КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

А.В.КОСТРОМИН, Д.М.МУХАМЕТГАЛЕЕВ

ТЕОРИЯ ИГР

Конспект лекций

Казань-2013

Костромин А.В., Мухаметгалеев Д.М.

Теория игр. Конспект лекций / А.В.Костромин, Д.М.Мухаметгалеев; Каз.федер.ун-т. – Казань, 2013. –87 с.

В предлагаемых лекциях излагаются основы теории игр в применении к экономическим моделям. Рассмотрены матричные игры, статические игы с полной информацией, динамические игры с полной информацией, повторяющиеся игры, статические и динамические игры с неполной информацией.

Для этого курса имеется электронная версия - http://zilant.kpfu.ru/course/view.php?id=17283

Принято на заседании кафедры статистики, эконометрики и естествознания

Протокол № 3 от 28.11.2013

Содержание

7.1. Дуополия Штакельберга
7.2. Корпорация и профсоюзы (модель Леонтьева)
7.3. Последовательные переговоры с дисконтированием

Лекция 8. Динамические игры с полной, но несовершенной информацией

8.1. Понятие несовершенной информации, информационных множеств и совершенного по подыграм равновесия Нэша
8.2. Многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.
8.3. Модель банка
8.4. Международная конкуренция
8.5. Корпоративный турнир за должность

Лекция 9. Повторяющиеся игры

9.1. Сущность повторяющихся игр, сотрудничество и конфликтная стратегии
9.2. Игра «Дилемма заключенного», повторенная два раза
9.3. Бесконечно повторяющиеся игры
9.4. «Народная теорема»

Лекция 10. Моделирование на основе повторяющихся игр

10.1. Сговор в олигополии Курно
10.2. Модель эффективной зарплаты
10.3. Денежная политика

Лекция 11. Статические игры с неполной информацией

11.1. Понятие ассиметричной информированности, типа игроков и природы
11.2. Дуополия Курно с неполной информацией
11.3. Байесовские игры, условия согласования, равновесие Байеса – Нэша
11.4. Аналогия между байесовской игрой и динамической игрой в развернутой форме

Лекция 12. Модели основанные на статических играх с неполной информацией

12.1. Аукцион с закрытыми заявками по первой цене
12.2. Двойной аукцион
12.3. Принцип выявления

Лекция 13. Динамические игры с неполной информацией

13.1. Совершенное равновесие Нэша
13.2. Игра террорист

Лекция 1. Введение в теорию игр. Основные понятия матричных игр.

Ключевые слова. Игра, игрок, ход в игре, стратегия, парные, конечные, бесконечные, антагонистические игры, верхняя и нижняя цены игры, чистые, смешанные стратегии.

1.1. Понятие игры

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами, которых называют, по традиции, игроками, в ситуациях, когда на результаты этих решений влияют действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть **играми**.

В свою очередь, **игрок** – это просто термин, который удобен для проведения аналогии изучаемой ситуации с салонной игрой с четко описанными правилами. Каждый игрок обладает определенной свободой выбора действий. Своими действиями игрок влияет не только на свой результат, но и на результаты всех остальных. Результат оценивается заданной для каждого игрока **функцией выигрыша**. Считается, что цель игрока – максимизировать свой выигрыш.

Определение. **Игра** – математическая модель конфликтной ситуации.

Определение. **Ход** в игре – выбор и осуществление игроком одного из предусмотренных правилами игры действий.

Определение. **Стратегия** – последовательность всех ходов до окончания игры.

1.2. Классификация игр

В зависимости от числа стратегий:

- **конечные**, если у игрока имеется конечное количество стратегий;
- **бесконечные** (в противном случае).

По числу игроков:

- **парные** (два игрока);
- **множественные** (больше двух игроков).

В зависимости от взаимоотношенй игроков:

- **кооперативные**, если в игре заранее определены коалиции;
- **коалиционные**, если игроки могут вступать в соглашения;
- **бескоалиционные**, если игрокам нельзя вступать в соглашения.

Определение. В играх с нулевой суммой одни игроки выигрывают за счет других, т.е. суммарный выигрыш всех игроков равен нулю.

Определение. Парные игры с нулевой суммой называются **антагонистическими**.

Определение. Конечные антагонистические игры называются **матричными** играми.

1.3. Матричные игры

В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размера mxn:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$$

Считается, что 1-й игрок имеет статегии $A_1, A_2, \dots, A_m$, определяемые строками матрицы, а 2-й игрок – стратегии $B_1, B_2, \dots, B_n$, определяемые столбцами. Каждый элемент матрицы представляет выигрыш 1-го игрока (может быть и отрицательным) у 2-го, если каждый использует свою одну соответствующую стратегию.

Если представить платежную матрицу игры в виде:

	B_1	B_2		B_n	α
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β	β_1	β_2	…	β_n	

то можно сделать следующие определения:

Нижняя цена игры (максимин): $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\max\limits_i \alpha_i$

Верхняя цена игры (мимимакс): $\beta=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\min\limits_j \beta_j$

1.4. Чистые и смешанные стратегии игроков

Определение. Чистая стратегия игрока – это возможный ход игрока, выбранный им с вероятностью, равной единице.

Определение. ***Смешанной стратегией*** первого (второго) игрока называется вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), \quad x_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\left(\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n), \quad y_j \geq 0, \ i = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right)$$

Определение. Если $x_i > 0$, $y_j > 0$, игра называется ***активной***

Платежная функция игры: $f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$

Определение. Стратегии $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ называются ***оптимальными***, если для произвольных стратегий $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ выполняется условие $f(\bar{x}, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y})$.

Определение. ***Решением игры*** называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры.

Теорема (об активных стратегиях). Если один игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры, если другой игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Теорема фон Неймана (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет по крайней мере одно решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену:

$$\left\langle \bar{x}^*, \bar{y}^*, v = f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \right\rangle$$

Список литературы по лекции 1.

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. РХД, 2007. – 212 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 2. Методы решения матричных игр

Ключевые слова. Седловой элемент, активные стратегии, задача линейного программирования.

2.1. Игры с седловым элементом

В этом случае игрок 1 имеет чистую максиминную стратегию, а игрок 2 чистую минимаксную стратегию, и при этом α=β=ν. Тогда говорят, что игра решается в чистых стратегиях.

2.2. Игра 2x2: аналитическое и графическое решение

	B_1	B_2	
A_1	a_{11}	a_{12}	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	x_2
	y_1	y_2	

Система уравнений для 1-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = v \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = v \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $x_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$;

$x_2^* = 1 - x_1^* = \dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$; $v = \dfrac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$

Аналогично для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = v \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = v \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases}$$

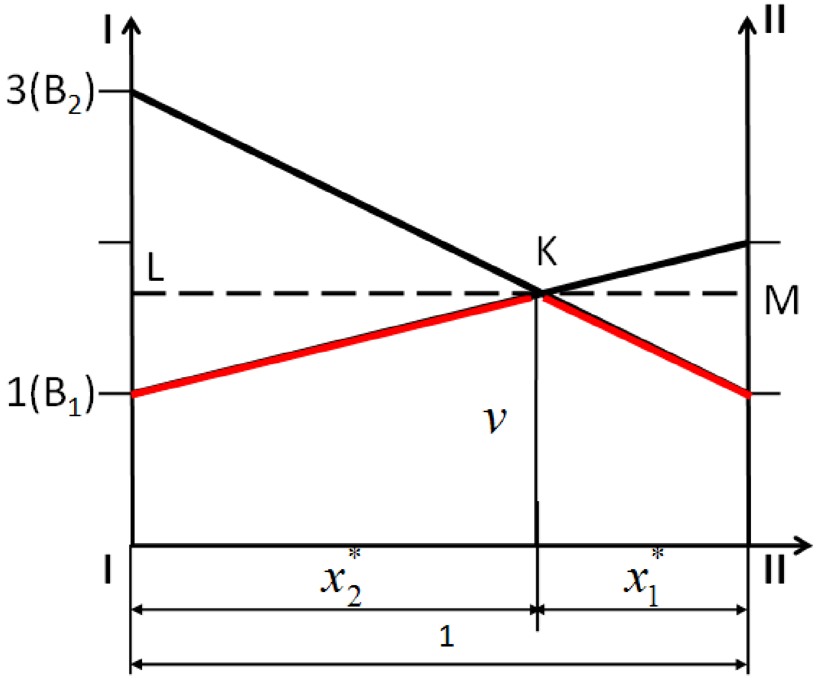
Решение аналогично: $y_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$;

$$y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

Графическое решение на следующем примере:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

дает такую картину:



Числовое значение решения игры: $\langle (4/15; 11/15); \quad (0; 1/5; 4/5); \quad 3{,}2 \rangle$

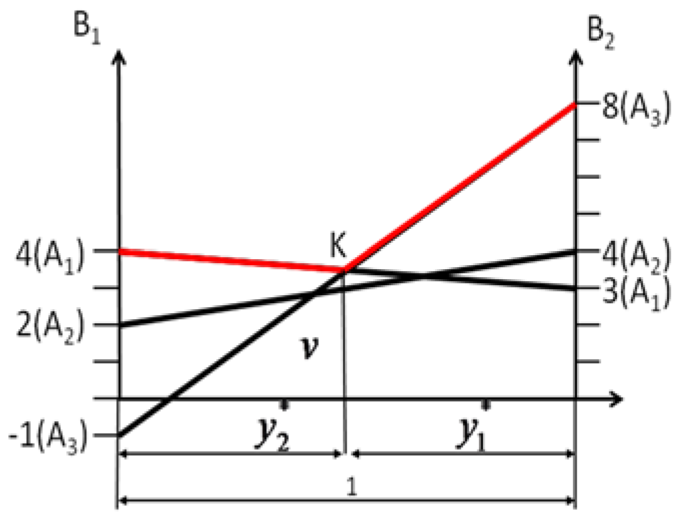
2.3. Игры 2xn

Здесь задача решается в 2 этапа. На первом этапе, графическом, определяется пара активных стратегий 2-го игрока. Затем, с учетом только этих активных стратегий у 2-го игрока, аналитически решается задача 2x2.

Например, при решении игры

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & \; y_2 & \; y_3 \end{matrix} \end{array}$$

строится график выигрышей 1-го игрока:



Из этого графика видно, что у 2-го игрока первая стратегия является невыгодной (проигрыш на ней больше) и отбрасывается, после чего остается игра 2х2,

$$\begin{array}{cc} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \quad\;\; y_2 \quad y_3 & \end{array}$$

которая решается аналитически по приведенным выше формулам. Решение здесь имеет вид:

$$\langle (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1);\quad (0{,}5;\ 0{,}5);\quad 3{,}5 \rangle$$

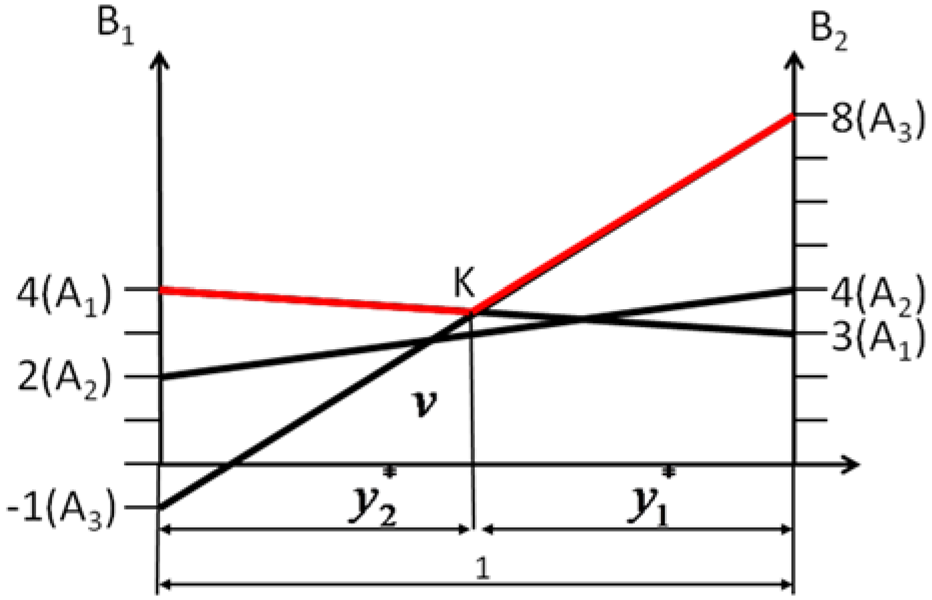
2.4. Игры mх2

Здесь на первом этапе строится график относительно выигрышей 2-го игрока. При этом максимальный проигрыш 2-го игрока изображается ломаной вверху графика, самая нижняя точка которой находится на пересечении двух активных стратегий 1-го игрока. Остальные стратегии 1-го игрока не являются активными. Далее аналитически решается игра 2х2 только на активных стратегиях.

Например, игра с матрицей

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \\ \quad\;\; y_1 \quad y_2 & \end{array}$$

графически решается так:



Отсюда видно, что для 1-го игрока вторая стратегия является невыгодной, и её нужно отбросить. Далее решается игра 2x2:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1 \\ x_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \end{array}$$

Решение имеет вид:

$$\left\langle (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1);\quad (0{,}5;\ 0{,}5);\quad 3{,}5 \right\rangle$$

2.5. Матричные игры mxn

Здесь матричная игра сводится к задаче линейного программирования. Пусть дана игра с матрицей:

	y_1	y_2		y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Все элементы матрицы при этом считаются неотрицательными; это всегда можно сделать эквивалентными преобразованиями. Тогда цена игры будет положительной, v>0. Вводятся новые переменные

$$t_i = \frac{x_i}{v}, \quad u_j = \frac{y_j}{v}, \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n.$$

Теперь матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования относительно 1-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1, \\ T = \dfrac{1}{v} = t_1 + t_2 + \dots + t_m \to \min, \\ t_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{cases}$$

или к двойственной ей – для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ \dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \leq 1, \\ Z = \dfrac{1}{v} = u_1 + u_2 + \dots + u_n \to \max \\ u_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Список литературы по лекции 2.

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. РХД, 2007. – 212 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 3. Статические игры с полной информацией.

Ключевые слова. Статическая игра, полная информация, нормальная форма, доминирование стратегий, равновесие Нэша, функция отклика.

3.1. Определение статической игры с полной информацией.

Определение. Под **статической** понимают такую игру, в которой все её участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие.

Определение. Под играми **с полной информацией** понимают игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.

Пример. «Дилемма заключенного». Двое заключенных подозреваются в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией. Каждому по отдельности предлагается сознаться (С) к определенному сроку, но можно и молчать (М). Если один сознался, а другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает максимальный срок, равный 9 годам. Если оба сознались, то обоим срок снижается до 6 лет. Если оба молчат, то вину по основному преступлению доказать невозможно, и они получают по 1 году за незаконное владение оружием.

Кратко игра записывается в виде матрицы:

	М	С
М	- 1 , - 1	- 9 , 0
С	0 , - 9	- 6 , - 6

По традиции считается, что игрок 1 выбирает строки, а игрок 2 – столбцы. В каждой клетке матрицы стоят 2 числа: выигрыш игрока 1, выигрыш игрока 2. Матричная форма удобна для конечных игр двух лиц.

3.2. Игра в нормальной форме.

Пример. «Выбор компьютера». Двое знакомых одновременно выбирают, какого типа компьютеры им купить. Первый предпочитает IBM, второй – Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a>0 некоторых у.е., а второй – в b>0 у.е. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду c>0, если они выберут оди- наковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым.

Игра в нормальной форме имеет вид:

		Игрок 2	
		IBM	Mac
Игрок 1	IBM	c $a+c$	b a
	Mac	0 0	$b+c$ c

Определение. Игра в нормальной форме задается следующей совокупностью объектов $G=\{S_i, u_i, i \in N\}$, где $N=\{1,2,\dots,n\}$ – множество игроков, S_i - множество стратегий i-го игрока, $u_i : \prod_{i \in N} S_i \to R$ - функция выигрыша игрока i.

Для целей дальнейшего рассмотрения полезно ввести следующие обозначения.

Профиль стратегий всех игроков: $s=(s_1,\dots,s_n) \in S = \prod_{i \in N} S_i$.

Профиль стратегий всех игроков, кроме i – го (т.е. остальных игроков): $s_{-i}=(s_j, j \neq i) \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$.

При этом очевидно, что $s=(s_i, s_{-i})=(s_1,\dots,s_n)$.

3.3. Доминирование стратегий.

Определение. Для игры в нормальной форме $G=\{S_i, u_i, i \in N\}$ стратегия s_i' строго доминирует стратегию s_i'', если

$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i'', s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

(Строго) доминирующая стратегия, если она существует, (строго) доминирует любую другую стратегию данного игрока. (Строго) доминируемая стратегия – это такая стратегия игрока, которую (строго) доминирует некоторая другая стратегия данного игрока.

В «Дилемме заключенного» у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия – сознаться лучше, чем молчать.

Определение. Равновесием в (строго) доминирующих стратегиях называется профиль (строго) доминирующих стратегий, если такие стратегии существуют для каждого игрока.

Очевидным путем использования доминирования является последовательное удаление строго доминируемых стратегий (СДС). Например, в игре с матрицей

	Л	С	П
В	1,0	1,2	0,1
Н	0,3	0,1	2,0

у игроков нет доминирующих стратегий, однако у 2-го игрока стратегия П является доминируемой по сравнению с С. После отбрасывания П появляется доминируемая стратегия Н, которую также следует отбросить. Далее 2-й игрок отбрасывает доминируемую стратегию Л. Остается пара стратегий игроков (В,С), которая является исходом этой игры.

Иногда стратегии, которые не отбрасываются при последовательном исключении СДС, называются рационализуемыми, поскольку за их выбором стоит цепочка рассуждений и предположений, основанных на доминировании.

3.4. Равновесие Нэша.

Процесс последовательного удаления СДС не всегда приводит к получению результата.

Пример.

	Л	С	П
В	0,4	4,0	5,3

Ц	4,0	0,4	5,3
Н	3,5	3,5	6,6

Здесь ни у одного из игроков нет ни одной доминирующей стратегии. Здесь всякая стратегия является наилучшей при некотором выборе другого игрока. В этом случае подход, основанный на доминировании, бессилен, поэтому требуется более универсальный подход.

Определение. Равновесием Нэша (РН) в игре в нормальной форме $G = \{S_i, u_i, i \in N\}$ называется такой профиль стратегий s^* всех игроков, что $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall i \in N, \quad \forall s_i \in S_i$.

Смысл равновесия Нэша в том, что ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии в одиночку.

Определение. **Отображение отклика** i – го игрока $R_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ сопоставляет каждому набору стратегий других игроков $s_{-i} \in S_{-i}$ множество стратегий i-го игрока, каждая их которых является ***наилучшим ответом*** на $\boldsymbol{s_{-i}}$. Каждая стратегия $s_i' \in R_i(s_{-i})$ такова, что $u_i(s_i', s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

Определение РН через отображение отклика: $\boldsymbol{s^*}$ - РН, если $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*), \quad \forall i \in N$.

В случае, если отображение отклика является функцией, $s_i^* = R_i(s_{-i}^*), \quad i = 1,2,\dots,N$.

Таким образом, здесь надо решать систему уравнений.

Для приведенного примера отображения отклика имеют вид:

для 1-го игрока на действия 2-го: $R_1(s_2) \equiv s_1 = \begin{cases} Ц, & s_2 = Л; \\ В, & s_2 = С; \\ Н, & s_2 = П; \end{cases}$

для 2-го игрока на действия 1-го: $R_2(s_1) \equiv s_2 = \begin{cases} Л, & s_1 = В; \\ С, & s_1 = Ц; \\ П, & s_1 = Н. \end{cases}$

Отсюда видно, что исход (Н,П) является равновесным по Нэшу, поскольку удовлетворяет одновременно обеим отображениям отклика.

В матрице выигрышей отображения отклика игроков показаны подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям, РН соответствует клетке, где выигрыши обоих игроков подчеркнуты, например:

	Л	С	П
В	$0,\underline{4}$	$\underline{4},0$	5,3
Ц	$\underline{4},0$	$0,\underline{4}$	5,3
Н	3,5	3,5	$\underline{6},\underline{6}$

Список литературы по лекции 3.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 4. Экономические модели, основанные на статических играх с полной информацией.

Ключевые слова. Дуополия, олигополия, монополия, совершенная конкуренция, арбитраж на рынке труда, общинный оптимум.

4.1. Дуополия Курно. Олигополия Курно (с назначением объемов выпуска)

Пусть есть всего два продавца n=2. Продавец i независимо от другого продавца $j \neq i$ планирует выпуск продукции в объёме q_i. Тогда совокупное предложение $Q=q_1+q_2$.

Цена на рынке устанавливается в соответствии с обратной функцией спроса, которую считаем линейной: $P(Q)=D^{-1}(Q)=a-Q,\ \ a>0$, где a>0 характеризует максимально возможную цену покупки.

Фуекции затрат продавцов одинаковы и не содержат постоянных затрат: $c(q_i)=c\cdot q_i,\quad a>c>0$.

Множество стратегий игрока i – это объем выпуска продукции, который не ограничен: $S_i=[0,\infty)$.

Выигрыш игрока i – это размер его прибыли:

$$\begin{aligned}u_i(q_i,q_j)&=P(Q)\cdot q_i-c(q_i)=(a-q_i-q_j)\cdot q_i-c\cdot q_i=\\&=q_i\cdot(a-c-q_i-q_j)\end{aligned}.$$

Отсюда наилучший ответ игрока i на любую стратегию q_j игрока j:

$$R_i(q_j)=\frac{a-c-q_j}{2}.$$

Поэтому РН находим из решения системы двух уравнений:

$$\begin{cases}q_1^*=\dfrac{a-c-q_2^*}{2};\\ q_2^*=\dfrac{a-c-q_1^*}{2}\end{cases}.$$

Решение этой системы имеет вид: $q_1^*=q_2^*=\dfrac{1}{3}(a-c)$.

Выигрыши игроков в равновесии равны $\dfrac{1}{9}(a-c)^2$.

Суммарный выигрыш игроков равен $\dfrac{2}{9}(a-c)^2$.

Цена на продукцию равна $\dfrac{a+2c}{3}$.

Суммарный выпуск равен $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(a-c)$.

При монополии выпуск продукции равен $Q_M = \frac{1}{2}(a-c)$ при ценах на продукцию $P_M = \frac{a+c}{2}$, и выигрыш монополиста $\frac{1}{4}(a-c)^2$.

При совершенной конкуренции выпуск составляет $Q_{CE} = a-c$, цены равны $P_{CE} = c$ при нулевом выигрыше продавцов.

Сравнение дуополии с совершенной конкуренцией и монополией показывает, что по ценам, выпускам и выигрышам дуополия занимает промежуточное положение между монополией и совершенной конкуренцией.

В олигополии Курно количество продавцов произвольное (*n*>*2*).

Если ввести обозначение $q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$,то функция наилучшего ответа игрока i имеет вид: $R_i(q_{-i}) = \frac{1}{2}(a-c-q_{-i})$ и вычисляется аналогично дуополии.

Чтобы найти РН, надо решить систему уравнений

$$q_i^* = \frac{1}{2}\left(a-c-q_{-i}^*\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

Её решение имеет вид:

$Q^* = \frac{n}{n+1}(a-c)$; $P^* = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot c$; $q_i^* = \frac{1}{n+1}(a-c)$, причем при неограниченном увеличении числа игроков эти значения стремятся к уровням совершенной конкуренции: $Q^* \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_{CE}$; $P^* \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{CE} = c$.

4.2. Олигополия Бертрана (с назначением цен)

Рассмотрим дуополию (*n*=2) в случае однородной продукции. Продавцы одновременно и независимо назначают цены. Таким образом, в этой модели стратегией игрока является цена, а не объём выпуска продукции, и это множество $S_i = [0,\infty)$. Покупатели начинают покупать по более низкой цене, и если один продавец может удовлетворить весь спрос по выбранной цене, то другому ничего не достается. Функция спроса имеет вид:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0, & p_i > p_j \\ a - p_i, & p_i < p_j \\ (a - p_i)/2 & p_i = p_j \end{cases}$$

(при равенстве цен спрос делится пополам).

Пусть a>c, и выигрыш игрока *i* определяется как его прибыль:

$$u_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot D_i(p_i, p_j).$$

При любом $p_j > c$ наилучший ответ игрока *i* точно не реализуется, но ε – оптимальный ответ равен $p_i^* = c, \quad i = 1,2$.

Таким образом, в дуополии Бертрана с однородной продукцией и без ограничений на выпуск возникает жесткая конкуренция, приводящая к совершенному равновесию.

4.3. Неоднородная продукция в дуополии Бертрана

Каждый игрок *i* по-прежнему назначает цену p_i на свою продукцию, а спрос *a* на его продукцию задается функцией

$$D_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j, \quad 0 < b < 1 .$$

Выигрыш игрока определяется как прибыль:

$$u_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot D_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot (a - p_i + bp_j) .$$

Наилучший ответ игрока: $R_i(p_j) = \frac{1}{2}(a + c + bp_j)$.

Для нахождения РН надо решить систему:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}(a + c + bp_2^*), \\ p_2^* = \frac{1}{2}(a + c + bp_1^*) \end{cases} .$$

Решение имеет вид: $p_1^* = p_2^* = \frac{(a + c)}{2 - b}$.

Это РН трудно сравнивать с другими вариантами. При b=0 каждый игрок является монополистом на своём рынке. При $0 < b < 1$ равновесные цены становятся больше локальных монопольных $P_M = \frac{a + c}{2}$. Получается случай, когда два локальных монополиста только помогают друг другу поднимать цены.

4.4. Арбитражные механизмы на рынке труда

Фирма и профсоюз пытаются придти к соглашению об уровне зарплаты с помощью арбитра. Они делают свои предложения по зарплате одновременно и независимо друг от друга. Фирма предлагает w_f, а профсоюз требует w_u. У арбитра есть своё мнение x о справедливой зарплате, и он в качестве своего окончательного решения выдаёт то из двух предложений, которое ближе к x. Игроки не знают точно мнение арбитра x и считают его случайной величиной с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Профсоюз стремится максимизировать, а фирма минимизировать ожидаемую зарплату.

Очевидно, что $w_u > w_f$. Тогда арбитр выберет w_f при условии, что $x < \frac{w_f + w_u}{2}$, и вероятность этого события равна

$$P\left(x < \frac{w_f + w_u}{2}\right) = F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)$$

При $x > \frac{w_f + w_u}{2}$ будет выбрано предложение профсоюза, и вероятность этого события равна $P\left(x > \frac{w_f + w_u}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)$.

При равенстве предложений выбор зарплаты не зависит от мнения арбитра.

Ожидаемая зарплата: $w_f \cdot F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) + w_u \cdot \left(1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)\right)$.

Для нахождения РН запишем условия первого порядка по переменным w_u и w_f. Отсюда система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{w_u - w_f}{2} \cdot f\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) = F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right), \\ \frac{w_u - w_f}{2} \cdot f\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) \end{cases}$$

Если предположить, что мнение арбитра распределено по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}$, получаем равновесные предложения: $w_f^*=m-\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad w_u^*=m+\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4.5. Проблема общин

В одной деревне живут *n* крестьян, которые держат коз. Крестьянин *i* решает, независимо от других, сколько коз g_i ему держать. Общее поголовье $G=g_1+\ldots g_n$; затраты на содержание одной козы *c* от него не зависят. Однако ценность козы для крестьянина *v(G)* зависит от общего поголовья, поскольку пастбище, где кормятся все козы деревни, весьма ограничено.

Наложим на функцию *v(G)* условия:

$$1.\ v(0)>0,\quad v(G_{\max})=0$$

$$2.\ v(G)>0,\quad v'(G)<0,\quad v''(G)<0,\quad 0<G<G_{\max}$$

Стратегия крестьянина состоит в определении количества коз, которых будет держать. Функция выигрыша крестьянина – его прибыль:

$$u_i=g_i\cdot(v(G)-c)$$

Для нахождения РН запишем условия первого порядка:

$$v(G^*)-c+g_i^*\cdot v'(G^*)=0,\quad i=1,\ldots,n$$

Сложим все уравнения и поделим результат на *n*:

$$v(G^*)+\frac{G^*}{n}\cdot v'(G^*)=c\ .$$

Это уравнение всегда имеет единственное решение при *c<v(0)* , поскольку в левой части стоит убывающая функция, принимающая отрицательные значения на правом конце в точке G_{max}.

Найдем общинный оптимум из принципа максимизации суммарного выигрыша $G\cdot(v(G)-c)$.

Из условий первого порядка для общинного оптимума G_0 получим уравнение:

$$v(G_0)+G_0\cdot v'(G_0)=c\ .$$

Здесь в левой части стоит также убывающая функция, принимающая в нуле значение *v(0)*. Поскольку $v'(G) < 0$, то

$$v(G) + G \cdot v'(G) < v(G) + \frac{G}{n} \cdot v'(G) \Rightarrow G_0 < G^* .$$

Итак, если крестьяне действуют общинно, то им надо держать меньше коз. Но общинный минимум не является РН: если все остальные его придерживаются, то у крестьянина появляется соблазн завести себе немного больше коз. В итоге ситуация может скатиться в устойчивое, но неэффективное с коллективной точки зрения равновесие Нэша.

Список литературы по лекции 4.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 5. Существование равновесий Нэша и смешанные стратегии.

Ключевые слова. Смешанное расширение игры, вероятностная мера, теорема Нэша.

5.1. Смешанные стратегии и смешанное расширение игры

Пример. «Совпадение монет». Два игрока одновременно и независимо друг от друга кладут на стол по монете каждый, прикрывая свою монету рукой. По команде судьи они поднимают руки. Игрок 1 выигрывает, если монеты лежат по – разному, а игрок 2 выигрывает, если они лежат одинаково.

В этой игре нет РН:

	О	Р
О	-1,<u>1</u>	<u>1</u>,-1
Р	<u>1</u>,-1	-1,<u>1</u>

Один из способов разрешить проблему существования РН состоит в расширении множеств стратегий и введении так называемых **смешанных стратегий**.

Для удобства исходные стратегии иногда называют **чистыми стратегиями**.

Определение. *Смешанная стратегия игрока i* – это вероятностная мера μ_i на множестве его чистых стратегий s_i. Если все множества стратегий конечны, $\mu_i(s_i)$ является вероятностью выбора игроком i стратегии s_i: $\mu_i(s_i) \geq 0, \quad \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1$.

Определение. *Смешанным расширением* игры в нормальной форме $G = \{S_i, u_i, i \in N\}$ называется игра $G_m = \{M_i, \bar{u}_i, i \in N\}$, где $M_i = \left\{ \mu_i \mid \mu_i(s_i) \geq 0, \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1 \right\}$ - множество смешанных стратегий игрока i; $\mu(s)=\prod_{i\in N}\mu_i(s_i)$ - вероятность выбора s при независимом выборе s_i; $\overline{u}_i(\mu)=\sum_{s\in S}\mu(s)\cdot u_i(s)$ - ожидаемый выигрыш в исходной игре, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$.

5.2. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Определение. РН в смешанных стратегиях μ^* называют РН в смешанном расширении G_m: $\overline{u}_i(\mu_i^*,\mu_{-i}^*)\geq\overline{u}_i(\mu_i,\mu_{-i}^*)$; $\forall\mu_i\in M_i$, $\forall i\in N$.

Найдем РН в смешанных стратегиях для игры «Совпадение монет».

Расставим вероятности p и q применения игроками своих стратегий:

	O	P	
O	-1,1	1,-1	p
P	1,-1	-1,1	1-p
	q	1-q	

Здесь $\mu_1(O)=p$; $\mu_1(P)=1-p$; $\mu_2(O)=q$; $\mu_2(P)=1-q$.

Запишем средний выигрыш 1-го игрока от использования им 1-й стратегии:

$$\overline{u}_1(O)=(-1)\cdot q+(1)\cdot(1-q)=1-2q$$

Аналогично по 2-й стратегии:

$$\overline{u}_1(P)=1\cdot q+(-1)\cdot(1-q)=2q-1$$

Теперь сравним эти выигрыши между собой:

$$\overline{u}_1(O)>\overline{u}_1(P):\ p=1\ ;1-2q>2q-1\Rightarrow q<\frac{1}{2}\ ;$$

$$\overline{u}_1(O)<\overline{u}_1(P):\ p=0\ ;1-2q<2q-1\Rightarrow q>\frac{1}{2}\ ;$$

$$\overline{u}_1(O)=\overline{u}_1(P):\ p\in[0,1]\ ;\ 1-2q=2q-1\Rightarrow q=\frac{1}{2}\ .$$

Функция отклика (наилучшего ответа) первого игрока на действия второго:

$$R_1(q) \equiv p = \begin{cases} 1, & q < 1/2 \\ 0, & q > 1/2 \\ [0,1], & q = 1/2 \end{cases}$$

Запишем средний выигрыш 2-го игрока от использования им своей 1-й стратегии:

$$\bar{u}_2(O) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1$$

и аналогично от 2-й стратегии:

$$\bar{u}_2(P) = (-1) \cdot p + 1 \cdot (1 - p) = 1 - 2p \; .$$

Сравним эти выигрыши между собой:

$$\bar{u}_2(O) > \bar{u}_2(P) : q = 1; \Rightarrow 2p - 1 > 1 - 2p \Rightarrow p > \frac{1}{2} \; ;$$

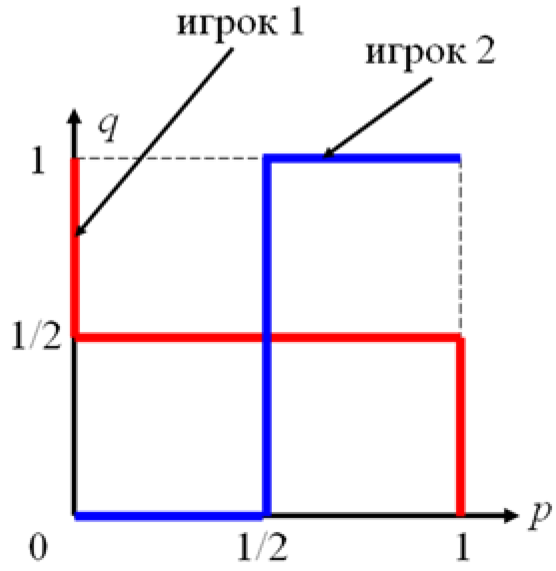
$$\bar{u}_2(O) < \bar{u}_2(P) : q = 0; \Rightarrow 2p - 1 < 1 - 2p \Rightarrow p < \frac{1}{2} \; ;$$

$$\bar{u}_2(O) = \bar{u}_2(P) : q \in [0,1]; \Rightarrow 2p - 1 = 1 - 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \; .$$

Функция отклика (наилучшего ответа) второго игрока на действия первого:

$$R_2(p) \equiv q = \begin{cases} 1, & p > 1/2 \\ 0, & p < 1/2 \\ [0,1], & p = 1/2 \end{cases}$$

РН соответствует всем точкам (p,q), удовлетворяющим обеим функциям отклика. Для этой цели можно построить график в координатах (p,q), т.е. на единичном квадрате:



В точке пересечения графиков функций отклика находится равновесие Нэша: $\mu_2(O)=\frac{1}{2}; \quad \mu_2(P)=\frac{1}{2}$, $\mu_1(O)=\frac{1}{2}; \quad \mu_1(P)=\frac{1}{2}$.

5.3. Теорема Нэша. Вычисление РН в смешанных стратегиях

Теорема Нэша. Пусть в игре $G=\{S_i, u_i, i\in N\}$ множества стратегий S_i игроков конечны. Тогда в игре существует РН в смешанных стратегиях.

Метод вычисления РН в смешанных стратегиях основан на структуре оптимальных ответов в смешанных стратегиях. Поскольку функция выигрыша $\bar{u}_i(\mu_i, \mu_{-i})=\sum_{s_i\in S_i}\mu_i(s_i)\cdot\bar{u}_i(s_i, \mu_{-i})$ линейна по μ_i, то её максимум достигается в крайних точках множества M_i, т.е. на чистых стратегиях. Нужно взять все наилучшие ответы в чистых стратегиях и взять все смешанные стратегии, которые приписывают ненулевые вероятности только оптимальным ответам в чистых стратегиях.

Алгоритм поиска РН в смешанных стратегиях состоит из следующих шагов:

1. Для каждого игрока выделяется некоторое подмножество $S_i^0\subset S_i$ чистых стратегий и составляется система уравнений:

$$\bar{u}_i(s_i, \mu_{-i})=c_i, \quad \forall s_i\in S_i^0, \quad i\in N$$

В этой системе переменными являются числа c_i и вероятности $\mu_j(s_j)$ при $s_j\in S_j^0$. Остальные $\mu_j(s_j)$ полагаются равными нулю. Если игроков только два, то система является линейной. Если игроков больше двух, система будет нелинейной, и её решение становится сложной задачей.

2. После нахождения решения нужно проверить неотрицательность $\mu_j(s_j)$ при всех $s_j \in S_j^0$ и условие наилучшего ответа для S_i^0: $s_i \in S_i \setminus S_i^0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_i(s_i, \mu_{-i}) \le c_i$.

Если все эти условия выполнены, то РН в смешанных стратегиях найдено. Если нет (или надо найти все равновесия), то нужно переходить к другой системе подмножеств S_i^0.

Список литературы по лекции 5.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 6. Динамические игры с полной и совершенной информацией

Ключевые слова. Динамическая игра, совершенная информация, дерево игры, развернутая форма, обратная индукция, совершенное в подыграх равновесие Нэша.

6.1. Понятие динамической игры. Полная и неполная, совершенная и несовершенная информация. Дерево игры.

Динамической называется игра, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов, и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам).

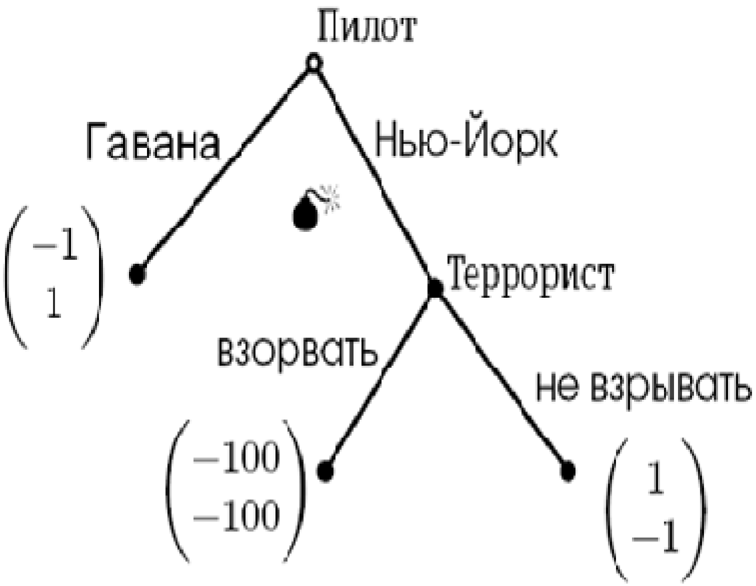
В динамических играх различают **полную** и **совершенную** информацию. Если все игроки имеют общую информацию о правилах игры и функциях выигрыша, то информацию считают полной. Это понятие в равной степени относится как к статическим, так и к динамическим играм. Понятие совершенной информации относится только к динамическим играм, в которых игроки делают ходы последовательно в разные моменты времени. Говорят, что динамическая игра обладает совершенной информацией, если все сделанные ходы сразу же становятся известны всем игрокам.

Иногда динамическую игру удобно представить в виде дерева. Такое представление называется **развернутой формой игры**. Она должна содержать:

- множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;
- для каждой вершины, кроме начальной – единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (это предполагает отсутствие циклов);
- множество игроков;
- для каждой вершины, кроме конечных – единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;
- для каждой конечной вершины – вектор выигрышей всех ироков;
- (если в игре есть случайные ходы «природы», то следует задать также распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов «природы»).

Пример. Игра «Террорист». В самолет сел террорист, который требует лететь из Майами в Гавану вместо Нью-Йорка. В предположении, что террорист не может определить маршрут полета, летчик выбирает, куда лететь. Если он летит в Гавану, игра заканчивается, а если в Нью-

Йорк, то ход делает террорист, который решает, взрывать самолет или нет. На конечных вершинах дерева проставлены выигрыши игроков (первый игрок – пилот)



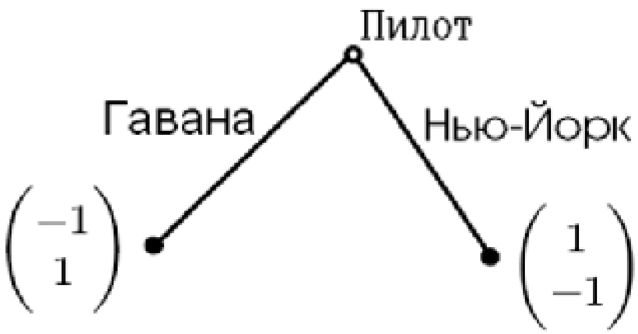
6.2. Метод обратной индукции.

В динамических играх с полной и совершенной информацией удобно решать игру методом обратной индукции.

В соответствии с методом обратной индукции игра «разматывается» с конца. При этом рассматриваются все последние вершины игры, в которых один из игроков делает выбор, исходя из его рациональности. Далее процесс повторяется для всех предшествующих вершин, пока не дойдет до начальной вершины.

Например, в игре «Террорист» единственной вершиной, из которой можно начать применение метода обратной индукции («предфинальная» позиция), является вершина, в которой ход делает террорист. Террорист из двух вариантов (взрывать или не взрывать бомбу в Нью-Йорке) выбирает – не взрывать, поскольку при заданных выигрышах ему выгоднее именно не взрывать.

После этого игру можно частично свернуть (редуцировать), и дерево игры упрощается:



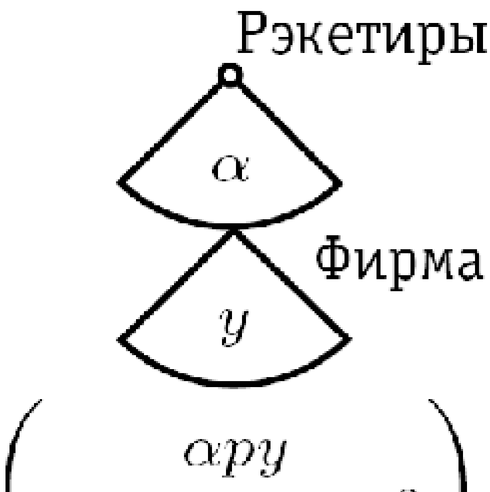
Поскольку действия террориста в Нью-Йорке несложно предугадать, пилот выбирает лететь в Нью-Йорк, где его выигрыш больше.

Таким образом, обратная индукция показывает, что пилот полетит в Нью-Йорк, а террорист не будет взрывать бомбу.

Обратную индукцию можно реализовать и на основе функций отклика игроков.

Пример. Игра «Рэкет». Рэкетиры выбирают, какую долю $\alpha \in [0,1]$ выручки следует отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют αpy, где p – цена, y - выпуск фирмы. Фирма имеет прибыль $(1-\alpha)py - y^2$ и максимизирует её при $y \geq 0$.

Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. Структура игры имеет вид:



На первом шаге условие первого порядка для фирмы дает следующую функцию отклика фирмы на отбираемую долю выручки:

$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)p}{2}$$

Зная эту функцию, рэкетиры максимизируют свою функцию выигрыша. Для этого надо подставить функцию отклика фирмы в функцию выигрыша рэкетиров и применить к полученному выражению условие первого порядка. Это дает значение α=1/2.

6.3. Стратегия в динамической игре. Равновесия «пустых угроз». Совершенное в подыграх равновесие Нэша (СПРН)

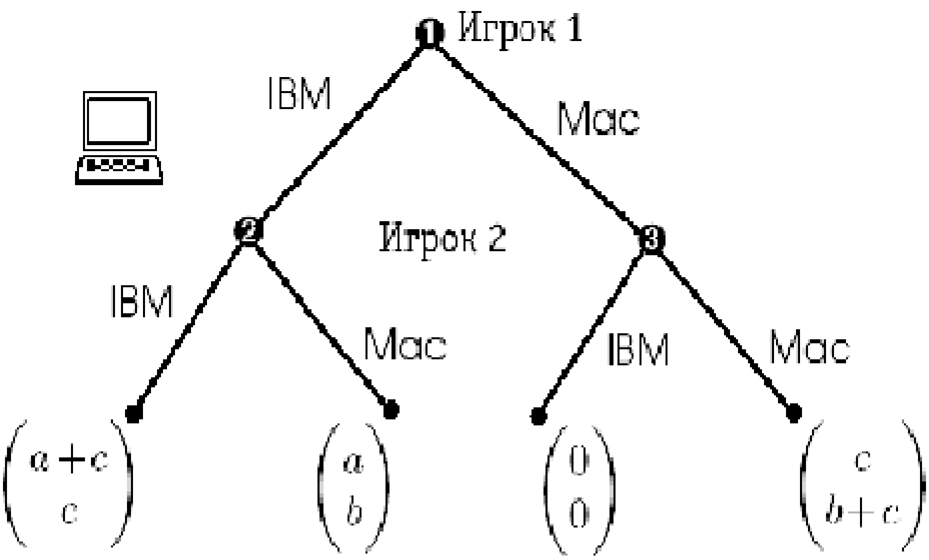
Кроме обратной индукции, для решения динамической игры с совершенной информацией можно использовать концепцию РН. Для этого надо записать игру в нормальной форме.

Множество игроков и в нормальной форме, и в развернутой должно быть одним и тем же. Однако понятие стратегии в динамической игре требует уточнения.

Определение. Стратегия (чистая) в динамической игре – это полный план действий игрока, который показывает, что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему.

Следует отметить, что в этом плане игрок указывает свои действия даже в тех вершинах, в которых он в процессе игры реально вряд ли окажется.

Пример. Динамический вариант игры «Выбор компьютера», в котором 1-й игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево игры имеет вид:



1-й игрок имеет две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине 1. Игрок 2 имеет 4 стратегии, каждая из которых определяет его действия в двух вершинах – 2 и 3. Его стратегии следующие: $(2IBM, 3IBM), (2IBM, 3Mac), (2Mac, 3IBM), (2Mac, 3Mac)$.

Нормальная форма имеет вид:

Игрок 1 \ Игрок 2	❷ IBM ❸ IBM	❷ IBM ❸ Mac	❷ Mac ❸ IBM	❷ Mac ❸ Mac
❶ IBM	$a+c$; c	$a+c$; c	a; b	a; b
❶ Mac	0; 0	c; $b+c$	0; 0	c; $b+c$

Рассмотрим случай, когда $a<c$, $b<c$. Сравним равновесия Нэша с результатом применения обратной индукции.

Сначала применим обратную индукцию. Здесь игроки выберут следующие стратегии:

$1:\quad 1IBM$

$2:\quad (2IBM, 3Mac)$

Из таблицы же получаем сразу 3 РН, и только одно из них совпадает с решением, полученным по методу обратной индукции:

Игрок 1 \ Игрок 2	❷ IBM ❸ IBM	❷ IBM ❸ Mac	❷ Mac ❸ IBM	❷ Mac ❸ Mac
❶ IBM	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a}$; b	a; b
❶ Mac	0; 0	c; $\underline{b+c}$	0; 0	$\underline{c}$; $\underline{b+c}$

Такая ситуация является типичной, т.е. решение, получаемое обратной индукцией, всегда является РН.

Определение. Все РН, которые не могут быть получены обратной индукцией, называются «равновесиями пустых угроз».

Это название отражает тот факт, что они противоречат предположению о рациональности игроков. Следовательно, концепция РН для динамических игр, вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры, и поэтому её требуется каким-то образом усилить.

Определение. Совершенным в подыграх равновесием Нэша (СПРН) называется такой набор стратегий, который является РН в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются РН во всех собственных подыграх этой игры.

Теорема. В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством СПРН.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование последней теоремы сильно упрощает поиск СПРН, поскольку не требует записи игры в нормальной форме и нахождения в ней РН.

Список литературы по лекции 6.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 7. Модели, основанные на динамических играх с полной и совершенной информацией.

Ключевые слова. Фирма-лидер, ведомая фирма, линии безразличия, дисконтирование, двухпериодная модель.

7.1. Дуополия Штакельберга

Пусть в игре участвую две фирмы, т.е. $N=\{1,2\}$, причем фирма 1 – лидер, а фирма 2 – ведомая. Описание отрасли возьмем таким же, как в дуополии Курно.

Здесь фирма – лидер имеет возможность прогнозировать ответную реакцию ведомой фирмы и планировать свой выпуск с учетом этого прогноза.

Зададим порядок ходов.

Ход 1. Фирма 1 выбирает объём выпуска q_1.

Ход 2. Фирма 2, зная выбор фирмы 1, выбирает объём своего выпуска q_2.

Поскольку информация о правилах игры и функциях выигрыша считается полной, фирма 1 может спрогнозировать ответную реакцию фирмы 2. Для этого применим условия первого порядка, и это дает:

$$R_2(q_1)=\frac{a-c-q_1}{2}$$

Теперь этот прогноз подставим в функцию выигрыша фирмы 1, получим после применения условий первого порядка для фирмы 1:

$$q_1^S=\frac{a-c}{2}$$

и соответственно для фирмы 2:

$$q_2^S=R_2(q_1^S)=\frac{a-c}{4}.$$

Выигрыш лидера равен здесь $\frac{(a-c)^2}{8}$, а выигрыш ведомого оказывается вдвое меньше: $\frac{(a-c)^2}{16}$. В дуополии Курно выигрыш любой фирмы оказывался равным $\frac{(a-c)^2}{9}$, т.е. каждой фирме выгодно захватить лидерство в отрасли.

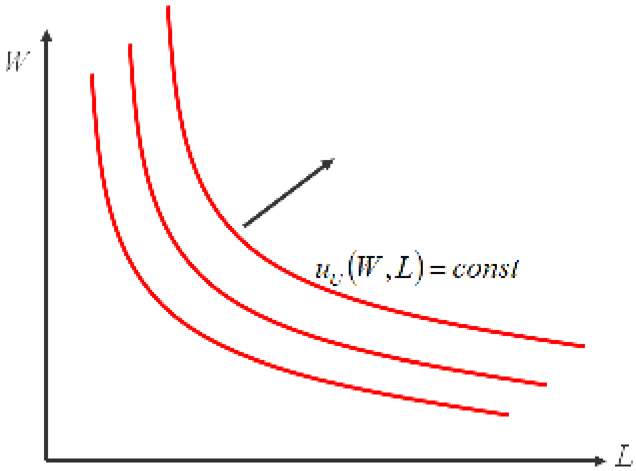
Такая ситуация называется борьбой за лидерство. Здесь речь идет только об информационном лидерстве, т.е. о праве первым принять решение и объявить его другому игроку.

Совокупный выпуск в дуополии Штакельберга равен $Q^S = \frac{3}{4}(a-c)$. Он больше, чем в дуополии Курно, а значит, и цены ниже. Потребители только выигрывают от появления фирмы-лидера.

7.2. Корпорация и профсоюзы (модель Леонтьева)

В этой модели два участника: профсоюз и фирма. 1-й ход принадлежит профсоюзу, который может диктовать фирме уровень зарплаты W. Зная предложение профсоюза, фирма в качестве 2-го хода выбирает уровень занятости L.

Профсоюз заинтересован как в увеличении зарплаты, так и в увеличении занятости, поэтому его функция выигрыша $u_U(W,L)$ должна возрастать по обеим переменным. Линии безразличия $u_U(W,L)=const$ и направление роста выигрыша профсоюза должны выглядеть примерно так:



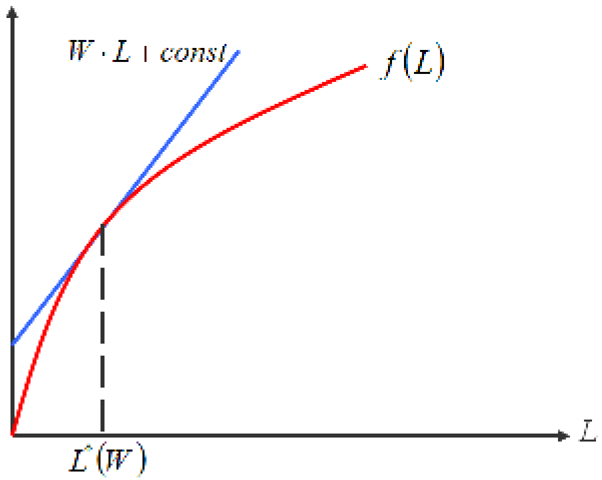
Выигрыш фирмы от найма рабочих определяется функцией выпуска $f(L)$, которая показывает, сколько продукции выпустит фирма, если наймет L рабочих. Будем считать эту функцию вогнутой и возрастающей, причем:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=\infty, \quad f'(\infty)=0.$$

Выигрыш фирмы $u_F(W,L)=f(L)-W\cdot L$ - это выпуск продукции за вычетом зарплаты рабочим.

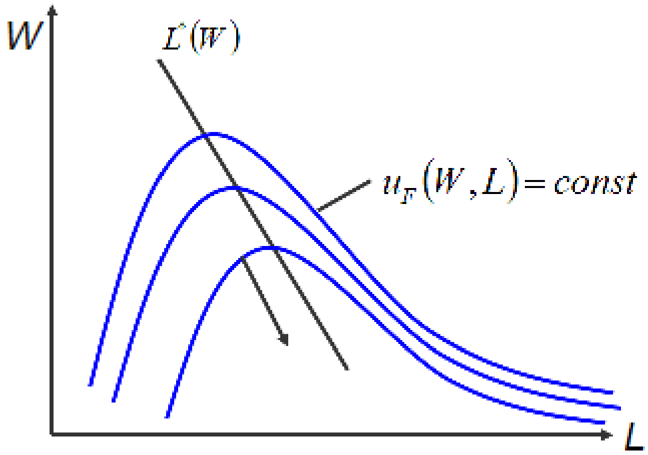
Оптимальный ответ фирмы $L^*(W)$ на заданный профсоюзом уровень зарплаты W определяется из максимизации выигрыша фирмы по L. Применение условий первого порядка даёт $f'(L)=W$.

Изобразим на графике прямую с наклоном *W*, касательную к графику функции выпуска:



Отсюда видно, что, чем больше запрос профсоюза *W*, тем меньше значение $L^*(W)$.

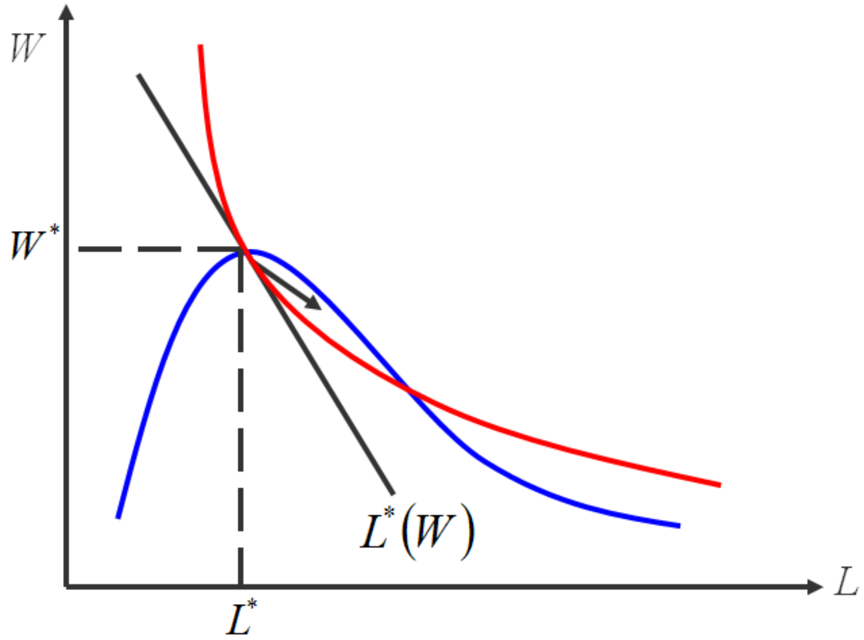
Теперь изобразим линии безразличия фирмы $u_F(W,L)=c$ с учетом того, что выигрыш фирмы убывает по *W*, а по *L* при заданном *W* возрастает до $L^*(W)$ и потом убывает. Отсюда следует, что при заданном уровне выигрыша фирмы наибольшая зарплата достигается при занятости $L^*(W)$. Изобразим ситуацию графически:



В силу обратной индукции решается задача оптимального выбора уровня зарплаты профсоюзом с учетом прогноза ответной реакции фирмы по занятости:

$$\max_{W\geq 0} u_U\left(W, L^*(W)\right) = u_U\left(W^*, L^*(W^*)\right).$$

Если обозначить $L^* = L^*(W)$, то в точке (L^*, W^*) линия безразличия для фирмы должна иметь максимум по зарплате, а линия безразличия профсоюза должна касаться линии $L^*(W)$. Графически это выглядит так:



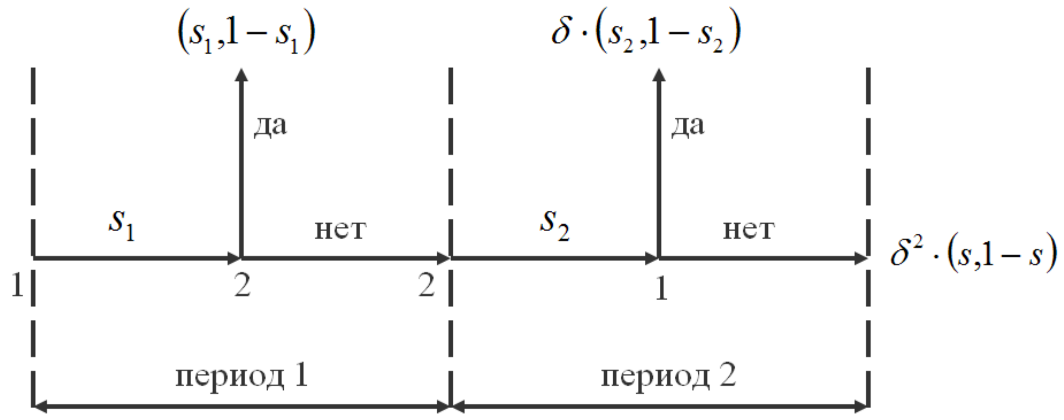
Из рисунка видно, что из точки (L^*, W^*) можно сместиться вправо и вниз так, чтобы оказаться ниже линии безразличия для фирмы и выше линии безразличия для профсоюза. Это означает, что данный механизм переговоров не является эффективным, поскольку он приводит к такому результату, который может быть улучшен одновременно и для профсоюза, и для фирмы за счет некоторого снижения зарплаты при одновременном увеличении занятости.

7.3. Последовательные переговоры с дисконтированием

Два игрока договариваются о дележе совместной выгоды размером 1. Переговоры проходят периодически. В начале каждого периода один из участников делает предложение по дележу, а другой может согласиться с этим или отказаться. При согласии игра кончается. При отказе переговоры в данном периоде завершается, но они возобновляются в следующем периоде, причем право предлагать дележ переходит к другому игроку.

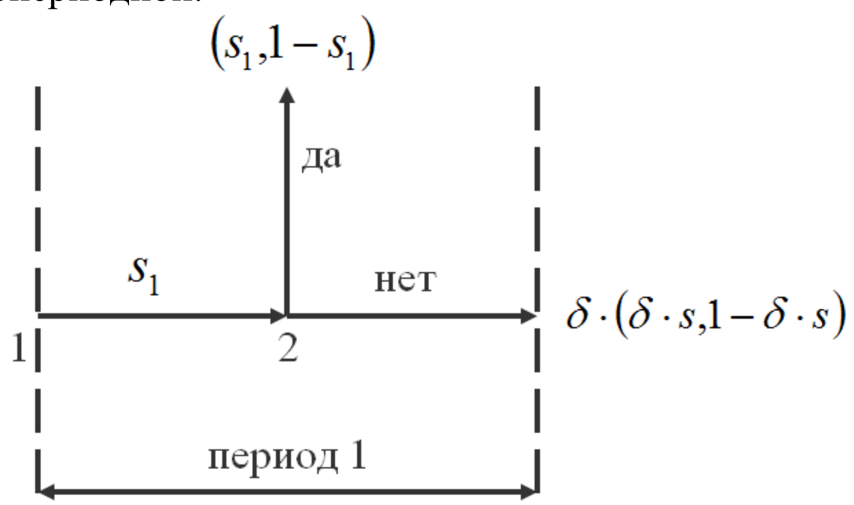
Считается, что совместная выгода каждый период убывает из-за действия коэффициента дисконтирования $0 < \delta < 1$.

Опишем модель переговоров с помощью следующее упрощенной схемы, т.н. двухпериодной модели:



Дележ (s,*1*-s) является параметром модели. Оба игрока знают, что если два периода переговоров не приведут к соглашению, то произойдет автоматический дележ (s,*1*-s). Выигрыши игроков проставлены с учетом дисконтирования.

В этой игре только одна предфинальная позиция, в которой во втором периоде игрок 1 может согласиться или отказаться от предложения s_2. Условие согласия игрока 1 $s_2 \geq \delta\cdot s$. Пусть игрок 1 доброжелателен и соглашается даже в случае равенства. Тогда оптимальное предложение игрока 2 будет $s_2 = \delta\cdot s$. После этого игру можно свести к однопериодной:



Условие согласия игрока 2 записывается как $1-s_1 \geq \delta\cdot(1-\delta\cdot s)$. Отсюда оптимальное предложение игрока 1 равно $s_1 = 1-\delta\cdot(1-\delta\cdot s)$, причем доброжелательный игрок 2 на него соглашается.

Итак, в силу обратной индукции получается дележ $(1-\delta\cdot(1-\delta\cdot s),\delta\cdot(1-\delta\cdot s))$, причем соглашение достигается в первом периоде переговоров.

Рассмотрим теперь последовательны переговоры с бесконечным количеством периодов. Формально обратную индукцию к такой схеме применить нельзя, поскольку в ней нет предфинальных позиций. Однако ясно, что после двух периодов мы имеем ту же бесконечную игру, в которой только все выигрыши умножены на δ^2. Следовательно, параметр s можно рассматривать как выигрыш игрока 1 в бесконечной игре, если

$$s = 1 - \delta \cdot (1 - \delta \cdot s) \Leftrightarrow s = \frac{1}{1+\delta} .$$

Следовательно, в бесконечных последовательных переговорах соглашение достигается в первом же периоде и приводит к дележу $\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$. При близком к единице коэффициенте дисконтирования, что соответствует малому банковскому проценту, дележ близок к справедливому, т.е. пополам.

Список литературы по лекции 7.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 8. Динамические игры с полной, но несовершенной информацией

Ключевые слова. Информационные множества, развернутая форма представления, повторяющаяся игра

8.1. Понятие несовершенной информации, информационных множеств и совершенного по подыграм равновесия Нэша

Рассмотрим класс игр, называемых играми с несовершенной информацией, в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е. осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого информационного множества).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно динамизировать, задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества.

«Выбор компьютера»

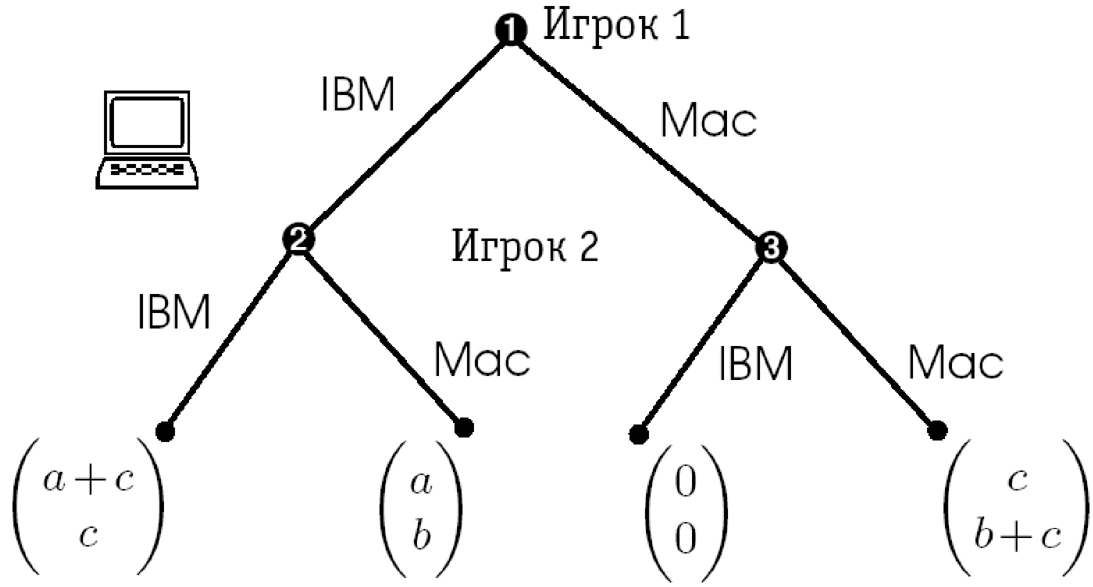
Предположим, что первый игрок ходит первым, второй—вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией.

Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества должны быть одинаковыми. - в вершине 2, и в вершине 3 второй игрок выбирает между IBM и Mac.

Нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С ее помощью можно представлять корректно только статические игры.



Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Необходимо наличие всех вершин информационного множества.

8.2. Многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Рассмотрим класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать играми с почти совершенной информацией. Другое название—многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Такие игры можно разбить на несколько этапов $t = 1, \dots, T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. Пример такой игры — повторяющаяся конечное число раз статическая игра.

Начнем с двухпериодных игр. Каждый игрок i может выбрать, какое действие a_i из множества A_i ему совершить Игра происходит в два периода.

<u>Период1.</u> Игроки 1 и 2 выбирают свой действия a_1 и a_2 одновременно и независимо.

<u>Период 2.</u> Игроки 3 и 4 узнают, какие действия a_1 и a_2 совершили игроки 1 и 2 в периоде 1 и на основе этой информации одновременно и независимо выбирают свои действия a_3 и a_4 .

После этого определяются выигрыши игроков $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Применить обратную индукцию непосредственно, как в играх с совершенной информацией, нельзя, поскольку в тех играх в предфинальной позиции все сводится к индивидуальному выбору одного игрока. Однако можно совместить принцип обратной индукции и равновесие Нэша.

Предположим, что при любых a_1 и a_2 существует и притом единственное **РН** $(a^*_3(a_1,a_2),\ a^*_4(a_1,a_2))$ в игре с двумя игроками: $\{\{3,4\},\ A_3,\ A_4,\ u_3(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4),\ u_4(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\}$.

Игроки 1 и 2 могут на этом основании предвидеть поведение игроков 3 и 4 . Тогда в ***периоде 1*** получится следующая игра двух лиц: $\{\{1,2\},\ A_1,\ A_2,\ u_1(a_1,\ a_2,\ a^*_3(a_1,a_2),\ a^*_4(a_1,a_2)),\ u_2(a_1,\ a_2,\ a^*_3(a_1,a_2),\ a^*_4(a_1,a_2))\}$.

Пусть в этой игре существует **РН** $(a^*_1,\ a^*_2)$, тогда применение обратной индукции на основе **РН** приводит к успеху.

8.3. Модель банка

Существует много моделей построенных по схеме двухпериодной игры.

Модель банка:

1. Два инвестора положили деньги в банк на депозит в размере D каждый;
2. Банк вкладывает эти деньги в некоторый *проект,* который через два периода должен принести доход $2R$;
3. Инвестор имеет право забрать деньги после *первого периода*, но тогда проект не будет реализован и удастся вернуть только $2r$;
4. После *второго периода* деньги можно забирать без ущерба для проекта, причем первый имеет преимущество.

$$R > D > r > \frac{D}{2}$$

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	

	взять	**нет**
взять	***R,R***	***2R-D,D***
нет	***D,2R-D***	***R,R***

1. Во втором периоде имеется одно **РН.**
2. Подставим выигрыши в этом **РН** в игру первого периода.
3. Получается два равновесия **РН**.
4. Равновесие ***(нет, нет)*** лучше для обоих инвесторов.
5. Равновесие ***(взять, взять)*** возникает при бегстве капитала из банка из-за испуга, что кто-то заберет деньги из банка.(**слухи!**)

$$R > D > r > \frac{D}{2}$$

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	

	взять	**нет**
взять	***R,R***	***2R-D,D***
нет	***D,2R-D***	***R,R***

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	***R,R***

Выводы: Имеем **2 РН**. Одно из них ***RR*** **предпочтительнее** другого, но ситуация ***r,r*** может возникнуть из-за слухов: *«бегство капитала из банка»*. Эта ситуация не является единственным равновесием, но одним из **РН**, которое может реализоваться.

8.4. Международная конкуренция

Две страны участвуют в ***международной торговле*** друг с другом. В ***каждой стране*** имеется **правительство**, **фирмы** и **потребители**.

1. **Правительство** i определяет тарифы t_i.
2. **Фирма** страны i производит продукцию h_i для потребления внутри страны и e_i на экспорт в др.страну.
3. **Потребители** покупают продукцию по цене $P_i(Q_i)=a-Q_i$, где $Q_i=h_i+e_j$.
4. **Затраты фирмы** складываются из производственных затрат: $c\cdot(h_i+e_i)$ и экспортной пошлины: $t_j\cdot e_i$.

Игра происходит в ***два этапа (периода):***

1. Сначала **правительства** обеих стран ***одновременно и независимо*** назначают **тарифы**;
2. Затем, ***зная эти тарифы,*** **фирмы участвуют на объединенном рынке** двух стран (дуополия Курно), **назначая выпуски** продукции для внутреннего потребления и на экспорт.

$$P_i(Q_i)=a-Q_i,\quad Q_i=h_i+e_j$$

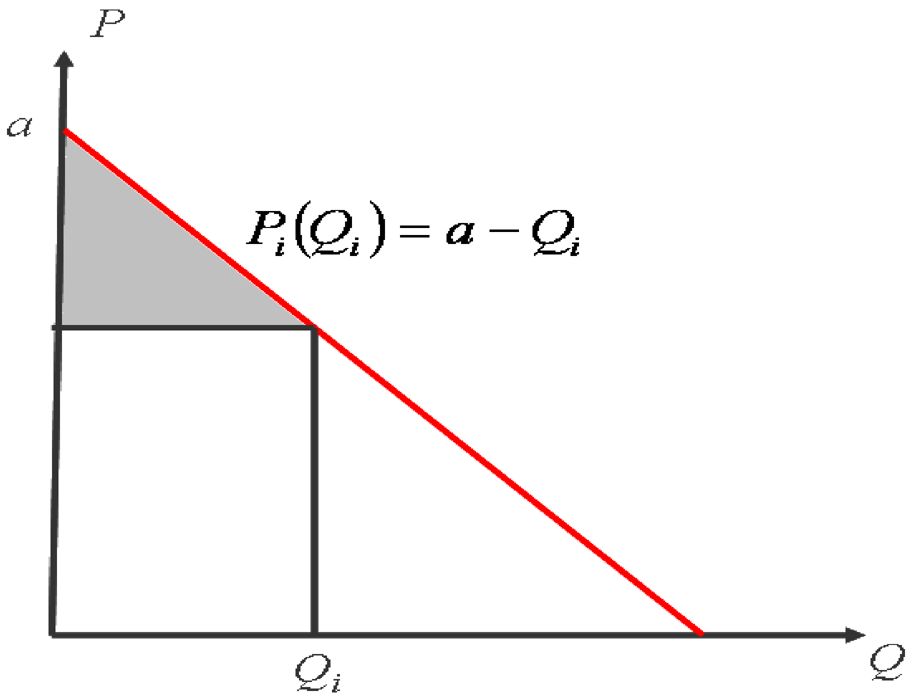
$$c\cdot(h_i+e_i)+t_je_i$$

$$\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=\left[a-(h_i+e_j)\right]\cdot h_i+\left[a-(h_j+e_i)\right]\cdot e_i-$$
$$-c\cdot(h_i+e_i)-t_je_i$$

$$W_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=\frac{1}{2}Q_i^2+\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)+t_ie_j$$

1. **Выигрыш фирмы** определяется их ***прибылью***. (π_i)
2. **Выигрыш государства** учитывает ***интересы потребителей*** и ***фирмы*** своей страны, а также ***доходы*** от пошлины на импорт. (W_i)

Выигрыш покупателей на графике соответствует площади заштрихованного треугольника.



Фиксируем тарифы и найдем ***равновесие Нэша*** в игре фирм (найдем h^*_1, h^*_2, e^*_1, e^*_2) для которых выполнено условие максимума прибыли). Т.к. функция **выигрыша** распадается на ***два слагаемых*** (внутренний рынок и экспорт), то преобразуем задачу.

$$\left(h_1^*, h_2^*, e_1^*, e_2^*\right)$$

$$\max_{h_i, e_i \geq 0} \pi_i\left(t_i, t_j, h_i, e_i, h_j^*, e_j^*\right), \quad i = 1{,}2$$

$$\max_{h_i \geq 0} h_i \cdot \left(a - \left(h_i + e_j^*\right) - c\right)$$

$$\max_{e_i \geq 0} e_i \cdot \left(a - \left(e_i + h_j^*\right) - c\right) - t_j e_i$$

$$\begin{cases} h_1^* = \dfrac{a - c - e_2^*}{2}; \quad e_1^* = \dfrac{a - c - h_2^* - t_2}{2}; \\ h_2^* = \dfrac{a - c - e_1^*}{2}; \quad e_2^* = \dfrac{a - c - h_1^* - t_1}{2} \end{cases}$$

$$h_i^* = \frac{a - c + t_i}{3}; \quad e_i^* = \frac{a - c - 2t_j}{3}, \quad i = 1{,}2$$

Подставив равновесие Нэша в игре корпораций, зависящей от тарифов, как от параметров, в функции выигрыша государств, найдем равновесие Нэша в игре государств, назначающих тарифы. (все переменные, кроме тарифов, опущены)

$$W_i(t_i,t_j)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_i}{3}\right)^2+\left[a-\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_i}{3}\right)\right]\cdot\frac{a-c+t_i}{3}+$$

$$+\left[a-\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_j}{3}\right)\right]\cdot\frac{a-c-2t_j}{3}-c\cdot\left(\frac{a-c+t_i}{3}+\frac{a-c-2t_j}{3}\right)-$$

$$-t_j\,\frac{a-c-2t_j}{3}+t_i\,\frac{a-c-2t_i}{3}$$

$$W_i(t_i,t_j)=\frac{(2\cdot(a-c)-t_i)^2}{18}+\frac{(a-c+t_i)^2}{9}+$$

$$+\frac{t_i\cdot(a-c-2t_i)}{3}+\frac{(a-c-2t_j)^2}{9}\qquad(*)$$

$$\frac{-2\cdot(2\cdot(a-c)-t_i)}{18}+\frac{2\cdot(a-c+t_i)}{9}+\frac{(a-c-4t_i)}{3}=0$$

$$t_i^*=\frac{a-c}{3}\qquad h_i^*=\frac{4}{9}(a-c);\quad e_i^*=\frac{1}{9}(a-c)$$

$$W_1(t_1,t_2)+W_2(t_1,t_2)$$

$$\frac{(2\cdot(a-c)-t_i)^2}{18}+\frac{(a-c+t_i)^2}{9}+\frac{t_i\cdot(a-c-2t_i)}{3}+\frac{(a-c-2t_i)^2}{9}$$

$t_i=-(a-c)$-отрицательные тарифы

Суммарный выпуск продукции в каждой стране будет равен ***5·(а-с)/9*** . Для ***потребителей*** это **<u>хуже</u>**, чем при нулевых тарифах, когда страны объединяются в один рынок с **дуополией Курно** и суммарным выпуском продукции ***2· (а-с)/ 3.***

С точки зрения ***правительства***, **максимум** выигрышей двух стран достигается при ***нулевых тарифах.***

РН для правительства достигается в доминирующих стратегиях, но оно хуже чем свободная неравновесная торговля.

8.5. Корпоративный турнир за должность

Два работника соревнуются за то чтобы занять *новую вакансию*. Руководство проводит турнир:

1. Каждый работник i выполняет определенную *работу*, прикладывая *усилия* e_i .
2. Выпуск продукции зависит не только от *личных усилий*, но еще и от некоторого *случайного фактора* (независимые одинаково распределенные случайные величины с одинаковым распределением, нулевым, средним и плотностью $f(\varepsilon)$)
3. Руководство судит о *усилиях работников* по выпуску продукции y_i .
4. Победителем турнира считается тот, у кого выпуск больше. Он получает более высокую зарплату w_H , в то время как проигравшему достается зарплата w_L , $w_L < w_H$.
5. Выигрыш работника определяется функцией $u(w,e)=w-g(e)$, где последняя функция измеряет связанные с усилиями психологические затраты и предполагается возрастающей и выпуклой.

Выигрыш начальства определяется суммарным выпуском минус зарплата $\boldsymbol{y_1+y_2-w_H-w_L}$.

$$y_i = e_i + \varepsilon_i$$

$$w_H, w_L : w_H > w_L \qquad u(w,e) = w - g(e)$$

$$y_1 + y_2 - w_H - w_L \qquad g'(e) > 0, \quad g''(e) > 0$$

Предположим, что у работников есть возможность не участвовать в турнире, перейдя на альтернативную работу с выигрышем U_a

Порядок ходов:

1. Ход1: начальство объявляет турнир и назначает размер зарплаты;
2. Ход 2: работники одновременно и независимо выбирают размер усилий. После этого реализуются значения случайных факторов и определяется победитель турнира.

По правилам обратной индукции фиксируем уровни высокой и низкой заработной платы. Далее находим РН в игре работников.

Предполагается, что работники усредняют свой выигрыш по случайным факторам.

$$\left(e_1^*, e_2^*\right): \max_{e_i \geq 0}\left[w_H \cdot p + w_L \cdot (1-p) - g(e_i)\right] =$$

$$= \max_{e_i \geq 0}\left[(w_H - w_L)\cdot p + w_L - g(e_i)\right]$$

$$p = \Pr\left\{e_i + \varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j\right\} \quad (w_H - w_L)\frac{\partial p}{\partial e_i} = g'(e_i)$$

$$p = \Pr\left\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i \middle| \varepsilon_j\right\} f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[1 - F\left(e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right)\right]\cdot f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j$$

$$(w_H - w_L)\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right)\cdot f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j = g'(e_i) \qquad (**)$$

$$e_1^* = e_2^* = e^* \quad (w_H - w_L)\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j = g'(e^*)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$$

Так как функция ***g(e)*** выпуклая, то ее производная ***g'(e)*** возрастает и решение уравнения для ***e**** существует. Чем больше приз победителю ($\boldsymbol{W_H}$ – $\boldsymbol{W_L}$), тем больше усилий приложат работники в **РН**. Чем больше шум(

стандартное отклонение $\boldsymbol{\sigma}$ в нормальном распределении), тем меньше стимул стараться и уровень усилий в **РН** снижается.

Рассмотрим ход начальства по выбору $\boldsymbol{W_H}$ **,** $\boldsymbol{W_L}$ **.** В симметричном РН вероятность победы любого работника равна ½, поэтому ожидаемая заработная плата (**$\boldsymbol{W_H + W_L}$)/2.**

Для согласия участвовать в турнире должно быть выполнено условие ***индивидуальной рациональности:***

$$\frac{w_H + w_L}{2} - g\left(e^*\right) \geq U_a \qquad 2e^* - \left(w_H + w_L\right)$$

$$w_H + w_L = 2U_a + 2g\left(e^*\right)$$

$$2 \cdot \left(e^* - U_a - g\left(e^*\right)\right) \qquad g'\left(e^*\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(w_H - w_L\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f^2\left(\varepsilon_j\right) d\varepsilon_j = 1$$

$$w_{H,L} = U_a + g\left(e^*\right) \pm \sigma\sqrt{\pi}$$

Начальство должно покрыть альтернативный выигрыш работника, затраты от прилагаемых усилий и обеспечить достаточный приз победителю.

Список литературы по лекции 8.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

Лекция 9. Повторяющиеся игры

9.1. Сущность повторяющихся игр, сотрудничество и конфликтная стратегии

Очень часто, **игровые взаимодействия** между одними и теми же игроками **повторяются**:

1. Противостояние между ***упрямым ребенком*** и ***его родителями*** продолжается изо для в день;
2. ***Две фирмы***, конкурирующие друг с другом, рассчитывают на то, что их **конкуренция** продлится и в следующем году, и через два года;
3. ***Люди***, отвечающие за ***кредитно-денежную*** политику в центральном банке, скорее всего, **будут отвечать** за нее и ***через год.***

Повторяющиеся игры – это некоторый класс динамических игр с полной, но несовершенной информацией , который имеет специальное прикладное значение.

В случае повторяющихся игр возможно увязывание стратегий наказания с последними ходами нарушителей. Возможно применение стратегий, учитывающих несколько последних ходов партнеров.

Предположим, что какая-то игра повторяется во времени и каждый игрок использует стационарную стратегию с памятью на один ход. Таким образом, стратегией игрока i является тройка $x_i = (a_i, b_i, c_i)$, где a_i, b_i, c_i {C,K} (С – сотрудничество, К – конфликт) и интерпретируются следующим образом:

1. Игрок i выбирает a_i в первом повторении игры (t = 1);
2. В момент $t \geq 2$ игрок i выбирает b_i , если игрок j вел себя мирно в момент времени (t – 1), и c_i в противном случае.

Типичной стратегией является стратегия «как ты, так и я», а именно (С; С, К). Согласно этой стратегии игрок на первом ходу выбирает сотрудничество, но предупреждает партнера, что он будет продолжать сотрудничать лишь при симметричном ответе партнера, а при конфликтном ответе партнера тут же перейдет на конфликтную стратегию.

Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической).

Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры.

Аналогично, чтобы получить дерево n раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине n − 1 раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры.

Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется.

В отличие от обычных игр в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры.

Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории повторяющейся игры. Таким образом, если u_{ij} —выигрыш, полученный i-м игроком в результате j-го повторения игры (на j-м раунде), то общий выигрыш в n раз повторяющейся игре составит:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем.

Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0,1)$ дисконтирующий множитель i-го игрока для j-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}$$

Повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие (СПРН)в них можно находить обратной индукцией.

Несовершенство информации в повторяющихся играх связано с одновременностью ходов игроков в повторяющейся игре.

Выигрыш игрока в повторяющейся игре G(T) обычно определяется как сумма выигрышей в повторениях.

Как правило, в таких играх существует много РН, построенных с помощью необоснованных угроз. Нас будут интересовать только РН, согласованные с принципом обратной индукции. Такие равновесия Нэша называются совершенными по подыграм (СПРН).

Для повторяющейся игры G(T) подыгрой G(t,T) полагается игра, которая возникает после того, как сыграны (t-1) повторений игры G.
Равновесие, совершенное по подыграм — принцип оптимальности в теории игр, представляющий очищение равновесия Нэша для игр в развернутой форме.
Определение: Совершенным по подыграм равновесием Нэша (СПРН) в игре G(T) (с конечным числом повторений) называется такой профиль стратегий S*, который порождает равновесие Нэша в любой подыгре.

Набор стратегий игроков называется равновесием, совершенным по подыграм, если его сужение на любую подыгру данной игры есть равновесие Нэша в ней. Интуитивно это означает, что действия сторон в некоторой игре будут одинаковы, независимо от того, разыгрывается ли она отдельно или является частью более общей надыгры.

Равновесие, совершенное по подыграм, позволяет отсеять равновесия Нэша, основанные на недостоверных угрозах игроков.

Общим методом определения совершенных по подиграм равновесий является обратная индукция, при которой оптимизация ходов игроков начинается с конца игры. Данный метод не работает, если в игре отсутствуют подыгры, а также для повторяющихся игр с бесконечным горизонтом.

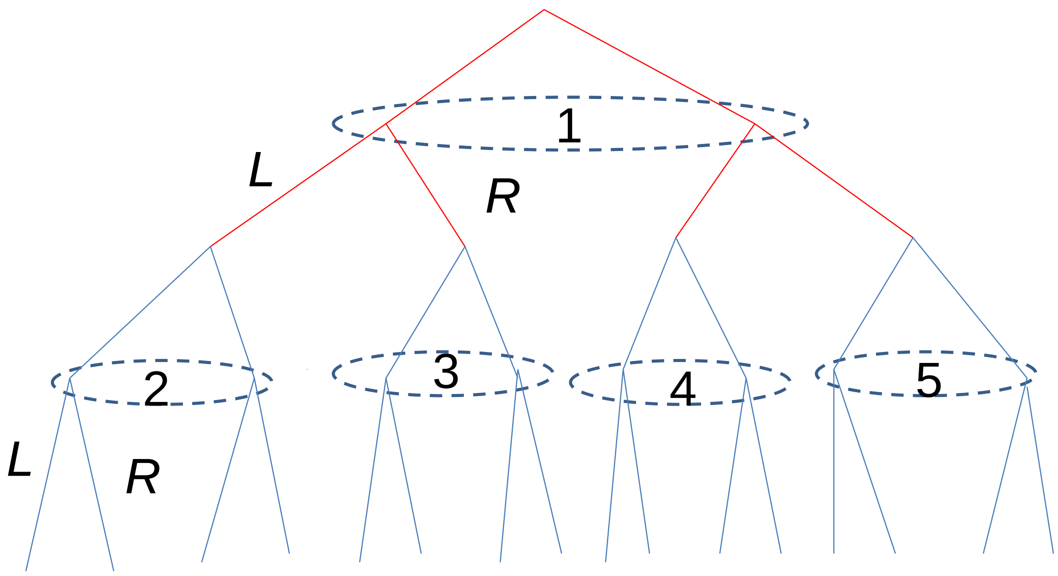
9.2. Игра «Дилемма заключенного», повторенная два раза

$G(t,T)$ **- подыгра игры *G(T),* возникающая после *t-1* повторений игры *G***

Пример. Двукратное повторение дилеммы заключенного:

	L	R
L	1 , 1	5 , 0
R	0 , 5	4 , 4

Дерево игры «Дилемма заключенного», повторенная два раза.



Цифрами ***1-5*** обозначены информационные множества второго игрока

Множество 1 соответствует принятию решения (молчать/сознаться или L / R), в момент времени 1, то есть когда игроки играют «дилемму заключенного» в первый раз.
Множества 2-5 соответствуют принятию решения в момент времени 2, для каждого из 4 возможных вариантов исхода игры на первом этапе. Следуя формальному определению чистой стратегии в динамической игре, получается, что у игроков $2^5 = 32$ чистых стратегий. Некоторые из этих стратегий являются эквивалентными.

	L	R
L	$\underline{1}$, $\underline{1}$	$\underline{5}$, 0
R	0 , $\underline{5}$	4 , 4

	1	LL	LR	RL	RR

$$G(2):$$

	L	R
L	$\underline{2}$, $\underline{2}$	$\underline{6}$, 1
R	1 , $\underline{6}$	5 , 5

действие	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*

Действие а приписано первому повторению. Действия b, c, d, e приписаны второму повторению, например d – когда игрок 1 выбрал R, а игрок 2 выбрал L . Число стратегий можно сократить без ущерба для описания игры, т.к. при выборе действий игрока 1 во втором повторении достаточно учитывать только действия игрока 2 в первом повторении, поскольку свое действие в первом повторении он и так знает.

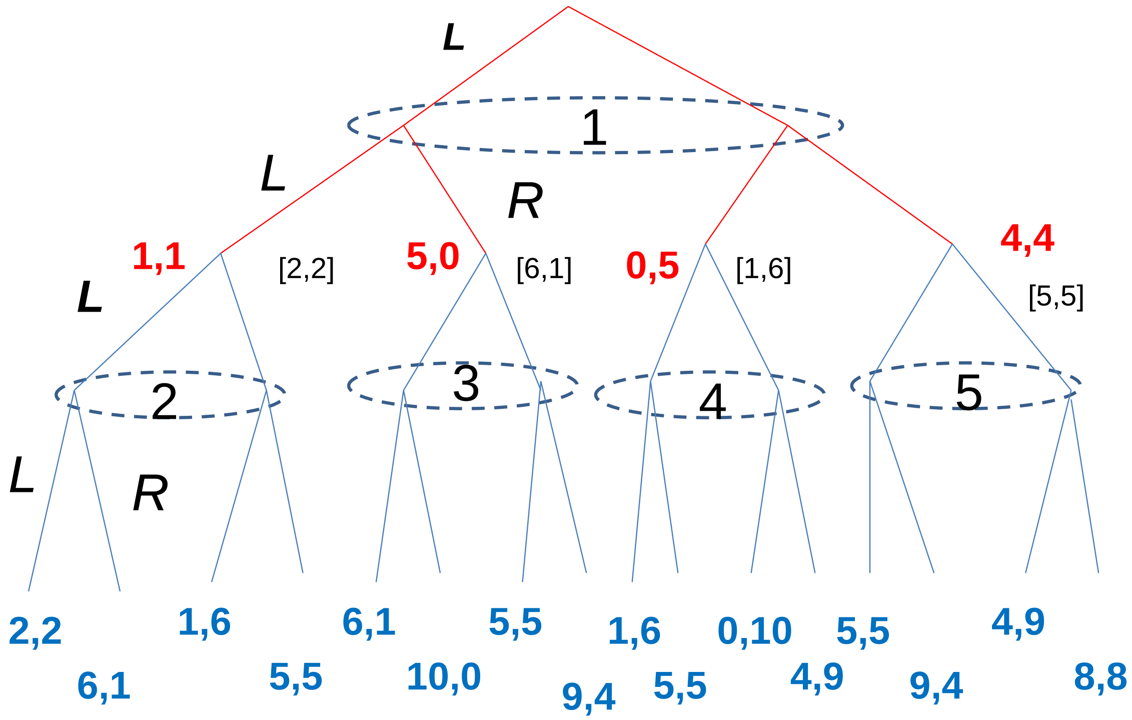
Тогда у **каждого игрока** останется по **8** стратегий с шаблоном:

	1	**L**	**R**
действие	***a***	***b***	***c***

Изобразим теперь нормальную форму игры G(2) с использованием таких стратегий:

	LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR
LLL	2,2	2,2	6,1	6,1	6,1	6,1	10,0	10,0
LLR	2,2	2,2	6,1	6,1	5,5	9,4	9,4	9,4
LRL	1,6	1,6	5,5	5,5	6,1	6,1	10,0	10,0
LRR	1,6	1,6	5,5	5,5	5,5	9,4	9,4	9,4
RLL	1,6	5,5	1,6	5,5	5,5	9,4	5,5	9,4
RLR	1,6	5,5	1,6	4,9	4,9	8,8	8,8	8,8
RRL	0,10	4,9	0,10	4,9	4,9	8,8	5,5	9,4
RRR	0,10	4,9	0,10	4,9	4,9	8,8	4,9	8,8

Дерево игры «Дилемма заключенного», повторенная два раза.



Утверждение 1. Если в статической игре ***G*** существует единственное **РН**, то в игре ***G(T)*** существует единственное **СПРН**, которое сводится к повторению статического **РН**

Утверждение 2. Если множество **РН** в игре ***G*** не пусто, то любая последовательность **РН** игры ***G*** образует **СПРН** в повторяющейся игре ***G(T)***.

9.3. Бесконечно повторяющиеся игры

Если всем игрокам известно, что игра закончится через Т периодов, то на последнем этапе будут сыграны какие-то равновесные стратегии; используя обратную индукцию, мы получим равновесные стратегии на всех этапах повторяющейся игры.

А если горизонт планирования отсутствует? Предположим, что в любой момент времени существует положительная вероятность того, что в следующий момент времени игра повторится. Такое предположение в ряде случаев вполне уместно.

Игровое взаимодействие в таком случае можно моделировать в виде игры, повторяющейся бесконечное число раз (БПИ), при условии, что выигрыш в каждом следующем периоде дисконтируется с определенной ставкой. В такой постановке использование обратной индукции невозможно. Как мы увидим, множество равновесий в бесконечно повторяющейся игре принципиально отличается от совершенных по подыграм равновесий в той же игре, повторенной конечное число раз. В БПИ суммировать выигрыши нельзя!

Множество стратегий (пусть даже чистых) в бесконечно повторяющейся игре очень громоздко. Стратегия должна предписывать, как действовать в зависимости от всех возможных действий игроков в предшествующие периоды для каждого момента времени t $\geq$ 0. В бесконечно повторяющейся игре любая подыгра эквивалентна самой игре. Поэтому будем ограничиваться стратегиями, в которых действие игрока в текущий период зависит от действий всех игроков за какое-то конечное число предыдущих периодов.

$G(\infty, \delta)$: игра с бесконечным количеством повторений и коэффициентом дисконтирования. $0 < \delta < 1$

$$\{\pi_i^1, \ldots, \pi_i^t, \ldots\} \qquad V_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \pi_i^t$$

Стратегия игрока ***i*** в игре $G(\infty, \delta)$ - это бесконечная последовательность функций:

$$s_i = \{s_i^t(a_j^\tau, \tau < t, j \in N), t = 1, \ldots\},$$

Если нам понадобится сравнивать выигрыши в бесконечно повторяющейся игре с выигрышами в исходной игре, то удобно ввести условие нормировки выигрышей положив: $U_i = (1-\delta) \cdot V_i$

учитывая равенство $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{1}{1-\delta}$

В отличие от игры с конечным числом повторений в бесконечно повторяющейся игре возможно возникновение сотрудничества.

Рассмотрим стратегии следующего вида:

1. сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе в первом раунде тоже сотрудничать);
2. не сотрудничать, если хотя бы в одном из предыдущих раундов другой игрок взял один доллар себе.

Такую стратегию называют триггерной (релейной). Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие (СПРН). Если δ_1, δ_2 малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклониться от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

9.4. **«Народная теорема»**

Пусть G – конечная статическая игра, и s^* - РН в этой игре.

Обозначим:

$$e = (e_1,\dots,e_n),\ e_i = u_i(s^*)$$

Пусть

$$x = (x_1,\dots,x_n),\ x_i = u_i(s),\quad s \in S$$

- любой реализуемый в статической игре вектор выигрышей. Если

$x_i > e_i,\quad \forall i = 1,\dots,n$ то при коэффициенте дисконтирования, достаточно близком к единице, в игре $G(\infty,\delta)$ существует **СПРН**, в котором **каждый игрок** получает ***выигрыш*** $U_i = x_i$

В бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и, кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины.

Список литературы по лекции 9.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 10. **Моделирование на основе повторяющихся игр**

10.1. Сговор в олигополии Курно

Олигополия отличается и от совершенной конкуренции и монополии. Если допустить возможность повторения олигополии, то возникают СПРН, которые можно интерпретировать как сговор.

В динамических играх трудно провести грань между независимым и кооперативным поведением игроков.

Даже, если игроки не вступают__в переговоры непосредственно, наблюдение общей траектории уже может служить достаточным сигналом для координации действий.

- Рассмотрим случай **дуополии**:

$$Q = q_1 + q_2; \qquad P(Q) = a - Q$$

$$C(q_i) = c \cdot q_i;$$

$$u_i(q_i, q_j) =$$

$$= P(Q) \cdot q_i - C(q_i) = (a - c - q_i - q_j) \cdot q_i$$

В **РН** выпуск каждого игрока и совокупный выпуск равны соответственно:

$$q^* = \frac{1}{3}(a-c); \qquad Q^* = \frac{2}{3}(a-c)$$

Монопольный выпуск меньше совокупного выпуска дуополии , а монопол. выигрыш больше.

$$q^M = \frac{1}{2}(a-c) < Q^*$$

$$\pi^M = \frac{1}{4}(a-c)^2 > 2\pi^*, \quad \pi^* = \frac{1}{9}(a-c)^2$$

Поэтому может возникнуть желание **договориться**...

В статической игре такая ситуация не является устойчивой.

С учетом найденной ранее функции наилучшего ответа можно рассчитать оптимальный ответ на половину монопольного объема выпуска с учетом дуополии.

При этом отклонившийся игрок получит соответствующий выигрыш.

- Используем релейные стратегии для построения СПРН, которое приводит к фактической монополии в каждом повторении.
- Для этого достаточно найти условие на коэффициент дисконтирования, чтобы отклонение было не выгодным.

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{\pi^M}{2}\ge\pi_d+\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\pi^*$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{(a-c)^2}{8}\ge\frac{9}{64}(a-c)^2+\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\frac{1}{9}(a-c)^2\Rightarrow\delta\ge\frac{9}{17}$$

$$\delta<\frac{9}{17}:\qquad q_i^*>q^0>\frac{q^M}{2}$$

$$\pi^0=\left(a-c-2q^0\right)q^0;\quad \pi_d=\frac{1}{4}\left(a-c-q^0\right)^2$$

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\pi^0\ge\pi_d+\frac{\delta}{1-\delta}\pi^*\quad\Rightarrow q^0=\frac{9-5\delta}{3(9-\delta)}\cdot(a-c)$$

Если $\delta \ge 9/17$, то сговор с образованием монополии можно реализовать как СПРН в релейных стратегиях.

Возникают два вопроса про случай $\delta < 9/17$:

1. Какой сговор q^0, $q^*_i > q^0 > q^M/2$ реализуем как СПРН в релейных стратегиях?
2. Можно ли реализовать монополию как СПРН с помощью других (нерелейных) стратегий?

Если обе фирмы поддерживают монополию, то эта ситуация повторяется постоянно.

Если кто-то отклоняется, то другой в одном повторении включает наказание *x*.

Если отклонившийся тоже играет *x*, происходит возврат на монопольную траекторию, чего не было в *релейных стратегиях*.

Задача сводится к тому, чтобы найти подходящее значение x чтобы получилось СПРН.

$$\pi(x) = (a - c - 2x)x$$

$$V(x) = \pi(x) + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2} \pi^M$$

$$R_j(x) = (a - c - x)/2$$

$$\pi_d(x) = \frac{1}{4}(a - c - x)^2$$

Теперь рассмотрим *условия* невыгодности отклонения от СПРН в двухфазовых стратегиях:

Условие 1: Игрок отклоняется от половины монопольного выпуска, но потом играет x и происходит возврат на монопольную траекторию:

$$\frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2} \pi^M \geq \pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) + \delta \cdot V(x)$$

Условие 2: Сравниваем две траектории. Оба игрока играют x с последующим возвратом на равновесную траекторию, или игрок сначала реализует отклонение от x и только потом играет x с последующим возвратом на монопольную траекторию:

$$V(x) \geq \pi_d(x) + \delta \cdot V(x)$$

Оказывается, что выполнение этих двух условий достаточно для построения СПРН. Если игрок сначала оптимально ответит на половину монопольного выпуска, а потом будет оптимально отвечать на x, тогда его выигрыш будет равен:

$$\pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \pi_d(x)$$

В силу условия 2 выполнено: $$V(x) \geq \frac{1}{1-\delta} \cdot \pi_d(x)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi^M - \pi(x)\right) \geq \pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) - \frac{1}{2}\pi^M$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi^M - \pi(x)\right) \geq \pi_d(x) - \frac{1}{2}\pi(x)$$

Найдем диапазон допустимых значений ***x:***

$$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}(a-c) < x < \frac{1}{2}(a-c)$$

Выводы: Двухфазовые стратегии позволяют построить СПРН, основанные на монопольном сговоре в том случае, когда на релейных стратегиях такое СПРН построить нельзя.

10.2. Модель эффективной зарплаты

В этой модели повторяется динамическая игра переговоров о зарплате. В каждом повторении фирма предлагает работнику зарплату w. Работник, зная w, может либо согласиться на эту зарплату, либо отказаться и уйти на альтернативную работу с зарплатой w_0.

Если работник согласился на предложение фирмы, то он зачисляется на работу, где он может работать старательно, прикладывая необходимые усилия e и обеспечивая выпуск y, либо только изображать напряженную работу, прикладывая на самом деле нулевые усилия.

Поскольку **успех проекта** зависит от всей команды, то с вероятностью ***p*** срыва не произойдет и выпуск будет обеспечен, несмотря на ***нулевые усилия*** работника. В этом случае ничего не происходит, поскольку фирма наблюдает только величину выпуска, но не размер усилий работника.

С вероятностью ***1-p*** произойдет срыв проекта (выпуск при этом считается равным нулю) и виновный будет обнаружен.

$$u_F = y - w$$ -Выигрыш фирмы

Выигрыш работника $$u_W = w - e'$$

$$e' = \begin{cases} e & \textit{для старательного работника,} \\ 0 & \textit{для ленивого.} \end{cases}$$

Предположим, что $$y - e > w_0 > py$$

Первое неравенство обеспечивает **выгодность** для найма работника с некоторым уровнем зарплаты, выше его альтернативного уровня ***W_0*.**
Второе неравенство говорит о том, что альтернативная зарплата ***W_0*** больше ожидаемого выигрыша работника при нулевых усилиях на новой работе даже при максимальной зарплате, равной выпуску.
Построим **СПРН** при заданном уровне зарплаты ***W**** на основе следующих ***релейных стратегий***:

1. ***Стратегия фирмы***: платить ***w****, пока наблюдается выпуск ***y***, иначе ***0***.
2. ***Стратегия работника***: соглашаться на зарплату не менее ***w**** и стараться; за меньшую зарплату «***не напрягаться***».

$$V_e = \frac{w - e}{1 - \delta}$$ Обозначим выигрыш работника, старательно выполняющего работу с зарплатой ***w****

Выигрыш работника при отклонении:

$$V_d = w^* + \delta\left(pV_d + (1 - p)\frac{w_0}{1 - \delta} \right)$$

$$V_d = \frac{(1 - \delta)w^* + \delta(1 - p)w_0}{(1 - \delta p)(1 - \delta)}$$

Минимальная зарплата:

$$w_0 + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)} \cdot e \xrightarrow[p \to 1]{} \infty$$

Поэтому в этом случае **СПРН** с этими стратегиями не получится. Если

$$w_0 + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)} \cdot e \xrightarrow[p \to 0]{} w_0 + \frac{1-\delta}{\delta} \cdot e$$

Которая следует из ***условия невыгодности отклонения:***

$$\frac{1}{1-\delta}\left(w^* - e\right) \geq w^* + \frac{\delta}{(1-\delta)} \cdot w_0$$

10.3. Денежная политика

В этой модели повторяется динамическая игра, в которой участвуют представители власти, управляющие денежной политикой, и корпорации.

1. Ход 1. Корпорации формируют некоторый ожидаемый уровень инфляции π_e за год.
2. Ход 2. Власти узнают ожидания корпораций и определяют реальный уровень инфляции π.

Выигрыш корпораций связан с стремлением угадать истинный уровень инфляции, чтобы минимизировать ущерб от нее.

Для власти желателен низкий уровень инфляции, но при этом готовы использовать эффект неожиданной инфляции в качестве рычага госуправления :

Считается , что реальный уровень **ВВП** зависит от целевого по формуле:

$$y = by^* + d\left(\pi - \pi_e\right)^2, \quad 0 < b < 1, \quad d > 0$$

- Здесь *0 < b < 1* характеризует степень монополизации экономики, сдерживающую ее развитие.
- Параметр *d > 0* измеряет чувствительность экономики к неожиданной инфляции $\pi - \pi_e$
- Незаметно поступающие в экономику деньги могут восприниматься корпорациями как увеличение спроса, на что они могут ответить

ростом предложения. Если же деньги в экономику поступают резко и открыто – увеличение цен

Рассмотрим двухходовую игру и далее добавим повторение.

- Если власти знают ожидаемый уровень инфляции π_e и стремятся максимизировать величину
-
$$w(\pi, \pi_e) = -c\pi^2 - \left(by^* + d(\pi - \pi_e) - y^*\right)^2,$$

- То из условия первого порядка находим наилучший ответ властей:

$$\pi^*(\pi_e) = \frac{d}{c+d^2}\left[(1-b)y^* + d\pi_e\right] \quad (*)$$

В силу обратной индукции корпорации стремятся максимизировать величину:

$$-\left(\pi^*(\pi_e) - \pi_e\right)^2 \Rightarrow \pi^*(\pi_e) = \pi_e \Rightarrow \pi_e = \frac{d(1-b)}{c} y^*$$

Рассмотрим следующие релейные стратегии:

- Корпорации ожидают нулевую инфляцию до тех пор, пока реализуется нулевая инфляция, иначе переходят на ожидание π_e^*
- Власти реализуют нулевую инфляцию, пока ожидаемая инфляция равна 0, иначе переходят на $\pi^*(\pi_e)$

Условие невыгодности отклонения для корпорации проверять не надо, т.к. для них реализуется максимально возможный выигрыш, равный нулю.

Для властей условие можно записать в виде:

$$\frac{w(0,0)}{1-\delta} \geq w(\pi^*(0), 0) + \frac{\delta}{1-\delta} w(\pi_e^*, \pi_e^*) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{c}{2c+d^2}$$

Список литературы по лекции 10.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
3. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 11. Статические игры с неполной информацией

11.1. Понятие ассиметричной информированности, типа игроков и природы

Экономические субъекты всегда бывают информированы в разной степени , асимметрично информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло.

Формально это учитывается с помощью введения понятия типа игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип.

Можно считать, что первый ход делает природа, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми

Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми.

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией.

Характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

11.2. Дуополия Курно с неполной информацией

1. На рынке действуют две фирмы (1 и 2).
2. Фирма i выпускает q_i продукции .
3. Цена на товар $P(Q)=a-Q$ определяется совокупным выпуском $Q=q_1+q_2$.
4. Затраты фирмы i на выпуск продукции q_i равны $C_i(q_i)=c_i \cdot q_i$.Предельные затраты фирм могут быть разными. Предельные затраты фирмы 1 равны $c_1=c$ и общеизвестны и фирме 2 также. Предельн затраты фирмы 2 $c_2 \in \{ c_H , c_L \}$знает только фирма 2
5. **Фирма 1** знает с вероятностью $\boldsymbol{\theta}$, что у **фирмы 2** затраты будут $\boldsymbol{c_H}$

и с вероятностью ***1-θ***, что затраты у **фирмы 2** будут равны c_L.

6. Для **фирмы 1** стратегией является размер выпуска: $s_1 = q_1 \geq 0$ а для **фирмы 2** назначение объема выпуска будет зависеть от предельных затрат $s_2(c_2)$. $\to q_2(c_H), q_2(c_L)$.
7. Тройка чисел $(q^*_1, q^*_2(c_H), q^*_2(c_L))$ образуют равновесие, если выпуск является оптимальным ответом **фирмы 2.** (1, 2, 3)усл.

Дуополия Курно с неполной информацией

$$P(Q) = a - Q; \qquad Q = q_1 + q_2$$

$$c_i(q_i) = c_i \cdot q_i;\ c_1 = c;\ c_2 \in \{c_H, c_L\}$$

$$p(c_H) = \theta, \qquad p(c_L) = 1 - \theta$$

$$s_1 = q_1 \geq 0, \qquad s_2 = s_2(c_2)$$

$$q_2(c_H), \quad q_2(c_L); \ (q_1^*, q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - c_H - q_1^*}{2}$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - c_L - q_1^*}{2}$$

(3) выпуск q^*_1 является оптимальным ответом **фирмы 1** на выпуск $q^*_2(c_H)$ с вероятностью θ и выпуск $q^*_2(c_L)$ с вероятностью ***1-θ.***

Найдем q^*_1 из условия максимизации ожидаемого выигрыша **фирмы 1.**

В силу линейности выигрыша **фирмы 1** по выпуску **фирмы 2** полезно ввести в рассмотрение ожидаемый выпуск q^{θ}_{2}.
Тогда выпуск **фирмы 1** должен быть оптимальным ответом на ожидаемый выпуск **фирмы 2.**

$$\max_{q_1 \geq 0} \theta \cdot \left[\left(a - c - q_1 - q_2^*(c_H)\right) \cdot q_1\right] +$$
$$+ (1-\theta) \cdot \left[\left(a - c - q_1 - q_2^*(c_L)\right) \cdot q_1\right]$$

$$q_2^{\theta} = \theta \cdot q_2^*(c_H) + (1-\theta) \cdot q_2^*(c_L)$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - c_H - q_1^*}{2}$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - c_L - q_1^*}{2}$$

$$q_1^* = \frac{a - c - q_2^{\theta}}{2}$$

В итоге имеем **три** линейных уравнения с **тремя** неизвестными.

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_H + (1-\theta)c_L}{3};$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L);$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L).$$

В случае Дуополии Курно с полной информацией и предельных затратах c_1 и c_2 равновесные выпуски равны $q^*_i = (a-2c_i+c_j)/3$

В рассмотренном случае неполной информации при высоких затратах фирма 2 выпускает больше, а при низких затратах выпускает меньше, чем в РН с полной информацией.

Фирма 1 в данном случае вынуждена ориентироваться на средние затраты, уменьшая выпуск при высоких затратах.

11.3. Байесовские игры, условия согласования, равновесие Байеса – Нэша

Наиболее удобной формой задания статической игры с неполной информацией является так называемая байесовская игра.

Далее нормальная форма игры расширяется за счет введения так называемых множеств типов игрока, которые задают приватные характеристики участника, и вероятностных представлений о типах других участников.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры).

Описание **статической байесовской игры** должно включать в себя следующие составляющие:

1. ***множество игроков***;
2. для каждого игрока — ***множество типов***;
3. ***распределение вероятностей*** на множествах типов;

4. для каждого игрока — ***множество возможных действий***;
5. для каждого игрока — ***функции выигрышей***.

В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов. Предполагается, что появление того или иного типа—случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве типов.

Если множества типов конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов , т. е. функцию : π: T$\rightarrow$ R_+, для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательными и их сумма должна равняться единице.

Предполагаем, что имеет место независимость появления типов у разных игроков. В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, т. е. m функций:

$$\pi_i: T_i \rightarrow R_+, i=1,2,\ldots m$$

таких что π_i —вероятность появления типа T T_i игрока i. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы—это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов.

Независимость типов в данном контексте означает, что ***функцию распределения*** можно представить как **произведение функций распределения типов** отдельных игроков.

Предполагается, что все **типы** одного и того же игрока имеют **одинаковые множества действий** . Выигрыш в **статических байесовских играх** зависит не только от выбранных игроками **действийm,** но и от того, какие именно **типы** участвуют в игре.

Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей.

Определение. Байесовской игрой называется следующая совокупность объектов

$$N = \{1, \dots, n\} \qquad G_B = \{A_i, T_i, u_i, p_i, i \in N\}$$

$$A_i, \quad a = (a_i, i \in N) \in A = \prod_{i \in N} A_i$$

$$T_i, \quad t = (t_i, i \in N) \in T = \prod_{i \in N} T_i$$

$$u_i(a, t) \qquad p_i(t_{-i} \mid t_i);$$

$$t_{-i} = (t_j, j \neq i) \in T_{-i} = \prod_{j \neq i} T_j$$

Стратегии в статических байесовских играх <u>не совпадают </u>с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией стратегия игрока описывает действия каждого из типов этого игрока.

Можно представить стратегию как функцию , которая ставит в соответствие каждому типу некоторые действия .

Условие согласования представлений:

$$p_i(t_{-i} \mid t_i) = \begin{cases} \dfrac{p_i(t_i, t_{-i})}{p(t_i)}, & p(t_i) > 0, \\ 0, & p(t_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{где} \quad p(t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_i, t_{-i})$$

Стратегия: $$s_i : T_i \to A_i$$

$p_i(t_{-i} \mid t_i)$- представления о типах остальных игроков при известном своем типе, заданные как вероятностные распределения на множестве типов остальных игроков.

Под стратегией s_i игрока i в байесовской игре понимается отображение множества типов T_i
во множество действий A_i

$$s_i : T_i \to A_i$$

Стратегия байесовской игры определяет действия игрока для всех типов , хотя реально каждый игрок обладает только каким-то одним типом.
В модели под игроком удобнее понимать экономическую роль, которую может играть один из многих участников .

11.4. Аналогия между байесовской игрой и динамической игрой в развернутой форме

Природа (игрок 0) выбирает тип $t \in T$, используя фиксированную и всем известную смешанную стратегию p(t).
Каждый игрок узнает свой тип t , но не знает типов остальных игроков. У игрока i столько информационных множеств H, сколько типов во множестве T_i.
Игроки одновременно и независимо выбирают действия $a_i \in A_i$.
Игра заканчивается подсчетом выигрышей $u_i(a,t)$

Для байесовской игры вводится свое понятие равновесия. Определим равновесие Байеса-Нэша.

Определение. Равновесием Байеса – Нэша (**РБН**) $s^* = \left(s_i^*, i \in N\right)$ в байесовской игре G_B называется такой профиль стратегий $s_i : T_i \to A_i$ всех игроков, для которого действие $s_i^*(t_i), \quad \forall t_i \in T_i$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока i

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(a_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\right) \cdot p\left(t_{-i} \mid t_i\right)$$

по всем его действиям $a_i \in A_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков. Так как игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть условным по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса— отсюда и термины - байесовские игры, -байесовское равновесие.)

Теорема: В конечной байесовской игре существует **РБН** в **смешанных стратегиях**. Если множества типов ***одноэлементные***, то **РНБ** сводится к **РН** в обычной ***статической игре с полной информацией.***

Интерпретация смешанных стратегий: (возможны 3 интерпретации смешанных стратегий)

1. Случайный выбор;
2. Малый случайный параметр;
3. Представления и ожидания.

Список литературы по лекции 11.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

Лекция 12. Модели основанные на статических играх с неполной информацией

12.1. **Аукцион с закрытыми заявками по первой цене**

Рассмотрим модели, которые основаны на статических играх с неполной информацией.

Интерес к аукционам связан с тем, что они лежат в основе многих торговых систем, целью которых является поиск эффективного механизма торговли и других сделок.

Рассмотри применение теорию игр с точки зрения совершенствования дизайна аукционов

Рассмотрим самый простой аукцион, на котором n покупателей соревнуются за покупку одной единицы товара. (аукцион с закрытыми заявками по первой цене)

Покупатели независимо и одновременно друг от друга подают аукционеру заявки на покупку товара. В каждой заявке указывается цена, которую покупатель готов заплатить за этот товар.

Победителем на аукционе считается тот покупатель, который указал в заявке наибольшую цену, по которой заключается сделка между продавцом и покупателем.

Если максимальных цен несколько, то для определения победителя бросается жребий среди покупателей, указавших максимальную цену.

Простой аукцион

$$n = 2; \quad b_i \geq 0; \quad v_i \in [0,1]$$

$$b_i \in A_i = [0,1]$$

$$v_i \in T_i = [0,1]$$

$$p_i(v_j)$$

5

•

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

Если этот ***игрок i*** выберет цену b_i, то **вероятность** того, что другой ***игрок j*** предложил более низкую v_j цену, равна

$$\Pr\{b_j(v_j) < b(v_i)\} = \Pr\{v_j < b^{-1}(b_i)\}$$

где мы воспользовались тем, что оценка

равномерно распределена на ***[0, 1].***

$$u_i(b_i, b_j, v_i, v_j) = \begin{cases} v_i - b_i, & b_i > b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2}, & b_i = b_j \\ 0, & b_i < b_j \end{cases}$$

$$b_i : [0,1] \to [0,1]$$

8

Необходимо найти **РБН** в этой байесовской игре. **Выигрыш** игрока ***зависит*** только от его ***собственного типа***, но не зависит от остальных. **Стратегией** игрока ***i*** является функция $b_i:[0,1] \to [0,1]$, которая показывает, какую заявку $b_i(v_i)$ будет выставлять игрок ***i*** при стоимости товара v_i

Найти **РБН** , не накладывая ограничений на класс функций b_i, достаточно трудно. Выбираем линейную стратегию и из соображения невозможности превышения заявки над стоимостью принимаем $a_j=0$.Заявка не может быть отрицательной – $c_j>0$.

Вероятность одинаковых заявок равна ***0***.

Далее считаем вероятность победы на аукционе:

$$b_i(v_i):$$

$$\max_{b_i \in [0,1]} \left[(v_i - b_i) \cdot \Pr\{b_i > b_j(v_j)\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i) \cdot \Pr\{b_i = b_j(v_j)\} \right]$$

$$b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$$

$$a_j + c_j v_j \le v_j$$

$$a_j = 0, \quad c_j > 0 \Rightarrow b_j(v_j) = c_j v_j$$

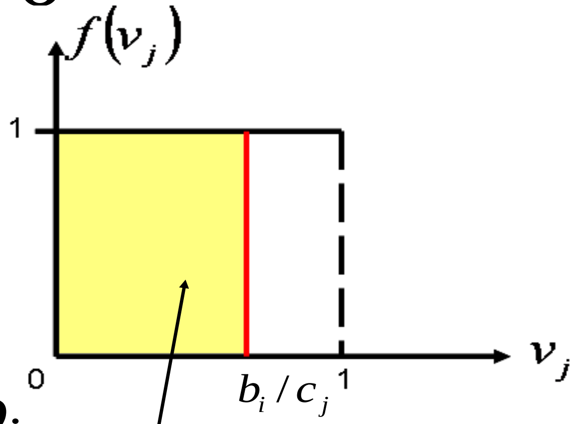
11

$$\Pr\{b_i = b_j(v_j)\} = 0$$

$$\Pr\{b_i > b_j(v_j)\} =$$

$$= \Pr\{b_i > c_j v_j\} =$$

$$= \Pr\left\{ v_j < \frac{b_i}{c_j} \right\} = \frac{b_i}{c_j}$$



$$\Pr\left\{ v_j < \frac{b_i}{c_j} \right\} = 1 \cdot \frac{b_i}{c_j} = \frac{b_i}{c_j}$$

12

$$\frac{(v_i - b_i)\cdot b_i}{c_j} \qquad b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$$

$$a_j = 0, \quad c_j > 0 \quad \left(c_j = \frac{1}{2}\right)$$

13

Оптимальным ответом на линейную стратегию является линейная стратегия. Найдено **единственное равновесие в линейных стратегиях**. Если расширить класс стратегий до возрастающих дифференцируемых функций, то новых симметричных **РБН** не появится.

$$v_j = b^{-1}(b_j) = b^{-1}(b(v_j))$$

$$\Pr\{b_i > b(v_j)\} =$$
$$= \Pr\{v_j < b^{-1}(b_i)\} = b^{-1}(b_i)$$

$$\max_{b_i \in [0,1]} \left[(v_i - b_i)\cdot b^{-1}(b_i)\right]$$

15

$$-b^{-1}(b_i)+(v_i-b_i)\cdot\frac{db^{-1}(b_i)}{db_i}=0$$

$$\frac{db^{-1}(b_i)}{db_i}=\frac{1}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)}=\frac{1}{b'(v_i)}$$

$$-v_i+(v_i-b(v_i))\cdot\frac{1}{b'(v_i)}=0$$

$$b'(v_i)\cdot v_i+b(v_i)=v_i$$

$$\left[b(v_i)\cdot v_i\right]'=v_i$$

$$b(v_i)\cdot v_i=\frac{1}{2}v_i^2+k$$

$$0\le b(v_i)\le v_i\Rightarrow k=0\Rightarrow b(v_i)=\frac{1}{2}v_i$$ [17]

12.2. **Двойной аукцион**

В двойном аукционе роли покупателей и продавцов симметричны. Рассмотрим простейший вариант двойного аукциона: 1 покупатель, 1 продавец, 1 единица неделимого товара.

По типу подачи заявок данный вариант двойного аукциона называется аукционом с закрытыми заявками (покупатель и продавец подают заявки одновременно и независимо друг от друга).

- *Заявка покупателя* p_B означает желание купить товар по этой цене или дешевле.
- *Заявка продавца* p_s означает желание продать по этой цене или дороже.
- *Сделка* совершается при условии $p_B \geq p_s$ по цене $p = \frac{(p_B + p_s)}{2}$ Если $p_B < p_s$, то сделки нет.
- *Для покупателя* стоимость товара равна ,
а для *продавца* стоимость товара равна

Двойной аукцион

$$p_B \qquad p_S$$

$$p_B \geq p_S: \quad p = \frac{p_B + p_S}{2}$$

$p_B < p_S$ **- сделки нет**

$$v_B : (v_B - p) \qquad v_S : (p - v_S)$$

Стоимости товара для игроков равномерно распределены на отрезке ***[0,1]***, причем каждый игрок точно знает только ***свою оценку*** стоимости, а об оценке стоимости другого у него есть только **вероятностное представление**.

В результате данный вариант **двойного аукциона** предстает как **байесовская игра**, и наша задача найти **РБН.**

Стратегии игроков в данной игре – это их функции заявки .

$$p_B(v_B) \quad \text{и} \quad p_S(v_S)$$

Условие РБН запишем отдельно для покупателя и продавца.

$$v_B \in [0,1] \quad p_S(v_S)$$

$$\max_{p_B \in [0,1]} \left[v_B - \frac{p_B + E(p_S(v_S) \mid p_B \ge p_S(v_S))}{2} \right] \cdot \Pr\{p_B \ge p_S(v_S)\}$$

$$v_S \in [0,1] \qquad p_B(v_B)$$

$$\max_{p_S \in [0,1]} \left[\frac{p_S + E(p_B(v_B) \mid p_S \le p_B(v_B))}{2} - v_S \right] \cdot \Pr\{p_S \le p_B(v_B)\}$$

$$p_B(v_B) = \begin{cases} x, & v_B \ge x \\ 0, & v_B < x \end{cases} \quad p_S(v_S) = \begin{cases} x, & v_S \le x \\ 1, & v_S > x \end{cases}$$

23

Двойной аукцион

- *Стратегия покупателя:* $p_B(v_B) = x$,

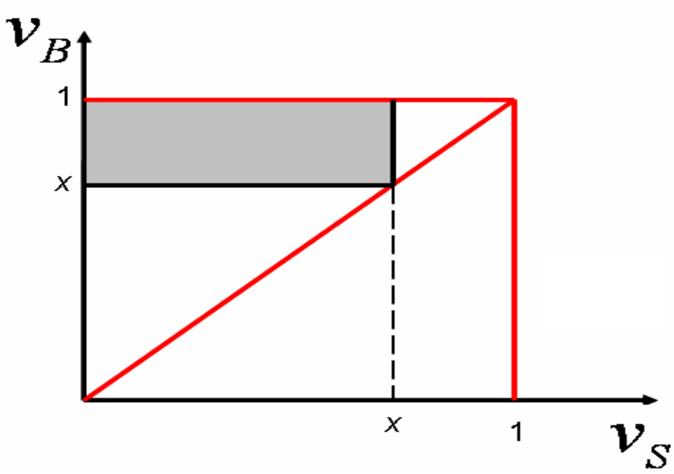
  если $v_B \ge x$, иначе $p_B(v_B) = 0$

- *Стратегия продавца:* $p_S(v_S) = x$,

  если $v_S \le x$, иначе $p_S(v_S) = 1$

24

$$v_S \le v_B \quad p_B(v_B) \equiv v_B, \quad p_S(v_S) \equiv v_S$$



$$x \cdot (1 - x) \le \frac{1}{4}$$

25

$$p_S(v_S) = a_S + c_S v_S, \quad p_B(v_B) = a_B + c_B v_B$$

$$\max_{p_B \in [0,1]} \left[v_B - \frac{p_B + E(a_S + c_S v_S \mid p_B \ge a_S + c_S v_S)}{2} \right] \times$$
$$\times \Pr\{p_B \ge a_S + c_S v_S\}$$

$$\Pr\{p_B \ge a_S + c_S v_S\} = \frac{p_B - a_S}{c_S}$$

$$E(a_S + c_S v_S \mid p_B \ge a_S + c_S v_S) = \frac{p_B + a_S}{2}$$

26

$$\max_{p_B \in [0,1]} \left[v_B - \frac{p_B + \dfrac{a_S + p_B}{2}}{2} \right] \cdot \frac{p_B - a_S}{c_S}$$

$$p_B = \frac{2}{3} v_B + \frac{1}{3} a_S \qquad p_S = \frac{1}{3}(a_B + c_B) + \frac{2}{3} v_S$$

$$\max_{p_S \in [0,1]} \left[\frac{p_S + \dfrac{p_S + a_B + c_B}{2}}{2} - v_S \right] \cdot \frac{a_B + c_B - p_S}{c_B}$$ 27

$$p_B = \frac{1}{3} a_S + \frac{2}{3} v_B = a_B + c_B v_B \Rightarrow a_B = \frac{1}{3} a_S, \quad c_B = \frac{2}{3}$$

$$p_S = \frac{1}{3}(a_B + c_B) + \frac{2}{3} v_S = a_S + c_S v_S$$

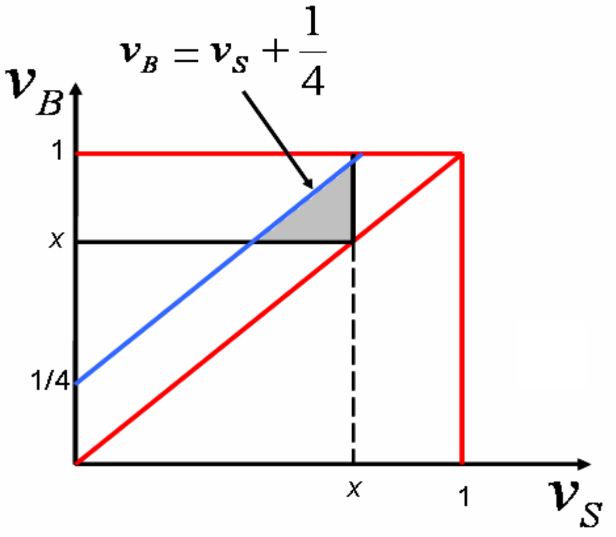
$$\Rightarrow \quad a_S = \frac{1}{3}(a_B + c_B), \quad c_S = \frac{2}{3}.$$

$$a_B = \frac{1}{3} a_S = \frac{1}{9}(a_B + c_B), \quad 9a_B = a_B + c_B = a_B + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{1}{12}, \quad a_S = \frac{1}{4}$$

$$p_B = \frac{2}{3} v_B + \frac{1}{12}; \qquad p_S = \frac{2}{3} v_S + \frac{1}{4}$$ 28

$$\frac{2}{3}v_B + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3}v_S + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad v_B \geq v_S + \frac{1}{4}$$



$$\frac{9}{32} > \frac{1}{4}$$

29

12.3. **Принцип выявления**

12.4.

Дизайн экономических механизмов

Принцип выявления (Майерсон)

Дана байесовская игра $G_B = \{A_i, T_i, u_i, p_i, i \in N\}$

и ***s**** - РБН в этой игре. Тогда существует

правдивый прямой механизм

$$G_T\left(s^*\right) = \{T_i, T_i, v_i, p_i, i \in N\},$$

в котором ***искренние стратегии*** $\tau_i(t_i) \equiv t_i$

образуют **РБН** с теми же выигрышами, что и **РБН *s****.

30

Список литературы по лекции 12.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

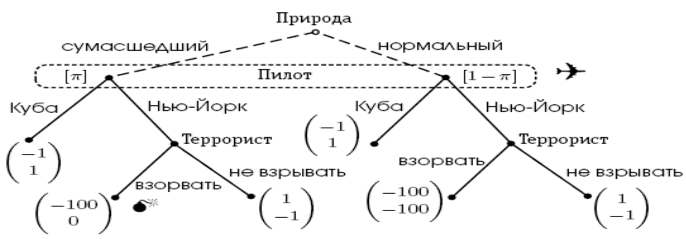
Лекция 13. **Динамические игры с неполной информацией**

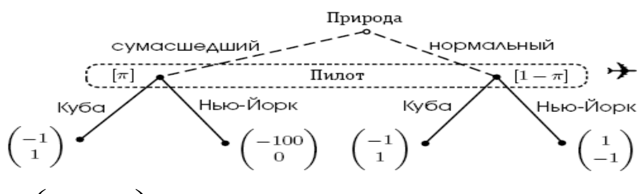
13.1. Совершенное равновесие Нэша

Байесовские игры (игры с неполной информацией) можно представить как динамические игры с несовершенной информацией, если ввести природу, делающую случайные ходы, как еще одного игрока. То, что один игрок не знает тип другого игрока, при этом отражается с помощью соответствующего задания информационных множеств.
В качестве примера динамической игры с неполной информацией(динамической байесовской игры) рассмотрим известную игру «Террорист». Террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший». Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна $\boldsymbol{\pi}$. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок—природа. Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста.

Первый ход делает природа. С вероятностью $\boldsymbol{\pi}$ природа создает Сумасшедшего террориста, а с вероятностью $1-\pi$ —нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста. Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов.

Игра «Террорист»





$$(-100))\cdot\pi+1\cdot(1-\pi)=1-101\pi$$

$$1-101\pi>-1\Rightarrow\pi<\frac{2}{101}$$

В рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, поскольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой—в правой. Однако зачастую такие вероятности неизвестны.

Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию совершенного байесовского равновесия.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

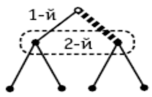
- набора стратегий ***(s1, . . . , sm)*** всех игроков;
- для каждого игрока ***i***—набора ожидаемых им стратегий остальных игроков s^e_{-i};
- для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход,— ожидаемого им распределения, заданного на вершинах этого информационного множества.

Для того чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия.

- Ожидания любого игрока согласуются со стратегиями: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока i соответствует выбранной игроком стратегии (s_i) и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки (s^e_{-i}).
- Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, т. е. выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий (s_i, s^e_{-i}).
- Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $s^e_{-i} = s_{-i}$.

Совершенное байесовское равновесие (СБР)

$$s_{-i}^{e} \qquad \left(s_i, s_{-i}^{e}\right)$$



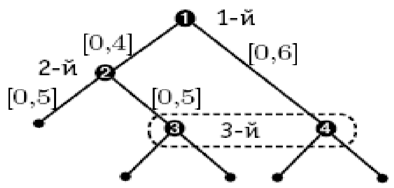
Правило Байеса:

$$A, B_j,\ j = \overline{1,m}$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j \qquad\qquad A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

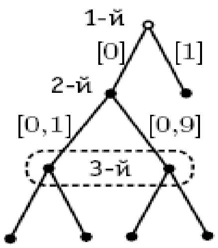
$$P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{\sum_{k=1}^{m} P\left(B_k\right) \cdot P\left(A \mid B_k\right)} = \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{P(A)}$$

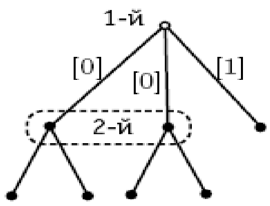
$$P\left(A \mid B_j\right) = 1 \Rightarrow P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right)}{P(A)}, \quad P(A) = \sum_{k=1}^{m} P\left(B_k\right)$$



$$\frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}6} = 0{,}25$$

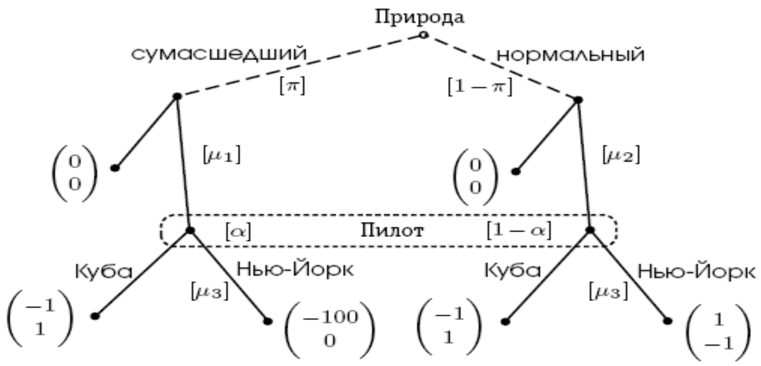
$$\frac{0{,}6}{0{,}2 + 0{,}6} = 0{,}75$$





13.2. **Игра террорист**

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры «Террорист» с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит 0, а выигрыш пилота составит 0.



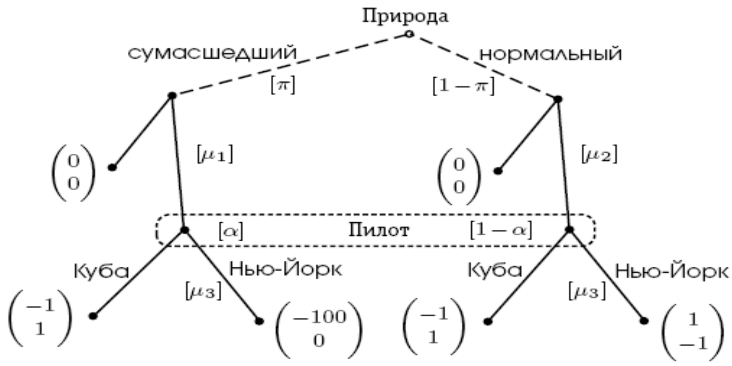
СБР определяется вероятностями:

$$\mu_1 \in [0,1], \quad (-100)\cdot\alpha + 1\cdot(1-\alpha) > -1 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{101}$$

$$\mu_2 \in [0,1], \qquad \mu_3 = \begin{cases} 1, & \alpha < 2/101, \\ [0,1], & \alpha = 2/101, \\ 0, & \alpha > 2/101, \end{cases}$$

$$\alpha \in [0,1],$$

$$\mu_3 \in [0,1].$$



$$P(B_1) = \pi, \quad P(B_2) = 1 - \pi, \quad P(B_1 \mid A) = \alpha,$$

$$P(A \mid B_1) = \mu_1, \quad P(A \mid B_2) = \mu_2.$$

$$\mu_1, \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi\mu_1}{\pi\mu_1 + (1-\pi)\mu_2}$$

$$\mu_1, \mu_2 = 0 \Rightarrow \alpha(\mu_1, \mu_2) = [0,1]$$

Список литературы по лекции 13.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Бусыгин В.П. Микроэеономика- 3 уровень,2007.-1171с.