

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ  
Кафедра теоретической механики**

*А.А. САЧЕНКОВ*

**ЦИКЛ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ИЗГИБА  
ПЛАСТИН**

**Учебное пособие**

**Казань  
2012**

Цикл лекций посвящен изложению теории тонких пластин и некоторых вопросов теории оболочек. Курс читается в Казанском федеральном университете студентам, специализирующимся в области механики деформируемого твердого тела. В основу излагаемой теории положена наиболее простая модель, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява, которые являются обобщением гипотезы плоских сечений теории балок в сопротивлении материалов.

Курс построен по принципу «от простого к сложному». Сначала рассматривается слабый изгиб пластин без деформации срединного слоя. Подробно разобрана процедура получения уравнения Софи Жермен, которое описывает поведение пластины в этом случае.

При прогибах порядка толщины пластины пренебрегать деформациями срединного слоя нельзя. Уравнение Софи Жермен справедливо и в этом случае, но лишь для описания изгибного состояния пластины. Оно дополняется уравнением для определения мембранных усилий.

Учет нелинейных слагаемых в геометрических соотношениях позволяет получить уравнения Кармана, которые пригодны для описания поведения пластины во всем диапазоне изменения прогибов. Уравнение Софи Жермен включается в уравнения Кармана как частный случай. Сами уравнения Кармана служат основой для получения уравнений устойчивости пластин (линеаризованных уравнений).

Введением параметра кривизны уравнения Кармана адаптируются к задаче изгиба цилиндрической панели и оболочки. Это делается на заключительном этапе данного цикла.

Представлены решения некоторых частных задач и разобраны отдельные методы их решений.

Все преобразования и выкладки в основном даны в декартовой системе координат. Исключение составляет задача изгиба круглой пластины, представленная в цилиндрических координатах.

## Лекция 1.

### Некоторые сведения из теории упругости.

Основные обозначения:

$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$  - компоненты тензора напряжений;

$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$  - компоненты тензора деформаций;

$u, v, w$  - компоненты вектора перемещений;

$X_n, Y_n, Z_n$  - компоненты поверхностной нагрузки  $\overline{F}_n$  на участке поверхности тела с нормалью  $\overline{n}$ .

Уравнения равновесия элемента сплошной среды:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $\rho X, \rho Y, \rho Z$  - компоненты массовых сил,  $\rho$  - плотность массовых сил.

Статические граничные условия (условия Коши на поверхности тела):

$$\begin{aligned}X_n &= X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \\ Y_n &= Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \\ Z_n &= Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz\end{aligned}\tag{1.2}$$

Физические соотношения (обобщенный закон Гука).

$$\begin{aligned}X_x &= \lambda \Delta + 2\mu e_{xx} \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu e_{yy} \\ Z_z &= \lambda \Delta + 2\mu e_{zz} \\ X_y &= \mu e_{xy} \\ Y_z &= \mu e_{yz} \\ Z_x &= \mu e_{zx}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Здесь:  $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$  - первый инвариант тензора деформаций;

$\lambda, \mu$  - коэффициенты Ляме;

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  - коэффициент упругости

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль сдвига

$\nu$  - коэффициент Пуассона

$E$  - модуль упругости первого рода (модуль Юнга)

Соотношения (1.3) справедливы для многих конструкционных материалов при условии малости деформаций, то есть в рамках упругого поведения материала.

Линейные геометрические соотношения Коши (связь деформаций и перемещений):

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Компоненты вектора перемещений  $u, v, w$  непрерывны и дифференцируемы вместе со своими производными до четвертого порядка включительно.

Соотношения (1.4) получены в предположении малости перемещений по сравнению с характерными размерами тела. Это утверждение справедливо при упругом деформировании массивов, то есть тел, у которых все три характерных размера одного порядка.

Для стержней большой гибкости или тонких, абсолютно гибких пластин (мембран) условие малости перемещений может не выполняться. Например, упругий прогиб мембраны может во много раз превышать ее толщину. При исследовании напряженно-деформированного состояния таких объектов уравнения (1.4) требуют уточнения (в правой части необходимо удерживать нелинейные слагаемые).

## Пути решения задач теории упругости.

### 1. Решение задачи теории упругости в перемещениях.

При решении задачи теории упругости в перемещениях в качестве неизвестных величин выступают компоненты вектора перемещений. Уравнениями для их определения служат уравнения равновесия, записанные в перемещениях (1.5). Они получаются подстановкой в (1.1) компонент тензора напряжений, записанных с помощью закона Гука (1.3) и геометрических соотношений Коши (1.4) через перемещения  $u, v, w$ .

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0 \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Эти соотношения называются уравнениями равновесия в форме Ляме. Статические граничные условия (условия Коши на поверхности тела) также записываются через перемещения:

$$\begin{aligned}
 X_n &= (\lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) \cos nx + \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \cos ny + \mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \cos nz = 0 \\
 Y_n &= \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \cos nx + (\lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \cos ny + \mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \cos nz = 0 \\
 Z_n &= \mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \cos nx + \mu(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \cos ny + (\lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}) \cos nz = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

## 2. Решение задачи теории упругости в напряжениях.

При решении задачи теории упругости в напряжениях уравнений (1.1) недостаточно, так как их три, а в качестве неизвестных выступают шесть компонент тензора напряжений. Для корректной постановки задачи необходима еще одна тройка уравнений. Недостающие уравнения можно получить исключая из геометрических соотношений Коши (1.4) компоненты вектора перемещений. Полученные уравнения носят название уравнений неразрывности деформаций (тождества Сен-Венана):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

И еще одна тройка уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} (-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} (-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} \\
 \frac{\partial}{\partial z} (-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Очевидно, что из шести уравнений (1.7) и (1.8) лишь три независимы.

Механический смысл тождеств Сен-Венана в том, что они представляют собой условия сплошности материала деформируемого тела. В математическом плане они являются условиями интегрируемости соотношений Коши (1.4) при данных компонентах деформации. Таким образом, компоненты деформации в (1.4) не могут быть произвольными. Они связаны тождествами Сен-Венана.

Если в уравнениях (1.7) или (1.8) компоненты деформации записать через напряжения с помощью закона Гука (1.3) и с привлечением уравнений равновесия (1.1), то в результате могут быть получены две тройки уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений. Эти уравнения называются уравнениями Бельтрами-Митчела (1.9), (1.10).

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\
\nabla^2 Y_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\
\nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \\
\nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \\
\nabla^2 Z_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь  $\theta = X_x + Y_y + Z_z$  - первый инвариант тензора напряжений. Как и в случае с тождествами Сен-Венана из шести уравнений Бельтрами-Митчела независимы лишь три. Уравнения (1.1) вкупе с любой из этих систем образуют замкнутую систему уравнений относительно компонент тензора напряжений. Граничные условия записываются в виде (1.2).

### 3. Некоторые свойства уравнений теории упругости.

При решении задач теории упругости массовые силы, как правило, известны и являются функциями координат:  $X = X(x, y, z)$ ,  $Y = Y(x, y, z)$ ,  $Z = Z(x, y, z)$ . Они могут быть удалены из уравнений выбором частного решения. В теории пластин и оболочек соотношение между действующей нагрузкой и массовыми силами таково, что последними можно пренебречь. Уравнения Бельтрами-Митчела в этом случае переписутся в виде:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \\
\nabla^2 Y_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0 \\
\nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= 0 \\
\nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= 0 \\
\nabla^2 Z_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Сложим уравнения системы (1.11). Получим:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y + Z_z) + \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = 0, \text{ или}$$

$$\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right) \nabla^2 \theta = 0$$

Следовательно

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (1.13)$$

Таким образом, первый инвариант тензора напряжений  $\theta$  является гармонической функцией.

Сложим первые три уравнения системы (1.3). Получим:

$$X_x + Y_y + Z_z = 3\lambda\Delta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \text{ или}$$

$$\theta = 3K\Delta \quad (1.14)$$

$K = 3\lambda + 2\mu$  - модуль всестороннего сжатия.

Из соотношений (1.13) и (1.14) следует, что

$$\nabla^2 \Delta = \frac{1}{3K} \nabla^2 \theta = 0 \quad (1.15)$$

Первый инвариант тензора деформаций  $\Delta$  также является гармонической функцией.

Рассмотрим первое уравнение равновесия в форме Ляме:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0$$

Воздействуя на него оператором Лапласа, получим:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Delta) + \mu \nabla^2 \nabla^2 u = 0$$

Вследствие (1.15) первое слагаемое равно нулю, следовательно

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0 \quad (1.16)$$

По аналогии

$$\nabla^2 \nabla^2 v = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0 \quad (1.18)$$

Все компоненты вектора перемещений являются бигармоническими функциями.

Вновь обратимся к соотношениям закона Гука (1.3). Действуя на обе части первого уравнения двойным оператором Лапласа, получим:

$$\nabla^2 \nabla^2 X_x = \lambda \nabla^2 \nabla^2 \Delta + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \nabla^2 u)$$

Правая часть уравнения равна нулю в силу (1.15) и (1.16), следовательно:

$$\nabla^2 \nabla^2 X_x = 0$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для остальных компонент тензора напряжений. Это означает, что все они являются бигармоническими функциями.

Таким образом, все основные математические проблемы теории упругости связаны с решением гармонических и бигармонических уравнений.

Решение задачи теории упругости предполагает удовлетворение уравнений равновесия, выполнение граничных условий и условий неразрывности деформаций. В плане определения компонент тензоров напряжений и деформаций решение задачи теории упругости единственное. Компоненты вектора перемещения определяются с точностью до жесткого смещения тела.

Граничные условия на поверхности тела могут быть заданы одним из трех следующих способов:

1. На всей поверхности тела заданы внешние поверхностные нагрузки:

$$\begin{aligned} X_n &= f_1(\sigma) \\ Y_n &= f_2(\sigma) \\ Z_n &= f_3(\sigma) \end{aligned} \tag{1.19}$$

$f_i$  - известные функции.

2. На всей поверхности тела заданы упругие перемещения:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(\sigma) \\ v &= \varphi_2(\sigma) \\ w &= \varphi_3(\sigma) \end{aligned} \tag{1.20}$$

$\varphi_i$  - известные функции

3. На части поверхности  $\sigma_1$  заданы поверхностные нагрузки (1.19), а на другой части поверхности  $\sigma_2$  заданы упругие перемещения (1.20).

Одним из эффективных методов решения задач теории упругости является полуобратный метод Сен-Венана, позволяющий уменьшить размерность решаемой задачи. В частности, при решении задачи в перемещениях, неизвестными являются функции  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ . В рамках метода определяется лишь одна из них, например  $w$ , в то время как  $u$  и  $v$  задаются из каких-либо соображений. Тем самым трехмерная задача сводится к одномерной. В излагаемой теории пластин основой для реализации этого метода являются гипотезы Кирхгофа-Лява.

## **Лекция 2.**

### **Классификация пластин.**

Пластиной называется призматическое тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими характерными размерами. Это расстояние называется толщиной  $h$ . Плоскость, равноудаленная от поверхностей пластины, называется срединной плоскостью. К срединной плоскости привязана одна из координатных плоскостей декартовой координатной системы (рис.2.1).

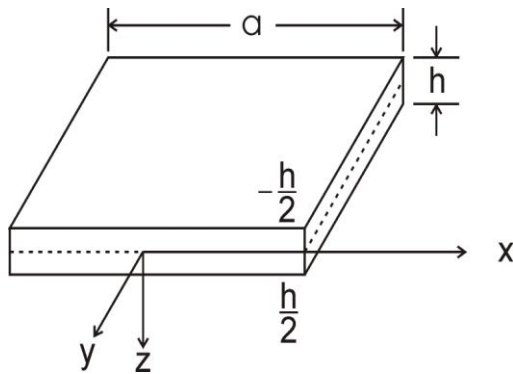


Рис 2.1

Пластина называется тонкой, если  $\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 1$ . Обычно считается, что  $\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 0,1; 0,001; 0,0001$ . Тонкие пластины в рамках их упругого деформирования подразделяются на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие. Если упругий прогиб  $w$  таков, что  $\frac{w}{h} \leq 0,25$ , то пластина жесткая. В этом случае деформации срединного слоя пластины пренебрежимо малы и в расчетах их можно не учитывать. Несущие свойства пластины обеспечиваются лишь ее изгибной жесткостью.

При  $0,25 \leq \frac{w}{h} \leq 1$  пластина гибкая. Деформации срединного слоя пластины сравнимы с изгибными деформациями и пренебрегать ими нельзя.

Если пластина деформируется упруго при прогибах значительно превышающих толщину ( $\frac{w}{h} \gg 1$ ), то такая пластина абсолютно гибкая (мембрана). Ее несущие свойства обусловлены наличием напряжений в срединном слое.

Деление пластин на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие в значительной степени условно. Поведение пластины под нагрузкой определяется не только ее геометрическими параметрами. Величина упругих деформаций существенно зависит от механических свойств материала пластины и условий ее закрепления.

Задача изгиба пластины – трехмерная задача теории упругости. Для ее упрощения примем следующие допущения:

1. Плоское сечение, перпендикулярное срединной поверхности пластины до деформации, остается таковым и после деформации.
2. Нормальное напряжение  $Z_z$  много меньше напряжений  $X_x, Y_y, X_y$  и в расчетах им пренебрегают.
3. В процессе деформирования тонкая пластина не испытывает обжатия, то есть ее толщина не изменяется.

Эти допущения носят название гипотез Кирхгофа-Лява. Они являются обобщением гипотезы плоских сечений, принятой в сопротивлении материалов.

### **Слабый изгиб пластины без растяжения, сжатия и сдвига срединной поверхности.**

#### **Применение гипотез Кирхгофа-Лява**

Рассматривается изгиб тонкой пластины при прогибах, меньших четверти толщины ( $w \leq 0,25h$ ). Как отмечалось выше, такие пластины называются жесткими. Иногда их

называют пластинами средней толщины или, по терминологии Б.Г. Галеркина «тонкими плитами». Получение уравнения изгиба основано на гипотезах Кирхгофа-Лява.

Первая гипотеза, гипотеза плоских сечений, предполагает отсутствие поперечного сдвига, то есть взаимного смещения слоев, параллельных срединному. Это накладывает ограничения на компоненты тензора деформации:

$$e_{xz} = 0 \quad (2.1)$$

$$e_{yz} = 0 \quad (2.2)$$

В соответствии с геометрическими соотношениями Коши (1.4) уравнения (2.1) и (2.2) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

После интегрирования имеем:

$$u = -\int \frac{\partial w}{\partial x} dz + \varphi(x, y)$$

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + \psi(x, y)$$

В силу третьей гипотезы прогиб не зависит от поперечной координаты  $z$ , то есть  $w = w(x, y)$ , поэтому

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(x, y) \quad (2.5)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + \psi(x, y) \quad (2.6)$$

В точках срединной поверхности при  $z=0$ ,  $u = \varphi(x, y)$  и  $v = \psi(x, y)$ . Так как срединная поверхность не испытывает деформации растяжения, сжатия и сдвига, то и перемещение ее точек отсутствует. Это означает, что при  $z=0$ ,  $u = v = 0$  и, следовательно,  $\varphi = \psi = 0$ . Окончательно, тангенциальные перемещения принимают вид:

$$u = -zw'_x \quad (2.7)$$

$$v = -zw'_y \quad (2.8)$$

### Определение напряжений.

Воспользуемся второй гипотезой Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой напряжение  $Z_z = 0$ . На основании физических соотношений (1.3) можно записать:

$$Z_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или

$$\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Из последнего соотношения получаем:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\lambda + 2\mu} \quad (2.9)$$

Здесь возникает противоречие. Согласно третьей гипотезе прогиб не зависит от поперечной координаты, то есть  $w = w(x, y)$ , следовательно, производная  $\frac{\partial w}{\partial z}$  должна быть равна нулю. Это не согласуется с формулой (2.9). Данное несоответствие является одним из противоречий гипотез Кирхгофа-Лява. Оно не приводит к серьезным погрешностям в решении и с ним приходится мириться. Таким образом, считаем, что  $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ . Выразив  $\frac{\partial w}{\partial z}$  через тангенциальные перемещения  $u$  и  $v$ , найдем напряжение  $X_x$  из физических соотношений (1.3).

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Подставляя  $\frac{\partial w}{\partial z}$  из (2.9), после несложных преобразований получаем:

$$X_x = \frac{E}{1+\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.10)$$

По аналогии

$$Y_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2.11)$$

$$X_y = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.12)$$

Подставляя в соотношения (2.10)-(2.12) касательные перемещения  $u, v$  из (2.7), (2.8), получаем окончательные выражения для напряжений  $X_x, Y_y, X_y$ :

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w''_{xx} + \nu w''_{yy}) \\ Y_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w''_{yy} + \nu w''_{xx}) \\ X_y &= -\frac{Ez}{1+\nu} w''_{xy} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Вновь вернемся к первой гипотезе, согласно которой  $e_{xz} = e_{yz} = 0$ . В соответствии с законом Гука

$$X_z = \mu e_{xz} = 0 \quad (2.14)$$

$$Y_z = \mu e_{yz} = 0 \quad (2.15)$$

По второй гипотезе напряжение  $Z_z$  также отсутствует. Таким образом, все компоненты тензора напряжений, ориентированные перпендикулярно срединному слою равны нулю. Это снова приводит к противоречию. Пластина загружена поперечной нагрузкой, но ее действие не вызывает соответствующих внутренних усилий. Нарушается условие равновесия пластины. Отсюда делаем заключение, что, как минимум, напряжения

$X_z, Y_z$  не равны нулю. Найдем их из первых двух уравнений равновесия (1.1) в отсутствие массовых сил.

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляя сюда напряжения  $X_x, Y_x, X_y$  из (2.13), получаем

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w,$$

или, после интегрирования

$$X_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \varphi(x, y)$$

$$Y_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \psi(x, y) \quad (2.16)$$

Неизвестные функции  $\varphi$  и  $\psi$  находятся из статических граничных условий (1.2).

### Реализация статических граничных условий

Предполагаем, что распределенная поперечная нагрузка действует на обеих поверхностях пластины (рис.2.2).

На верхней плоскости, при  $z = -\frac{h}{2}$ :

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = -1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_2(x, y)$$

На нижней поверхности пластины, при  $z = \frac{h}{2}$ :

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = 1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_1(x, y)$$

Подставляя эти данные в уравнения (1.2), получаем при  $z = -\frac{h}{2}$ :

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = -q_2(x, y) \quad (2.17)$$

При  $z = \frac{h}{2}$ :

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = q_1(x, y) \quad (2.18)$$

С учетом (2.17) и (2.18) неизвестные функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  в (2.16) принимают вид:

$$\varphi(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

$$\psi(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w$$

Это позволяет записать окончательные выражения компонент тензора напряжений  $X_z$  и  $Y_z$

$$X_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.19)$$

$$Y_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.20)$$

Соотношения (2.13), (2.19) и (2.20) позволяют оценить распределение напряжений по толщине пластины. Напряжения  $X_x, Y_y, X_y$  распределяются по линейному закону, обращаясь в ноль на уровне срединного слоя и достигая экстремальных значений на поверхностях пластины, то есть при  $z = \pm \frac{h}{2}$ . Напряжения  $X_z$  и  $Y_z$  распределяются по квадратичному закону. Максимальных значений они достигают на уровне срединного слоя, а в ноль обращаются при  $z = \pm \frac{h}{2}$ .

### **Лекция 3.**

#### **Внутренние усилия и моменты.**

Введем в рассмотрение интегральные характеристики

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz \\ T_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \\ S &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz \\ N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz \end{aligned} \quad (3.2)$$

$T_1, T_2, S$  - мембранные усилия,

$N_1, N_2$  - поперечные силы.

Мембранные усилия представляют из себя растягивающие, сжимающие и сдвигающие усилия, приведенные к срединному слою пластины. Как видно из (3.1), (3.2),

введенные силовые факторы имеют размерность  $\left[ \frac{H}{M} \right]$ , то есть характеризуют интенсивность внутренних усилий.

Еще одна группа интегральных характеристик:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz \\
 G_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz \\
 H &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$G_1, G_2$  - внутренние изгибающие моменты.

$H$  - крутящий момент.

В соответствии со своей размерностью  $\left[ \frac{H}{M} \right]$ , или  $\left[ \frac{H \times M}{M} \right]$ , эти величины характеризуют интенсивность внутренних моментов.

Введенные таким образом интегральные характеристики по-другому называются обобщенными усилиями и моментами. Все они приведены к срединному слою пластины и их действие показано на рис. 3.1.

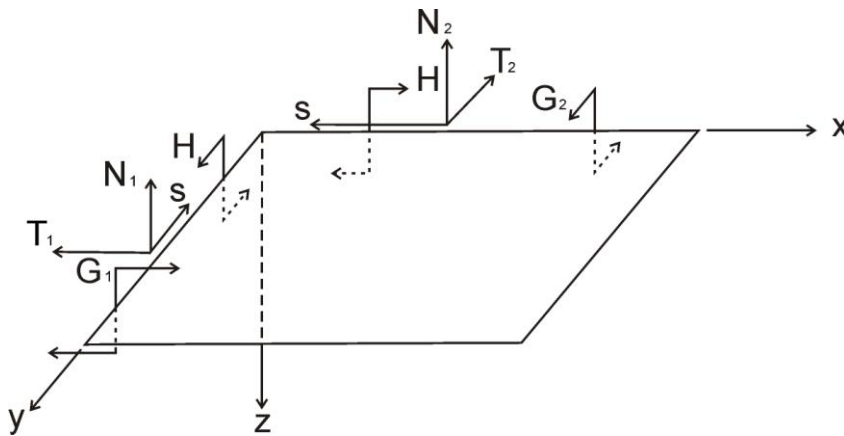


Рис.3.1

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 w_{xx} &= \chi_1 \\
 w_{yy} &= \chi_2 \\
 w_{xy} &= \tau
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$\chi_1, \chi_2$  - параметры, характеризующие изменение кривизны срединного слоя вдоль координатных линий  $x$  и  $y$ .

$\tau$  - параметр кручения срединного слоя.

С учетом этих обозначений и соотношений (2.13), (2.19) и (2.20) запишем выражения обобщенных усилий и моментов и вычислим их значения.

Мембранные усилия:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$$

$$T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_2 + \nu\chi_1) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$$

$$S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = -\frac{E}{1+\nu} \tau \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$$

Мембранные усилия  $T_1, T_2, S$  равны нулю. Это соответствует исходному предположению об отсутствии в срединной плоскости пластины деформаций растяжения, сжатия и сдвига.

Обобщенные моменты:

$$G_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu\chi_2)$$

$$G_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu\chi_1)$$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau = -\frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \tau$$

Введем обозначение:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.5)$$

$D$  - изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины, характеризующая способность пластины сопротивляться изгибу.

Как известно из курса сопротивления материалов, для балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины жесткость на изгиб определяется величиной  $\frac{Eh^3}{12}$ , сравнимой с (3.4). Пластину можно рассматривать как совокупность множества балок единичной ширины, соединенных друг с другом боковыми поверхностями. Взаимодействие балок учитывается множителем  $(1-\nu^2)$  в выражении изгибной жесткости пластины (3.4).

С учетом (3.4) обобщенные моменты записываются в виде:

$$\begin{aligned} G_1 &= -D(\chi_1 + \nu\chi_2) \\ G_2 &= -D(\chi_2 + \nu\chi_1) \\ H &= -D(1-\nu)\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поперечные силы:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \text{ или}$$

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

$$N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (3.7)$$

### Уравнение равновесия пластины.

Первые два уравнения равновесия (1.1) были использованы ранее для выражения сдвигающих напряжений  $X_z, Y_z$  через прогиб (2.19), (2.20). Рассмотрим третье уравнение равновесия в отсутствии массовых сил.

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

С учетом закона парности касательных напряжений оно может быть записано в виде:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

Проинтегрируем его по толщине пластины:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dz = 0$$

Преобразуем первое и второе слагаемые:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Y_z}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}$$

Третье слагаемое:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z \left( \frac{h}{2} \right) - Z_z \left( -\frac{h}{2} \right) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q,$$

где  $q$  - интенсивность внешней суммарной нагрузки, действующей на верхней и нижней поверхностях пластины (рис. 2.2).

Таким образом, после интегрирования по толщине третье уравнение равновесия приобретает вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0 \quad (3.8)$$

Подставляя вместо  $N_1$  и  $N_2$  их значения из (3.7) получаем:

$$-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w)\right) + q = 0,$$

или

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q \tag{3.9}$$

В развернутом виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{q}, \tag{3.10}$$

где  $\bar{q} = \frac{q}{D}$

Уравнение (3.9) или (3.10) – основное разрешающее уравнение слабого изгиба тонкой пластины. Оно обладает следующими свойствами:

1. Линейность (следствие линейности геометрических соотношений);
2. Инвариантность по отношению к перестановке координат  $(x \leftrightarrow y)$ . Это следствие изотропии материала.

Уравнение (3.9) было получено в 1815 году французской Софи Жермен и носит ее имя.

После нахождения из уравнения (3.9) функции прогиба  $w(x, y)$  можно определить все компоненты напряженно-деформированного состояния в произвольной точке пластины. Вместе с тем, решение этого уравнения приводит к появлению констант интегрирования, подлежащих определению. Их нахождение осуществимо с использованием краевых условий.

На контуре пластины могут быть реализованы следующие основные виды закреплений.

1. Шарнирное закрепление.

Если на участке контура  $s$  пластина закреплена шарнирно, то на этом участке отсутствуют прогиб и изгибающий момент:  $w(s) = 0, G_n = 0$ . В случае малого прогиба пластины аналогично формулируются и условия для контура, свободно лежащего на опоре.

2. Жесткое защемление.

В этом случае на соответствующем участке контура отсутствует прогиб  $w(s) = 0$ , а внутренняя нормаль к контуру не поворачивается в плоскости, перпендикулярной к плоскости пластины, то есть  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ .

3. Свободный край.

Если некоторый участок контура пластины свободен, то граничные условия формулируются исходя из отсутствия на этом участке внешних силовых факторов.

В соответствии с уравнением изгиба пластины (3.9) граничные условия удобно формулировать таким образом, чтобы ограничения накладывались на функцию прогиба  $w(x, y)$  и ее производные. Этому требованию соответствуют лишь условия жесткого защемления.

## Лекция 4.

### Формулировка краевых условий на контуре пластины.

Рассмотрим пластину толщиной  $h$  произвольного очертания и некоторым образом закрепленную. Выделим элементарный участок контура. С некоторой точкой этого

участка свяжем две координатные системы. Одна из них  $(x, y)$ - базовая, другая  $(x_1, y_1)$  построена так, что ее оси параллельны единичным векторам касательной  $\bar{s}$  и нормали  $\bar{n}$  в выбранной точке участка и, соответственно, повернуты относительно осей базовой системы на угол  $\theta$  (рис.4.1).

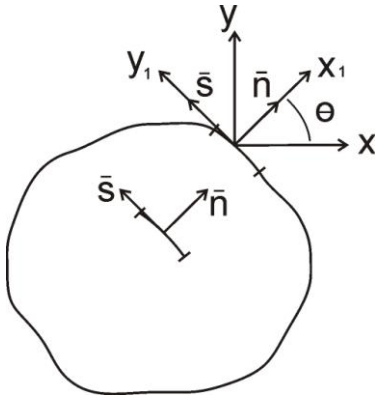


Рис 4.1

В произвольной точке пластины построим элемент цилиндрической поверхности, параллельный выделенному участку контура. В окрестности данной точки на площадках, перпендикулярных осям базовой системы координат, напряженное состояние определяется компонентами тензора напряжений  $X_x, Y_y, X_y, X_z, Y_z$ . На площадке, перпендикулярной оси  $x_1$  компоненты тензора напряжений могут быть записаны в соответствии с известными формулами для преобразования компонент тензора второго ранга.

$$\begin{aligned}
 X_{1x_1} &= X_x \cos^2 \theta + Y_y \sin^2 \theta + X_y \sin 2\theta \\
 X_{1y_1} &= \frac{1}{2}(X_x - Y_y) \sin 2\theta + X_y \cos 2\theta \\
 X_{1z_1} &= Y_z \sin \theta + X_z \cos \theta
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Проинтегрируем соотношения (4.1) по толщине пластины. Первые два позволят определить мембранные усилия.

$$\begin{aligned}
 T_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz \cos^2 \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \sin^2 \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \sin 2\theta = 0 \\
 S_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} dz = \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \right) \sin 2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \cos 2\theta = 0
 \end{aligned}$$

Мембранные усилия  $T_n$  и  $S_n$  равны нулю, так как выражаются через мембранные усилия  $T_1, T_2, S$  (3.1), равные нулю. Из третьего уравнения получаем поперечную силу на площадке, перпендикулярной оси  $x_1$ .

$$N_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1z_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz \sin \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz \cos \theta.$$

С учетом (3.2) выражение для поперечной силы  $N_n$  будет иметь вид:

$$N_n = N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta. \quad (4.2)$$

Умножая первые два соотношения (4.1) на  $z$  и интегрируя по толщине пластины, получим изгибающий и крутящий моменты, действующие на выделенном элементе цилиндрической поверхности.

$$G_n = G_1 \cos^2 \theta + G_2 \sin^2 \theta + H \sin 2\theta \quad (4.3)$$

$$H_n = \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \sin 2\theta + H \cos 2\theta \quad (4.4)$$

Здесь  $G_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} z dz$ ,  $H_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} z dz$ , а  $G_1, G_2, H$  вычисляются в соответствии с (3.3).

$G_n$  - изгибающий момент, действующий на элементе цилиндрической поверхности и стремящийся повернуть этот элемент вокруг вектора касательной  $\bar{s}$ .  $H_n$  - крутящий момент, поворачивающий элемент поверхности вокруг вектора нормали  $\bar{n}$ .  $N_n$  - поперечная сила, действующая в направлении оси  $z$ .

Выделенный элемент цилиндрической поверхности будем мысленно приближать к элементарному участку контура пластины. При этом моменты  $G_n$  и  $H_n$ , а также поперечная сила  $N_n$  будут стремиться совпасть с соответствующими внешними моментами и поперечной силой  $G_0, H_0, N_0$ . Таким образом, на контуре пластины должны выполняться условия:

$$G_n = G_0, H_n = H_0, N_n = N_0 \quad (4.5)$$

Корректная постановка задачи требует задания только двух краевых условий на участке контура пластины. Из трех условий (4.5) лишь два независимы. Второе и третье условия (4.5) могут быть заменены одним

$$N_n - \frac{\partial H_n}{\partial s} = N_0 - \frac{\partial H_0}{\partial s} \quad (4.6)$$

К нему необходимо добавить первое условие (4.5)

$$G_n = G_0 \quad (4.7)$$

Краевые условия (4.6), (4.7) называются статическими краевыми условиями Кирхгофа на контуре пластины.

### Пример реализации условий Кирхгофа.

Рассмотрим прямоугольную пластину (рис. 4.2), на контуре которой реализовано три вида граничных условий.

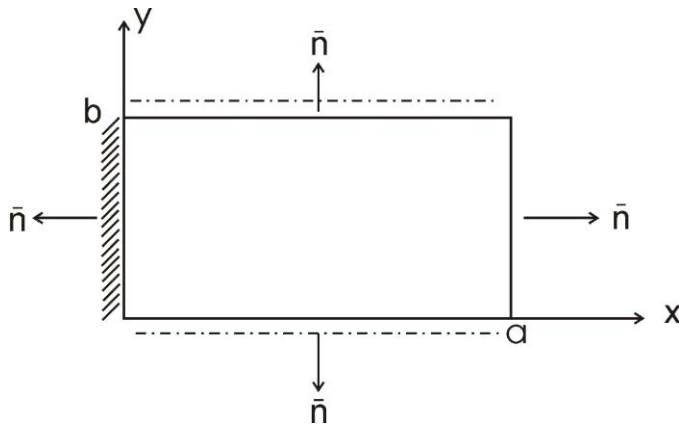


Рис 4.2

На левой кромке пластина жестко закреплена.

$$x = 0: w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

Вектор внешней нормали  $\bar{n}$  параллелен оси абсцисс, поэтому условие  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

записывается как  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

На кромках, параллельных оси абсцисс пластина закреплена шарнирно.

$$y = 0, y = b: w = 0, G_n = 0$$

Так как для данных участков контура угол между осью абсцисс и вектором внешней нормали  $\bar{n}$  (угол  $\theta$ ) равен  $\pm \frac{\pi}{2}$ , то, как следует из формулы (4.3),

$$G_n = G_2 = -D(w''_{yy} + \nu w''_{xx})$$

Отсутствие изгибающего момента  $G_n$  можно записать в виде  $w''_{yy} + \nu w''_{xx} = 0$ , а, поскольку кромки  $y = 0, b$  остаются прямолинейными, то из условия  $w = 0$  следует, что и  $w''_{xx} = 0$ . Таким образом, условия шарнирного закрепления окончательно записываются в виде:

$$y = 0, b: w = 0, w''_{yy} = 0 \quad (4.9)$$

Если шарнирное закрепление реализовано на кромке, параллельной оси  $y$ , то условие  $w''_{yy} = 0$  необходимо заменить условием  $w''_{xx} = 0$

Правая кромка пластины свободна.

$$x = a: G_n = 0, N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0$$

На этом участке контура вектор касательной  $\bar{s}$  параллелен оси ординат, поэтому  $\frac{\partial H_n}{\partial s} = \frac{\partial H_n}{\partial y}$

Так как изгибающий момент  $G_n = 0$ , то, в соответствии с (4.9),  $w''_{xx} = 0$ . Имея в виду, что угол  $\theta = 0$ , с учетом (4.2) и (4.4) условие  $N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0$  можно переписать в виде

$$N_1 - \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

После подстановки вместо  $N_1$  и  $H$  их значений из (3.7) и (3.6) данное выражение легко преобразуется к виду:

$$D(w''''_{xxx} + \nu w''''_{xyy}) = 0,$$

или

$$w''''_{xxx} + \nu w''''_{xyy} = 0$$

Окончательный вид граничных условий на свободном крае пластины следующий:

$$x = a : w''_{xx} = 0, w''''_{xxx} + \nu w''''_{xyy} = 0 \quad (4.10)$$

Если свободная кромка пластины параллельна оси абсцисс, то в соотношениях (4.10) координаты  $x$  и  $y$  меняются местами.

*Пример 1. Изгиб прямоугольной пластины поперечной нагрузкой.*

Шарнирно закрепленная по контуру, прямоугольная пластина нагружена поперечной нагрузкой, интенсивности  $q$  (рис.4.3).

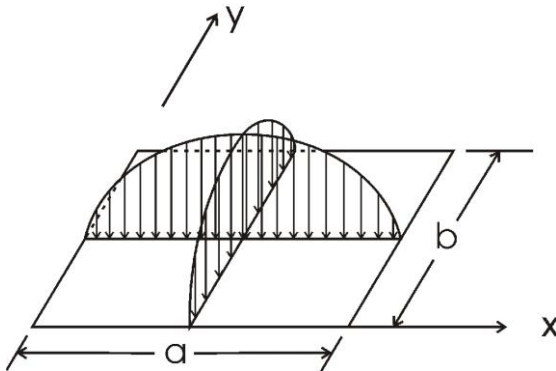


Рис 4.3

Интенсивность меняется по синусоидальному закону:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.11)$$

В центре пластины, при  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$  реализуется максимальное давление. В этой точке интенсивность  $q = q_0$ . Уравнение Софи Жермен записывается в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.12)$$

Так как пластина шарнирно закреплена по контуру, то граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0, a : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = 0, b : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение уравнения (4.12) будем искать в форме правой части, т.е.

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.14)$$

Функция прогиба, записанная в виде (4.14) соответствует характеру деформации пластины и граничным условиям (4.13). Амплитуда прогиба в центре пластины  $w_0$

подлежит определению. После подстановки функции прогиба (4.14) в уравнение (4.12) и сокращения на тригонометрические множители, получаем

$$w_0 \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 = \frac{q_0}{D}$$

Амплитуда прогиба

$$w_0 = \frac{q_0 a^4 b^4}{D \pi^4 (a^2 + b^2)^2}. \quad (4.15)$$

С учетом (4.15) решение (4.14) принимает вид:

$$w = \frac{q_0 a^4 b^4}{D \pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.16)$$

Если интенсивность распределенной нагрузки задана в виде

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4.17)$$

то функция прогиба получается в виде

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.18)$$

Имея функцию прогиба можно определить все компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины.

*Пример 2.*

Поперечная нагрузка, действующая на пластину, равномерна вдоль одной координаты, а вдоль другой изменяется по синусоидальному закону. Интенсивность записывается в виде:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{b} \quad (4.19)$$

Уравнение Софи Жермен

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.20)$$

Граничные условия на кромках пластины  $x=0, a$  на данном этапе решения задачи не уточняются. На кромках  $y=0, b$  пластина закреплена шарнирно

$$y=0, b: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Как и в предыдущем примере, решение ищем в форме правой части уравнения

$$w = w_0(x) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.21)$$

После подстановки (4.21) в (4.20) и сокращения на тригонометрический множитель, получаем обычное линейное, неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции  $w_0(x)$  с постоянными коэффициентами.

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_0 = \frac{q_0}{D} \quad (4.22)$$

Решение уравнения (4.22) записывается в виде

$$w_0(x) = w_{0,1}(x) + w_{0,2}(x)$$

Здесь  $w_{0,1}$  - общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_{0,1}}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{d^2 w_{0,1}}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_{0,1} = 0 \quad (4.23)$$

$w_{0,2}(x)$  - частное решение уравнения (4.22). Очевидно, что  $w_{0,2}$  - постоянная величина, легко определяемая подбором

$$w_{0,2} = \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \quad (4.24)$$

Легко убедиться, что подстановка (4.24) в (4.22) превращает последнее в тождество. Для нахождения решения уравнения (4.23) записываем соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{2\pi^2}{b^2} \lambda^2 + \frac{\pi^4}{b^4} = 0$$

Данное биквадратное уравнение имеет две пары одинаковых корней

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi}{b}, \lambda_{3,4} = -\frac{\pi}{b}$$

Соответственно,  $w_{0,1}(x)$  имеет вид:

$$w_{0,1}(x) = C_1 sh \frac{\pi}{b} x + C_2 xsh \frac{\pi}{b} x + C_3 ch \frac{\pi}{b} x + C_4 xch \frac{\pi}{b} x \quad (4.25)$$

После нахождения  $w_0(x)$  можем записать окончательное выражение функции прогиба

$$w = (C_1 sh \frac{\pi}{b} x + C_2 xsh \frac{\pi}{b} x + C_3 ch \frac{\pi}{b} x + C_4 xch \frac{\pi}{b} x + \frac{q_0 b^4}{D\pi^4}) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.26)$$

Четыре уравнения для определения констант  $C_1, C_2, C_3, C_4$  могут быть записаны, если сформулировать краевые условия на кромках пластины  $x=0, x=a$ .

## Лекция 5.

### Слабый изгиб пластины с учетом растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое.

Растягивающие, сжимающие и сдвигающие усилия в срединном слое изгибаемой пластины следует учитывать, если прогиб становится больше четверти ее толщины ( $\frac{w}{h} \geq 0,25$ ). Мембранные напряжения при этом соизмеримы с изгибными. Кроме того, значительные мембранные усилия могут возникать в результате приложения внешней нагрузки в плоскости срединного слоя.

Процедура получения основных разрешающих уравнений полностью соответствует той, что была реализована в случае изгиба пластины без деформаций срединного слоя. В основу принятой модели положены гипотезы Кирхгофа-Лява. Первая гипотеза (отсутствие поперечного сдвига) позволяет выразить тангенциальные перемещения  $u, v$  через прогиб  $w$  в виде (2.5), (2.6). Однако, в данном случае для определения функций  $\varphi$  и  $\psi$  необходимо воспользоваться условиями, наложенными на перемещения точек срединного слоя.

$$z = 0 : u = u_0(x, y); v = v_0(x, y) \quad (5.1)$$

Здесь  $u_0, v_0$  - перемещения точек срединного слоя. С учетом условий (5.1) неизвестные функции в (2.5) и (2.6) определяются

$$\varphi = u_0(x, y); \psi = v_0(x, y).$$

При этом можно записать окончательные выражения для тангенциальных перемещений

$$\begin{aligned} u &= u_0 - zw'_x \\ v &= v_0 - zw'_y \end{aligned} \quad (5.2)$$

В соответствии с геометрическими соотношениями Коши (1.4) деформации записываются в виде

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_1 - z\chi_1 \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_2 - z\chi_2 \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \omega - 2z\tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$  - деформации растяжения, сжатия и сдвига в точках срединного слоя пластины, причем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \omega &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

На основании физических соотношений (1.3) и с учетом формул (5.3) определяем напряжения. При этом используется вторая гипотеза Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой напряжение  $Z_z$  равно нулю

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) \\ Y_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) - \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_2 + \nu\chi_1) \\ X_y &= \frac{E}{2(1+\nu)} \omega - \frac{Ez}{1+\nu} \tau \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подставляя напряжения в формулы (3.1) и (3.3), получим выражения для мембранных усилий, изгибающих и крутящего моментов

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ T_2 &= K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \\ S &= \frac{K(1-\nu)}{2} \omega \\ K &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \text{ - жесткость пластины на растяжение - сжатие.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

В отличие от случая изгиба пластины без растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое мембранные усилия не равны нулю. Что касается изгибающих и крутящего моментов, то они остаются без изменений и имеют вид (3.5).

Таким образом, для исследования напряженно-деформированного состояния пластины необходимо определить касательные перемещения в срединном слое  $u_0(x, y), v_0(x, y)$  и прогиб  $w(x, y)$ . Для этого воспользуемся уравнениями равновесия (1.1), записанными в

отсутствии массовых сил. Умножая каждое уравнение на  $dz$  и интегрируя по толщине пластины, получим

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (5.7)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dz = 0$$

Данные соотношения представляют собой уравнения равновесия, осредненные по толщине пластины. Преобразуем первое уравнение, интегрируя каждое слагаемое по отдельности

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = \frac{\partial S}{\partial y}$$

При вычислении третьего слагаемого необходимо учесть граничные условия (2.17), (2.18), в соответствии с которыми на поверхностях пластины напряжения  $X_z$  и  $Y_z$  равны нулю.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dX_z = X_z \left( \frac{h}{2} \right) - X_z \left( -\frac{h}{2} \right) = 0$$

Подобным образом вычисляются и все слагаемые второго уравнения. В третьем уравнении

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_x}{\partial x} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

Аналогично

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_y}{\partial y} dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}$$

С учетом граничных условий (2.17), (2.18) преобразуем последнее слагаемое третьего уравнения

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z \left( \frac{h}{2} \right) - Z_z \left( -\frac{h}{2} \right) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q$$

В итоге осредненные уравнения равновесия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q &= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Получим уравнения моментов. Для этого первые два уравнения равновесия (1.1), записанные в отсутствии массовых сил, умножаем на  $zdz$  и интегрируем по толщине.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) z dz &= 0 \\
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) z dz &= 0
\end{aligned}$$

Преобразуем первое уравнение.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} z dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz = \frac{\partial G_1}{\partial x} \\
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} z dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz = \frac{\partial H}{\partial y}
\end{aligned}$$

При вычислении третьего слагаемого первого уравнения выполняем процедуру интегрирования по частям

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} z dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z z dz = z X_z \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = -N_1$$

Здесь внеинтегральное слагаемое равно нулю в силу граничных условий (2.17), (2.18). Второе уравнение преобразуется аналогично. Таким образом, уравнения моментов записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 &= 0 \\
\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} - N_2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Подставляя в третье уравнение (5.8) поперечные силы  $N_1$  и  $N_2$ , выраженные из (5.9), преобразуем его к виду:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + q = 0 \tag{5.10}$$

Если в данном уравнении изгибающие и крутящий моменты выразить через прогиб с помощью соотношений (3.6) и (3.4), то, после несложных преобразований, оно может быть записано в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

Это уравнение Софи Жермен (3.9), полученное ранее. Оно позволяет определить прогиб пластины. Для определения мембранных усилий  $T_1, T_2, S$  необходимо

воспользоваться первыми двумя уравнениями системы (5.8), которых, однако, для этой цели недостаточно. В качестве недостающего уравнения используем уравнение неразрывности деформаций, получаемое исключением из системы уравнений (5.4) тангенциальных перемещений  $u_0$  и  $v_0$ .

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.11)$$

Деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$  с помощью системы (5.6) необходимо выразить через мембранные усилия

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{T_1 - \nu T_2}{K(1 - \nu^2)} \\ \varepsilon_2 &= \frac{T_2 - \nu T_1}{K(1 - \nu^2)} \\ \omega &= \frac{2S}{K(1 - \nu)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подставляя данные выражения в уравнение (5.11) получаем

$$\frac{\partial^2 (T_1 - \nu T_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (T_2 - \nu T_1)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.13)$$

Таким образом, система уравнений для определения мембранных усилий в срединной плоскости пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 (T_1 - \nu T_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (T_2 - \nu T_1)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

С помощью уравнения Софи Жермен (3.9) и системы уравнений (5.14) задача слабого изгиба пластины при наличии деформаций в срединном слое может быть решена полностью.

### Введение функции усилий.

Введем в рассмотрение функцию  $F$  таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ T_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ S &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если подставить данные выражения мембранных усилий в уравнения (5.14), то первые два из них превращаются в тождества. Третье уравнение после несложных преобразований записывается следующим образом

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (5.16)$$

Функция  $F$  называется функцией усилий (функцией Эри). Введение ее позволяет вместо трех уравнений системы (5.14) записать одно уравнение (5.16), но более высокого

порядка. Таким образом, система уравнений для решения задачи слабого изгиба пластины с учетом растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое состоит из уравнения Софи Жермен (3.9) и уравнения (5.16). Эти два уравнения независимы. Данная задача фактически разбивается на две:

1. Задача определения прогиба  $w$  - задача исследования чистого изгиба пластины.
2. Задача исследования напряженно деформированного состояния срединной поверхности пластины без изгиба – плоская задача теории упругости.

Напряжения (5.5), с учетом выражений для мембранных усилий (5.6) и моментов (3.6), могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{T_1}{h} + \frac{12z}{h^3} G_1 \\ Y_y &= \frac{T_2}{h} + \frac{12z}{h^3} G_2 \\ X_y &= \frac{S}{h} + \frac{12z}{h^3} H \end{aligned} \quad (5.17)$$

Первые слагаемые в правых частях представляют собой мембранные напряжения. Они равномерно распределяются по толщине пластины. Вторые слагаемые – изгибные напряжения, линейно изменяющиеся по толщине. Экстремальных значений напряжения

(5.17) достигают на поверхностях пластины, при  $z = \pm \frac{h}{2}$ .

$$\begin{aligned} X_{x\min}^{\max} &= \frac{T_1}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_1 \\ Y_{y\min}^{\max} &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_2 \\ X_{y\min}^{\max} &= \frac{S}{h} \pm \frac{6}{h^2} H \end{aligned} \quad (5.18)$$

## Лекция 6.

### Примеры решения плоской задачи теории упругости.

#### *Одностороннее сжатие прямоугольной пластины.*

Рассмотрим прямоугольную пластину, произвольным образом закрепленную по контуру (рис. 6.1).

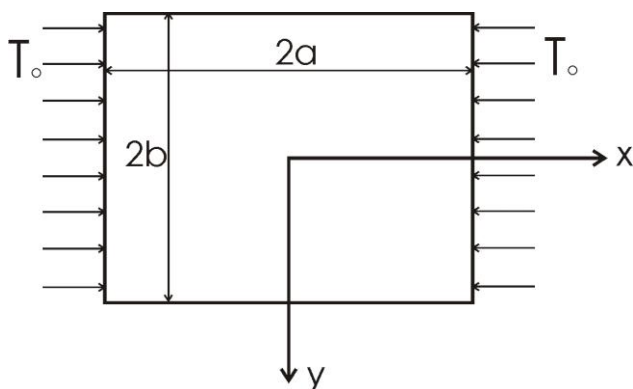


Рис 6.1

В срединной плоскости пластины в направлении оси абсцисс действуют сжимающие усилия интенсивности  $T_0$ . Запишем статические граничные условия (1.2) на загруженном участке контура  $x = a$ .

$$\begin{aligned} X_n &= -\frac{T_0}{h} = X_x \\ Y_n &= 0 = Y_x \\ Z_n &= 0 = Z_x \end{aligned} \quad (6.1)$$

На противоположной стороне пластины (при  $x = -a$ ) второе и третье условия (1.2) записываются аналогично, а первое условие имеет вид:

$$X_n = \frac{T_0}{h} = -X_x \quad (6.2)$$

Из соотношений (5.17) следует, что, в отсутствии изгибающего момента, напряжение  $X_x = \frac{T_1}{h}$ . Имея в виду (6.1) и (6.2) на загруженных сторонах пластины получаем

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0 \\ S &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Кроме того, на незагруженных кромках  $y = \pm b$

$$\begin{aligned} T_2 &= 0 \\ S &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Уравнения для определения мембранных усилий (5.14) выполняются во всей области пластины, включая контур. Из первого и второго уравнений (5.14) с учетом (6.3) и (6.4) следует, что в каждой точке срединного слоя пластины

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0 \\ T_2 &= 0 \\ S &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Таким образом, вся область пластины находится в условиях одностороннего, однородного сжатия.

#### *Равномерное двустороннее сжатие пластины.*

По всему контуру в срединной плоскости пластина подвергается действию сжимающих усилий интенсивности  $T_0$  (рис. 6.2).

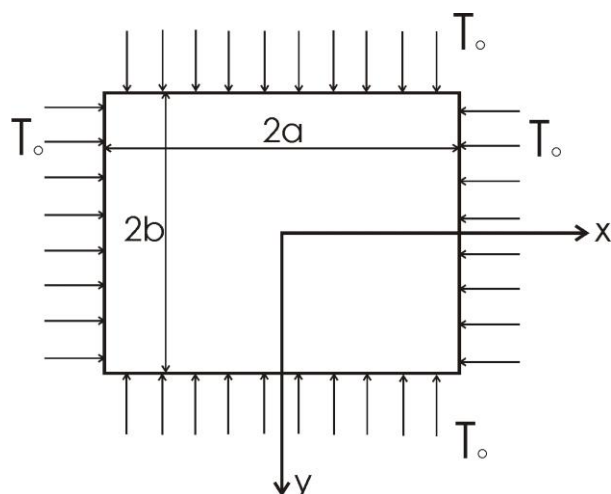


Рис 6.2

Статические граничные условия (1.2) на участках контура  $x = \pm a$  записываются как и в предыдущем примере в соответствии с соотношениями (6.1), (6.2). На стороне  $y = b$  они имеют вид

$$\begin{aligned} X_n &= 0 = X_y \\ Y_n &= -\frac{T_0}{h} = Y_y \\ Z_n &= 0 = Z_y \end{aligned} \quad (6.6)$$

На стороне  $y = -b$  первое и третье условия (1.2) остаются без изменения, а второе записывается в виде

$$Y_n = \frac{T_0}{h} = -Y_y \quad (6.7)$$

Таким образом, с учетом соотношений (5.17), (6.6) и (6.7) на сторонах пластины  $x = \pm a$  мембранные усилия записываются в виде (6.3), а на сторонах  $y = \pm b$  они имеют следующие значения:

$$T_2 = -T_0 \quad (6.8)$$

$$S = 0$$

Интегрируя уравнения равновесия (5.14) с учетом выражений для мембранных усилий на контуре (6.3) и (6.8), получаем, что в каждой точке срединного слоя пластины

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0 \\ T_2 &= -T_0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$S = 0$$

Вся область пластины находится в условиях двустороннего однородного сжатия.

*Сдвиг пластины.*

На контуре пластины заданы сдвигающие усилия интенсивности  $S_0$  (рис.6.3).

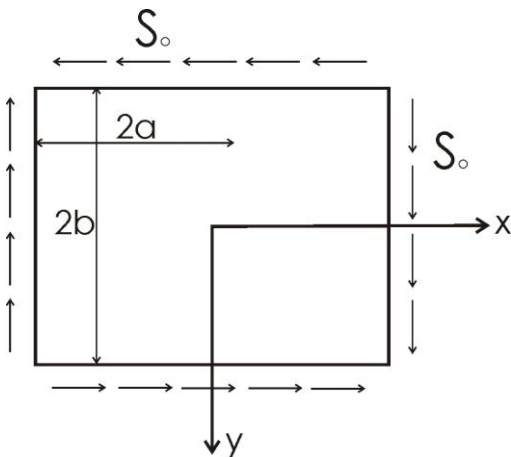


Рис 6.3

Реализуя, по аналогии с предыдущими примерами, статические граничные условия на кромках пластины, получаем выражения для мембранных усилий. На сторонах  $x = \pm a$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \\ S &= S_0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

На сторонах  $y = \pm b$ :

$$\begin{aligned} T_2 &= 0 \\ S &= S_0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Уравнения (5.14) удовлетворяются, если во всей области пластины  $T_1 = T_2 = 0$ .

Первые два из них переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Они не противоречат друг другу, если  $S = const$ . С учетом выражений (6.10) и (6.11) получаем, что во всей области пластины  $S = S_0$ . Таким образом, вся пластина находится в условиях однородного сдвига.

### Изгиб свободно опертой прямоугольной пластинки ( решение Навье )

Пусть  $a$  и  $b$  - длины сторон пластины, свободно опертой по контуру. Пластина отнесена к системе координат так, как показано на рисунке 6.4.

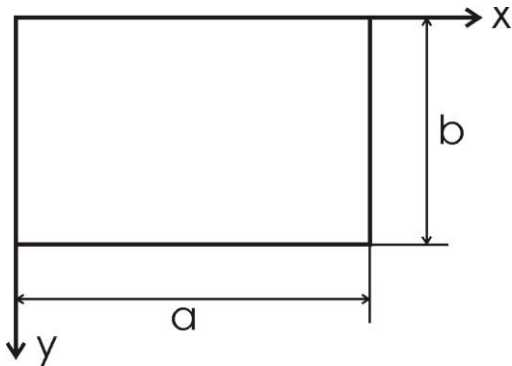


Рис 6.4

Интенсивность распределенной изгибающей нагрузки задана выражением

$$q = f(x, y) \quad (6.13)$$

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины принимает вид

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = f(x, y) \quad (6.14)$$

Так как края пластинки свободно оперты, то на контуре прогиб  $w$  и изгибающие моменты  $G_1$  и  $G_2$  должны равняться нулю. Таким образом:

$$\begin{aligned} x = 0, a : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = 0, b : w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Представим функцию  $f(x, y)$  в виде двойного тригонометрического ряда

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.16)$$

$a_{mn}$  - коэффициенты, подлежащие определению. Для нахождения какого-либо коэффициента  $a_{m_1 n_1}$  ряда, умножим обе части уравнения (6.16) на  $\sin \frac{n_1 \pi y}{b} dy$  и проинтегрируем от 0 до  $b$ . С учетом следующих равенств

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dy = 0, \text{ при } n \neq n_1, \\
& \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}, \text{ при } n = n_1, \text{ получаем} \\
& \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n_1\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn_1} \sin \frac{m\pi x}{a}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Умножаем обе части (6.17) на  $\sin \frac{m_1\pi x}{a} dx$  и интегрируем от 0 до  $a$ . В результате получаем следующее равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m_1n_1}, \\
& \text{откуда} \\
& a_{m_1n_1} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dx dy.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

В соответствии с соотношением (6.18) все коэффициенты ряда (6.16) определяются. Заданная нагрузка интенсивности  $q = f(x, y)$  представляется в виде суперпозиции синусоидальных нагрузок. Прогиб от каждой такой частичной синусоидальной нагрузки определяется по формуле (4.18). Полный прогиб получается суммированием соответствующих слагаемых и записывается в виде

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.19}$$

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба пластинки равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q_0$ . В этом случае  $f(x, y) = q_0$ . Коэффициенты  $a_{mn}$  в соответствии с формулой (6.18) записываются в виде

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \tag{6.20}$$

В выражении (6.20)  $m$  и  $n$  - нечетные целые числа. При четных  $m$  или  $n$  коэффициенты  $a_{mn}$  обращаются в ноль. Подставляя (6.20) в (6.19) находим прогиб

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{6.21}$$

Здесь  $m, n = 1, 3, 5, \dots$  Это соответствует характеру изгиба пластины под равномерно распределенной нагрузкой. Изогнутая поверхность в этом случае симметрична относительно осей  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ . Все слагаемые с четными  $m$  и  $n$  в ряде (6.21) должны исчезнуть, так как они обеспечивают его несимметричность относительно указанных осей. Максимальный прогиб реализуется в центре пластинки и получается подстановкой в выражение (6.21) значений  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \tag{6.22}$$

Этот ряд быстро сходится. Достаточная точность обеспечивается уже при  $m, n = 1$ . Для квадратной пластинки это дает

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0,00416 \frac{q_0 a^4}{D} \quad (6.23)$$

или, с учетом выражения (3.5) изгибной жесткости  $D$  при  $\nu = 0.3$

$$w_{\max} = 0,0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3} \quad (6.24)$$

Погрешность этого результата около 2,5 процентов.

### Изгиб круглой пластины

Решение задачи изгиба круглой пластины осуществляется в полярной системе координат. Вводя в рассмотрение полярный радиус  $r$  и полярный угол  $\varphi$  в соответствии с известными соотношениями  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ , получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

Уравнение изгиба пластины запишется в виде

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = q \quad (6.24)$$

Рассмотрим простейший случай, когда нагрузка распределена по поверхности пластины симметрично относительно центра. При этом  $w = w(r)$ , то есть прогиб не зависит от полярного угла  $\varphi$ . Уравнение (6.24) упрощается

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D} \quad (6.25)$$

Общий интеграл этого уравнения записывается в виде

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + w^* \quad (6.26)$$

Первые четыре слагаемых в правой части образуют общее решение соответствующего однородного уравнения, а  $w^*$  - частное решение уравнения (6.25). В случае равномерно распределенной нагрузки ( $q$  - постоянно)

$$w^* = \frac{qr^4}{64D}$$

Из условий конечности прогиба и кривизны в центре пластины в решении (6.26) полагаем  $C_1 = C_2 = 0$ , а постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определяются из условий на контуре пластины (при  $r = a$ ). Для заделанного края:

$$(w)_{r=a} = 0; \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0 \quad (6.27)$$

Для опертого края:

$$(w)_{r=a} = 0; \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (6.28)$$

Реализуя условия (6.27), получаем для пластины с заделанным контуром

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (6.29)$$

Аналогично, с учетом (6.28) находим прогиб для пластины с опертым краем

$$w = \frac{q}{64D} \left[ (a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \nu} \right] \quad (6.30)$$

Имея выражение прогиба находим значения изгибающих и крутящего моментов, которые при симметричном распределении нагрузки вычисляются по формулам

$$G_1 = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right); G_2 = -D\left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2}\right); H = 0$$

## Лекция 7

### Большие прогибы пластины

При получении уравнения изгиба пластины (3.9) мы не учитывали наличие в ее срединном слое мембранных усилий  $T_1, T_2, S$ . Это допустимо, если пластина изгибается таким образом, что  $\frac{w}{h} \leq 0,25$ , края пластины свободно перемещаются в плоскости контура и в срединном слое не действуют внешние нормальные или сдвигающие усилия. Если  $0,25 \leq \frac{w}{h} \leq 1$ , не учитывать мембранные усилия  $T_1, T_2, S$  нельзя, поскольку их вклад в несущие свойства пластины становится значительным. Пластина начинает работать как вантовая система, воспринимая поперечную нагрузку за счет деформации срединного слоя. Мембранные усилия в рамках решения плоской задачи теории упругости определяются из системы уравнений (5.14), либо, после введения функции усилий, из уравнения (5.16). Изогнутая поверхность пластины в этом случае по-прежнему хорошо описывается уравнением Софи Жермен (3.9).

Если прогиб  $w$  превосходит толщину пластины  $h$ , то система уравнений (3.9), (5.16) становится некорректной, так как погрешность геометрических соотношений, записанных линейно в виде (1.4), получается весьма существенной. Полученные в курсе теории упругости нелинейные геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Из этих соотношений уравнения (1.4) получаются как частный случай после отбрасывания нелинейных слагаемых. Применительно к задаче изгиба пластины их влияние несущественно, если  $w \leq h$ . При больших прогибах необходимо использовать геометрические соотношения в виде (7.1), однако, в этом случае, процесс получения уравнения изогнутой поверхности пластины в значительной степени усложняется. Упростить его можно с учетом следующих соображений. Как показывает анализ деформированного состояния пластины при изгибе, в уравнениях (7.1) одинаковый порядок имеют линейные слагаемые и нелинейные слагаемые, содержащие прогиб  $w$ . Порядок нелинейных слагаемых, зависящих от тангенциальных перемещений  $u, v$

существенно меньший, поэтому соответствующими слагаемыми в уравнениях (7.1) пренебрегаем.

Решение задачи изгиба пластины при прогибах, превышающих ее толщину, реализуем, как и в предыдущих случаях, в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Обобщенные усилия и моменты записываются без изменений в виде (5.6) и (3.6), а входящие в обобщенные усилия деформации срединного слоя  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$  в соответствии с вышеприведенными рассуждениями принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины можно получить следующим образом. Рассмотрим элементарный участок изогнутой срединной плоскости пластины площадью  $dxdy$ , представленный на рисунке 7.1.

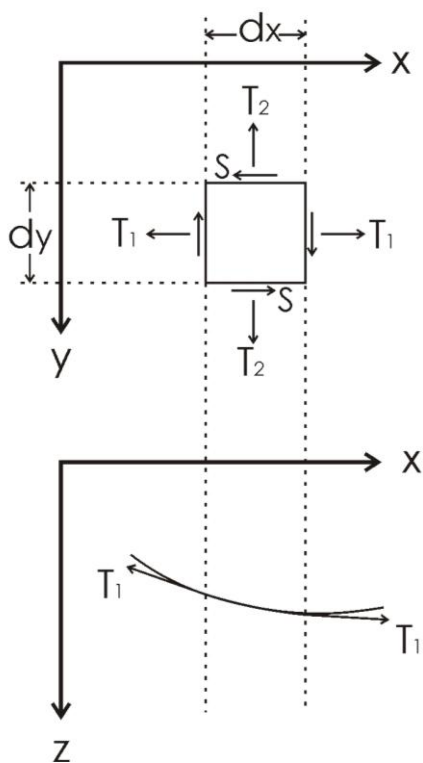


Рис 7.1

Действующие на сторонах этого участка усилия  $T_1, T_2, S$  дают на направление оси  $z$  составляющие

$$T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxdy, T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy, 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy \quad (7.3)$$

Решая задачу изгиба пластины при прогибах, меньших толщины, мы этими составляющими пренебрегали ввиду их малости в сравнении с поперечной нагрузкой  $q dxdy$ , приложенной к данному элементарному участку.

Имея в виду соотношения (7.3), учет проекций усилий  $T_1, T_2, S$  на ось  $z$  формально можно свести к замене поперечной нагрузки интенсивности  $q$  нагрузкой интенсивности

$$q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.4)$$

Уравнение изогнутой поверхности пластины (Софи Жермен) записывается, таким образом, в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.5)$$

Дальнейшее решение этой задачи полностью аналогично решению задачи слабого изгиба пластины с учетом деформации срединного слоя, представленному выше. Для определения мембранных усилий решается плоская задача теории упругости. Соответствующая система уравнений имеет вид, аналогичный системе уравнений (5.8). Первые два уравнения этой системы, получаемые из уравнений равновесия, сохраняются без изменения, а третье записывается иначе. Оно является следствием уравнения неразрывности деформации, которое в данном случае с учетом геометрических соотношений (7.2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad (7.6)$$

Наличие нелинейных слагаемых в этом уравнении, в отличие от уравнения (5.11), обусловлено присутствием нелинейных слагаемых в геометрических соотношениях (7.2).

В уравнении (7.6) деформации выражаются через мембранные усилия с помощью соотношений (5.12). После введения функции усилий (5.15) первые два уравнения системы (5.8) тождественно удовлетворяются, а уравнение (7.6), записанное в усилиях, принимает следующий вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Eh \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (7.7)$$

Уравнение (7.5) можно записать иначе, представив мембранные усилия  $T_1, T_2, S$  через функцию усилий

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7.8)$$

Система уравнений (7.7), (7.8) называется системой уравнений Кармана и является разрешающей системой уравнений изгиба пластины при больших прогибах. Уравнения Кармана являются нелинейными уравнениями в частных производных и описывают поведение пластины во всем диапазоне изменения ее прогибов. За исключением некоторых частных случаев они точно не интегрируются. Уравнения слабого изгиба пластины получаются из них отбрасыванием нелинейных слагаемых.

Граничные условия на контуре пластины формулируются аналогично случаю слабого изгиба в виде условий Кирхгофа (4.6), (4.7). Вместе с тем, поскольку пластина изгибается с деформацией срединного слоя, граничные условия на ее контуре необходимо сформулировать и для мембранных усилий.

Как показано на рисунке 7.2, на произвольном участке контура пластины в ее срединном слое должны быть заданы нормальное мембранное усилие  $T_n$  и сдвигающее мембранное усилие  $S_n$ , совпадающие с соответствующими внешними силами  $T_0$  и  $S_0$ . Таким образом, для мембранных усилий граничные условия формулируются в виде

$$T_n = T_0, S_n = S_0 \quad (7.9)$$

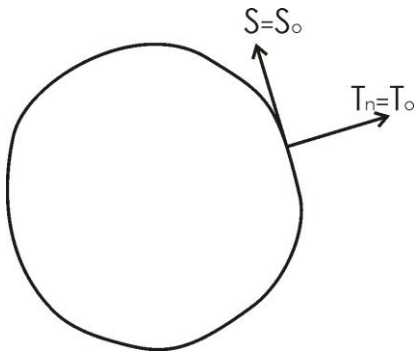


Рис 7.2

Контурные усилия, в свою очередь, выражаются через мембранные усилия  $T_1, T_2, S$  по известным формулам преобразования компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta + S \sin 2\theta \\ S_n &= \frac{1}{2}(T_2 - T_1) \sin 2\theta + S \cos 2\theta \end{aligned} \quad (7.10)$$

Соотношения (4.6), (4.7) и (7.9) представляют из себя статические граничные условия для системы уравнений (7.7) и (7.8). Конкретный вид они принимают в зависимости от способа закрепления того или иного участка контура пластины.

В качестве примера сформулируем граничные условия на кромке  $x = a$  прямоугольной пластины, изображенной на рисунке 4.2. Так как этот участок контура не закреплен и свободен от внешней нагрузки, то условия (4.6), (4.7) принимают вид (4.10), а в условиях (7.9)  $T_n = 0$ ,  $S_n = 0$ . Внешняя нормаль параллельна оси абсцисс, поэтому соотношения (7.10) упрощаются и записываются в виде

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 \\ S_n &= S, \end{aligned}$$

или, с учетом функции напряжений

$$\begin{aligned} T_n &= F_{yy} \\ S_n &= F_{xy} \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом представленных рассуждений, граничные условия на данном участке контура пластины записываются следующим образом

$$\begin{aligned} w''_{xx} &= 0 \\ w'''_{xyy} + \nu w'''_{xyy} &= 0 \\ F''_{yy} &= 0 \\ F''_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

## Постановка задачи устойчивости пластины

Если при деформации пластины в ее срединном слое возникают мембранные усилия, то наряду с расчетом на прочность необходимо проводить расчет на устойчивость. Расчет на устойчивость предполагает нахождение критических значений мембранных усилий и соответствующих им внешних нагрузок, при которых пластина меняет форму равновесного состояния. Предположим, что в срединной плоскости пластины действует внешняя сжимающая нагрузка интенсивности  $p$  (рис 7.3).



Рис 7.3

При значениях нагрузки меньших некоторой величины  $\bar{p}$  пластина остается плоской. Дадим нагрузке  $\bar{p}$  бесконечно малое приращение  $\Delta p$ . Пластина при этом переходит в другое, изогнутое, равновесное состояние, то есть теряет устойчивость. Таким образом, при нагрузке, меньшей  $\bar{p}$  пластина находится в плоском, устойчивом равновесном состоянии. При  $p = \bar{p}$  возможно два равновесных состояния пластины, а именно: плоское, неустойчивое, либо изогнутое, но устойчивое. Нагрузка  $\bar{p}$  называется критической. При потере устойчивости пластина принимает такую изогнутую форму, которой соответствует минимум потенциальной энергии деформации. Бесконечно малому приращению нагрузки  $\Delta p$  соответствуют бесконечно малые приращения прогиба  $\delta w$  и функции усилий  $\delta F$ . Полный прогиб пластины, таким образом, равен  $w + \delta w$ , где  $w$  - величина прогиба к моменту потери устойчивости (до критическое значение прогиба). По аналогии и функция усилий равна  $F + \delta F$ .

Выше было отмечено, что система уравнений Кармана (7.7), (7.8) описывает изгиб пластины во всем диапазоне изменения прогибов. Это означает, что данная система должна быть пригодна и для описания процесса потери устойчивости. Для нахождения приращений (вариаций) прогиба и функции усилий  $\delta w, \delta F$  с помощью системы (7.7), (7.8) последняя должна быть подвергнута операции варьирования (линеаризации). В результате этого действия уравнения Кармана принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + Eh(w''_{xx} \delta w''_{yy} + w''_{yy} \delta w''_{xx} - 2w''_{xy} \delta w''_{xy}) &= 0 \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} \delta w''_{xy} - w''_{yy} \delta F''_{xx} - w''_{xx} \delta F''_{yy} + 2w''_{xy} \delta F''_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Уравнения системы (7.11) обладают следующими свойствами:

1. Относительно искомым вариаций прогиба и функции усилий эти уравнения линейны.
2. Уравнения являются однородными.
3. Функции  $w$  и  $F$  - известные функции. Они определяются из решения системы уравнений Кармана для до критического состояния пластины, то есть при  $0 \leq p \leq \bar{p}$ .

Если в до критическом состоянии пластины прогиб отсутствует ( $w = 0$  при  $0 \leq p \leq \bar{p}$ ), то система уравнений (7.11) упрощается

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F &= 0 \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} \delta w''_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

С учетом выражений для функции усилий (5.15) уравнения (7.12) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F &= 0 \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - T_2 \delta w''_{yy} - T_1 \delta w''_{xx} - 2S \delta w''_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Если в до критическом состоянии пластины прогиб отсутствует, то такое до критическое состояние называется безмоментным. При этом полный прогиб после потери устойчивости равен  $\delta w$ . Знак вариации в выражении прогиба в уравнениях (7.12) и (7.13)

можно, таким образом, убрать. Кроме того, уравнение совместности деформаций в вариациях  $\nabla^2 \nabla^2 \delta F = 0$  не связано со вторым уравнением системы. Таким образом, для решения задачи устойчивости пластины в предположении безмоментности до критического состояния остается одно уравнение:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - T_{1,0} w''_{xx} - T_{2,0} w''_{yy} - 2S_0 w''_{xy} = 0 \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) называется уравнением нейтрального равновесия.  $T_{1,0}, T_{2,0}, S_0$  - мембранные усилия, которые реализуются в нейтральном слое в до критическом состоянии. Они определяются из уравнений плоской задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1,0}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{2,0}}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 (T_{1,0} + T_{2,0}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

## Лекция 8

### Примеры решения задач устойчивости пластины

#### Устойчивость пластины при одностороннем сжатии

Ранее были получены значения мембранных усилий  $T_1, T_2, S$  при одностороннем сжатии пластины в рамках решения плоской задачи теории упругости (6.5). С учетом их значений уравнение нейтрального равновесия (7.14) принимает следующий вид:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + T_0 w''_{xx} = 0 \quad (8.1)$$

Считаем, что кромки пластины шарнирно закреплены, поэтому в соответствии с рисунком 7.4 граничные условия записываются следующим образом

$$\begin{aligned} x = 0, a : w = 0, w''_{xx} &= 0 \\ y = 0, b : w = 0, w''_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Решение уравнения (8.1) ищем в следующей форме

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8.3)$$

Здесь  $m$  и  $n$  - волновые числа. Они характеризуют число полуволн в продольном и поперечном направлениях пластины. Вводя (8.3) в (8.1), после выполнения операции дифференцирования и сокращения на тригонометрические множители, получаем уравнение

$$D(m_1^2 + n_1^2)^2 - T_0 m_1^2 = 0 \quad (8.4)$$

$$m_1 = \frac{m\pi}{a}, n_1 = \frac{n\pi}{b}$$

Из (8.4) получаем

$$T_0 = D(m_1^2 + 2n_1^2 + \frac{n_1^4}{m_1^2})$$

При целых значениях волновых чисел  $m$  и  $n$  получаем спектр критических нагрузок, из которых интерес представляет наименьшая. Введем следующие обозначения:

$$m_1^2 = z, n_1^2 = z_1$$

При этом критическое сжимающее усилие можно представить в виде

$$T_0 = D\left(z + 2z_1 + \frac{z_1^2}{z}\right) \quad (8.5)$$

$T_0$  - функция двух переменных  $z$  и  $z_1$ . Для ее минимизации необходимо выполнить следующие условия

$$\frac{\partial T_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial z_1} = 0 \quad (8.6)$$

Из первого условия (8.6) следует, что  $z = z_1$ . Второе условие дает

$$\frac{\partial T_0}{\partial z_1} = 2 + \frac{2z_1}{z} > 0$$

Это означает, что с ростом  $z_1$  усилие  $T_0$  растет. Минимум  $T_0$  реализуется при значении  $z_1 = \frac{\pi^2}{b^2}$ , которое соответствует одной полуволне в направлении оси  $y$  ( $n=1$ ).

Из условия  $z = z_1$  следует  $m_1 = n_1$ . Последнее позволяет определить волновое число  $m$ , которое при  $n=1$  равно отношению сторон пластины  $\frac{a}{b}$ . Однако,  $m$  - целое число,

поэтому данное решение имеет смысл при условии, что  $\frac{a}{b} = 1, 2, 3, \dots$

Пусть  $a=b$ . В этом случае  $m=n=1$ , а  $z = z_1 = \frac{\pi^2}{a^2}$ . С учетом (8.5) критическое сжимающее усилие имеет вид

$$T_{0,k} = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \quad (8.7)$$

Критическое напряжение

$$X_x = \frac{4\pi^2 D}{a^2 h} = \frac{4\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)a^2} \quad (8.8)$$

Если рассмотреть одностороннее сжатие пластины при не закрепленных краях  $y=0, b$ , то в этом случае величина критического напряжения определяется по линейной теории Эйлера для сжатого стержня

$$X_x = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2 E h^2}{12a^2} \quad (8.9)$$

Сравнение формул (8.8) и (8.9) позволяет сделать вывод, что шарнирное закрепление продольных кромок квадратной пластины при одностороннем сжатии приводит к более чем четырехкратному росту критических напряжений.

### **Устойчивость пластины при всестороннем равномерном сжатии.**

С учетом выражений мембранных усилий (6.9) уравнение нейтрального равновесия (7.14) в этом случае записывается в виде

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + T_0 \nabla^2 w = 0 \quad (8.10)$$

Считаем, что кромки пластины шарнирно закреплены, поэтому граничные условия записываются как и в предыдущей задаче в форме (8.2). При таких предположениях можно показать, что уравнение (8.10) приводится к виду

$$D\nabla^2 w + T_0 w = 0 \quad (8.11)$$

или, после введения обозначения  $\lambda^2 = \frac{T_0}{D}$ ,

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0 \quad (8.12)$$

Для доказательства проинтегрируем уравнение (8.10). Получим:

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = \Gamma_0 \quad (8.13)$$

$\Gamma_0$  - гармоническая функция. Для ее определения воспользуемся граничными условиями (8.2). При  $x=0, a$  прогиб  $w=0$ , следовательно,  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . В результате получаем, что на этих кромках пластины граничные условия могут быть записаны в виде:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8.14)$$

Аналогично рассуждая можно утверждать, что такой же вид граничные условия примут и на кромках  $y=0, b$ . Итак, левая часть уравнения (8.13), и, следовательно, функция  $\Gamma_0$  обращаются в ноль на всем контуре пластины. Вместе с тем, уравнение (8.13) справедливо во всей области пластины включая контур. Таким образом,  $\Gamma_0 = 0$  в любой точке пластины и уравнение (8.12) действительно имеет место. Решение этого уравнения будем искать, задавая функцию прогиба в виде

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8.15)$$

Подставляя  $w$  в (8.12) получаем:

$$\lambda^2 = \frac{T_0}{D} = \frac{(m\pi)^2}{a^2} + \frac{(n\pi)^2}{b^2}, \text{ или}$$

$$T_0 = D\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (8.16)$$

С ростом волновых чисел  $m$  и  $n$  критическое сжимающее усилие растет. Для квадратной пластины со стороной  $a$  минимальное критическое сжимающее усилие реализуется с образованием одной полуволны в каждом направлении и определяется по формуле

$$T_{0,k} = \frac{2\pi^2 D}{a^2} \quad (8.17)$$

Критическое напряжение

$$X_x = \frac{2\pi^2 D}{a^2} = \frac{2\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)a^2} \quad (8.18)$$

Сравнение с формулой (8.8) показывает, что по сравнению со случаем одностороннего сжатия пластины критические напряжения уменьшаются в два раза.

### Устойчивость пластины при сдвиге.

Имея ввиду соответствующее решение плоской задачи теории упругости, записываем уравнение нейтрального равновесия в виде

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8.19)$$

Граничные условия, как и в предыдущих примерах, принимаем в форме (8.2). Решение уравнения (8.19) можно было бы искать в виде

$$w = A \sin(m_1 x + n_1 y) \quad (8.20)$$

Эта функция хорошо описывает картину волнообразования, но она не соответствует граничным условиям шарнирного закрепления (8.2). Таким образом, аппроксимация прогиба в форме (8.20) невозможна.

Решать задачу будем приближенно с помощью метода Бубнова-Галеркина. В качестве аппроксимирующей функции возьмем следующее выражение

$$w = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin m_1(x - ky) \quad (8.21)$$

Здесь  $m_1 = \frac{m\pi}{a}$ ,  $m$  - число полуволн в направлении оси  $x$ ,  $k$  характеризует угол наклона волн на поверхности пластины после потери устойчивости. Функция (8.21) на краях пластины  $y=0, b$  удовлетворяет условию  $w=0$ , но не удовлетворяет

условию  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . При  $x=0, a$  граничные условия шарнирного закрепления не выполняются. В качестве аппроксимирующей эту функцию можно использовать лишь для пластины, вытянутой в направлении оси  $x$ , то есть при  $a \ll b$ . В рамках реализации метода Бубнова-Галеркина сдвигающее усилие  $S_0$  определяем, вычисляя интеграл

$$\int_0^a \int_0^b (D \nabla^2 \nabla^2 w + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) w dx dy = 0 \quad (8.22)$$

Сдвигающее усилие  $S_0$  представляется в виде следующей функциональной зависимости

$$S_{0,k} = f(m_1, k) \quad (8.23)$$

Минимизируя  $S_{0,k}$  по параметрам  $m_1$  и  $k$ , получаем критическое сдвигающее усилие в виде

$$S_{0,k} = \frac{5,64D}{b^2} \quad (8.24)$$

Соответствующее критическое напряжение

$$X_y = \frac{5,64D}{b^2 h} \quad (8.25)$$

### Теорема Папковича

Рассмотрим пластину, находящуюся под действием системы нагрузок. Каждая из этих нагрузок, действуя по отдельности, приводит к потере устойчивости пластины. Соответствующие критические напряжения получены в результате вышеприведенных решений и определяются из соотношений (8.8), (8.18) и (8.25). Для решения задачи устойчивости пластины в условиях комбинированного нагружения необходимо воспользоваться уравнением (7.14), которое, переходя от усилий к напряжениям, можно записать в виде

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w + \sigma_1 w''_{xx} + \sigma_2 w''_{yy} + 2\tau w''_{xy} = 0 \quad (8.26)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \tau$  - критические значения напряжений  $X_x, Y_y$  и  $X_y$  при комбинированном нагружении. Очевидно, что их определение из уравнения (8.26) невозможно. Введем следующие обозначения:  $\sigma_{1,k}, \sigma_{2,k}$  - критические напряжения при раздельном нагружении пластины односторонним сжимающим усилием, действующим соответственно вдоль оси  $x$  или  $y$ . С учетом обозначения дины стороны пластины они определяются по формуле (8.8).  $\tau_k$  - критическое напряжение при раздельном нагружении пластины сдвиговой

нагрузкой. Для его нахождения с поправкой на размеры пластины можно использовать соотношение (8.25). Кроме того, введем в рассмотрение безразмерные напряжения

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}, \frac{\sigma_2}{\sigma_{2,k}}, \frac{\tau}{\tau_k} \quad (8.27)$$

Запишем уравнение поверхности

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}\right)^p + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,k}}\right)^q + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^r = 1 \quad (8.28)$$

Теорема Папковича утверждает следующее:

В пространстве безразмерных напряжений (8.27) поверхность (8.28) является выпуклой, для чего необходимо выполнение условия:  $p, q, r \geq 1$ .

Поверхность Папковича (8.28) позволяет при комбинированном нагружении пластины установить такое взаимное сочетание нагрузок, при котором пластина будет находиться в устойчивом состоянии. Схематично это показано на рисунке 8.1.

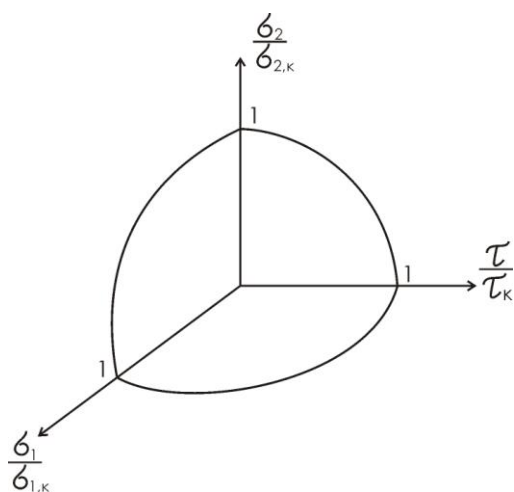


Рис 8.1

Замкнутая область пространства безразмерных напряжений (8.27), заключенная между координатными плоскостями и поверхностью (8.28) представляет из себя область устойчивости пластины. Прокомментируем ситуацию на примере. Допустим, что пластина находится одновременно в условиях сжатия вдоль оси  $x$  и сдвига. Уравнение Папковича в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}\right)^p + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^r = 1 \quad (8.29)$$

Геометрически эта плоская кривая в общем виде показана на рисунке 8.2.

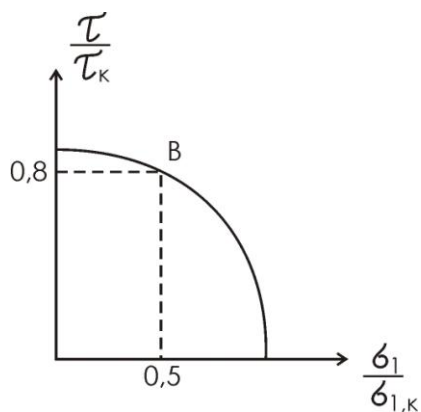


Рис. 8.2

Очевидно, что координатные оси она (как и любая другая поверхность Папковича) пересекает в точках  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}} = 1$ ,  $\frac{\tau}{\tau_k} = 1$ . Пусть величина сжимающих усилий такова, что соответствующие напряжения  $\sigma_1$  составляют половину от критического значения, то есть  $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$ . Какова должна быть величина сдвигающих усилий и соответствующих им касательных напряжений  $\tau$ , чтобы пластина сохраняла устойчивость? Ответ легко получить анализируя рисунок 8.2. Напряжению  $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$  соответствует точка В на кривой Папковича. По оси безразмерных касательных напряжений эта точка имеет координату  $\frac{\tau}{\tau_k} = 0,8$ . Таким образом, при заданном уровне нормальных напряжений  $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$ , устойчивое состояние пластины будет обеспечено, если касательные напряжения  $\tau$  не будут превышать  $0,8\tau_k$ .

Теорема Папковича является основой для реализации теоретико-экспериментального метода решения задачи устойчивости пластины при комбинированном нагружении. Уравнение (8.28) в этом случае представляет из себя структурную зависимость между безразмерными комплексами. Показатели степени  $p, q, r$  определяются из эксперимента. В результате получается расчетная формула, обеспечивающая надежные количественные результаты.

## Лекция 9

### Изгиб круговой цилиндрической панели.

В отличие от пластины поверхность цилиндрической панели обладает кривизной в направлении одной из координатных осей. Если цилиндрическая панель круговая, то радиус кривизны фиксирован. Наличие кривизны во многом определяет специфику в поведении панели при нагружении, в частности, более высокую несущую способность. В то же время, получение уравнений изгиба круговой цилиндрической панели при поперечной нагрузке практически не отличается от соответствующей процедуры для пластины. Рассмотрим круговую цилиндрическую панель, отнесенную к координатным осям так, как показано на рисунке 9.1.

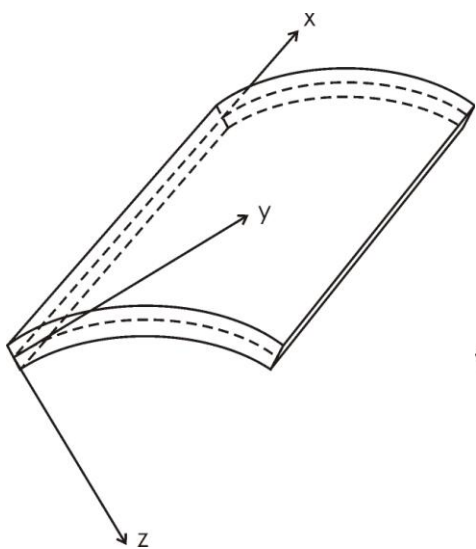


Рис 9.1

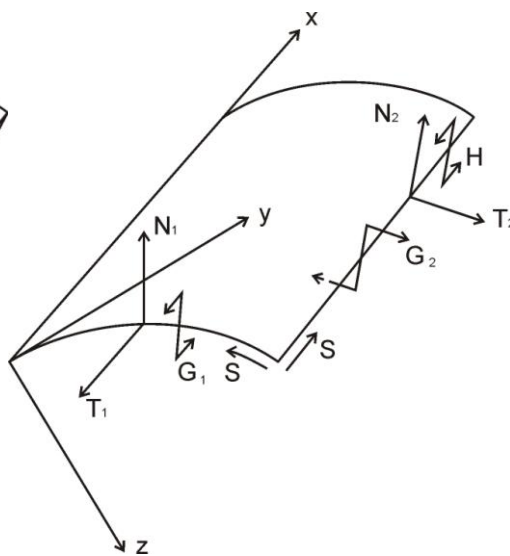


Рис 9.2

Радиус кривизны срединного слоя панели равен  $R$ , толщина -  $h$ . Как и в случае пластины считаем, что при изгибе выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява. Обобщенные моменты и усилия, представленные на рисунке 9.2, записываются без изменений в виде (3.6), (3.7) и (5.6). Входящие в выражения моментов изменения кривизны и параметр кручения срединного слоя  $\chi_1, \chi_2, \tau$  также сохраняются в форме (3.4), а деформации срединного слоя имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (9.1)$$

В отличие от соответствующих соотношений для пластины (7.2), здесь, в выражении деформации  $\varepsilon_2$ , присутствует слагаемое  $-\frac{w}{R}$ , обусловленное кривизной.

Система уравнений равновесия мембранных усилий в проекции на касательную к боковой поверхности панели плоскость записываются, как и для пластины, в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (9.2)$$

Уравнение изогнутой поверхности панели аналогично соответствующему уравнению (7.5) для пластины

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q + \frac{T_2}{R} + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\quad (9.3)$$

Слагаемое  $\frac{T_2}{R}$ , как видно из рисунка 9.3, появляется в результате проектирования мембранных усилий  $T_2$  на ось  $z$ .

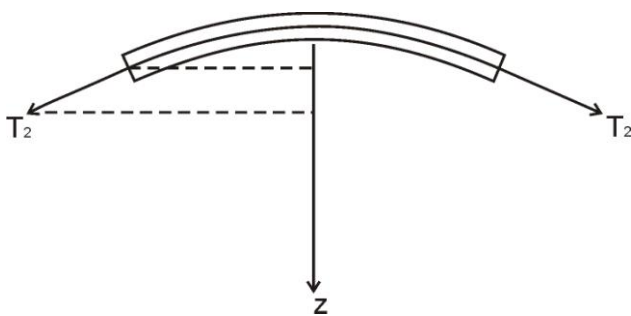


Рис 9.3

Уравнение неразрывности деформаций, как и в предыдущих случаях, получается в результате исключения из системы уравнений (9.1) тангенциальных перемещений  $u, v$ . Оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0\quad (9.4)$$

От соответствующего уравнения (7.6) для пластины оно отличается наличием слагаемого  $\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . После выражения деформаций через мембранные усилия по формулам (5.12) и введения функции усилий (5.15) уравнение (9.4) может быть записано следующим образом

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} + Eh(w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) = 0 \quad (9.5)$$

Система (9.2) при этом тождественно удовлетворяется. Уравнение (9.3) с использованием функции усилий также может быть переписано

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} - F''_{xx} w''_{yy} - F''_{yy} w''_{xx} + 2F''_{xy} w''_{xy} = q \quad (9.6)$$

Система уравнений (9.5), (9.6) является системой уравнений равновесия пологой, круговой цилиндрической панели под действием поперечной нагрузки интенсивности  $q$ . Она аналогична системе уравнений Кармана для пластины (7.7), (7.8). Уравнения (9.5), (9.6) нелинейные и описывают поведение круговой цилиндрической панели во всем диапазоне изменения прогибов. Уравнения Кармана для пластины получаются из них как частный случай, если в соответствующих слагаемых положить радиус кривизны равным бесконечности. Полученные уравнения равновесия для панели применимы и для круговой цилиндрической оболочки. При реализации различие заключается лишь в формулировке граничных условий.

### Пологость цилиндрической панели и оболочки.

Цилиндрическая панель пологая в смысле своей геометрии, если выполняется следующее неравенство:

$$\frac{f}{b} \leq 0,2 \quad (9.7)$$

Здесь  $f$  - подъем панели,  $b$  - кратчайшее расстояние между прямолинейными кромками (рисунок 9.4а).

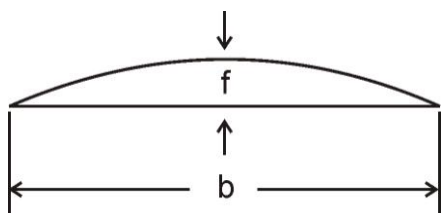


Рис 9.4а



Рис 9.4 б

Панель может быть полой в смысле волнообразования при изгибе. В этом случае условие (9.7) может не выполняться для панели в целом, но оно выполняется в рамках одной полуволны. При таком подходе  $f$  имеет смысл прогиба, а  $b$  - длина полуволны в окружном направлении (рисунок 9.4б). Очевидно, что круговая цилиндрическая оболочка

не может быть пологой в смысле своей геометрии, поскольку в этом случае  $\frac{f}{b} = \frac{R}{2R} = 0,5$ . Она может быть пологой лишь в рамках каждой полуволны в окружном направлении.

### Слабый изгиб круговой цилиндрической оболочки.

Все рассуждения в дальнейшем будем вести для круговой цилиндрической оболочки, имея в виду их справедливость и для панели, как части оболочки. Предполагаем, что при деформации оболочки прогибы удовлетворяют условию:  $w \leq 0,25h$ . В этом случае, в уравнениях (9.5). (9.6), как и при слабом изгибе пластины, можно пренебречь нелинейными слагаемыми. Упрощенная система уравнений примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.8)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = q \quad (9.9)$$

В предположении, что радиус кривизны  $R$  равен бесконечности, данная система уравнений переходит в систему (3.9), (5.16) для случая слабого изгиба пластины с деформацией срединного слоя. При этом прогибы пластины могут варьироваться в более широком диапазоне ( $\frac{w}{h} \leq 1$ ). Если  $\frac{w}{h} \leq 0,25$ , то уравнение (5.16) удовлетворяется тождественно, что соответствует отсутствию мембранных усилий в срединном слое пластины. В уравнении (9.8) слагаемое  $\nabla^2 \nabla^2 F$  не может быть тождественно равным нулю даже при прогибах, меньших четверти толщины. Это означает, что прогиб боковой поверхности оболочки, даже самый незначительный, всегда приводит к возникновению мембранных усилий. Этот факт, в частности, объясняет лучшие несущие свойства панели и оболочки по сравнению с пластиной.

#### 1. Симметричная деформация

На практике довольно часто возникают ситуации, когда действующие на оболочку силовые факторы распределены симметрично относительно оси цилиндра. К подобным задачам можно, например, отнести задачу о распределении напряжений в цилиндрических резервуарах с вертикальной осью, находящихся под воздействием жидкости. Применительно к уравнениям (9.8) и (9.9) симметрия нагружения означает, что интенсивность распределенной нагрузки не зависит от дуговой координаты, то есть  $q = q(x)$ . В силу симметрии нагружения и симметрии самой оболочки ее боковая поверхность деформируется симметрично относительно продольной оси цилиндра. Соответственно, функции усилий и прогиба зависят только от координаты  $x$ :  $F = F(x)$ ,  $w = w(x)$ . Система уравнений (9.8) и (9.9) в этом случае преобразуется к виду

$$\frac{d^4 F}{dx^4} + \frac{Eh}{R} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (9.10)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 F}{dx^2} - q = 0 \quad (9.11)$$

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины  $l$ , шарнирно закрепленную по торцам. Это означает, что, при  $x = 0, l$ :

$$w = 0, \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (9.12)$$

Дважды интегрируя уравнение (9.11), получим

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{Eh}{R} w = C_0 + C_1 x \quad (9.13)$$

Потребуем, чтобы радиус торцевых сечений оболочки не изменялся в процессе деформирования. В этом случае, при  $x=0, l$  кольцевое усилие  $T_2 = F''_{xx} = 0$ . Реализуя краевые условия, получим, что постоянные интегрирования  $C_0 = C_1 = 0$ . Уравнение (9.20) принимает вид

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{Eh}{R} w = 0$$

Выражая из этого уравнения  $\frac{d^2 F}{dx^2}$  и подставляя в уравнение (9.11), последнее переписываем в виде

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = q, \text{ или}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \bar{q} \quad (9.14)$$

Здесь приняты обозначения:  $\frac{Eh}{DR^2} = 4\beta^4$ ,  $\frac{q}{D} = \bar{q}$ .

Полученное уравнение является основным разрешающим уравнением изгиба круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины в случае симметричной деформации. По форме оно совпадает с уравнением изгиба балки на упругом основании. У оболочки роль упругого основания играет кривизна  $\frac{1}{R}$ . В уравнении изгиба балки параметр  $\beta$  является коэффициентом упругости основания. Уравнение (9.14) является линейным, неоднородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{1}{4\beta^4} \bar{q} \quad (9.15)$$

$C_i$  - постоянные интегрирования, определяемые из условий на торцах цилиндра.

Рассмотрим в качестве примера длинную цилиндрическую оболочку, к одному из торцов которой ( $x=0$ ) приложены изгибающий момент  $G_0$  и поперечная сила  $N_0$ , равномерно распределенные по окружности цилиндра. Схема нагружения показана на рисунке 9.6.

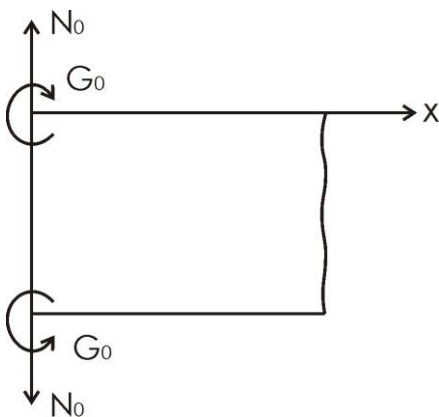


Рис 9.6

Так как поверхностной нагрузки нет, в решении (9.15) необходимо положить  $\bar{q} = 0$ . Силловые факторы, приложенные на торце цилиндра  $x = 0$ , вызывают местный изгиб, затухающий с увеличением расстояния  $x$  от торца. В силу этого в выражении функции прогиба (9.15) необходимо положить  $C_3 = C_4 = 0$ , так как множитель  $e^{\beta x}$  возрастает с ростом продольной координаты. Функция прогиба принимает следующий вид

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \quad (9.16)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  необходимо определить из условий на загруженном торце оболочки. При  $x = 0$ :

$$G_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = G_0$$

$$N_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = N_0$$

Подставляя в полученные выражения  $w$  из (9.16), определяем  $C_1$  и  $C_2$ .

$$C_1 = \frac{G_0}{2\beta^2 D}, \quad C_2 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (N_0 + \beta G_0)$$

Окончательное выражения для прогиба получается следующим

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [\beta G_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - N_0 \cos \beta x] \quad (9.17)$$

Максимальный прогиб получается на загруженном торце оболочки (при  $x = 0$ )

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta G_0 + N_0) \quad (9.18)$$

В качестве другого примера симметричной деформации круговой цилиндрической оболочки можно рассмотреть изгиб длинной цилиндрической оболочки под нагрузкой, равномерно распределенной по круговому сечению (рисунок 9.7).

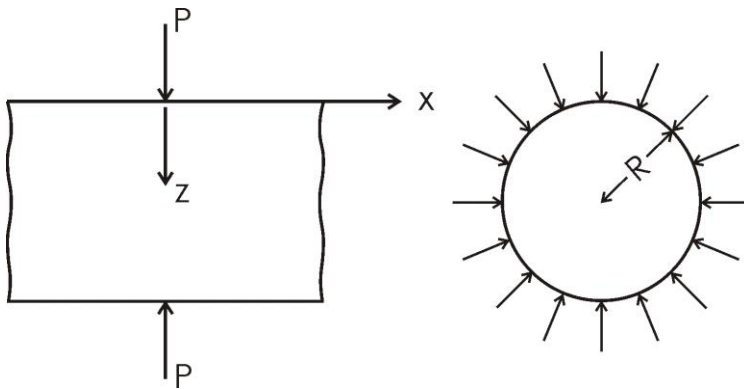


Рис 9.7

Участок боковой поверхности оболочки под нагрузкой находится в условиях местного деформирования. Длина этого участка соизмерима с длиной зоны краевого эффекта  $l_1 = 1, 2\sqrt{Rh}$ . Если плоскость приложения нагрузки находится достаточно далеко от торцов цилиндра, то для каждой части оболочки справа и слева от нагрузки решать задачу можно отдельно, воспользовавшись решением (9.17) и отсчитывая продольную координату от плоскости нагружения. При этом в выражении функции прогиба в силу симметрии необходимо положить  $N_0 = -\frac{P}{2}$ :

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} \left[ \beta G_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) + \frac{P}{2} \cos \beta x \right] \quad (9.19)$$

Для нахождения  $G_0$  воспользуемся тем фактом, что вследствие симметрии нагружения оболочки  $\frac{dw}{dx} = 0$  при  $x = 0$ .

$$\frac{dw}{dx} = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [2\beta G_0 \cos \beta x + N_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)].$$

При  $x = 0$ :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta G_0 + N_0) = 0, \text{ откуда получаем:}$$

$$G_0 = -\frac{N_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta}$$

Окончательное выражение функции прогиба имеет вид

$$w = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (9.20)$$

Максимальный прогиб получается под нагрузкой (при  $x = 0$ ) и его значение равно

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{PR^2 \beta}{Eh} \quad (9.21)$$

Максимальный изгибающий момент также реализуется в плоскости нагружения

$$G_{1,\max} = \frac{P}{4\beta} \quad (9.22)$$

## 2. Несимметричная деформация.

Предполагается, что интенсивность распределенной нагрузки является произвольной функцией координат  $q = q(x, y)$ . Иногда в этом случае систему (9.8), (9.9) можно привести к одному уравнению. Соответствующим образом дифференцируя уравнение (9.9), приводим его к виду

$$D\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} (\nabla^2 \nabla^2 F)''_{xx} = \nabla^2 \nabla^2 q, \text{ или}$$

с учетом уравнения (9.8)

$$D\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^2 \nabla^2 q \quad (9.23)$$

Решение задачи сводится к интегрированию уравнения восьмого порядка (9.23).

### Безмоментные уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки.

При определенных условиях оболочка деформируется таким образом, что изменения кривизны и кручения срединного слоя ее боковой поверхности не происходит ( $\chi_1 = \chi_2 = \tau = 0$ ). В силу соотношения (3.6) изгибающие и крутящий моменты равны нулю ( $G_1 = G_2 = H = 0$ ). Уравнения (9.8) и (9.9) в этом случае упрощаются

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (9.24)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -q \quad (9.25)$$

С учетом выражения функции усилий их можно записать иначе

$$\nabla^2 (T_1 + T_2) = 0 \quad (9.26)$$

$$\frac{T_2}{R} = -q \quad (9.27)$$

Система (9.24), (9.25) – система безмоментных уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки.

Уравнения равновесия в этом случае можно записать и без введения функции усилий. Для этого необходимо использовать систему уравнений (9.2), дополненную уравнением (9.27)

*Пример. Круговая цилиндрическая оболочка в условиях всестороннего равномерного обжатия.*

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, торцы которой жесткими цилиндрическими фланцами. Оболочка находится под действием всестороннего нормального давления, интенсивности  $q$  (рисунок 9.5).

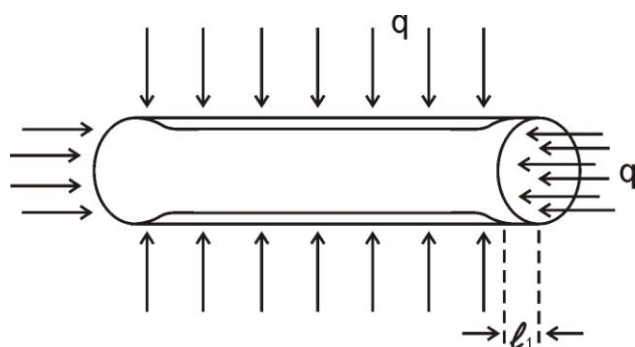


Рис 9.5

В местах, удаленных от торцов оболочки, боковая поверхность деформируется без искривлений так, как это показано на рисунке. Ее можно считать находящейся в безмоментном состоянии. Вблизи края образуются искривления. Напряженное состояние в этой области моментное, а сама эта область называется зоной краевого эффекта. Ее длина  $l_1 \approx 1,2\sqrt{Rh}$ . Все аксиальные сечения оболочки находятся в одинаковых условиях вследствие симметрии нагружения, поэтому внутренние усилия не зависят от дуговой координаты  $y$ . Кольцевое усилие  $T_2$  сразу получается из уравнения (9.27)

$$T_2 = -qR \quad (9.28)$$

Поскольку  $T_2 = const$ , из второго уравнения (9.2) сразу получаем  $S = f(y)$ . Но мембранные усилия от дуговой координаты не зависят, поэтому  $S = S_0 = const$ . Величина  $S_0$  определяется краевыми условиями. Если на торцах оболочки внешних сдвигающих усилий нет (как в данном примере), то  $S = 0$ . Тогда, из первого уравнения (9.2) следует, что  $T_1 = const$ . Величина  $T_1$  легко определяется из анализа равновесия торцевого фланца оболочки. Полная внешняя нагрузка, действующая на фланец в направлении оси  $x$  равна  $-q\pi R^2$ . Она уравновешивается соответствующим по направлению суммарным усилием  $T_1 2\pi R$ , которое возникает в оболочке. Таким образом

$$T_1 = -\frac{qR}{2} \quad (9.29)$$

К соотношениям (9.28), (9.29) необходимо добавить выражение для сдвигающих усилий

$$S = 0 \quad (9.30)$$

Область применимости безмоментных уравнений довольно узка. Если участок боковой поверхности оболочки (или панели) удален от края и имеет постоянную или плавно

изменяющуюся кривизну, нагрузка также постоянная или плавно меняющаяся, то с большой степенью точности можно использовать безмоментные уравнения

## Рекомендуемая литература

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1963. 635 с.
2. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М. «Наука». 1982. 567 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М. «Наука». 1976. 512 с.
4. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев. Издательство «Наукова думка». 1972. 507 с.
5. Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. М.: Наука, 1968
6. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. Санкт-Петербург.:Изд-во БХВ-Петербург, 2007
7. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Издательство МГУ, 1969