dot{\vec{r}}(3-3t^2, 6t, 3+3t^2)$ к нулю, получаем

$$3-3t^2+6t-3-3t^2=0 \qquad \text{или} \quad -6t^2+6t=0.$$

Отсюда $t_1=0$, $t_2=1$. Подставляя поочередно найденные значения параметра t в уравнение кривой, находим соответственно две точки, $M_1(3,0,3)$ и $M_2(0,6,6)$, в которых касательная к кривой параллельна плоскости $x+y-z-1=0$.

Пример 4. Найти уравнение соприкасающейся сферы в заданной точке $t=1$ для кривой

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases}.$$

Решение. Решение ищем в виде $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ - уравнение сферы.

Выпишем условия касания 3-его порядка:

0) $(3t - t^3 - \alpha)^2 + (3t^2 - \beta)^2 + (3t + t^3 - \gamma)^2 = R^2$,

1) $2(3t - t^3 - \alpha)(3 - 3t^2) + 2(3t^2 - \beta)6t + 2(3t + t^3 - \gamma)(3 + 3t^2) = 0$,

2) $\begin{matrix} 18(1-t^2)^2 - 12(3t - t^3 - \alpha) + 12(3t^2 - \beta) + \\ +72t^2 + 18(1+t^2) + 12t(3t + t^3 - \gamma) = 0 \end{matrix}$,

3) $\begin{matrix} -72t(1-t^2) - 12(3t - t^3 - \alpha) - 12t(3 - 3t^2) + 72t + \\ +144t + 72t(1+t^2) + 12(3t + t^3 - \gamma) + 12t(3 + 3t^2) = 0 \end{matrix}$.

Для $t=1$ получим

0) $(2-\alpha)^2 + (3-\beta)^2 + (4-\gamma)^2 - R^2 = 0$

1) $\beta + \gamma = 7$

2) $\alpha - \beta - \gamma = -17$

3) $\alpha - \gamma = -38$

Решая полученную систему, находим:

$$\begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = -21 \\ \gamma = 28 \\ R = 36 \end{cases}$$

Уравнение соприкасающейся сферы:

$$(x+10)^2 + (y+21)^2 + (z-28)^2 = 1296.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Составьте уравнения касательной и нормали к следующим линиям и кривым:

a) $y = x^2 + 4x + 3$ в точках A, B, C с абсциссами $-1, 0, 1$

b) $y = x^3$ в точках A, B с абсциссами 0 и 1.

c) $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$ в точке $A(t = 1)$.

d) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;

e) $x = a(1 - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$;

f) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$;

g) $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ в точке $A\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$;

h) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Найдите касательную к параболе $y = x^2$, параллельную прямой $y = 4x - 5$.

3. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ перпендикулярна прямой $x - 2y | + 8 = 0$?

4. Найдите касательные к кривой $x = t^2 - 1,\ y = t^3 + 1$, параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$.

5. Найдите касательные к кривой $x = t^3,\ y = t^2$, проходящие через точку $M(-7, -1)$.

6. Найдите порядок касания в начале координат следующих линий:

a) $y = \sin x, \quad y = \mathrm{tg} x$;

b) $y = x^3, \quad y = x\sin x$;

c) $y=\sin x,\quad y=x^4-\dfrac{1}{6}x^3+x$.

7. Найдите уравнение окружности, имеющей с параболой $y=x^2$ в начале координат касание второго порядка.

8. Найдите точки, в которых касательная к кривой $\vec{r}(a\operatorname{ch}t, a\operatorname{sh}t, at)$ параллельна плоскости $x+y-z-1=0$.

9. Составьте уравнения касательных к следующим кривым в указанных точках:

a) $x=\sec t,\ y=\operatorname{tg}t,\ z=at$ при $t=\pi/4$;

b) $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2$ при $t=1$;

c) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ при $t=0$;

d) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ z=4a\sin(t/2)$ при $t=\pi/2$.

10. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости винтовой линии $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=4t$ в точке $t=0$.

11. Задана кривая $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t=1$.

12. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости линии $x^2=2az,\quad y^2=2bz$ в произвольной точке.

13. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости линии $(x+z)^2-12y=0,\quad 27(x-z)^2-4y^3=0$ в точке $M_0(2,3,4)$.

14. Найдите уравнения нормальной плоскости в произвольной точке линии $x^2+y^2=1,\quad y^2+z^2=1\quad (y\neq\pm1)$.

15. Найдите соприкасающиеся плоскости кривой $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$, проходящие через данную точку $M_0(2,-1/3,-6)$.

16. Напишите уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ в точке $t=0$.

17. Напишите уравнение соприкасающейся сферы кривой $x = t\cos\ln t,\ y = t\sin\ln t,\ z = t$ в точке $t = 1$.

Тема 3. Асимптоты. Особые точки плоских кривых

Если линия (кривая) (1.2) допускает асимптоту при $t \to t_0$, уравнение которой

$$y = kx + b,$$

то $k = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - kx(t))$. Это наклонная асимптота.

Если линия (кривая) (1.2) допускает вертикальную асимптоту при $t \to t_0$, то уравнение последней имеет вид $x = a$, где $a = \lim\limits_{t \to t_0} x(t), \quad \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$.

Прямая $y = kx + b$ будет асимптотой линии (1.3) , если $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}, \quad b = \lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx)$.

<u>**Определение**</u>**.** Пусть плоская фигура l задана уравнением $F(x, y) = 0$, где F - гладкая функция, обладает свойствами:

a) существуют точки $M_1, \ldots, M_k$ фигуры l такие, что фигура $l_1 = l \setminus \{M_1, \ldots, M_k\}$ является линией;

b) никакая из фигур $l_1 \cup \{M_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ не является линией.

Тогда фигура l называется *линией с особыми точками* $M_1, \ldots, M_k$. Особыми могут быть только те точки, в которых $F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0$.

<u>**Определение**</u>**.** Пусть $M_0(x_0, y_0)$ особая точка линии $F(x, y) = 0$ и $\delta = \left(F_{xy}\Big|_{M_0}\right)^2 - F_{xx}\Big|_{M_0} \cdot F_{yy}\Big|_{M_0}$. Тогда если $\delta < 0$, то точка M_0 называется *изолированной* (касательных нет), если $\delta > 0$, то точка M_0 называется *точкой самопересечения, самоприкосновения* (две касательные), если $\delta = 0$, то точка M_0 называется *точкой возврата* (одна касательная). Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_{M_0} = y'_{M_0}(x - x_{M_0}),$$

где y'_{M_0} ищем из уравнения

$$F_{yy}\Big|_{M_0} y'^2_{M_0} + 2F_{xy}\Big|_{M_0} y'_{M_0} + F_{xx}\Big|_{M_0} = 0.$$

Исследовать линию – значит выявить совокупность важнейших свойств линии, позволяющих достаточно точно построить ее, т.е. наличие или отсутствие особых точек, точек перегиба, асимптот, точек самопересечения, в которых касательные параллельны координатным осям и в которых линия пересекает эти оси.

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. Найдите асимптоты линии, заданную уравнением в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

Решение. Найдем коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{t\to1}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to1}\frac{(-t^2-1)(t-1)^2}{(t^2-1)^2(t^2-2t)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{t\to1}(y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to1}\left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{t-1}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, асимптота имеет вид $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$.

Пример 2. Найти асимптоту линии, заданной уравнением в явном виде

$$y = \frac{3}{x^2-49}.$$

Решение. Найдем коэффициенты k и b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x(x^2-49)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{(x^2-49)}-0x\right)=0$$

Тогда асимптота имеет вид $y=0$. Кроме того, функция имеет разрыв в точках $x=\pm 7$, т.е. это две вертикальные асимптоты.

Пример 3. Найдите особые точки и напишите уравнения касательных в них для линии

$$y^2=x^3+x^2.$$

Решение. Запишем кривую в виде $F(x,y)=-y^3+x^3+x^2$. Тогда $F_x=3x^2+2x,\ \ F_y=-3y^2$. Особой точкой кривой, т.е. в которой частные производные равны нулю, будет точка $M_0(0,0)$; точка с координатами $(0,-2/3)$ не принадлежит линии. Найдем вторые частные производные функции $F_{xx}=6x-2,\ \ F_{xy}=0,\ \ F_{yy}=-2$, которые в особой точке равны следующему $F_{xx}\big|_{M_0}=2,\ \ F_{xy}\big|_{M_0}=0,\ \ F_{yy}\big|_{M_0}=-2.$ Значит, $\delta=4>0$, т.е. точка $M_0(0,0)$ является точкой самоприкосновения, к которой можно провести две касательные. Коэффициент y'_{M_0} найдем из уравнения $-2y'^2_{M_0}+2=0,\ \ y'_{M_0}=\pm 1.$ Таким образом, касательные в точке $M_0(0,0)$ имеют вид $y=\pm x$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите асимптоты линий, заданных уравнениями в явном виде:

a) $y=\dfrac{2}{x-3}$;

b) $y=\dfrac{5}{x^2-4}$;

c) $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x}$;

d) $y=\dfrac{x^2}{x+2}$;

e) $y=\dfrac{x^3+1}{x}$.

2. Найдите асимптоты линий, заданных уравнениями в параметрическом виде:

a) $x=\dfrac{2t}{(t-1)(t-2)},\quad y=\dfrac{t^2}{(t-1)(t-3)}$;

b) $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1},\qquad y=\dfrac{t^2}{t-1}$;

c) $x=\dfrac{t^2}{t-1},\qquad y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

3. Найдите асимптоты линий, заданных неявными уравнениями:

a) $xy^2-y^2-4x=0$;

b) $xy^2=x^2+2x-\dfrac{5}{4}$;

c) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.

4. Найдите особые точки линий, заданных следующими уравнениями:

a) $y^2=x^3+x^2$;

b) $x^2=y^2+x^4$;

c) $y^2=x^3-x^2$;

d) $x^2y^2=x^2+y^2$;

e) $.4y^2=x^5+5x^4$.

5. Найдите особые точки и напишите уравнения касательных в них для следующих линий:

a) $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$ (циссоида Диоклеса);

b) $(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0$ (конхоида Никомеда);

c) $(2a-x)y^2=x(x-a)^2$ (строфоида);

d) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (лемниската Бернулли);

e) $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (кардиоида).

6. Исследуйте и постройте линии, заданные следующими уравнениями:

a) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

b) $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$;

c) $y=\sqrt{\dfrac{125-x^3}{3x}}$;

d) $y=e^{1/x}$;

e) $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\quad y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$;

f) $x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\quad y=\dfrac{t^3}{1+t^2}$;

g) $x=\dfrac{t^2}{1-t^2},\quad y=\dfrac{t^3}{1-t^2}$;

h) $x=t^4,\quad y=t^2-t^5$;

i) $x=\dfrac{(t+2)^2}{1+t},\quad y=\dfrac{(t-2)^2}{t-1}$;

j) $x=2\sin t,\quad y=\dfrac{2\cos^2 t}{2+\cos t}$;

k) $x^3-y^2+1=0$;

l) $x^4 + y^4 = a^4$;

m) $(x^2 - y^2)^2 = 2x$;

n) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$;

o) $x(x^2 - 3y^2) - 4(x^2 + y^2) = 0$;

p) $x^2 = y^2 + x^4$;

q) $x^5 - x^4 + 4x^2 y - 4y^2 = 0$;

r) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2 y^2$.

Тема 4. Длина дуги. Кривизна плоской кривой

Определение. *Длина дуги* кривой линии определяется как предел периметра ломаной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к нулю.

Длина дуги кривой и ее кривизна вычисляются по следующим формулам, в зависимости от способа задания кривой (линии):

Таблица

Формулы для нахождения длины дуги и кривизны плоской кривой

Вид кривой	Длина дуги, s	Кривизна, k
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$	$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$	$k = \dfrac{\lvert \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \rvert}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$
$y = y(x)$	$s = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$	$k = \dfrac{\lvert y'' \rvert}{(1 + y'^2)^{3/2}}$
$r = r(\varphi)$	$s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$	$k = \dfrac{\lvert r^2 + 2r'^2 - rr'' \rvert}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$

Определение. Центр соприкасающейся окружности называется также *центром кривизны кривой в заданной точке*. Ее радиус, называемый также *радиусом кривизны кривой в заданной точке*, находится по формуле $R = \dfrac{1}{k}$.

Определение. Натуральными уравнениями плоской кривой называют уравнения вида

$$k = k(s), \quad F(k, s) = 0, \quad \begin{cases} k = k(t) \\ s = s(t) \end{cases}.$$

Определение. Если кривая задана в виде $\vec{r}\,(x(t), y(t), z(t))$, то длина дуги вычисляется по следующей формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. Вычислить длину дуги между указанными точками кривой $x = t - \frac{1}{2}\text{sh}2t, \quad y = 2\text{ch}t, \quad t_1 = 0, \ \ t_2 = 2$.

Решение. Найдем производные $x' = 1 - \text{ch}2t, \ y' = 2\text{sh}t$. Вычислим длину дуги по формуле $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{(1-\text{ch}2t)^2 + 4\text{sh}^2 t}\,dt = \text{sh}^2 2$

Пример 2. Найти кривизну кривой $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$.

Решение. Найдем производные первого и второго порядков вектор-функции

$$\vec{r}(a\cos t, b\sin t)$$

$$\vec{r}\,'(-a\sin t, b\cos t)$$

$$\vec{r}\,''(-a\cos t, -b\sin t)$$

Найдем кривизну $k = \dfrac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$.

Пример 3. Найти длину дуги винтовой линии от точки пересечения ее с *Oxy* до произвольной точки *M*.

Решение.

$$\vec{r}(a\cos t, b\sin t, bt)$$

$z = 0$ при $t = 0 \ \Rightarrow M_0(a, 0, 0)$

Подставляя в формулу нахождения длины дуги $s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$,

находим: $\dot{\vec{r}}(-a\sin t, a\cos t, b)$,

$$S=\int\limits_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int\limits_0^t\sqrt{a\ \ (\sin^2 t+\cos^2 t)+b^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\ t\Big|_0^t=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

Таким образом, искомая длина дуги равна $S=\sqrt{a^2+b^2}\ t$

Пример 4. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии, заключенную между точками 0 и t.

Решение

$$x=a\,\mathrm{ch}t\,;\ y=a\,\mathrm{sh}t\,;\ \ z=at\,;$$

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=\int\limits_0^t\sqrt{(a\mathrm{sh}t)^2+(a\mathrm{ch}t)^2\,dt}\ =$$

$$=a\int\limits_0^t\sqrt{2\mathrm{ch}^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int\limits_0^t\sqrt{\mathrm{ch}^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\mathrm{sh}t\Big|_0^t=a\sqrt{2}\mathrm{sh}t$$

Значит, $S=a\sqrt{2}\mathrm{sh}t$.

Пример 5. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases}x=3t-t^3\\ y=3t^2\\ z=3t+t^3\end{cases}.$$

Записать уравнение кривой в натуральной параметризации.

Решение. Длина дуги кривой вычисляется по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\dot{\vec{r}}\right|dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$. Так как $\left|\dot{\vec{r}}\right|=3\sqrt{2}(t^2+1)$, то

$$S=\int\limits_0^t 3\sqrt{2}(t^2+1)dt=\sqrt{2}(t^3+3t)\,.$$

Для того, чтобы перейти к натуральной параметризации выразим параметр t через натуральный параметр s из уравнения

$$s = \sqrt{2}(t^3 + 3t) \quad \text{или} \quad t^3 + 3t - \frac{s}{\sqrt{2}} = 0.$$

Так как $D = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = \dfrac{27}{27} + \left(-\dfrac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \dfrac{1}{4} = 1 + \dfrac{s^2}{8} > 0$, то кубическое уравнение имеет один вещественный и два комплексных корня. Вещественный корень находим по формуле

$$t = \alpha + \beta,$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{8}}};$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}} - \sqrt{1 + \frac{s^2}{8}}}$$

Тогда параметр t выражается через s следующим образом:

$$t = \sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{8}}} + \sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}} - \sqrt{1 + \frac{s^2}{8}}}.$$

Подставляя полученное выражение для t в уравнение кривой, заданной в координатно-параметрическом виде, получаем уравнение кривой в натуральной параметризации:

$$
\begin{cases}
x = 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)- \\
\quad -\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)^3 \\
y = 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)^2 \\
z = 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)+ \\
\quad +\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)^3
\end{cases}
$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислите длину дуги между двумя произвольными точками M_1 и M_2 следующих кривых:

a) $y = x^{3/2}$;

b) $y = \ln x$;

c) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$;

d) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$;

e) $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$;

f) $x = a(\ln\operatorname{tg}(t/2)+\cos t), \quad y = a\sin t$.

2. Вычислите длину дуги между указанными точками следующих кривых:

a) $y = \ln\cos x, \quad x_1 = 0, \ \ x_2 = \pi/3;$

b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x_1 = 1, \ \ x_2 = 4;$

c) $y = \ln\sec x, \quad x_1 = -\pi/3, \ \ x_2 = \pi/3;$

d) $x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}2t, \quad y = 2\mathrm{ch}t, \quad t_1 = 0, \ \ t_2 = 2;$

e) $x = 8at^3, \quad y = 3a(2t^2 - t^4), \quad t_1 = 0, \ \ t_2 = \sqrt{2}$.

3. Найдите длину всей кривой:

a) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t;$

b) $r = a(1 + \cos\varphi);$

c) $r = a\cos^4(\varphi/4)$.

4. Найдите кривизну следующих кривых:

a) $y = \sin x;$

b) $y^2 = 2px;$

c) $x = t^2, \ \ y = t^3;$

d) $x = a\cos t, \ \ y = b\sin t;$

e) $x = a\mathrm{ch}t, \ \ y = a\mathrm{sh}t;$

f) $x = a(t - \sin t), \ \ y = a(1 - \cos t);$

g) $r = a\varphi$.

5. Найдите кривизну линии, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

6. Найдите кривизну следующих линий:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

b) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

c) $y=x^4$ в начале координат.

7. На кривых найдите точки, где кривизна принимает экстремальное значение (вершины кривых):

a) $y=e^x$;

b) $x=at-d\sin t,\quad y=a-d\cos t$;

c) $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

8. Составьте натуральные уравнения кривых:

a) $y=x^{3/2}$;

b) $y=\ln x$;

c) $x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$;

d) $x=a(\ln \mathrm{tg}(t/2)+\cos t),\quad y=a\sin t$;

e) $r=a(1+\cos\varphi)$.

9. Напишите натуральную параметризацию винтовой линии.

10. Найдите длину дуги одного витка кривой $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ z=4a\cos(t/2)$ между двумя ее точками пересечения с плоскостью xOz.

11. Найдите длину дуги линии $x^3=3a^2y,\ 2xz=a^2$ между плоскостями $y=a/3,\quad y=9a$.

12. Покажите, что замкнутая кривая $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$ имеет длину $s=10$.

13. Найдите длину дуги кривой $\vec{r}(a\mathrm{ch}t, a\mathrm{sh}t, at)$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра 0 и 1.

14. Найдите выражение дифференциала длины дуги кривой в цилиндрических координатах.

15. Найдите выражение дифференциала длины дуги кривой в сферических координатах.

Тема 5. Сопровождающий трехгранник

<u>Определение</u>. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется ее *касательной плоскостью***.**

<u>Определение</u>. Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой, называется *соприкасающейся***.**

<u>Определение</u>. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью.*

<u>Определение</u>. Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим, основным или натуральным трехгранником кривой.*

Гранями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости.

1. Соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль.
2. Нормальная плоскость, содержащая главную нормаль и бинормаль.
3. Третья плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется спрямляющей плоскостью.

Если точка кривой задана, то для определения граней и ребер основного трехгранника нужно уметь вычислять их направляющие векторы.

Направляющий вектор касательной

$$\vec{\mathrm{T}} = \dot{\vec{r}}\,. \tag{5.1}$$

Направляющий вектор бинормали

$$\vec{\mathrm{B}} = [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}],\ \ \vec{\mathrm{B}} = [\vec{N}, \vec{B}]. \tag{5.2}$$

Направляющий вектор главной нормали перпендикулярен вектору касательной и вектору бинормали, поэтому его можно положить равным их векторному произведению

$$\vec{N} = [\dot{\vec{r}}, [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]]. \tag{5.3}$$

Уравнения касательной к кривой, заданной уравнениями (1.5) и (1.6), имеют соответственно вид

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \dot{\vec{r}},$$

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}},$$

где $\vec{\rho}$ - радиус вектор текущей точки касательной.

Уравнения главной нормали:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \left[\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \right], \dot{\vec{r}} \right],$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \left(\dot{z} \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \right) \\ y = y_0 + \lambda \left(\dot{x} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z} \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} \right). \\ z = z_0 + \lambda \left(\dot{y} \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x} \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix} \right) \end{cases}$$

Уравнения бинормали:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \right],$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}.$$

Уравнения соприкасающейся плоскости:

$$\left(\vec{\rho} - \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \right) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix} = 0.$$

Уравнения нормальной плоскости:

$$(\vec{\rho}-\vec{r})\dot{\vec{r}}=0,$$

$$(x-x_0)\dot{x}+(y-y_0)\dot{y}+(z-z_0)\dot{z}=0.$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$\left(\vec{\rho}-\vec{r},\dot{\vec{r}},\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right)=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0.$$

Предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру.

1. Единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса-вектора по натуральному параметру

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|}.$$

2. Единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$ определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру

$$\vec{\nu}=\frac{\vec{r}\,''}{\left|\vec{r}\,''\right|}.$$

3. Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ ориентируем так, чтобы тройка векторов $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ была правой.

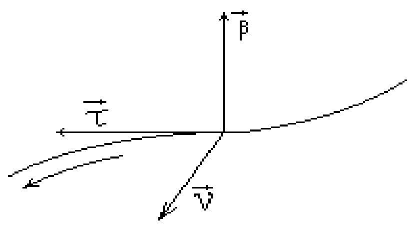

Рис. 1. Основной трехгранник кривой

При $\vec{r}=\vec{r}(t)$ вектора $\vec{\mathrm{T}},\vec{N},\vec{B}$ вычисляются следующим образом

$$\vec{\mathrm{T}}=\vec{r}\,'\,;\;\; \vec{N}=\vec{r}\,''\,;\;\; \vec{B}=[\vec{r}\,';\vec{r}\,''].$$

Вычислим вектора $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{\mathrm{T}}}{\left|\vec{\mathrm{T}}\right|},\;\; \vec{\nu}=\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|},\;\; \vec{\beta}=\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}.$$

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. В точке, отвечающей параметру $t=1$, для кривой

$$\begin{cases} x=3t-t^3 \\ y=3t^2 \\ z=3t+t^3 \end{cases}$$

найти векторы и плоскости сопровождающего трехгранника.

Решение.

1. Найдем производные вектор-функции $\vec{r}$ до третьего порядка:

$$\vec{r}(3t-t^3,3t^2,3t+t^3),$$
$$\dot{\vec{r}}(3-3t^2,6t,3+3t^2),$$
$$\ddot{\vec{r}}(-6t,6,6t),$$
$$\dddot{\vec{r}}(-6,0,6)$$

Найдем единичный касательный вектор $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}=\frac{(3-3t^2,6t,3+3t^2)}{3\sqrt{2}(t^2+1)}=\left(\frac{1-t^2}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

При $t=1$ получаем

$$\vec{\tau}\Big|_{t=1}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Найдем единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$. По определению $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$, где $\vec{B}=\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]$.

$$\vec{B}=\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2\\ -6t & 6 & 6t\end{vmatrix}=18(t^2-1)\,\vec{i}-36t\,\vec{j}+(t^2+1)\,\vec{k},$$

$$|\vec{B}|=\left|\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right|=18\sqrt{2}(t^2+1)$$

Тогда единичный вектор бинормали имеет вид

$$\vec{\beta}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{-2t}{\sqrt{2}(t^2+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

При $t=1$ имеем

$$\vec{\beta}\Big|_{t=1}\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Найдем единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$. По определению $\vec{\nu}=\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, где $\vec{N}=\left[\vec{B},\vec{T}\right]$. Вычислим непосредственно для значения параметра $t=1$:

$$\vec{\nu}\Big|_{t=1}=\left[\vec{\beta}\Big|_{t=1},\vec{\tau}\Big|_{t=1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=-\vec{i}\,.$$

Значит, $\vec{\nu}\Big|_{t=1}(-1,0,0)$.

Итак, найденные векторы сопровождающего трехгранника в точке, отвечающей параметру $t=1$, имеют следующий вид

$$\vec{\tau}\Big|_{t=1}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{\beta}\Big|_{t=1}\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\vec{\nu}\Big|_{t=1}(-1,0,0).$$

1. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость задается точкой кривой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (опорной точкой) и вектором бинормали $\vec{\beta}(\beta_x,\beta_y,\beta_z)$ (нормальным вектором) в этой точке. Уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид:

$$\beta_x(x-x_0)+\beta_y(y-y_0)+\beta_z(z-z_0)=0.$$

Параметру $t=1$ соответствует точка $M_0(2,3,4)$ и бинормаль $\vec{\beta}\Big|_{t=1}\left(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(y-3)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-4)=0 \qquad \text{или} \quad y-z+1=0.$$

Найдем уравнение нормальной плоскости.

Нормальная плоскость задается точкой кривой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (опорной точкой) и касательным вектором $\vec{\tau}(\tau_x,\tau_y,\tau_z)$ (нормальным вектором) в этой точке. Уравнение нормальной плоскости имеет вид:

$$\tau_x(x-x_0)+\tau_y(y-y_0)+\tau_z(z-z_0)=0.$$

Параметру $t=1$ соответствует точка $M_0(2,3,4)$ и касательный вектор $\vec{\tau}\Big|_{t=1} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(y-3) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-4) = 0 \text{ или } \quad y+z-7=0.$$

Найдем уравнение спрямляющей плоскости.

Спрямляющая плоскость задается точкой кривой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (опорной точкой) и вектором главной нормали $\vec{\nu}(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ (нормальным вектором) в этой точке. Уравнение спрямляющей плоскости имеет вид:

$$\nu_x(x-x_0) + \nu_y(y-y_0) + \nu_z(z-z_0) = 0.$$

Параметру $t=1$ соответствует точка $M_0(2,3,4)$ и вектор главной нормали $\vec{\nu}\Big|_{t=1}(-1,0,0)$. Тогда уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$-(x-2) = 0 \qquad \text{или} \quad x-2=0.$$

Пример 2. Вычислить кривизну и кручение гиперболической винтовой линии

$$\vec{r}(a\text{ch}t, a\text{sh}t, at)$$

Решение.

$$\vec{r}(a\text{ch}t, a\text{sh}t, at),$$
$$\dot{\vec{r}}(a\text{sh}t, a\text{ch}t, a),$$
$$\ddot{\vec{r}}(a\text{ch}t, a\text{sh}t, 0).$$

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \sqrt{a\text{sh}^2 t + a\text{ch}^2 t + a^2} = \sqrt{a^2(\text{ch}2t+1)} = \sqrt{a^2 2\text{ch}^2 t} = a\sqrt{2}\text{ch}t$$

.Используя формулы (5.1) – (5.3), находим

$$\vec{\text{T}} = \dot{\vec{r}}(a\text{sh}t, a\text{ch}t, a); \quad \ddot{\vec{r}}(a\text{ch}t, a\text{sh}t, 0); \quad \dddot{\vec{r}}(a\text{sh}t, a\text{ch}t, 0)$$

$$\vec{B} = [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\mathrm{sh}t & a\mathrm{ch}t & a \\ a\mathrm{ch}t & a\mathrm{sh}t & 0 \end{vmatrix} = -a^2\mathrm{sh}t\,\vec{i} + a^2\mathrm{ch}t\,\vec{j} + a^2\left(\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t\right)\vec{k} =$$

$$= -a^2\mathrm{sh}t\,\vec{i} + a^2\mathrm{ch}t\,\vec{j} - a^2\vec{k}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{a^4\mathrm{sh}^2 t + a^4\mathrm{ch}^2 t + a^4} = \sqrt{a^4(\mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t + 1)} = \sqrt{a^4 2\mathrm{ch}^2 t} = a^2\sqrt{2}\mathrm{ch}t$$

Для нахождения кривизны и кручения гиперболической винтовой линии воспользуемся формулой:

$$k = \frac{\left|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} = \frac{a^2\sqrt{2}\mathrm{ch}t}{2\sqrt{2}a^3\mathrm{ch}^3 t} = \frac{1}{2a\mathrm{ch}^2 t}$$

$$\kappa = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]^2};$$

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} a\mathrm{sh}t & a\mathrm{ch}t & a \\ a\mathrm{ch}t & a\mathrm{sh}t & 0 \\ a\mathrm{sh}t & a\mathrm{ch}t & 0 \end{vmatrix} = a^3\mathrm{ch}^2 t - a^3\mathrm{sh}^2 t = a^3;$$

$$\kappa(t) = \frac{a^3}{a^4 2\mathrm{ch}^2 t} = \frac{1}{2a\mathrm{ch}^2 t}.$$

Ответ: $k = \kappa = \dfrac{1}{2a\mathrm{ch}^2 t}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Составьте уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии

a) $\vec{r}(t\cos t, t\sin t, at)$ в точке $t = 0$;

b) $\vec{r}((t+1)^3, t^2, 2t)$ в точке $t = 1$.

2. Составьте уравнения касательных к следующим кривым в указанных точках:

a) $x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad z = at$ при $t = \pi / 4$;

b) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t^2$ при $t = 1$;

c) $x = e^t \cos t, \ y = e^t \sin t, \ z = e^t$ при $t = 0$.

2. В каких точках касательная к кривой $\vec{r}(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

3. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости винтовой линии $x = 2\cos t, \ y = 2\sin t, \ z = 4t$ в точке $t = 0$.

4. Задана кривая $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t = 1$.

5. Покажите, что нормальные плоскости кривой $x = a\sin^2 t, \ y = 2\sin t \cos t, \ z = a\cos t$ проходят через начало координат.

6. Найдите соприкасающиеся плоскости кривой $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$, проходящие через данную точку $M_0(2, -1/3, -6)$.

7. Напишите уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = a\cos t, \ y = b\sin t, \ z = e^t$ в точке $t = 0$.

8. Докажите, что образ кривой $x = e^t \cos t, \ y = e^t \sin t, \ z = 2t$ расположен на поверхности $x^2 + y^2 - e^z = 0$ и соприкасающаяся плоскость кривой совпадают с касательной плоскостью поверхности.

9. Составьте уравнения главной нормали и бинормали следующих кривых в указанных точках:

a) $x = t, \ y = t^2, \ z = e^t$ при $t = 0$;

b) $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$ при $t = 1$.

10. Найдите точки на кривой $x = 2/t,\ y = \ln t,\ z = -t^2$, в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.

11. Найдите единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой $x = t\sin t,\ y = t\cos t,\ z = te^t$ в начале координат.

12. Найдите единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в произвольной точке следующих кривых:

a) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$;

b) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos(t/2)$.

13. Составьте уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$$

14. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости линии, заданной пересечением двух поверхностей:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}, \qquad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2.$$

15. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости линии $x^2 = 2az,\quad y^2 = 2bz$ в произвольной точке.

16. Найдите уравнения нормальной плоскости в произвольной точке линии $x^2 + y^2 = 1,\quad y^2 + z^2 = 1 \quad (y \neq \pm 1)$.

17. Составьте уравнение соприкасающейся плоскости линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и гиперболического цилиндра $x^2 - y^2 = 3$ в точке $M(2,1,2)$.

18. Найти вектора сопровождающего трехгранника и написать уравнения его плоскостей для кривой, заданной в неявном виде

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ в точке $M(1,2,-1)$;

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ в точке $M(2,1,2)$.

Тема 6. Формулы Серре-Френе. Натуральные уравнения кривой

Если $\vec{\tau}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, $\vec{\beta}(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, то получаем формулы Серре-Френе

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = k\vec{v} \\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta} \\ \dfrac{d\vec{\beta}}{dt} = -\kappa\vec{v} \end{cases}$$

Коэффициенты k и κ называются *кривизной* и *кручением* соответственно.

Формулы для вычисления кривизны и кручения следующие:

$$k = \frac{\left|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}; \qquad \kappa = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]^2}.$$

В координатах кривизна и кручение выражаются формулами

$$k = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}.$$

В частности, если в качестве параметра взят натуральный параметр s, то

$$k = \left|\vec{r}''\right|, \qquad k = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$\kappa = \frac{\left(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''\right)}{\vec{r}''^2}, \qquad \kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

где штрихами обозначены производные по параметру s.

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то ее кривизна и кручение являются функциями этого параметра.

<u>Определение</u>. Система этих отношений называется *натуральными уравнениями кривой*

$$\begin{cases} k = k(s) \\ \kappa = \kappa(s) \end{cases}.$$

Основное значение натуральных уравнений состоит в том, что задание их вполне характеризует норму кривой, так что две кривые с одинаковыми натуральными уравнениями необходимо совпадают по своей форме и могут отличаться только положением пространства.

Упражнения для аудиторной работы

Пример 1. Найти кривизну и кручение кривой:

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases}.$$

Составить натуральное уравнение кривой.

Решение.

1. Вычислим кривизну. Используем формулу

$$k=\frac{\left|[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}.$$

Из разобранного в предыдущей теме примера 1 знаем, что

$$\left|\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right|=18\sqrt{2}(t^2+1) \text{ и } \qquad \left|\dot{\vec{r}}\right|=3\sqrt{2}(t^2+1).$$

Поэтому

$$k=\frac{\left|\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}=\frac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{54\sqrt{2}(t^2+1)^3}=\frac{1}{3(t^2+1)^2}.$$

2. Вычислим кручение. Используем формулу

$$\kappa=\frac{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2}.$$

Для третьей производной имеем $\dddot{\vec{r}}(-6,0,6)$. Вычислим смешанное произведение:

$$(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})=\begin{vmatrix}3-3t^2 & 6t & 3+3t^2\\ -6t & 6 & 6t\\ -6 & 0 & 6\end{vmatrix}=216.$$

Так как $\left|\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right|^2=\left(18\sqrt{2}(t^2+1)\right)^2=648(t^2+1)^2$, то для кручения получаем:

$$\kappa=\frac{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2}=\frac{216}{648(t^2+1)^2}=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

3. Запишем натуральные уравнения кривой:

$$\begin{cases}k=k(s)\\ \kappa=\kappa(s)\end{cases}.$$

Для этого подставим параметр

$$t=\sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\frac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\frac{s^2}{8}}}\ ,$$

(найденнй в примере темы 4) в полученные выражения для кривизны и кручения:

$$\begin{cases} k=\dfrac{1}{3\left(\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)^2+1\right)^2} \\ \kappa=\dfrac{1}{3\left(\left(\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}+\sqrt[3]{\dfrac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{1+\dfrac{s^2}{8}}}\right)^2+1\right)^2} \end{cases}.$$

Пример 2. Составить натуральное уравнение винтовой линии $\vec{r}=a\vec{e}(\varphi)+b\cdot t\cdot\vec{k},\ t\in R.$

Решение. $\vec{r}\,'=a\vec{g}(\varphi),\quad \vec{r}\,''=-a\vec{e}(\varphi),\quad \vec{r}\,'''=-a\vec{g}(\varphi)$

$$|\vec{r}\,'|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']=[a\vec{g}(\varphi)+b\vec{k}-a\vec{e}(\varphi)]=a\vec{k}-ab\vec{g}(\varphi)$$

$$|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|=a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$([\vec{r}\,',\vec{r}\,''],\vec{r}\,''')=(a^2\vec{k}-ab\vec{g}(\varphi)-a\vec{g}(\varphi))=a^2b^2$$

Таким образом, получаем следующее натуральное уравнение кривой

$$\begin{cases} k=\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \kappa=\dfrac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k=\dfrac{a}{a^2+b^2} \\ \kappa=\dfrac{b}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите, что для следующих кривых кривизна и кручение равны:

a) $\vec{r}(a\,\mathrm{ch}t, a\,\mathrm{sh}t, at)$;

b) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$.

2. Найдите кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.

3. Найдите кривизну конической винтовой линии $\vec{r}(t\cos t, t\sin t, at)$ в начале координат.

4. Найдите кривизну и кручение следующих кривых:

a) $x = a\,\mathrm{ch}t, \quad y = a\,\mathrm{sh}t, \quad z = at$;

b) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t$;

c) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$;

d) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$.

5. Найдите, при каких a и b кручение кривой $x = a\mathrm{ch}t, \quad y = a\mathrm{sh}t, \quad z = bt$ во всех точках равно ее кривизне.

6. Найдите точки на кривой $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$, в которых кривизна имеет минимальное значение (локальное)

7. В каких точках радиус кривизны кривой $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos(t/2)$ достигает локального минимума?

8. Докажите, что следующие кривые плоские, и составьте уравнения плоскостей, в которых расположены их образы:

a) $x = \dfrac{1+t}{1-t}, \quad y = \dfrac{1}{1-t^2}, \quad z = \dfrac{1}{1+t}$;

b) $x = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad y = a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad z = a_3 t^2 + b_3 t + c_3.$

9. Найдите такую функцию $f(t)$, чтобы кривая $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = f(t)$ была плоской.

10. Составьте натуральные уравнения следующих кривых:

a) $x = a\,\mathrm{ch}t, \quad y = a\,\mathrm{sh}t, \quad z = at;$

b) $x = ct, \quad y = \sqrt{2}c\ln t, \quad z = ct^{-1}.$

11. Найдите радиус соприкасающейся сферы в произвольной точке следующих кривых:

a) $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t;$

b) $x = e^t\sin t,\ y = e^t\cos t,\ z = e^t.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальные задания для студентов

СРС №1

1. Записать уравнение кривой в неявном виде.

2. Найти точки, в которых касательная кривой параллельна плоскости $x+y-z-1=0$.

3. В указанной точке кривой найти векторы $(\vec{\tau},\vec{\upsilon},\vec{\beta})$ и плоскости сопровождающего трехгранника.

4. Найти длину дуги кривой. Записать уравнение кривой в натуральной параметризации.

5. Найти кривизну и кручение кривой. Составить натуральное уравнение кривой.

6. Найти уравнение соприкасающейся окружности в заданной точке для проекции кривой на плоскость XOY.

7. Найти уравнение соприкасающейся сферы в данной точке.

1.Теоретический минимум к задаче N1

1.1. Определение кривой.

1.2. Определение замкнутой кривой.

1.3. Определение простой кривой.

1.4. Способы задания кривой.

1.5. Определение кривой регулярной в точке.

1.6. Определение эквивалентных кривых.

1.7. Определение не параметризованной кривой.

2. **Теоретический минимум к задаче N2**

2.1.Определение бесконечно малого вектора.

2.2. Определение предела переменного вектора.

2.3. Определение векторной функции скалярного аргумента.

2.4. Определение непрерывной векторной функции.

2.5. Производная векторной функции по скалярному аргументу.

2.6. Понятие годографа.

2.7. Правила дифференцирования векторной функции.

2.8. Геометрической значение производной векторной функции.

2.9. Касательный вектор кривой в точке.

2.10. Уравнение касательной кривой в точке.

3. **Теоретический минимум к задаче N3**

3.1. Определение сопровождающего трехгранника.

3.2. Формула для вычисления координат единичного касательного вектора.

3.3. Формула для вычисления координат единичного вектора бинормали.

3.4. Формула для вычисления координат единичного вектора главной нормали.

3.5. Уравнение соприкасающейся плоскости.

3.6. Уравнение спрямляющей плоскости.

3.7. Уравнение нормальной плоскости.

4. **Теоретический минимум к задаче N4**

4.1. Определение длины дуги кривой.

4.2. Формула для вычисления длины дуги.

4.3. Натуральный параметр кривой. Уравнение прямой в натуральной параметризации.

5.**Теоретический минимум к задаче N5**

5.1. Определение кривизны. Геометрический смысл.

5.2. Определение кручения. Геометрический смысл.

5.3. Формулы для вычисления кривизны в произвольной параметризации.

5.4. Формулы для вычисления кривизны в натуральной параметризации.

5.5. Формулы для вычисления кручения в произвольной параметризации.

5.6. Формулы для вычисления кручения натуральной параметризации.

5.7. Натуральные уравнения кривой.

6. **Теоретический минимум к задаче N6, N7**

6.1. Касание кривых n-го порядка.

6.2. Определение соприкасающейся окружности.

6.3. Соприкосновение кривой и поверхности.

6.4. Определение соприкасающейся сферы.

6.5. Соприкасающаяся плоскость.

Варианты

1. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t, \quad t = 0;$

2. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(t - \cos t), \quad z = 4a \cos\frac{t}{2}, \quad t = 0;$

3. $x = 2t - t^2, \quad y = 2t, \quad z = 2t^3, \quad t = 1;$

4. $x = acht, \quad y = sht, \quad z = at, \quad t = 0;$

5. $x = a \ \sin^2 t, \quad y = a \ \sin t \ \cos t, \quad z = at, \quad t = \pi;$

6. $x = a \ \sin^2 t, \quad y = a \ \sin t \ \cos t, \quad z = a \ cht, \quad t = 0;$

7. $x = a \ \cos t, \quad y = a \ \sin t, \quad z = a \ cht, \quad t = 0;$

8. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ z = a\cos 2t,\ t = \dfrac{\pi}{2};$

9. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t = \pi;$

10. $x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2,\ t = 1;$

11. $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2},\ t = 0;$

12. $x = t + \dfrac{1}{t},\ y = t - \dfrac{1}{t},\ z = 2\ln t,\ t = 1;$

13. $x = at,\ y = a\sqrt{2}\ln t,\ z = at^{-1},\ t = 1;$

14. $x = t^2,\ y = t^{-2},\ z = \sqrt{2}\ln t^2,\ t = 1;$

15. $x = 2e^t,\ y = t,\ z = at^2,\ t = 0;$

16. $x = a\,cht^2,\ y = a\,sht^2,\ z = at^2,\ \ t = 0;$

17. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a\,t^2,\ \ t = 0;$

18. $x = t\cos t,\ y = t\sin\ln t,\ z = t,\ \ t = 1;$

19. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = t,\ \ t = 0;$

20. $x = \dfrac{t+1}{\sqrt{t}},\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}},\ z = \ln t,\ \ t = 1;$

21. $x = e^t,\ y = at,\ z = t^2,\ t = 0;$

22. $x = e^{2t}\cos t,\ y = e^{2t}\sin t,\ z = 2t,\ \ t = 0;$

23. $x = at\,cht^2,\ y = a\,sht^2,\ z = at^2,\ t = 0;$

24. $x = e^t\cos t^2,\ y = e^t\sin t^2,\ z = t,\ \ t = \dfrac{\pi}{2};$

25. $x = t,\ y = \ln t,\ z = at,\ \ t = 1;$

26. $x = \cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = t,\ \ t = 0;$

27. $x = e^t \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t,\ \ \ t = 0$;

28. $x = e^t,\ \ y = a(t-1),\ \ z = at^2,\ \ \ t = 0$;

29. $x = (e^t + 1)\ \cos t,\ \ y = (e^t - 1)\ \sin t,\ \ z = t,\ \ \ t = 0$;

30. $x = t,\ \ y = \ln(t+1),\ \ z = at^2,\ \ \ t = 1$.

СРС №2

1. Записать уравнение кривой в параметрическом виде.

2. Написать уравнение касательной в точке $M(1,1,1)$.

3. В самостоятельно выбранной точке кривой найти векторы ($\vec{\tau}, \vec{\upsilon}, \vec{\beta}$) и плоскости сопровождающего трехгранника.

4. Найти кривизну и кручение кривой. Составить натуральное уравнение кривой.

Варианты

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 = 2z \\ 2y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} z^2 = 2x \\ 2y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y^2 = 2z \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = 2y \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ x^2 = 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x^2 = 2y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2z^3 = 3y^2 \\ x^2 = 2y \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2z^3 = 3y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x = y^2 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^3 = 3y \\ x^2 - y^2 = -2z \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2y^3 = 3x^2 \\ y^3 = 3z^2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ x - z = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 = 2z \end{cases}$

26. $\begin{cases} xy = z^2 \\ x^2 = 2z \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^2 = x \\ z^2 = 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3 = z \\ y^2 = 2x \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 = y^3 \\ z^2 = 2x \end{cases}$

10. $\begin{cases} y^3 = x^2 \\ x^2 = 2z \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2z = x^2 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = 2y+1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^3 = y \\ x^2 - y^2 = 2z \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2z \\ z^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} xy - xz = 2 \\ x = 2zy \end{cases}$

28. $\begin{cases} xy = z^3 \\ x^2 - 2z = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 y = z \\ x^2 = 2z \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 - 2z^2 - y = 3 \end{cases}$

Список литературы, рекомендованный для самостоятельного изучения

1. Норден А.П. Дифференциальная геометрия, Москва Учпедгиз,1948.
2. Норден А.П. Лекции по дифференциальной геометрии, Москва Учпедгиз,1965.
3. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии, Москва «Наука»,1962.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия, Москва, «Наука», 1969.
5. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия II часть.
6. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии, под редакцией В.Т. Воднева, Минск «Высшая школа», 1970.
7. Сборник задач по дифференциальной геометрии, под редакцией А.С. Феденко, Москва «Наука», 1979.
8. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве : учебное пособие : курс лекций для студентов математического факультета / проф. Ю. Г. Игнатьев ; Казан. (Приволж.) федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского .— (Казань : Казанский федеральный университет, 2013) — <URL:http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000327.pdf>

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Нигмедзянова Айгуль Махмутовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ЧАСТЬ 1. ДИФФЕЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ

Подписано в печать 18.07.2014.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .
Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28