

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Б. Плещинский

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ВОЛНОВОДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Казань
2008

УДК 517.958:535.4

Печатается по рекомендации
кафедры прикладной математики
Казанского государственного университета,
протокол №6 от 27 февраля 2008 г.

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор А.М. Елизаров

Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики:
Учебное пособие / Н.Б. Плещинский. — Казанский государственный уни-
верситет, 2008. — 104 с.

Рассмотрены основные задачи волноводной электродинамики, изло-
жены методы их аналитического и численного решения.

Для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся
в области математического моделирования и интересующихся теорией
распространения и дифракции электромагнитных волн.

© Казанский государственный университет, 2008 г.

Предисловие

Учебное пособие представляет собой расширенный и дополненный специальный курс лекций, который автор читает для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, специализирующихся на кафедре прикладной математики в области математического моделирования.

Основная цель курса — показать на примере ряда задач волноводной электродинамики основные приемы исследования физических задач математическими методами. Особое внимание уделяется математической корректности рассуждений. Большинство из рассматриваемых задач относится к классическим задачам электродинамики, но строгий вывод многих формул требует привлечения достаточно сложной теории — в том числе, техники интегрального преобразования Фурье в пространстве распределений. Необходимые для этого сведения содержатся в книге.

Изложение начинается с построения математических моделей теории распространения и дифракции электромагнитных волн. Рассматриваются гармонически зависящие от времени электромагнитные поля в однородных и изотропных средах. Построены частные решения системы уравнений Максвелла в различных системах координат — плоские, цилиндрические и сферические волны. Найдены семейства собственных волн (мод) для волноводов и резонаторов с металлическими стенками простой геометрической формы.

На примере уравнения Гельмгольца подробно изложен метод переопределенной граничной задачи, основанный на связи между граничными функциями при условии, что граничных условий задается больше, чем необходимо для выделения единственного решения задачи. Дано полное и строгое решение задачи об отражении и преломлении плоской волны на плоской границе раздела сред.

Показано, как приводятся к интегральным и сумматорным уравнениям различных типов двумерные задачи дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих экранах — отдельных лентах и бесконечных периодических решетках. В периодическом случае задача дифракции сведена к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомого поля по элементарным гармоникам. Обсуждается ряд вопросов, связанных с нахождением численных решений полученных уравнений, — метод усече-

ния бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, метод Галеркина для интегральных уравнений, в том числе с логарифмической особенностью в ядре, и т. д.

Исследованы задачи дифракции электромагнитных волн на перегородках в плоском волноводе, здесь также используются идеи и приемы теории переопределенных граничных задач. Рассмотрены два простейших частных случая, когда металлическая пластина в волноводе расположена перпендикулярно оси волновода или вдоль его оси.

В качестве примера открытой волноводной структуры, имеющей как дискретный, так и непрерывный спектр волн, приведен планарный диэлектрический волновод. В пособии рассмотрена задача о собственных волнах планарного волновода.

Частные случаи многих задач, включенных в книгу, предлагались в разные годы студентам старших курсов в качестве тем курсовых и дипломных работ. Некоторые из задач и методов, составляющих курс лекций, а также их обобщения, обсуждались на научных семинарах кафедры прикладной математики и отдела прикладной математической физики НИИММ им. Н.Г. Чеботарева КГУ. Автор благодарен студентам, аспирантам, всем своим коллегам и научному редактору профессору А.М. Елизарову за плодотворное сотрудничество.

1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны

Волноводная электродинамика изучает круг задач, возникающих при исследовании процессов распространения и дифракции электромагнитных волн в *волноводных структурах*. Здесь слово "структура" используется для обозначения широкого класса конструкций, заполненных диэлектрической средой, как правило, слоистой. На границе структуры, а также внутри нее могут быть размещены проводящие (металлические) экраны.

Структура называется волноводной, если в ней могут распространяться электромагнитные волны. К простейшим волноводным структурам относятся *волноводы* и *резонаторы*, их свойства будут изучены в дальнейшем. Заполненное однородным диэлектриком пространство также представляет собой волноводную структуру.

В *спектральных задачах* волноводной электродинамики исследуются все волны, которые могут распространяться без источников в рассматриваемой структуре (или, может быть, только какое-то подмножество *собственных волн* при дополнительных упрощающих предположениях). Обычно собственные волны (или *моды*) образуют параметрическое семейство. Множество всех возможных значений параметра представляет собой *спектр*. В *задачах дифракции* требуется найти электромагнитное поле в волноводной структуре с неоднородностями той или иной природы, которое возбуждается набегающей на них волной.

Для описания явлений электрической и магнитной природы используется понятие электромагнитного поля. Экспериментально установлено, что на движущийся со скоростью \mathbf{v} заряд q действует сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])$, где вектор \mathbf{E} характеризует электрическую составляющую поля, а вектор \mathbf{B} — магнитную составляющую. Поэтому *электромагнитное поле* определяется как поле сил, действующих на пробные заряды и пробные токи (движущиеся заряды).

1.1. Система уравнений Максвелла

В общем случае электромагнитное поле принято описывать с помощью четырех векторнозначных функций $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$, зависящих от пространственных координат \mathbf{r} и времени t . Эти функции называются: \mathbf{E}

— напряженность электрического поля, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — магнитная индукция.

Заметим, что такая терминология используется по традиции. В средах с простыми свойствами для описания поля достаточно использовать пару функций \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые иногда называют просто электрическим полем и магнитным полем.

В 1860-е годы Дж.К. Максвелл предложил записывать связи между составляющими поля в виде системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность заряда и \mathbf{j} — плотность тока (они также зависят от \mathbf{r} и t).

Эта система уравнений осталась без изменений до настоящего времени, ее принято называть *системой уравнений Максвелла*. До сегодняшнего дня не обнаружено электромагнитных процессов, которые противоречили бы этой системе уравнений. Поэтому уравнения (1.1) можно рассматривать как *аксиомы* теории электромагнетизма. С математической точки зрения можно отождествлять электромагнитное поле с векторно-значными функциями \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , удовлетворяющими системе уравнений Максвелла.

Свойства среды задаются с помощью *материальных уравнений*, устанавливающих зависимости между напряженностями и индукциями поля. В вакууме

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

где ε_0 и μ_0 — *электрическая и магнитная постоянные* (физические константы). Значения этих констант, а также вид коэффициентов в уравнениях Максвелла зависят от того, какая выбрана система единиц измерения. В линейном диэлектрике

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

где ε и μ — *тензоры* (матрицы) *диэлектрической и магнитной проницаемостей*.

Среда называется *однородной*, если значения ε и μ постоянные (не зависят ни от пространственных переменных, ни от времени), и *изотропной*, если эти тензоры вырождаются в скалярные множители. При исследовании более сложных волновых процессов уравнения (1.2) заменяются на нелинейные.

В проводящих средах дополнительно рассматривается еще одно уравнение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

где σ — *проводимость*.

Чтобы выделить единственное решение уравнений (1.1), (1.2), (1.3), нужно задать дополнительные условия. К ним относятся *граничные условия* (или условия сопряжения) и *условия на бесконечности*, которые будут обсуждаться позже. Чтобы корректно применять различные математические методы исследования граничных задач электродинамики, требуется также уточнить классы функций, в которых отыскиваются их решения.

1.2. Элементы векторного анализа

Все искомые функции в системе уравнений Максвелла, как уже было сказано, являются векторнозначными. В декартовой системе координат компоненты вектора \mathbf{A} будем обозначать A_x, A_y, A_z . Напомним, что скалярное и векторное произведения векторов вычисляются по формулам

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x).$$

Операции векторного дифференцирования удобно записывать с помощью символического вектора "набла"

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

При этом

$$\text{grad } a = \nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right),$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

По формуле Остроградского – Гаусса поток вектора \mathbf{A} через поверхность S равен интегралу от дивергенции \mathbf{A} по области G , ограниченной

поверхностью S :

$$\iint_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) ds = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{A} dv,$$

здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности.

По формуле Стокса циркуляция вектора \mathbf{A} по контуру L равна интегралу от нормальной составляющей вектора \mathbf{A} по поверхности S , ограниченной контуром L :

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{n}) ds,$$

здесь $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$.

1.3. Энергия электромагнитного поля

Энергетические характеристики электромагнитного поля можно ввести двумя способами: или исходя из физической природы уравнений Максвелла, или аксиоматически.

Плотность энергии электромагнитного поля определяется так:

$$w(r, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.4)$$

Тогда энергия, сосредоточенная в области V , вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv.$$

Плотность потока энергии электромагнитного поля (*вектор Пойнтинга*) имеет вид

$$\Pi = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (1.5)$$

Из двух первых уравнений системы Максвелла следует, что

$$(\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) - (\mathbf{E}, \mathbf{j}).$$

Учтем, что

$$(\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}].$$

Если обе части полученного равенства проинтегрируем по области V и применим формулу Остроградского – Гаусса, то получим

$$\int_S (\Pi, \mathbf{n}) ds = - \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv.$$

Эту формулу можно интерпретировать как *закон сохранения энергии*: слева стоит поток энергии, перетекающей через поверхность S , а справа — мощность и потери.

1.4. Условия сопряжения и граничные условия

В дальнейшем будут рассматриваться электромагнитные поля в неоднородном пространстве, когда поверхности разрыва величин ε и μ (границы раздела сред) разбивают его на несколько частей. Кроме того, в отдельных областях могут присутствовать экраны (идеально проводящие бесконечно тонкие поверхности). Условимся считать, что все экраны расположены на границах раздела сред, реальных или условных.

Уравнения Максвелла теряют смысл на поверхностях разрыва величин ε и μ , а также на проводящих поверхностях. Там дифференциальные уравнения заменяются на *условия сопряжения* или на *граничные условия*. Эти условия в общем случае записываются так:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} &= \xi, & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] &= 0, & [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] &= \eta, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где ξ — поверхностная плотность заряда и η — плотность поверхностного тока. Уточним, что если в некоторой точке поверхности задан вектор \mathbf{A} и вектор \mathbf{n} — нормаль к поверхности, то выражения (\mathbf{A}, \mathbf{n}) и $[\mathbf{A}, \mathbf{n}]$ представляют собой соответственно *нормальную* и *касательную составляющие вектора \mathbf{A}* .

В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда токи и заряды в однородных и изотропных средах отсутствуют. Тогда условия сопряжения и граничные условия на металле могут быть сформулированы проще: *на границе раздела сред касательные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} должны быть непрерывны; на границе с идеальным проводником касательные составляющие вектора \mathbf{E} должны обращаться в нуль*.

1.5. Гармоническое поле. Метод комплексных амплитуд

Функцию $A(r, t)$ называют *гармонически зависящей от t* , если ее можно представить в виде

$$A(r, t) = A_0(r) \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A_0(r)$ — амплитуда, ω — круговая частота ($2\pi/\omega$ — длина волны), $\omega t + \varphi$ — фаза, φ — сдвиг фазы (в общем случае $\varphi = \varphi(r)$). Гармонически зависящие от времени электромагнитные поля будем называть *электромагнитными волнами*.

При исследовании гармонических полей используем *метод комплексных амплитуд*. Вместо вещественнозначных функций вида $A(r, t)$ будем рассматривать комплекснозначные функции вида

$$A_0(r) e^{\pm i(\omega t + \varphi)} = \dot{A}_0(r) e^{\pm i\omega t},$$

где выражение

$$\dot{A}_0(r) = A_0(r) e^{\pm i\varphi}$$

называется комплексной амплитудой (точка сверху — признак комплекснозначной величины). Знак в формулах можно выбирать любым из двух возможных способов. Следовательно,

$$A(r, t) = \operatorname{Re}[A_0(r) e^{\pm i\varphi}]. \quad (1.7)$$

Переход к комплексным амплитудам при гармонической зависимости от времени искомым вещественнозначным функций позволяет исключить время из числа независимых переменных. При этом во всех уравнениях дифференцирование по t сводится к умножению на $\pm i\omega$.

При гармонической зависимости от времени значения скалярных величин, а также направления векторов в общем случае меняются периодически с периодом $T = 2\pi/\omega$. Поэтому используют *средние* (усредненные по времени) *значения*, которые вычисляются по формуле

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (1.8)$$

Легко проверить, например, что

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0, \dot{\mathbf{H}}_0^*] \quad (1.9)$$

(знаком * отмечается комплексно сопряженное выражение).

Точки сверху и нижние индексы m у комплексных амплитуд в дальнейшем ставить не будем, но всегда будем помнить, что эти функции комплекснозначные. Зависимость искомым функций от времени будем задавать по-разному — как в виде $e^{i\omega t}$, так и в виде $e^{-i\omega t}$.

Предположим, что в области, где рассматривается электромагнитное поле, среда линейная, однородная и изотропная (ε и μ — постоянные скаляры). Тогда, как следует из материальных уравнений, в системе уравнений Максвелла можно оставить только напряженности электрического и магнитного полей:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Комплексные амплитуды составляющих поля, гармонически зависящего от времени, должны удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

здесь зависимость от времени выбрана в форме $e^{i\omega t}$. Если токи и заряды отсутствуют, то достаточно рассматривать только два уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (1.10)$$

Действительно, из формулы $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ следует, что если векторнозначные функции \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям (1.10), то они удовлетворяют и двум другим уравнениям в системе Максвелла.

В дальнейшем в качестве основной системы уравнений электромагнитного поля будем рассматривать именно систему уравнений (1.10), которую также принято называть *системой уравнений Максвелла* (для комплексных амплитуд).

Если проводимость $\sigma = 0$, то в среде нет электрического тока (идеальный диэлектрик). Если же $\sigma \neq 0$, то первое уравнение Максвелла с учетом последнего материального уравнения можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \mathbf{E}.$$

Отсюда следует, что для проводящих сред диэлектрическую проницаемость можно считать комплексным числом. В некоторых случаях и круговую частоту ω целесообразно рассматривать как комплексную величину.

1.6. Замечания и дополнения

Остается открытым вопрос, обязательно ли рассматривать уравнения Максвелла (1.1) как аксиомы, или их можно вывести из каких-то иных уравнений? Если принять, что в основе всего лежат универсальные *законы сохранения*, то система Максвелла может быть получена как их следствие. Тогда такие понятия, как энергия электромагнитного поля и поток энергии, также не нужно будет вводить аксиоматически.

Граничные условия (и условия сопряжения) (1.6) иногда выводятся в учебной литературе из уравнений Максвелла, но не вида (1.1), а записанных в интегральной форме. Заметим, что основные законы электромагнитной теории были первоначально сформулированы именно в такой форме, как законы сохранения. Дифференциальные уравнения следуют из них, но при этом теряется информация о поведении поля на границах раздела сред. Условия (1.6) представляют собой те связи между характеристиками поля, которые были утрачены при переходе от интегральной формы уравнений к дифференциальной. Следует также иметь в виду, что эти условия по сути своей необходимые: если напряженности и индукции характеризуют электромагнитное поле с разных сторон от границы раздела сред, то условия (1.6) выполняются. В достаточные условия, с помощью которых выделяется единственное решение системы уравнений Максвелла, могут входить не все из равенств (1.6).

Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 544 с.
2. Ильинский А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. — М.: Физматлит, 2001. — 656 с.

2. Элементарные волны. Отражение и преломление

Рассмотрим частные решения системы уравнений Максвелла, которые легко получить в различных системах координат — декартовой, цилиндрической или сферической. При этом будем предполагать, что

- 1) свободные заряды и токи отсутствуют ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$);
- 2) среда линейная, однородная и изотропная (ε и μ — постоянные скаляры);
- 3) поле гармонически зависит от времени и эта зависимость имеет вид $e^{i\omega t}$.

Как было показано в п. 1.5, при таких упрощающих предположениях система уравнений Максвелла сводится к двум уравнениям для комплексных амплитуд векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mu\mathbf{H}. \quad (2.1)$$

2.1. Плоские волны

Выберем *декартову систему координат* (x, y, z) . Тогда уравнения (2.1) в координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu H_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Примем еще одно дополнительное предположение:

- 4) искомые функции не зависят от координаты y .

Такое упрощение вполне естественно в том случае, когда поле рассматривается в области, которая однородна в направлении оси y ; например, когда граница области — цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси y . Так как характеристики рассматриваемого поля одинаковы в каждой плоскости $z = \text{const}$, то его называют *плоским* или *скалярным*.

Легко видеть, что при условии 4) система уравнений (2.2) распадается на две независимые подсистемы

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu H_x, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_z; \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_y, & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, \end{aligned}$$

и, следовательно, любое ее решение можно представить в виде суммы двух других решений следующего вида:

$$(0, E_y, 0), (H_x, 0, H_z) \quad \text{и} \quad (E_x, 0, E_z), (0, H_y, 0). \quad (2.3)$$

В этом случае говорят, что система Максвелла допускает поляризацию. Поэтому можно рассматривать независимо два типа частных решений системы уравнений (2.2), которые называют *||-поляризованными* или *⊥-поляризованными* в зависимости от того, как вектор E ориентирован по отношению к оси y (в первом случае параллельно, во втором — перпендикулярно). Используются также названия: *p-поляризованные* и *s-поляризованные* волны.

Для *||-поляризованных* волн все ненулевые компоненты можно выразить через одну вспомогательную функцию $u(x, z)$ и ее производные следующим образом:

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.4)$$

При этом функция $u(x, z)$ должна удовлетворять *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (2.5)$$

здесь $k^2 = \omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon$, k — *волновое число* (вещественное для идеальных диэлектриков и комплексное для сред с поглощением). Будем называть *потенциальными* вспомогательную функцию $u(x, z)$ и уравнение, решением которого она является. Для *⊥-поляризованных* волн

$$H_y = u, \quad E_x = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.6)$$

здесь потенциальная функция $u(x, z)$ также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (2.5).

Следовательно, можно построить элементарные электромагнитные волны, зная частные решения уравнения Гельмгольца.

Легко видеть, что двумерное уравнение Гельмгольца (2.5) имеет частные решения вида

$$u(x, z) = A e^{i\xi x + i\zeta z}, \quad (2.7)$$

где A — некоторая комплексная постоянная, а числа ξ, ζ должны быть выбраны так, что $\xi^2 + \zeta^2 = k^2$. Если эти числа вещественные, то их можно рассматривать как координаты вектора на плоскости, конец которого расположен на окружности радиуса k . Этот вектор называют *волновым вектором*.

Если значения k_x и k_z вещественные и неотрицательные, то найдется такое число $\theta \in [0, \pi/2]$, что $\xi = k \sin \theta$, $\zeta = k \cos \theta$. Тогда компоненты элементарной волны параллельной поляризации

$$E = (0, A e^{ik \sin \theta \cdot x + ik \cos \theta \cdot z}, 0),$$

$$H = \left(A \frac{k \cos \theta}{\omega \mu_0 \mu} e^{ik \sin \theta \cdot x + ik \cos \theta \cdot z}, 0, -A \frac{k \sin \theta}{\omega \mu_0 \mu} e^{ik \sin \theta \cdot x + ik \cos \theta \cdot z} \right),$$

и по формуле (1.9) среднее значение вектора Пойнтинга

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y H_z^*, 0, -E_y H_x^*) = \frac{k|A|^2}{2\omega \mu_0 \mu} \cdot (-\sin \theta, 0, -\cos \theta). \quad (2.8)$$

Следовательно, этот вектор направлен вниз, в третью четверть плоскости, под углом θ к оси z . Таким образом, рассматриваемая элементарная волна *переносит энергию* в том же направлении (в направлении, противоположном направлению волнового вектора). Заметим, что

$$\frac{k}{\omega \mu_0 \mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} = \frac{1}{W},$$

где параметр W — *волновое сопротивление*.

При $k_x = -k \sin \theta$, $k_z = -k \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$ направление переноса энергии противоположное — вверх, в первую четверть, под углом θ к оси z .

Пусть теперь $k_x > k > 0$ и, следовательно, $k_z = \pm i\sqrt{\xi^2 - k^2}$. Тогда

$$\bar{\Pi} = \frac{k_x |A|^2}{2\omega\mu_0\mu} e^{\mp 2\sqrt{k_x^2 - k^2} z} \cdot (-1, 0, 0). \quad (2.9)$$

В этом случае энергия переносится в направлении, противоположном оси x , но при этом волна затухает или в направлении оси z , или в противоположном направлении.

По комплексным амплитудам составляющих элементарной волны с потенциальной функцией (2.7) легко получить вещественные выражения напряженностей электрического и магнитного полей:

$$E = \left(0, v(x, z, t), 0 \right), \quad H = \left(\frac{\cos \theta}{W} v(x, z, t), 0, -\frac{\sin \theta}{W} v(x, z, t) \right),$$

где

$$v(x, z, t) = |A| \cos(\xi x + \zeta z + \omega t + \arg A).$$

Отсюда ясно, какую роль играет комплексный множитель A в формуле (2.7): $|A|$ — амплитуда элементарной волны, а $\arg A$ — сдвиг фазы.

Поверхность, вдоль которой при фиксированном времени постоянна фаза, называют *фронтом волны*. Для электромагнитных волн рассматриваемого типа фронт — плоскость $\xi x + \zeta z = \text{const}$. Поэтому такие волны называются *плоскими*, а также *однородными*, так как их амплитуда постоянна вдоль фронта. С течением времени фронт плоской волны не меняет форму, он как бы движется в направлении вектора Пойнтинга со скоростью $v = \omega/k$.

Заметим, что при $\theta = 0$ компоненты построенной плоской волны будут зависеть только от координаты z , эта волна распространяется вдоль оси z (или в противоположном направлении). Если предположить, что искомые функции зависят только от координаты z , то система уравнений (2.2) распадается на две независимые подсистемы

$$-\frac{dH_y}{dz} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, \quad \frac{dE_x}{dz} = -i\omega\mu_0\mu H_y$$

и

$$-\frac{dE_y}{dz} = -i\omega\mu_0\mu H_x, \quad \frac{dH_x}{dz} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y,$$

при этом $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Тогда любое решение системы уравнений Максвелла можно записать как сумму двух ее частных решений: вида

$E = (E_x, 0, 0)$, $H = (0, H_y, 0)$ и вида $E = (0, E_y, 0)$, $H = (H_x, 0, 0)$. Компоненты волны с любым другим направлением распространения можно получить с помощью преобразования системы координат.

2.2. Отражение и преломление плоских волн

Граничные задачи и задачи сопряжения для системы Максвелла в случае гармонического скалярного поля сводятся к граничным задачам и задачам сопряжения для уравнения Гельмгольца, причем форма условий на границе зависит от поляризации поля. Например, на прямой $z = 0$ для волн параллельной поляризации касательные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через u и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z}$ соответственно, а для волн перпендикулярной поляризации — через $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}$ и u .

Пусть на границу раздела сред $z = 0$ падает плоская \parallel -поляризованная электромагнитная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = A^0 e^{ik_+ \sin \theta_+ \cdot x + ik_+ \cos \theta_+ \cdot z}.$$

Будем помечать индексом $+$ область $z > 0$ и индексом $-$ область $z < 0$. Условимся (всюду, где это возможно) у характеристик среды ставить соответствующий индекс снизу, а у величин, определяющих волны в средах, — сверху. Верхним индексом 0 будут отмечаться компоненты волны, приходящей с бесконечности (возбуждаемой внешними источниками).

Примем *гипотезу*, что отраженная и преломленная волны — плоские волны параллельной поляризации. Будем искать их потенциальные функции в виде

$$\begin{aligned} u^+(x, z) &= A^+ e^{ik_+ \sin \theta_+ \cdot x - ik_+ \cos \theta_+ \cdot z}, \\ u^-(x, z) &= A^- e^{ik_- \sin \theta_- \cdot x + ik_- \cos \theta_- \cdot z} \end{aligned}$$

(из физических соображений ясно, в каком направлении они движутся, см. рис. 2.1).

Здесь и далее будем считать, что все рассматриваемые диэлектрики имеют одну и ту же магнитную проницаемость $\mu = 1$. Тогда условия сопряжения полей на границе раздела сред сводятся к следующим равенствам:

$$u_0(x, 0) + u_+(x, 0) = u_-(x, 0), \quad \frac{\partial u_0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u_+}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u_-}{\partial z}(x, 0)$$

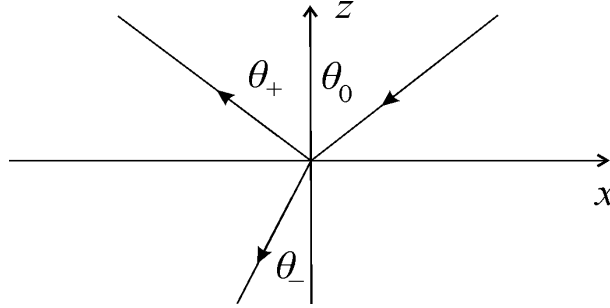


Рис. 2.1. Отражение и преломление

или

$$\begin{aligned} A_0 e^{ik_+ \sin \theta_0 \cdot x} + A_+ e^{ik_+ \sin \theta_+ \cdot x} &= A_- e^{ik_- \sin \theta_- \cdot x}, \\ A_0 e^{ik_+ \sin \theta_0 \cdot x} i k_+ \cos \theta_0 - A_+ e^{ik_+ \sin \theta_+ \cdot x} i k_+ \cos \theta_+ &= \\ &= A_- e^{ik_- \sin \theta_- \cdot x} i k_- \cos \theta_-. \end{aligned}$$

Эти условия будут выполнены при всех значениях x , если

$$k_+ \sin \theta_0 = k_+ \sin \theta_+ = k_- \sin \theta_-. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что угол отражения равен углу падения и угол преломления выражается через угол падения и диэлектрические проницаемости сред (*законы Снеллиуса*). Тогда для искомых амплитуд плоских волн остаются уравнения

$$A^0 + A^+ = A^-, \quad k_+ \cos \theta_0 \cdot A^0 - k_+ \cos \theta_+ \cdot A^+ = k_- \cos \theta_- \cdot A^-.$$

Отсюда

$$A^+ = \frac{k_+ \cos \theta_0 - k_- \cos \theta_-}{k_+ \cos \theta_0 + k_- \cos \theta_-} A^0, \quad A^- = \frac{2k_+ \cos \theta_0}{k_+ \cos \theta_0 + k_- \cos \theta_-} A^0 \quad (2.11)$$

(формулы Френеля).

Проверим, выполняется ли *закон сохранения энергии*. Рассмотрим потоки векторов Пойнтинга через поверхность $z = 0$, точнее, через ее единичные площадки. Ясно, что при вычислении потока энергии через такие участки плоскости нужно знать только z -компоненту вектора Π . При этом удобно иметь дело со средними значениями величин.

Для падающей волны

$$\bar{\Pi}_z^0 = -\frac{k_+ |A^0|^2 \cos \theta_0}{2\omega \mu_0 \mu},$$

и для других волн трехлучевой схемы

$$\bar{\Pi}_z^+ = \frac{k_+ |A^+|^2 \cos \theta_0}{2\omega \mu_0 \mu}, \quad \bar{\Pi}_z^- = -\frac{k_- |A^-|^2 \cos \theta_-}{2\omega \mu_0 \mu}.$$

Поток энергии, приходящей сверху на единичную площадку, равен $\bar{\Pi}_z^0 + \bar{\Pi}_z^+$, а поток энергии, уходящей вниз, равен $\bar{\Pi}_z^-$. Легко проверить, что выполняется равенство (без $2\omega \mu_0 \mu$)

$$-k_+ |A^0|^2 \cos \theta_0 k_+ + |A^+|^2 \cos \theta_0 = -k_- |A^-|^2 \cos \theta_-.$$

Заметим, что величина потока энергии вычисляется по отношению к нормали к поверхности (совпадающей с осью z). Поэтому было бы ошибкой записывать закон сохранения энергии в виде $\bar{\Pi}_z^0 + \bar{\Pi}_z^+ + \bar{\Pi}_z^- = 0$.

2.3. Цилиндрические волны

Запишем систему уравнений Максвелла (2.1) в *цилиндрической системе координат* (r, α, z) . В этом случае

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r} & \alpha_0 & \frac{z_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\alpha & A_z \end{vmatrix}$$

или

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right).$$

Поэтому имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} = -i\omega \mu_0 \mu H_r,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega\mu_0\mu H_\alpha, & (2.12) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} &= -i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

Все искомые величины являются 2π -периодическими функциями переменной α , поэтому будем искать их в виде разложений в ряды Фурье вида

$$A(r, \alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(r, z) e^{in\alpha}$$

(предполагая, что все ряды сходятся и их суммы можно дифференцировать). Коэффициенты Фурье искомых функций с номером n (этот номер мы в дальнейшем не указываем) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{in}{r} H_z - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, & \frac{in}{r} E_z - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu H_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega\mu_0\mu H_\alpha, & (2.13) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) - \frac{in}{r} H_r &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) - \frac{in}{r} E_r &= -i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned}$$

В частном случае, когда решения системы (2.13) не зависят от координаты z , эта система распадается на две независимые подсистемы:

$$\frac{in}{r} E_z = -i\omega\mu_0\mu H_r, \quad E'_z = i\omega\mu_0\mu H_\alpha, \quad \frac{1}{r} (rH_\alpha)' - \frac{in}{r} H_r = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z$$

и

$$\frac{in}{r} H_z = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, \quad -H'_z = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, \quad \frac{1}{r} (rE_\alpha)' - \frac{in}{r} E_r = -i\omega\mu_0\mu H_z,$$

здесь производные по r обозначены штрихом. Тогда любое решение системы Максвелла можно представить как сумму частных решений двух типов: $E = (0, 0, E_z)$, $H = (H_r, H_\alpha, 0)$ (параллельная поляризация относительно оси z) и $E = (E_r, E_\alpha, 0)$, $H = (0, 0, H_z)$ (перпендикулярная поляризация).

Например, для решений первого типа

$$H_r = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{in}{r} E_z, \quad H_\alpha = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} E'_z,$$

а компонента E_z (потенциальная функция) — решение уравнения Бесселя

$$E_z'' + \frac{1}{r} E_z' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) E_z = 0. \quad (2.14)$$

В более простом частном случае, когда поле не зависит от координаты α (*осесимметричное поле*), частные решения системы уравнений Максвелла (системы уравнений (2.13) при $n = 0$) имеют вид $E = (0, 0, E_z)$, $H = (0, H_\alpha, 0)$ и $E = (0, E_\alpha, 0)$, $H = (0, 0, H_z)$.

Фундаментальную систему решений уравнения Бесселя образуют любые две функции из четырех: $J_n(kr)$, $N_n(kr)$, $H_n^{(1)}(kr)$ и $H_n^{(2)}(kr)$. Если хотя бы в одной точке области, где рассматриваются цилиндрические волны, значение координаты r обращается в нуль, то только функция Бесселя $J_n(kr)$ имеет физический смысл. В ограниченной области, не имеющей таких точек, можно брать любую пару цилиндрических функций. В неограниченной области, не содержащей начала координат, нужно оставить одну из функций Ханкеля $H_n^{(1)}(kr)$ или $H_n^{(2)}(kr)$, а какую именно — определяется по выбранной форме зависимости поля от времени и по дополнительному условию на бесконечности (т. е. от того, какие волны нужно оставить: уходящие на бесконечность или приходящие с бесконечности). Чтобы узнать, какая волна переносит энергию в нужном направлении, нужно опять-таки вычислить вектор Пойнтинга.

2.4. Рассеяние плоской волны на цилиндре из диэлектрика

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на цилиндр из диэлектрика кругового сечения падает плоская электромагнитная волна (см. рис. 2.2). Нужно найти поле, отраженное от цилиндра, и поле, преломленное в цилиндр. Слово "рассеяние" здесь используется потому, что отраженная и преломленная волны не являются плоскими; решение задачи будет получено в виде разложений в ряды по цилиндрическим волнам.

Если плоская волна движется в направлении, перпендикулярном оси цилиндра, то ее можно разложить на два слагаемых: у одного вектор E^0 параллелен оси цилиндра (параллельная поляризация), а у другого — перпендикулярен этой оси (перпендикулярная поляризация). Оба случая поляризации исследуются одинаково, мы ограничимся первым из них.

Будем использовать одновременно две системы координат — декартову и полярную. Пусть ось z совпадает с осью цилиндра, ось x соот-

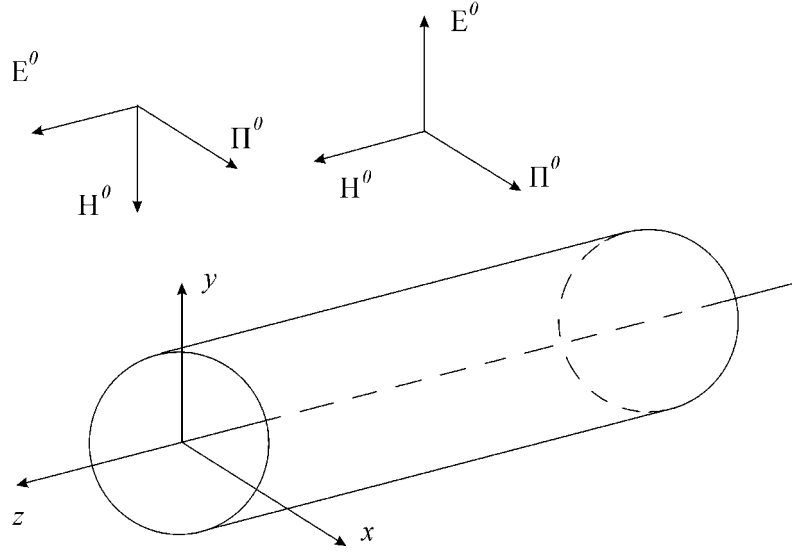


Рис. 2.2. Рассеяние на цилиндре

ветствует направлению распространения плоской волны, ось y образует с другими осями правую тройку. Будем считать, что диэлектрические проницаемости сред вне цилиндра и внутри его равны ε_1 и ε_2 соответственно. Обозначим R радиус цилиндра.

Два типа плоских волн, движущихся в направлении оси x , имеют компоненты $(0, 0, E_z)$, $(0, H_y, 0)$ (параллельная поляризация) или $(0, E_y, 0)$, $(0, 0, H_z)$ (перпендикулярная поляризация). Пусть в нашем случае

$$E^0 = (0, 0, -W_1 A^0 e^{-ik_1 x}), \quad H^0 = (0, A^0 e^{-ik_1 x}, 0).$$

С помощью формулы

$$e^{-ir \cos \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 r) e^{in\alpha} \quad (2.15)$$

легко представить исходную плоскую волну в виде разложения (бесконечной суммы) по цилиндрическим волнам. Получим

$$E_z^0 = -W_1 A^0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k_1 r) e^{in\alpha}, \quad r > R.$$

Примем гипотезу: искомое поле представляет собой наложение цилиндрических волн той же поляризации, что и исходная волна. Поэтому

будем искать

$$E_z^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n (-i)^n H_n^{(2)}(k_1 r) e^{in\alpha}, \quad r > R,$$

$$E_z^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (-i)^n J_n(k_2 r) e^{in\alpha}, \quad r < R.$$

При этом ненулевые компоненты вектора H (как следует из формул п. 2.3)

$$H_r = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha}, \quad H_\alpha = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

На границе раздела сред $r = R$ должны быть непрерывны функции E_z и H_α . Отсюда следует, что при каждом значении n коэффициенты B_n и C_n удовлетворяют системе уравнений

$$-W_1 A^0 J_n(k_1 R) + B_n H_n^{(2)}(k_1 R) = C_n J_n(k_2 R),$$

$$-W_1 A^0 J'_n(k_1 R) k_1 + B_n H_n^{(2)'}(k_1 R) k_1 = C_n J'_n(k_2 R) k_2.$$

Определитель этой системы нулю не равен (определитель Вронского независимых решений уравнения Бесселя). Поэтому значения коэффициентов B_n и C_n однозначно определяются по заданному значению A^0 .

2.5. Сферические волны

Чтобы получить элементарные сферические волны, запишем систему уравнений (2.1) в сферической системе координат (r, α, θ) . При этом

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r^2 \sin \theta} & \frac{\theta_0}{r \sin \theta} & \frac{\alpha_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\alpha \end{vmatrix}.$$

или

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\alpha)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r}.$$

Удобно искать независимо друг от друга решения системы уравнений Максвелла в предположении, что $E_r = 0$ или $H_r = 0$. Кроме того, все искомые функции можно разложить в ряды Фурье по координате α вида

$$A(r, \theta, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(r, \theta) e^{im\alpha}.$$

Тогда для системы уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты Фурье искомых функций (в каждом из двух частных случаев), будет потенциальным уравнение 2-го порядка с частными производными

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u(r, \theta) = 0.$$

После некоторых элементарных преобразований его частные решения можно найти методом разделения переменных, они имеют вид

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+1/2}(kr) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m \leq n,$$

где $Z_{n+1/2}(r)$ — цилиндрические функции полуцелого порядка, а $P_n^{(m)}(t)$ — присоединенные функции Лежандра.

Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 544 с.
2. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 768 с.
3. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1978. — 320 с.

3. Волноводы и резонаторы с металлическими стенками

Проводящие поверхности сильно влияют на электромагнитные поля: характеристики поля принимают максимальные значения вблизи металлических экранов, вдоль которых распространяются электромагнитные волны. Для координатных металлических границ в основных системах координат относительно легко построить полные системы собственных волн, через которые можно выразить любые другие волны в волноводной структуре.

3.1. Плоский волновод

Плоский волновод представляет собой слой диэлектрика, ограниченный параллельными металлическими пластинами (см. рис. 3.1).

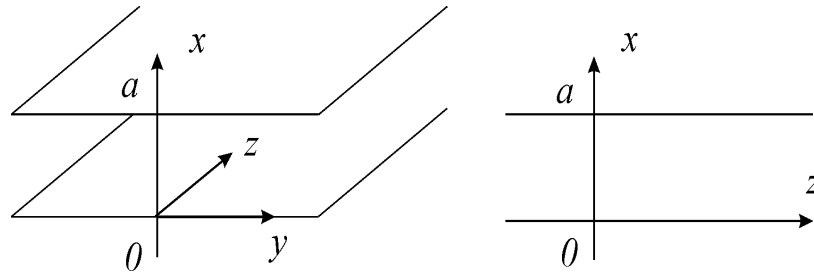


Рис. 3.1. Плоский волновод

Пусть, как и в п. 2, свободные токи и заряды отсутствуют, среда однородная и изотропная, а поле гармонически зависит от времени, причем эта зависимость имеет вид $\exp(i\omega t)$. Предположим дополнительно, что компоненты поля не зависят от координаты y ($\partial/\partial y = 0$). Тогда система уравнений Максвелла в декартовой системе координат

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu H_x, \\
 \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_y, \\
 \frac{\partial H_y}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_z
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

распадается на две независимые подсистемы. Поэтому любое решение системы Максвелла можно представить в виде суммы двух решений вида $(E_x, 0, E_z)$, $(0, H_y, 0)$ и $(0, E_y, 0)$, $(H_x, 0, H_z)$. В теории волноводов принята следующая терминология: решения первого типа называют Е-волнами или ТМ-волнами (так как $E_z \neq 0$, а $H_z = 0$, или потому, что вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости (x, z)), а решения второго типа — Н-волнами или ТЕ-волнами (так как $E_z = 0$, а $H_z \neq 0$, или потому, что вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости (x, z)). Рассматриваются также ТЕМ-волны ($E_z = 0$ и $H_z = 0$), но в плоском волноводе такие волны распространяться не могут.

Для ТЕ-волн

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x}$$

и для ТМ-волн

$$E_x = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad H_y = u.$$

В каждом из этих двух случаев потенциальная функция $u(x, z)$ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon. \quad (3.3)$$

На стенках волновода должны быть равны нулю касательные составляющие вектора \mathbf{E} , то есть компоненты E_y и E_z .

Исследуем элементарные ТЕ-волны плоского волновода. Для этого найдем методом разделения переменных частные решения уравнения Гельмгольца в полосе $0 < x < a$, удовлетворяющие условиям $u = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$ (первая краевая задача). Если $u(x, z) = X(x)Z(z)$, то

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0.$$

Введем постоянную разделения, равную первой дроби в левой части последнего равенства. При неотрицательных значениях этой постоянной не существует ненулевых решений уравнения $X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0$, удовлетворяющих краевым условиям $X(0) = 0$, $X(a) = 0$. Если же постоянная

разделения отрицательная, то уравнение $X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$ имеет ненулевые решения $X_m(x) = c \sin \alpha_m x$, удовлетворяющие краевым условиям, при $\alpha_m = \pi m/a$, $m = 1, 2, \dots$

Следовательно, функция $Z(z)$ должна быть решением уравнения $Z''(z) + (k^2 - \alpha^2) Z(z) = 0$. Обозначим

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2},$$

причем условимся вычислять значение корня так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re} \gamma_m \geq 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_m \leq 0$. Тогда потенциальным функциям

$$u_m(x, z) = c \sin \frac{\pi m x}{a} e^{\pm i \gamma_m z}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

соответствуют TE_m -волны плоского волновода.

Потенциальные функции TM_m -волн плоского волновода

$$u_m(x, z) = c \cos \frac{\pi m x}{a} e^{\pm i \gamma_m z}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3.5)$$

можно найти таким же способом.

Переносят ли энергию собственные волны (или *моды*) плоского волновода и в каком направлении? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим вектор Пойнтинга.

Для моды TE_m

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y H_z^*, 0, -E_y H_x^*).$$

Если продольная постоянная распространения γ_m вещественная (таких значений может быть только конечное число), то

$$\bar{\Pi} = \left(0, 0, \mp \frac{\gamma_m |c|^2}{2\omega \mu_0 \mu} \sin^2 \frac{\pi m x}{a}\right).$$

Если же значение γ_m чисто мнимое, то $\bar{\Pi} = 0$. Таким образом, энергию вдоль плоского волновода переносят *волноводные моды* ($\operatorname{Re} \gamma_m \neq 0$), которых не более чем конечное число, а все остальные — *затухающие моды* — нет.

3.2. Прямоугольный волновод

Прямоугольный волновод представляет собой трубу прямоугольного сечения с металлическими стенками, заполненную диэлектриком (см. рис. 3.2).

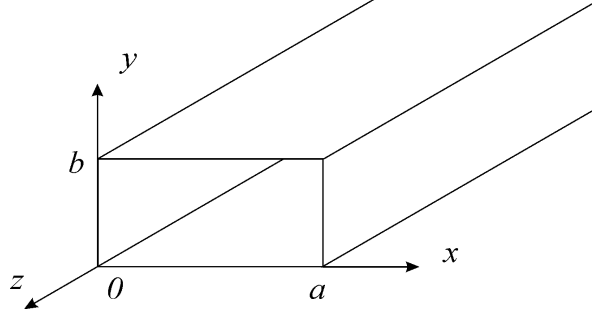


Рис. 3.2. Прямоугольный волновод

Будем искать решения системы уравнений Максвелла в прямоугольной цилиндрической области, удовлетворяющие условиям на границе:

$$E_y, E_z = 0 \text{ при } x = 0, x = a; \quad E_x, E_z = 0 \text{ при } y = 0, y = b.$$

Предположим дополнительно, что зависимость всех искомых функций от координаты z имеет вид $e^{i\gamma z}$, где γ — некоторое число (продольная постоянная распространения). При таком предположении система Максвелла принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma H_y &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma E_y &= -i\omega\mu_0\mu H_x, \\ i\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & i\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu_0\mu H_z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выберем в качестве потенциальных функций продольные компоненты поля E_z и H_z . Из систем уравнений

$$-i\omega\mu_0\mu H_x + i\gamma E_y = \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad i\gamma H_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y = \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + i\gamma H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad i\gamma E_x + i\omega\mu_0\mu H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

получим

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left(i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left(i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ E_x &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left(-i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\ H_y &= \frac{1}{k^2 - \gamma^2} \left(-i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в два нижних уравнения системы (3.6) и получим два независимых потенциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2) H_z = 0, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - \gamma^2) E_z = 0. \quad (3.7)$$

Пара $(E_z, 0)$ порождает ТМ-волны (или Е-волны) прямоугольного волновода, а пара $(0, H_z)$ — ТЕ-волны (или Н-волны). При этом ненулевые решения уравнений (3.7), удовлетворяющие однородным граничным условиям, имеют вид

$$E_{z,m,n}(x, y, z) = \text{const} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} e^{\pm i\gamma_{m,n} z} \quad (3.8)$$

и

$$H_{z,m,n}(x, y, z) = \text{const} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} e^{\pm i\gamma_{m,n} z}, \quad (3.8)$$

где

$$\gamma_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}. \quad (3.9)$$

3.3. Цилиндрический волновод

Цилиндрический волновод представляет собой круглую бесконечную трубу с металлическими стенками (рис. 3.3).

Запишем систему уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат (2.12) и зададим зависимость всех искомых компонент поля в виде $e^{-i\Gamma z}$. Тогда получим из (2.12)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} + i\Gamma H_\alpha = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} + i\Gamma E_\alpha = -i\omega\mu_0\mu H_r,$$

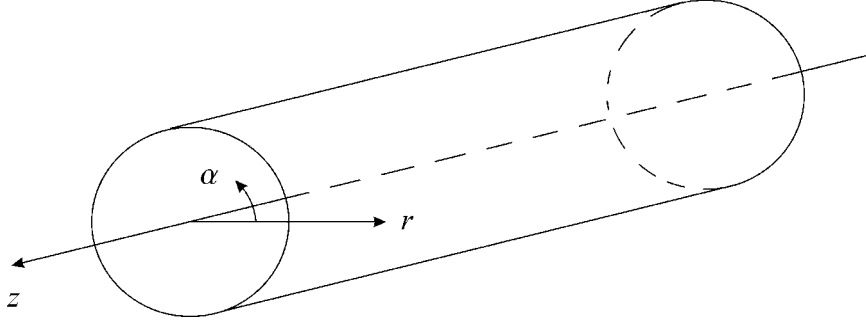


Рис. 3.3. Круглый волновод

$$\begin{aligned}
 -i\Gamma H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\alpha, & -i\Gamma E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega\mu_0\mu H_\alpha, & (3.10) \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} &= -i\omega\mu_0\mu H_z.
 \end{aligned}$$

Здесь, как и в случае прямоугольного волновода, удобно использовать в качестве потенциальных функций продольные компоненты векторов поля E_z и H_z . Тогда поперечные компоненты

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{1}{k^2 - \Gamma^2} \left(-i\Gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} - i\omega\mu_0\mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} \right), \\
 H_\alpha &= \frac{1}{k^2 - \Gamma^2} \left(-i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\Gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} \right), \\
 H_r &= \frac{1}{k^2 - \Gamma^2} \left(i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - i\Gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \\
 E_\alpha &= \frac{1}{k^2 - \Gamma^2} \left(-\frac{i\Gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} + i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right).
 \end{aligned}$$

Потенциальные уравнения, решения которых определяют ТМ- и ТЕ-волны, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \alpha^2} + (k^2 - \Gamma^2) E_z &= 0, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \alpha^2} + (k^2 - \Gamma^2) H_z &= 0.
 \end{aligned}$$

Частные решения этих уравнений, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям на окружности $r = R$, также могут быть найдены

методом разделения переменных. При этом зависимость от координаты r будет иметь вид $J_n(\chi_{n,m} r)$, где $\chi_{n,m} = A_{n,m}/R$, а $A_{n,m}$ — корни уравнения $J'_n(x) = 0$.

3.4. Прямоугольный резонатор

Прямоугольным резонатором называют заполненную диэлектриком прямоугольную ограниченную область (параллелепипед) с металлическими стенками (см. рис. 3.4).

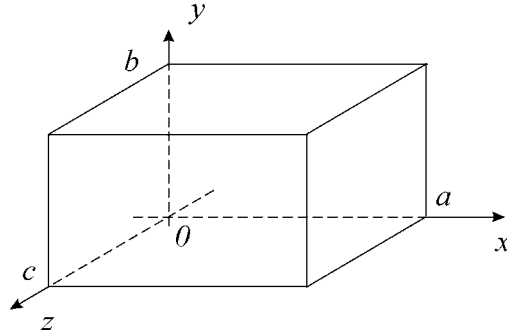


Рис. 3.4. Прямоугольный резонатор

В общем случае можно доказать, что любое решение системы уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mu \mathbf{H}$$

(в декартовой системе координат) можно выразить через две потенциальные функции $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$, каждая из которых — решение трехмерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

При этом компоненты составляющих поля

$$\begin{aligned} E_x &= i\omega\mu_0\mu \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}, & H_x &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + i\omega\epsilon_0\epsilon \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ E_y &= -i\omega\mu_0\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}, & H_y &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - i\omega\epsilon_0\epsilon \frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$E_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad H_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Потенциальная функция $\varphi(x, y, z)$ определяет ТЕ-волны, а потенциальная функция $\psi(x, y, z)$ — ТМ-волны.

Частные решения соответствующих граничных задач можно найти методом разделения переменных.

Существенное отличие ограниченного резонатора от неограниченного волновода состоит в следующем. Спектральный параметр (продольная постоянная распространения) в случае прямоугольного параллелепипеда не вводится. Ненулевые решения у однородных граничных задач существуют тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{c}\right)^2 + k^2 = 0. \quad (3.11)$$

Поэтому собственные волны в резонаторе возможны только для тех значений k и, следовательно, при соответствующих им частотах ω , которые находятся из уравнения (3.11).

3.5. Замечания и дополнения

Собственные волны волноводов с металлическими стенками простых конструкций, рассмотренных выше, найти достаточно легко. Но еще нужно доказать, что их система является полной, т. е. любая собственная волна волновода может быть представлена в виде наложения мод, найденных методом разделения переменных. В книге А.С. Ильинского, В.В. Кравцова и А.Г. Свешникова доказывается более сложное утверждение: в волноводе с металлическими стенками произвольного сечения любая собственная волна может быть разложена в ряд по системам собственных волн ТЕ- и ТМ-поляризации.

Простое доказательство того факта, что любое решение системы уравнений Максвелла в трехмерном случае может быть выражено через решения двух уравнений Гельмгольца, имеется в справочнике А. Анго.

Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 544 с.

2. Ильинский А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. — 560 с.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. — М.: ИЛ, 1965. — 620 с.

4. Распределения и преобразование Фурье

Интегральные преобразования широко используются при исследовании задач математической физики. Основная идея метода состоит в том, что после применения некоторой операции к исходной граничной задаче для уравнения с частными производными может быть получено новое уравнение, существенно более простое. По его решению может быть восстановлена искомая функция.

4.1. Преобразование Фурье. L_2 -теория

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in R^1 = (-\infty, +\infty)$ (все функции в общем случае комплекснозначные). Поставим ей в соответствие функцию

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix\xi} dx, \quad \xi \in R^1. \quad (4.1)$$

Отображение

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto F(\xi)$$

называют *интегральным преобразованием Фурье*. Функции $f(x)$ и $F(\xi)$ — *прообраз и образ Фурье* (говорят также: оригинал и изображение).

Уточним допустимые классы функций. Если функция $f(x)$ непрерывна и интеграл Фурье равномерно сходится, то $F(\xi)$ — тоже непрерывная функция. Интеграл Фурье имеет смысл, если $f(x) \in L_1(R^1)$, то есть абсолютно интегрируемая (по Лебегу) функция. При этом $F(\pm\infty) = 0$ (пределы $F(\xi)$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$). Последнее утверждение следует из *леммы*

Римана – Лебега: если $f(x) \in L_1(a, b)$, то

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos x\xi \, dx = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin x\xi \, dx = 0.$$

Но если $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^1)$, то не обязательно $F(\xi) \in L_1(\mathbb{R}^1)$.

Пусть $L_2(\mathbb{R}^1)$ – пространство функций, интегрируемых по Лебегу с квадратом, то есть таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < +\infty;$$

здесь сходимость несобственного интеграла понимается в смысле среднего квадратичного,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) e^{ix\xi} \, dx \right]^2 \, d\xi = 0.$$

Можно доказать, что если $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$, то $F(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ и наоборот. Это соответствие взаимно однозначное, $f(x) \longleftrightarrow F(\xi)$.

Обратное преобразование Фурье определяется аналогичным образом:

$$\mathcal{F}^{-1} : F(\xi) \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} \, d\xi. \quad (4.2)$$

В некоторых случаях преобразование Фурье легко находится. Например,

$$e^{-a|x|} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2};$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}.$$

Легко доказать следующие свойства преобразования Фурье в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$.

1. Преобразование Фурье – линейный (аддитивный и однородный) оператор, т. е. $\mathcal{F}(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 \mathcal{F} f_1(x) + \lambda_2 \mathcal{F} f_2(x)$.

2. Выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi)|^2 d\xi \quad (4.3)$$

(отсюда следует, что преобразование Фурье — ограниченный оператор).

3.

$$f(x - a) \longleftrightarrow e^{ia\xi} F(\xi), \quad e^{-iax} f(x) \longleftrightarrow F(\xi - a). \quad (4.4)$$

4.

$$f(\lambda x) \longleftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{\xi}{\lambda}\right), \quad (4.5)$$

в том числе $f(-x) \longleftrightarrow F(-\xi)$.

5.

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x). \quad (4.6)$$

6. *Формула свертки*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \longleftrightarrow F(\xi)G(\xi). \quad (4.7)$$

7. Если $f(\pm\infty) = 0$, то

$$f'(x) \longleftrightarrow -i\xi F(\xi), \quad xf(x) \longleftrightarrow -iF'(\xi). \quad (4.8)$$

Преобразование Фурье легко обобщить на случай нескольких переменных.

Метод интегрального преобразования Фурье сводится к следующему: если нужно найти функцию $f(x)$ — решение некоторого (линейного) уравнения, то можно с помощью преобразования Фурье получить из исходного уравнения новое уравнение для образа Фурье $F(\xi)$ искомой функции, а потом по образу восстановить прообраз. Разумеется, новое уравнение должно быть лучше старого.

Рассмотрим в качестве примера начальную краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in R^1.$$

Будем считать, что искомое решение и его производная по x обращаются в нуль на бесконечности. Выполним преобразование Фурье по переменной x , при этом $u(x, t) \longleftrightarrow U(\xi, t)$.

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения теплопроводности и получим

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 U(\xi, t),$$

переменную ξ будем считать параметром. Тогда

$$U(\xi, t) = c(\xi)e^{-\xi^2 t},$$

где $c(\xi)$ — произвольная функция от ξ . К начальному условию тоже применим преобразование Фурье и получим $U(\xi, 0) = F(\xi)$, здесь $F(\xi)$ — образ Фурье функции $f(x)$. Следовательно,

$$U(\xi, t) = F(\xi) e^{-\xi^2 t}.$$

Выполним обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-\xi^2 t} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iy\xi} dy \right) e^{-\xi^2 t - i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t - i\xi(x-y)} d\xi \right] dy, \end{aligned}$$

интеграл в квадратных скобках можно вычислить, он равен

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right].$$

4.2. Распределения (обобщенные функции)

Будем рассматривать комплекснозначные функции в R^n , т. е. функции n вещественных аргументов, значения которых — комплексные числа. Будем использовать следующие обозначения: $\varphi(\cdot)$ — функция, $\varphi(x)$ — ее значение в точке.

Функция называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого шара. *Носитель функции*

$$\text{supp } \varphi(\cdot) = \overline{\{x \mid x \in R^n, \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Обозначим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^n)$ множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций в R^n . Легко проверить, что \mathcal{D} — линейное пространство.

Последовательность функций $\varphi_k(\cdot)$ сходится к функции $\varphi(\cdot)$ в \mathcal{D} при $k \rightarrow \infty$, если 1) \exists открытый шар $U_R \mid \text{supp } \varphi_k \subset U_R \forall k$; 2) последовательности $\partial^\alpha \varphi_k(\cdot)$ равномерно на R^n сходятся к $\partial^\alpha \varphi(\cdot)$ при $k \rightarrow \infty \forall \alpha$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, ∂^α — операция дифференцирования по x порядка α , то есть α_1 раз по x_1, \dots, α_n раз по x_n .

Линейное пространство \mathcal{D} со сходимостью (с топологией) будем называть *пространством основных функций*.

Существуют ли основные функции? Пример — "шапочка"

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right], & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где постоянная C_ε выбирается так, чтобы $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.

Линейные и непрерывные функционалы на пространстве основных функций \mathcal{D} называют *распределениями* (или обобщенными функциями). Каждый такой функционал f ставит в соответствие основной функции $\varphi(\cdot)$ число, которое обычно обозначают $\langle \varphi, f \rangle$. Нам будет удобнее обозначать значение распределения $f[\cdot]$ на основной функции $\varphi(\cdot)$ через $f[\varphi(\cdot)]$.

Уточним свойства линейности и непрерывности распределения:

1)

$$f[\alpha\varphi(\cdot) + \beta\psi(\cdot)] = \alpha f[\varphi(\cdot)] + \beta f[\psi(\cdot)] \quad \forall \alpha, \beta \in C, \quad \forall \varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in \mathcal{D};$$

2) если $\varphi_n(\cdot) \rightarrow 0(\cdot)$ при $n \rightarrow \infty$ в \mathcal{D} , то $f[\varphi_n(\cdot)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Линейные операции в \mathcal{D}' определяются следующим образом:

$$\lambda f[\cdot] : \varphi(\cdot) \longleftarrow \lambda f[\varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D};$$

$$f[\cdot] + g[\cdot] : \varphi(\cdot) \longleftarrow f[\varphi(\cdot)] + g[\varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}.$$

Последовательность распределений $f_k[\cdot]$ сходится в \mathcal{D}' к распределению $f[\cdot]$ при $k \rightarrow \infty$, если $f_k[\varphi(\cdot)] \rightarrow f[\varphi(\cdot)]$ при $k \rightarrow \infty \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}$ (такая сходимость называется слабой).

Линейное пространство распределений со сходимостью будем называть *пространством распределений* и обозначать $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(R^n)$.

Обозначим $\mathcal{D}(G)$ множество основных функций, носители которых содержатся в области G . Говорят, что распределение $f[\cdot] = 0$ в области G , если $f[\varphi(\cdot)] = 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(G)$. Следовательно, $f[\cdot] = g[\cdot]$ в G , если $f[\varphi(\cdot)] = g[\varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(G)$.

Носитель распределения определяется как дополнение до R^n объединения всех областей, где распределение обращается в нуль.

Каждой локально интегрируемой в R^n функции $f(\cdot)$ можно поставить в соответствие распределение

$$f[\cdot] : \varphi(\cdot) \mapsto f[\varphi(\cdot)] = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}, \quad (4.9)$$

причем это соответствие взаимно однозначное. Точнее, распределению вида (4.9) соответствует единственная (с точностью до множества меры нуль) локально интегрируемая функция. Если $f(\cdot) \in L_1^{loc}(R^n)$, то

$$\int_G f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}$$

тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду в G (*лемма Дюбуа-Раймонда*).

Все распределения вида (4.9) называют *регулярными*, а пространство $L_1^{loc}(R^n)$ отождествляют с подмножеством регулярных в \mathcal{D}' распределений. Поэтому регулярные распределения $f[\cdot]$ часто обозначают $f(x)$, но удобнее писать $f(x)[\cdot]$.

Приведем примеры сингулярных (т. е. не являющихся регулярными) распределений.

1. Пусть $\delta[\cdot] : \varphi(\cdot) \mapsto \varphi(0) \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}$. Очевидно, что $\delta[\cdot] \in \mathcal{D}'$. При этом $\text{supp } \delta[\cdot] = \{0\}$.

Знаменитая δ -функция Дирака $\delta(x)$ со свойством

$$\int_{R^1} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$$

на самом деле не функция, а распределение, причем сингулярное.

Функции "шапочки" $\omega_\varepsilon(\cdot)$ локально интегрируемы. Поэтому их можно рассматривать как регулярные распределения. Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D},$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \omega_\varepsilon[\cdot] = \delta[\cdot].$$

Этот предел в обычном смысле не существует.

2. Пусть функционал

$$\varphi(\cdot) \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

(буквы *v.p.* показывают, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши).

Этот функционал линейный и непрерывный. Поэтому он — распределение, которое обычно обозначают $\mathcal{P}(\frac{1}{x})[\cdot]$.

Докажем, что функционал $\mathcal{P}(\frac{1}{x})[\cdot]$ непрерывен. Пусть $\varphi_n(\cdot) \rightarrow 0(\cdot)$, т. е. $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| > R$ и $\partial^\alpha \varphi_n(x) \rightarrow 0$ равномерно относительно x . Рассмотрим

$$\begin{aligned} |f[\varphi_n(\cdot)]| &= \left| \int \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{-R}^R \frac{\varphi_n(0) + x\varphi_n'(\xi)}{x} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi_n(0) \int_{-R}^R \frac{dx}{x} \right| + \int_{-R}^R |\varphi_n'(\xi)| dx \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi_n'(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(здесь использована формула Тейлора).

Распределение $\mathcal{P}(\frac{1}{x})[\cdot]$ при $x \neq 0$ совпадает с обычной функцией $1/x$. Существуют и другие распределения с таким свойством. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{x + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

и вычислим ее предел в смысле теории распределений при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= \varphi(0) (-2i) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = -i\pi\varphi(0) + \int \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = -i\pi\delta[\cdot] + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)[\cdot] = \frac{1}{x + i0}[\cdot] \quad (4.10)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = i\pi\delta[\cdot] + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)[\cdot] = \frac{1}{x - i0}[\cdot]$$

(формулы Соболевского).

Сингулярный носитель распределения $\operatorname{sing\,supp} f[\cdot]$ определяется как дополнение до R^n максимальной области, на которой распределение $f[\cdot]$ совпадает с бесконечно дифференцируемой функцией. Например, $\operatorname{sing\,supp} \delta[\cdot] = \{0\}$.

Распределения можно умножать на бесконечно дифференцируемые функции. Пусть $f[\cdot] \in \mathcal{D}'$ и $a(\cdot) \in C^\infty(R^n)$. Определим распределение

$$a(\cdot)f[\cdot] : \varphi(\cdot) \mapsto f[a(\cdot)\varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}. \quad (4.11)$$

Из определения следует, что

$$a(\cdot)\delta[\cdot] = a(0)\delta[\cdot] \quad \forall a(\cdot) \in C^\infty; \quad (4.12)$$

$$x \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)[\cdot] = 1[\cdot]. \quad (4.13)$$

Если $xf[\cdot] = 0[\cdot]$, то $f[\cdot] = c\delta[\cdot]$, где c — произвольная постоянная.

Производная распределения $f[\cdot]$ порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ определяется так:

$$\partial^\alpha f[\varphi(\cdot)] = (-1)^{|\alpha|} f[\partial^\alpha \varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}. \quad (4.14)$$

Следовательно, любое распределение дифференцируемо, причем бесконечное число раз.

Пара полезных формул:

$$(af)(x+h) = a(x+h)f(x+h); \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a(\cdot)f[\cdot]) = \frac{\partial a}{\partial x_j}(\cdot)f[\cdot] + a(\cdot)\frac{\partial f}{\partial x_j}[\cdot]. \quad (4.16)$$

Пусть функция $f(\cdot) \in C^1(R^1 \setminus \{a\})$, $a \in R^1$ (имеет непрерывную производную при $x \neq a$) и существуют конечные пределы $f(a \pm 0)$. Обозначим $f'(\cdot)$ функцию, совпадающую при $x \neq a$ с обычной производной функции $f(\cdot)$. Если рассматривать $f(\cdot)$ как регулярное распределение $f(x)[\cdot]$, то

$$f(x)'[\cdot] = f'(x)[\cdot] + [f(a+0) - f(a-0)] \delta(x-a)[\cdot]. \quad (4.17)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)[\cdot]\varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^a + \int_a^{+\infty} f'(x)[\cdot]\varphi(x) dx = \\ &= f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^a + f(x)\varphi(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) dx, \end{aligned}$$

то есть

$$f(x)'[\varphi(\cdot)] = [f(a+0) - f(a-0)] \varphi(a) + f'(x)[\varphi(\cdot)].$$

Для производных 2-го порядка

$$f(x)''[\cdot] = f''(x)[\cdot] +$$

$$+[f(a+0) - f(a-0)] \delta(x-a)'[\cdot] + [f'(a+0) - f'(a-0)] \delta(x-a)[\cdot].$$

В соответствии с формулой (4.17) для распределения "функция Хевисайда" $\theta(x)[\cdot]$, $\theta(x) = \{x < 0 : 0; x \geq 0 : 1\}$ производная $\theta'[\cdot] = \delta[\cdot]$ и производные δ -функции $\delta'[\varphi(\cdot)] = -\varphi'(0)$, $\delta''[\varphi(\cdot)] = \varphi''(0)$ и так далее.

Дифференциальное уравнение $xf'[\cdot] = 1$ (здесь $1 = 1[\cdot]$) имеет в пространстве распределений общее решение $f[\cdot] = \ln x + c_1 + c_2\theta(x)[\cdot]$.

4.3. Преобразование Фурье. S' -теория

Постоянные и кусочно-постоянные функции, функции вида $e^{i\alpha x}$, α — вещественное число, и, тем более, полиномы и экспоненциальные функции на всей оси не принадлежат пространству $L_2(R^1)$ (и даже пространству $L_1(R^1)$). Чтобы построить теорию преобразования Фурье для таких функций, переходят к распределениям. В то же время легко проверить, что образ Фурье основной функции из \mathcal{D} не обязательно принадлежит \mathcal{D} . Поэтому нужно сузить пространство распределений и, следовательно, расширить пространство основных функций.

Пространство основных функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ медленного роста (на бесконечности) состоит из бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми производными при $|x| \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени $1/|x|$, т. е. таких функций $\varphi(\cdot)$, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|^m} = 0 \quad \forall m. \quad (4.18)$$

Последовательность функций $\varphi_k(\cdot)$ сходится к функции $\varphi(\cdot)$ в \mathcal{S} при $k \rightarrow \infty$, если $x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \quad \forall \alpha, \beta, \forall x \in R^n$ при $k \rightarrow \infty$.

Пространство $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(R^n)$ распределений медленного роста образуют линейные непрерывные функционалы на пространстве \mathcal{S} . При этом $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ и $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Пространство \mathcal{S} не совпадает с \mathcal{D} . Например, функция e^{-x^2} принадлежит \mathcal{S} , но не принадлежит \mathcal{D} .

Из сходимости в \mathcal{D} следует сходимость в \mathcal{S} . Кроме того, множество \mathcal{D} плотно в \mathcal{S} , т. е. $\forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{S} \exists \varphi_n(\cdot) \in \mathcal{D} \mid \varphi_n(\cdot) \rightarrow \varphi(\cdot)$ при $n \rightarrow \infty$.

Легко проверить, что преобразование Фурье переводит пространство \mathcal{S} в себя. В случае $n \geq 2$ при определении преобразования Фурье мно-

житель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ обычно не используют. Тогда

$$\mathcal{F} : \varphi(x) \mapsto \Phi(\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \Phi(\xi) \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \Phi(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi, \quad (4.20)$$

здесь (x, ξ) – скалярное произведение векторов.

По определению

$$\mathcal{F}f[\cdot] : \varphi(\cdot) \mapsto f[\mathcal{F}\varphi(\cdot)] \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathcal{S}, \quad (4.21)$$

т. е. значения образа Фурье распределения на основных функциях вычисляются как значения исходного распределения на образах Фурье основных функций.

Легко видеть, что (при $n = 1$)

$$e^{iax}[\cdot] \longleftrightarrow \sqrt{2\pi} \delta(\xi + a)[\cdot], \quad \delta(x - a)[\cdot] \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\xi}[\cdot] \quad (4.22)$$

и при $a = 0$

$$1[\cdot] \longleftrightarrow \sqrt{2\pi} \delta(\xi)[\cdot], \quad \delta(x)[\cdot] \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1[\cdot]. \quad (4.23)$$

Рассмотрим образы Фурье производных распределений. Так как $\varphi'(\cdot) \longleftrightarrow -i\xi\Phi(\cdot)$, то $f'[\cdot] \longleftrightarrow -i\xi F[\cdot]$, здесь $\varphi'(\cdot)$ – обычная производная функции основной функции $\varphi(\cdot)$ и $f'[\cdot]$ – производная распределения $f[\cdot]$.

Пусть $f(\cdot) \in C^1(R^1 \setminus \{a\})$, $a \in R^1$. Если производную этой функции рассматривать как распределение, то из формулы (4.17) следует, что

$$f'(\cdot) \longleftrightarrow -i\xi F[\cdot] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(a+0) - f(a-0)] e^{ia\xi}. \quad (4.24)$$

Из формулы (4.24) следует, что

$$f_+^{(n)}(\cdot) \longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
(-i\xi)^n F_+[\cdot] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f^{(n-1)}(0+0) - i\xi f^{(n-2)}(0+0) + \dots + (-i\xi)^{n-1} f(0+0)], \\
f_-^{(n)}(\cdot) \longleftrightarrow \\
(-i\xi)^n F_-[\cdot] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f^{(n-1)}(0-0) - i\xi f^{(n-2)}(0-0) + \dots + (-i\xi)^{n-1} f(0-0)].
\end{aligned}$$

Пусть $n = 1$. Функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$, равные нулю при $x < 0$ и $x > 0$ соответственно, называют *односторонними* (правой односторонней и левой односторонней). Их носители принадлежат положительной и отрицательной полуосям оси x . Любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы двух односторонних. Аналогичным образом определяются односторонние распределения.

Очень важным является следующее утверждение: образ Фурье правой (левой) односторонней функции или распределения является предельным значением на вещественной оси функции, аналитической в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости (*теорема Винера – Пэли*).

Рассмотрим еще несколько примеров.

Если a — комплексное число, $\operatorname{Re} a > 0$, то

$$f(x) = \{0, x < 0; e^{-ax}, x > 0\} \longleftrightarrow F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi + ia}, \quad (4.25)$$

$$f(x) = \{e^{ax} x < 0; 0, x > 0\} \longleftrightarrow F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\xi - ia}, \quad (4.26)$$

здесь образы Фурье — обычные функции, их легко вычислить.

Но если a — вещественное число, то

$$f(x) = \{0, x < 0; e^{iax}, x > 0\} \longleftrightarrow F(\xi)[\cdot] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi + i0 + a}[\cdot], \quad (4.27)$$

$$f(x) = \{e^{iax} x < 0; 0, x > 0\} \longleftrightarrow F(\xi)[\cdot] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\xi - i0 + a}[\cdot]. \quad (4.28)$$

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

5. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости

Рассмотрим в верхней полуплоскости $R_+^2 = \{(x, z) \in R^2 \mid z > 0\}$ уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in R_+^2 \quad (5.1)$$

— потенциальное уравнение для скалярного гармонического электромагнитного поля. Будем искать его решения, которые соответствуют волнам, уходящим на бесконечность.

Легко видеть, что при

$$\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \xi \in R^1$$

функция

$$e^{-i\xi x} e^{i\gamma(\xi)z}$$

является частным решением уравнения (5.1). Чтобы порождаемая этой функцией элементарная плоская волна была уходящей на бесконечность (в верхнюю полуплоскость), должны выполняться условия $\text{Im } \gamma(\xi) \geq 0$ или $\text{Re } \gamma(\xi) \leq 0$ (при зависимости компонент поля от времени $e^{i\omega t}$). Поэтому для любой функции $v(\xi)$ выражение

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) e^{-i\xi x} e^{i\gamma(\xi)z} d\xi \quad (5.2)$$

(если только интеграл имеет смысл и его можно дифференцировать) будет решением уравнения (5.1).

Покажем, используя метод преобразования Фурье в пространстве распределений, что формула (5.4) действительно содержит все решения уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости, удовлетворяющие условию излучения.

5.1. Переопределенная задача Коши в полуплоскости

Будем искать решения двумерного уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости (5.1), удовлетворяющие граничным условиям

$$u(x, 0+0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) = u_1(x), \quad x \in R^1. \quad (5.3)$$

Мы умышленно рассматриваем *переопределенную задачу Коши* для эллиптического уравнения. Было бы достаточно задавать только одно из двух граничных условий. Но наша цель — получить условие разрешимости задачи (5.1), (5.3) в форме зависимости между граничными функциями $u_0(\cdot)$ и $u_1(\cdot)$, чтобы использовать его при исследовании других, более сложных задач.

В общем случае число k может быть комплексным, но пока будем считать, что k — *вещественное* положительное число. Тогда, чтобы обеспечить единственность решения задачи (5.1), (5.3), нужно задать еще одно условие — *условие излучения* (условие на бесконечности). Это условие будет получено ниже, при уточнении класса искомых решений.

Будем предполагать, что искомое решение дважды непрерывно дифференцируемо в R_+^2 и *следы* $u(x, 0+0)$, $\partial u/\partial z(x, 0+0)$ на прямой $z = 0$ определены корректно. При исследовании задач теории распространения и дифракции волн достаточно считать, что предельные значения решения и его нормальной производной на границе полуплоскости существуют всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, и локально суммируемы (по Лебегу). Чтобы использовать технику интегрального преобразования Фурье, предположим дополнительно, что функции $u_0(\cdot)$, $u_1(\cdot) \in L_1^{loc}(R^1)$ имеют медленный рост на бесконечности. Будем рассматривать эти функции как распределения медленного роста (регулярные) — элементы пространства $S'(R^1)$.

Заметим, что переход от обычных функций к распределениям вполне закономерен. Например, даже для элементарного решения уравнения (5.1) вида $u(x, z) = e^{-ik \sin \theta \cdot x - ik \cos \theta \cdot z}$ образом Фурье предельного значения на границе полуплоскости $u_0(x) = e^{-ik \sin \theta \cdot x}$ является сингулярное распределение $u_0(\xi)[\cdot] = \sqrt{2\pi} \delta(\xi - k \sin \theta)[\cdot]$.

Решение уравнения (5.1) представляет собой локально суммируемую в R_+^2 комплекснозначную функцию двух вещественных аргументов — отображение $(x, z) \in R_+^2 \mapsto u \in C$. Будем интерпретировать это отображение следующим образом: каждому значению $z \in R_+^1$ ставится в соответствие отображение $x \in R^1 \mapsto u \in C$. Таким образом, $u(\cdot, \cdot) = u(\cdot)(\cdot)$ — отображение полуоси $z > 0$ в множество комплекснозначных функций одной вещественной переменной. Здесь и далее в обозначениях вида $u(\cdot)(\cdot)$ будем сохранять порядок следования аргументов: сначала x , потом z .

Предположим дополнительно, что искомое решение задачи Коши имеет медленный рост на бесконечности и, следовательно, его значения при

любом z — локально интегрируемые функции медленного роста. Эти функции также будем рассматривать как распределения, то есть будем считать, что $u(x)\cdot : z > 0 \mapsto u(x)[\cdot](z) \in S'(R^1)$. Тогда предельный переход на границу полуплоскости можно понимать так:

$$u(x)[\cdot](z) \rightarrow u_0(x)[\cdot], \quad \partial u / \partial z(x)[\cdot](z) \rightarrow u_1(x)[\cdot]$$

в смысле сходимости в $S'(R^1)$ при $z \rightarrow 0 + 0$.

Преобразование Фурье по касательной переменной x в задаче Коши (5.1), (5.3) сводится к следующему: отображение $u(x)\cdot$ заменяется на отображение $u(\xi)\cdot : z > 0 \mapsto u(\xi)[\cdot](z) \in S'(R^1)$, где распределение $u(\xi)[\cdot](z)$ — образ Фурье распределения $u(x)[\cdot](z)$. Таким образом, после преобразования Фурье по x получим из (5.1) и (5.3) уравнение

$$\frac{\partial^2 u(\xi)[\cdot](z)}{\partial z^2} + (k^2 - \xi^2)u(\xi)[\cdot](z) = 0, \quad z > 0, \quad (5.4)$$

и граничные условия

$$u(\xi)[\cdot](0 + 0) = u_0(\xi)[\cdot], \quad \frac{\partial u}{\partial z}(\xi)[\cdot](0 + 0) = u_1(\xi)[\cdot]. \quad (5.5)$$

Функцию $z \mapsto u(\xi)[\cdot](z)$, $z > 0$, будем также рассматривать как распределение на $(0, +\infty)$ со значениями в $S'(R^1)$. Продолжим ее на полуось $z < 0$, доопределив распределением $0[\cdot]$. Как следует из *теоремы Винера – Пэлли*, в этом и только в этом случае образ Фурье $u(\xi)[\cdot](\zeta)[\cdot]$ (преобразование Фурье по двум переменным) аналитически продолжается по переменной ζ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\dot{\zeta}$. Заметим, что распределение $u(\xi)[\cdot](\dot{\zeta})$ является аналитической в верхней полуплоскости по $\dot{\zeta}$ функцией в том смысле, что $u(\xi)[\varphi(\cdot)](\dot{\zeta})$ — аналитическая функция $\forall \varphi(\cdot) \in S(R^1)$.

Итак, перейдем в (5.4) от классической производной к обобщенной (при этом будут использованы граничные условия (5.5)) и выполним преобразование Фурье по переменной z . Получим

$$(k^2 - \xi^2 - \zeta^2) u(\xi)[\cdot](\zeta)[\cdot] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1(\xi)[\cdot] - i\zeta u_0(\xi)[\cdot]]. \quad (5.6)$$

Если образы Фурье рассматриваемых распределений являются обычными функциями, то уравнение (5.6) можно записать в виде

$$(k^2 - \xi^2 - \zeta^2) u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1(\xi) - i\zeta u_0(\xi)]. \quad (5.7)$$

Условимся использовать в дальнейшем именно такую форму записи уравнения (5.6), даже если стоящие в нем объекты — распределения.

Пусть k — вещественное число. Обозначим

$$\gamma^+(\xi) = \begin{cases} (-\infty, -k) : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \\ (-k, k) : \sqrt{k^2 - \xi^2}; \\ (k, +\infty) : -i\sqrt{\xi^2 - k^2}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Эта функция — предельное значение из верхней полуплоскости на вещественной оси ветви многозначной функции $\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ комплексного аргумента ξ , выделенной в плоскости с разрезом по отрезку вещественной оси $[-k, k]$. Легко видеть, что

$$k^2 - \xi^2 - \zeta^2 = [\gamma^+(\xi) - \zeta][\gamma^+(\xi) + \zeta].$$

Лемма 5.1. *Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (5.1), (5.3) при вещественном k тогда и только тогда, когда*

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < -k, \quad u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > k, \quad (5.9)$$

и его образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (5.7).

Доказательство. Пусть $u(x, z)$ — решение задачи Коши. Как уже было установлено, его образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (5.7).

При $\xi < -k$ и $\xi > k$ полином $k^2 - \xi^2 - \zeta^2$ как функция переменной ζ имеет комплексные корни $\pm\gamma^+(\xi)$. Поэтому

$$u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + \gamma^+(\xi)} \right], \quad (5.10)$$

где

$$v_1(\xi) = \frac{-u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}, \quad v_2(\xi) = \frac{u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}.$$

Распределение $u(\xi, \zeta)$ по переменной ζ должно быть аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ . Условия (5.9) устраняют возможные полюсы в верхней полуплоскости.

Можно рассуждать и немного иначе. Уравнение (5.7) по ζ можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости переменной ζ . При $\zeta = \pm\gamma^+(\xi)$, если эти значения лежат в верхней полуплоскости, левая часть продолженного уравнения обращается в нуль. Поэтому правая часть тоже должна обращаться в нуль.

При $-k < \xi < k$ корни полинома вещественные. Методом выхода в комплексную плоскость (точнее, в верхнюю полуплоскость) получим

$$u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta + i0 - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + i0 + \gamma^+(\xi)} \right]. \quad (5.11)$$

Здесь оба слагаемых аналитически продолжимы по ζ в верхнюю полуплоскость.

С другой стороны, если $u(\xi, \zeta)$ — решение уравнения (5.7), а также выполнены условия (5.9), то решение задачи Коши может быть получено обратным преобразованием Фурье. •

5.2. Условия на бесконечности

После обратного преобразования Фурье получим из (5.10) и (5.11) при $z > 0$

$$u(x, z) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-k} v_2(\xi) e^{i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \int_k^{+\infty} v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \int_{-k}^k v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \int_{-k}^k v_2(\xi) e^{i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi \right]. \quad (5.12)$$

Первые два слагаемых в правой части содержат волны, затухающие в направлении оси z , причем $v_1(\xi) = iu_0(\xi) = -u_1(\xi)/\gamma^+(\xi)$ при $\xi > k$ и $v_2(\xi) = iu_0(\xi) = u_1(\xi)/\gamma^+(\xi)$ при $\xi < -k$. В третьем слагаемом содержатся уходящие на бесконечность волны, а в четвертом — приходящие с бесконечности. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Решение задачи (5.1), (5.3) при вещественном k принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда $u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0$ при $-k < \xi < k$, и классу приходящих с бесконечности решений тогда и только тогда, когда $u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0$ при $-k < \xi < k$.*

Будем говорить, что решение задачи (5.1), (5.3) удовлетворяет *условию излучения*, если в представлении (5.12) не содержится волн, приходящих с бесконечности.

Обозначим

$$\gamma(\xi) = \left\{ |\xi| \geq k : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad |\xi| \leq k : -\sqrt{k^2 - \xi^2} \right\}, \quad (5.13)$$

эта функция уже не будет предельным значением какой-либо функции, аналитической в верхней полуплоскости. Если объединим утверждения лемм 5.1 и 5.2, то получим искомую связь между граничными функциями в переопределенной задаче Коши.

Теорема 5.1. *Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (5.1), (5.3) и удовлетворяет условию излучения при вещественном k тогда и только тогда, когда*

$$u_1(\xi) - i\gamma(\xi)u_0(\xi) = 0. \quad (5.14)$$

При этом

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iu_1(\xi)}{\gamma(\xi)} e^{i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (5.15)$$

Из этого утверждения сразу следует, что задача Дирихле и задача Неймана для уравнения Гельмгольца в полуплоскости имеют единственное решение, удовлетворяющее условию излучения.

Из условия (5.14) легко получить, что следы на прямой $z = 0$ любого решения уравнения Гельмгольца в полуплоскости $z > 0$, удовлетворяющего условию излучения, связаны равенствами

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (5.16)$$

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} u_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (5.17)$$

Правые части этих формул определяют взаимно обратные *псевдодифференциальные операторы* с символами $i\gamma(\xi)$ и $-i/\gamma(\xi)$ соответственно. Формулы (5.16) и (5.17) можно также переписать в виде

$$u_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau, x) d\tau, \quad u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau, \quad (5.18)$$

где

$$K_0(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma_0(\xi) e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) \frac{k}{|\tau-x|} H_1^{(2)}(k|\tau-x|),$$

$$K_1(\tau, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)} e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) H_0^{(2)}(k|\tau-x|).$$

Ядра интегральных операторов $K_j(\tau, x)$ представляют собой следы функций Грина для уравнения Гельмгольца в полуплоскости. Отметим, что при исследовании задачи Коши для уравнения Гельмгольца функции Грина, а также фундаментальное решение уравнения непосредственно не использовались.

Если рассматривать приходящие с бесконечности волны, то все полученные формулы останутся верными, если переопределить функцию $\gamma(\xi)$ так, чтобы ее значения были положительными при $|\xi| < k$.

Для нижней полуплоскости $z < 0$ легко получить аналогичные утверждения. Достаточно изменить в формулах знак у функции $\gamma(\xi)$.

Теорема 5.2. *Распределение $u(x, z)$ является решением задачи Коши для уравнения Гельмгольца в нижней полуплоскости и удовлетворяет условию излучения при вещественном k тогда и только тогда, когда*

$$u_1(\xi) + i\gamma(\xi) u_0(\xi) = 0. \quad (5.19)$$

При этом

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i u_1(\xi)}{\gamma(\xi)} e^{-i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (5.20)$$

Аналоги формул (5.16), (5.17) имеют вид

$$u_1(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)} u_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi,$$

их также легко представить в виде (5.18) (с соответствующей корректировкой знаков).

Можно показать, что если k — комплексное число, то условия (5.9) принимают вид

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \quad u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > 0.$$

При этом получается единственное решение задачи Коши, затухающее на бесконечности. Условие излучения в этом случае вводить не нужно.

5.3. Сопряжение двух полуплоскостей

Рассмотрим две задачи сопряжения на прямой $z = 0$ решений уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости $z > 0$ и в нижней полуплоскости $z < 0$. Будем искать решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z) u(x, z) = 0 \quad (5.21)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом $k(z) = \{z > 0 : k_+; z < 0 : k_-\}$ при различных условиях на прямой $z = 0$, задающих связи между этими решениями. Ограничимся случаем, когда k_{\pm} — вещественные числа.

Назовем *задачей о скачке* (первой задачей о скачке) на прямой для уравнения Гельмгольца следующую задачу: найти решение уравнения (5.21) при $z > 0$ и $z < 0$ в классе уходящих на бесконечность решений, удовлетворяющее на прямой $z = 0$ условиям

$$u(x, 0+0) - u(x, 0-0) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) = b(x). \quad (5.22)$$

Теорема 5.4. *Единственное решение задачи о скачке (5.21), (5.22) имеет вид*

$$u_{\pm}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm a(\xi)\gamma_{\mp}(\xi) - ib(\xi)}{\gamma_+(\xi) + \gamma_-(\xi)} e^{\pm i\gamma_{\pm}(\xi)z - i\xi x} d\xi, \quad (5.23)$$

где

$$\gamma_{\pm}(\xi) = \left\{ |\xi| \geq k_{\pm} : i\sqrt{\xi^2 - k_{\pm}^2}; \quad |\xi| \leq k_{\pm} : -\sqrt{k_{\pm}^2 - \xi^2} \right\}.$$

Доказательство. Будем искать решения уравнения (5.21) при $z > 0$ и при $z < 0$ как решения двух вспомогательных задач Коши. Из теорем 5.1 и 5.2 следует, что

$$(k_+^2 - \xi^2 - \zeta^2)u_+(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[u_1^+(\xi) - i\zeta u_0^+(\xi)],$$

$$(k_-^2 - \xi^2 - \zeta^2)u_-(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[u_1^-(\xi) - i\zeta u_0^-(\xi)],$$

причем распределения $u_j^{\pm}(\xi)$ удовлетворяют равенствам

$$u_1^+(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0^+(\xi) = 0, \quad u_1^-(\xi) + i\gamma^-(\xi)u_0^-(\xi) = 0.$$

Условия задачи о скачке в образах Фурье имеют вид

$$u_0^+(\xi) - u_0^-(\xi) = a(\xi), \quad u_1^+(\xi) - u_1^-(\xi) = b(\xi).$$

Решим систему из четырех линейных уравнений и найдем

$$u_+(\xi, \zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\zeta + \gamma_+(\xi)} \frac{a(\xi)\gamma_-(\xi) - ib(\xi)}{\gamma_+(\xi) + \gamma_-(\xi)},$$

$$u_-(\xi, \zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\zeta - \gamma_-(\xi)} \frac{-a(\xi)\gamma_+(\xi) - ib(\xi)}{\gamma_+(\xi) + \gamma_-(\xi)}$$

и тогда, выполнив обратное преобразование Фурье, получим (5.23). •

К задаче о скачке приводится скалярная задача о падении на плоскую границу раздела сред \parallel -поляризованных волн, причем их источники могут быть расположены и в верхней полуплоскости, и в нижней. При этом в функции $a(x)$ и $b(x)$ из условий сопряжения войдут разности следов приходящих волн.

Формулы (5.23) можно использовать при доказательстве такого очевидного с физической точки зрения факта, что при падении плоской волны на плоскую границу раздела сред отраженная и преломленная волны также будут плоскими волнами.

Действительно, пусть потенциальная функция плоской волны

$$u^0(x, z) = e^{ik_+ \sin \theta_0 \cdot x + ik_+ \cos \theta_0 \cdot z}$$

(эта волна единичной амплитуды падает на плоскость $z = 0$ под углом θ_0 к оси z). Тогда

$$a(x) = -e^{ik_+ \sin \theta_0 \cdot x}, \quad b(x) = -ik_+ \cos \theta_0 \cdot e^{ik_+ \sin \theta_0 \cdot x}$$

и в образах Фурье

$$a(\xi) = -\sqrt{2\pi} \delta(\xi + k_+ \sin \theta_0), \quad b(\xi) = -ik_+ \cos \theta_0 \cdot \sqrt{2\pi} \delta(\xi + k_+ \sin \theta_0).$$

Подставим эти распределения в формулы (5.23) и получим

$$u_+(x, z) = \frac{-\gamma_-(\xi) - k_+ \cos \theta_0}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} e^{i\gamma_+(\xi)z - i\xi x} \Big|_{\xi = -k_+ \sin \theta_0},$$

$$u_-(x, z) = \frac{\gamma_+(\xi) - k_+ \cos \theta_0}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} e^{-i\gamma_-(\xi)z - i\xi x} \Big|_{\xi = -k_+ \sin \theta_0}.$$

Легко видеть, что этим потенциальным функциям соответствуют плоские волны (отраженная и преломленная).

Так как $\gamma_+(-k_+ \sin \theta_0) = -k_+ \cos \theta_0$, то фаза отраженной волны $ik_+ \sin \theta_0 \cdot x - ik_+ \cos \theta_0 \cdot z$. Следовательно, угол отражения θ_+ равен углу падения θ_0 . Для отраженной волны угол отражения θ_- должен быть таким, что $k_- \sin \theta_- = k_+ \sin \theta_0$ и $k_- \cos \theta_- = -\gamma_-(-k_+ \sin \theta_0)$ (эти уравнения не противоречат друг другу). Амплитуды отраженной и преломленной волны имеют вид

$$\frac{-k_- \cos \theta_- + k_+ \cos \theta_0}{k_- \cos \theta_- + k_+ \cos \theta_0} \quad \text{и} \quad \frac{2k_+ \cos \theta_0}{k_- \cos \theta_- + k_+ \cos \theta_0}$$

(формулы Френеля для ||-поляризации). Эти числа называют коэффициентами отражения и прохождения соответственно.

Второй задачей о скачке назовем задачу сопряжения решений уравнения Гельмгольца на прямой $z = 0$, к которой приводит задача о падении на плоскую границу раздела сред \perp -поляризованных волн. Условия (5.22) при этом нужно заменить на условия

$$u(x, 0 + 0) - u(x, 0 - 0) = a(x),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_+} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) - \frac{1}{\varepsilon_-} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) = b(x). \quad (5.24)$$

Теорема 5.4. *Единственное решение задачи о скачке (5.21), (5.24) имеет вид*

$$u_{\pm}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm \frac{\gamma_{\mp}(\xi)}{\varepsilon_{\mp}} a(\xi) - ib(\xi)}{\frac{\gamma_{+}(\xi)}{\varepsilon_{+}} + \frac{\gamma_{-}(\xi)}{\varepsilon_{-}}} e^{\pm i\gamma_{\pm}(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (5.25)$$

Доказательство проводится тем же способом, что и доказательство предыдущей теоремы. •

Следствие 5.1. *При $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon$ решение задачи о скачке (5.21), (5.22) имеет вид*

$$u_{\pm}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm \gamma(\xi) a(\xi) - ib(\xi)}{2\gamma(\xi)} e^{\pm i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (5.26)$$

В случае задачи (5.21), (5.24) эти формулы сохраняются, но при распределении $b(\xi)$ появляется множитель ε .

5.4. Замечания и дополнения

При постановке граничных задач для уравнений с частными производными, как правило, задают столько условий на границе области, чтобы можно было выделить единственное решение задачи. Требование единственности решения входит как составная часть в понятие корректности задачи. Некорректные в этом смысле задачи обычно не рассматриваются, поскольку они не могут служить основой адекватных математических моделей исследуемых процессов.

Оказалось, что связи между граничными функциями во вспомогательных переопределенных задачах (необходимые и достаточные условия их разрешимости) могут быть использованы при сведении многих задач для уравнений с частными производными на границу области. Выше было показано, как это делается на примере двумерного уравнения Гельмгольца. Аналогичные действия могут быть предприняты и в более общих случаях, например, непосредственно для трехмерной системы уравнений Максвелла. Более подробная информация содержится в обзорных статьях, указанных в списке литературы.

Литература

1. Pleshchinskii N.B. Integral transforms method in the conjunction problems of electromagnetic fields / N.B. Pleshchinskii // Functional-Analytic and Complex Methods, their Interactions, and Applications to Partial Differential Equations (ed. W.Tutschke). — Publishing House World Scientific, 2001. — P. 161–177.

2. Плещинский Н.Б. О задачах сопряжения решений уравнений с частными производными. Метод частичных областей / Н.Б. Плещинский // На рубеже веков. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского гос. ун-та. 1998 – 2002 гг. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. — С. 148–167.

3. Плещинская И.Е. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн / И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский // Ученые записки Казанского гос. ун-та. — 2005. — Т. 147, кн. 3. — С. 4–32.

6. Дифракция электромагнитных волн на металлических лентах

Пусть в плоскости $z = 0$, разделяющей две среды $z > 0$ и $z < 0$ с диэлектрическими проницаемостями ε_+ и ε_- , расположены идеально проводящие бесконечно тонкие ленты (экраны), края которых параллельны оси y . Пока будем считать, что таких экранов конечное число, может быть, только один. В п. 7 будет рассмотрен случай, когда ленты образуют бесконечную периодическую решетку.

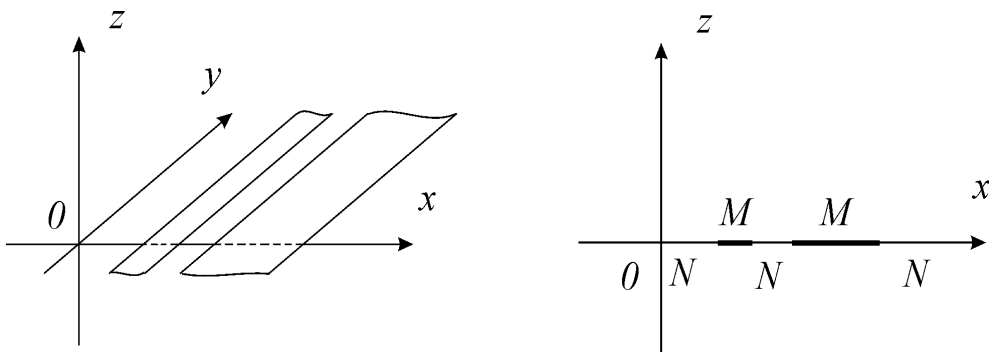


Рис. 6.1. Дифракция волны на лентах

Пусть на границу раздела сред падает электромагнитная волна. Требуется найти поле, возникающее при ее дифракции.

Обозначим через \mathcal{M} множество отрезков оси z , представляющих собой сечения экранов в плоскости $y = 0$, и через \mathcal{N} — дополнение замыкания \mathcal{M} до всей оси. Как следует из сказанного выше, задача дифракции сводится к задаче сопряжения на прямой $z = 0$ решений уравнения Гельмгольца в верхней и в нижней полуплоскостях, причем на \mathcal{M} и на \mathcal{N} для касательных составляющих векторов поля быть записаны разные условия. Кроме того, вид этих условий на прямой $z = 0$ зависит от рассматриваемой поляризации волн (см. п. 2.2).

Условимся для определенности, что исходная электромагнитная волна приходит из области $z > 0$ и $u_0(x, z)$ — ее потенциальная функция. Пока будем считать, что эта волна задана только в верхнем полупространстве, но иногда удобно предполагать, что она прошла и в нижнее полупространство. Здесь нет противоречия: всегда можно искать потенциальную функцию поля в нижнем полупространстве в виде суммы известной функции $u_0(x, z)$ и неизвестной функции $u_-(x, z)$.

6.1. Метод интегральных тождеств. Параллельная поляризация

Предположим для простоты рассуждений, что среды в верхнем и нижнем полупространствах одинаковы. Пусть падающая волна задана только в верхнем полупространстве. Запишем граничные условия задачи дифракции в терминах следов потенциальных функций и их нормальных производных на границе соответствующих полуплоскостей. Для волн параллельной поляризации

$$u_0^+(x) + u_0^0(x) = 0, \quad u_0^-(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M}, \quad (6.1)$$

$$u_0^+(x) + u_0^0(x) = u_0^-(x), \quad u_1^+(x) + u_1^0(x) = u_1^-(x) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

В пп. 5.2 и 5.3 было показано, что следы каждой из потенциальных функций связаны друг с другом интегральными тождествами

$$u_1^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^+(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \quad (6.2)$$

$$u_1^-(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^-(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^-(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^-(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \quad (6.3)$$

$$u_1^0(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^0(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^0(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau. \quad (6.4)$$

Покажем, что задачу сопряжения для уравнения Гельмгольца с граничными условиями (6.1) можно заменить на две независимые граничные задачи со смешанными граничными условиями.

Теорема 6.1. *Задача дифракции электромагнитной волны на лентах в случае параллельной поляризации поля равносильна двум граничным задачам для уравнения Гельмгольца в верхней и нижней полуплоскостях с граничными условиями*

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N} \quad (6.5)$$

и

$$u_0^-(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^-(x) = u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.6)$$

Доказательство. Первые части граничных условий содержатся непосредственно в условиях задачи дифракции. Получим с помощью интегральных тождеств вторые части. При $x \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} u_1^+(x) &= u_1^-(x) - u_1^0(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^-(t) K_0(t, x) dt - u_1^0(x) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, x) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^0(t) K_0(t, x) dt - u_1^0(x) = \\ &= -u_1^+(x) + u_1^0(x) - u_1^0(x) = -u_1^+(x), \end{aligned}$$

и тогда $u_1^+(x) = 0$. С другой стороны, при $x \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} u_1^-(x) &= u_1^+(x) + u_1^0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, x) dt + u_1^0(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^-(t) K_0(t, x) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^0(t) K_0(t, x) dt + u_1^0(x) = -u_1^-(x) + 2u_1^0(x), \end{aligned}$$

и тогда $u_1^-(x) = u_1^0(x)$. •

Таким образом, чтобы найти решение рассматриваемой задачи дифракции достаточно решить одну из граничных задач для уравнения Гельмгольца (в верхней или в нижней полуплоскости) с граничными условиями (6.5) или (6.6).

Рассмотрим подробно смешанную задачу в верхней полуплоскости. Такая задача равносильна системе уравнений для определения граничных функций $u_0^+(x)$ и $u_1^+(x)$ из системы уравнений, которую образуют граничные условия (6.5) и одно из двух интегральных тождеств (6.2). Покажем, что эта система эквивалентна некоторым интегральным уравнениям различного типа относительно функций $u_0^+(x)$ или $u_1^+(x)$. Перейти к таким уравнениям можно разными способами.

Прежде всего заметим, что с помощью условий (6.5) можно уточнить форму интегральных тождеств (6.2) следующим образом:

$$u_1^+(x) = \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt - v_0(x), \quad u_0^+(t) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \quad (6.7)$$

где

$$v_0(x) = \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt.$$

Непосредственно из (6.7) следует, что задача дифракции на металлических лентах при параллельной поляризации поля сводится к интегральным уравнениям

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau = -u_0^0(t), \quad t \in \mathcal{M}, \quad (6.8)$$

$$\int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt = v_0(x), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.9)$$

Здесь не случайно использовано слово "сводится", а не "эквивалентно". Дело в том, что если, например, $u_1^+(x)$ — след нормальной производной решения задачи дифракции в верхней полуплоскости, то сужение этой функции (распределения) на \mathcal{M} удовлетворяет интегральному уравнению (6.8). Но если $u_1^+(x)$ на \mathcal{M} — решение интегрального уравнения (6.8), то при восстановлении потенциальной функции $u^+(x, z)$ нужно учесть, что $u_1^+(x) = 0$ на \mathcal{N} . Поэтому формулировку следует уточнить: задача

дифракции эквивалентна парному интегральному уравнению 3-го рода

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau = -u_0^0(t), \quad t \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.9) также нужно дополнить и, следовательно, рассматривать парное уравнение

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt = v_0(x), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.11)$$

При выводе интегральных уравнений 2-го рода основная идея состоит в том, чтобы исключить из имеющихся соотношений одну из двух искомым функций $u_0^+(x)$ или $u_1^+(x)$. Подставим правую часть первого равенства из (6.7) во второе равенство из (6.7) и получим парное интегральное уравнение

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_0^+(x) = \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) L_{01}(t, x) dt - w_0(x), \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.12)$$

где

$$L_{01}(t, x) = \int_{\mathcal{M}} K_0(t, \tau) K_1(\tau, x) d\tau,$$

$$w_0(x) = \int_{\mathcal{M}} v_0(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) L_{01}(t, x) dt.$$

Уравнение (6.12) можно переписать также в виде

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_0^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) L_{01}(t, x) dt, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.13)$$

Укажем еще один способ вывода интегрального уравнения (6.12), который можно рассматривать как метод регуляризации интегрального уравнения 1-го рода (6.9). Так как $u_0^+(x) = -u_0^0(x)$ на \mathcal{M} , то уравнение (6.9) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, \tau) dt = 0, \quad \tau \in \mathcal{N}.$$

В то же время

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, \tau) dt = \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, \tau) dt - v_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{M}.$$

Умножим теперь обе части этого парного равенства на $K_1(\tau, x)$ и проинтегрируем по всей оси по τ . Получим уравнение (6.12).

Если провести аналогичные рассуждения и исключить из тождеств (6.7) искомую функцию $u_0^+(x)$, то получим следующие парные интегральные уравнения 2-го рода:

$$u_1^+(x) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) L_{10}(\tau, x) d\tau - v_0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N} \quad (6.14)$$

или

$$u_1^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(\tau) L_{10}(\tau, x) d\tau - v_0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (6.15)$$

где

$$L_{10}(\tau, x) = \int_{\mathcal{N}} K_1(\tau, t) K_0(t, x) dt.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 6.2. *При параллельной поляризации поля задача дифракции на металлических лентах эквивалентна любому из парных интегральных уравнений (6.10), (6.11), (6.12) или (6.13), (6.14) или (6.15).*

С помощью модифицированных интегральных тождеств (6.3)

$$u_1^-(x) = - \int_{\mathcal{N}} u_0^-(t) K_0(t, x) dt,$$

$$u_0^-(t) = - \int_{\mathcal{M}} u_1^-(\tau) K_1(\tau, t) d\tau - \int_{\mathcal{N}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau$$

можно получить еще шесть парных интегральных уравнений относительно функций $u_0^-(x)$ и $u_1^-(x)$ (одни из них будут немного проще, другие — сложнее).

6.2. Метод интегральных тождеств. Перпендикулярная поляризация

В случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля все рассуждения точно такие же. Пусть, как и раньше, среды в верхнем и нижнем полупространствах одинаковы. Пусть падающая волна задана только в верхнем полупространстве. Тогда граничные условия задачи дифракции имеют вид

$$u_1^+(x) + u_1^0(x) = 0, \quad u_1^-(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M},$$

$$u_1^+(x) + u_1^0(x) = u_1^-(x), \quad u_0^+(x) + u_0^0(x) = u_0^-(x) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Теорема 6.3. *Задача дифракции электромагнитной волны на лентах в случае перпендикулярной поляризации поля равносильна двум граничным задачам для уравнения Гельмгольца в верхней и нижней полуплоскостях с граничными условиями*

$$u_1^+(x) = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N} \quad (6.16)$$

и

$$u_1^-(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^-(x) = u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (6.17)$$

Метод доказательства такой же, как в случае теоремы 6.1. Например, при $x \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} u_0^+(x) &= u_0^-(x) - u_0^0(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^-(t) K_1(t, x) dt - u_0^0(x) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(t) K_1(t, x) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^0(t) K_1(t, x) dt - u_0^0(x) = \\ &= -u_0^+(x) + u_0^0(x) - u_0^0(x) = -u_0^+(x), \end{aligned}$$

и тогда $u_0^+(x) = 0$. •

Следствие 6.3. *В случае перпендикулярной поляризации поля граничные функции решения задачи дифракции удовлетворяют интегральным тождествам*

$$u_1^+(x) = \int_{\mathcal{M}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt,$$

$$\begin{aligned}
 u_1^-(x) &= - \int_{\mathcal{M}} u_0^-(t) K_0(t, x) dt - \int_{\mathcal{N}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt, \\
 u_0^+(t) &= \int_{\mathcal{N}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau - \int_{\mathcal{M}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \\
 u_0^-(t) &= \int_{\mathcal{N}} u_1^-(\tau) K_1(\tau, t) d\tau.
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, из граничных условий (6.16) и (6.19) выводятся интегральные уравнения двух типов.

Теорема 6.4. *При перпендикулярной поляризации поля задача дифракции на металлических лентах эквивалентна интегральным уравнениям*

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt &= -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_0^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}; \\
 u_0^+(x) &= \int_{\mathcal{M}} u_0^+(t) \left[\int_{\mathcal{N}} K_0(t, \tau) K_1(\tau, x) d\tau \right] dt - \int_{\mathcal{M}} u_1^0(t) K_1(t, x) dt, \quad x \in \mathcal{M}.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Первое уравнение — это граничные условия (6.16). Второе уравнение получается при регуляризации первого, причем двумя способами. •

Легко видеть, что имеет место *принцип Бабине* для взаимно дополняющих друг друга задач: при замене параллельной поляризации на перпендикулярную ленты заменяются на щели.

6.3. Метод задачи о скачке

Пусть, как и раньше, зависимость составляющих поля от времени имеет вид $e^{i\omega t}$, но в общем случае $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$. Удобно считать, что волна, падающая сверху на границу раздела сред, проходит в нижнее полупространство. Для электромагнитного поля параллельной поляризации условия сопряжения на прямой $z = 0$ на языке следов потенциальных функций имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_0^+(x) + u_0^0(x) &= 0, \quad u_0^-(x) + u_0^0(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M}; \\
 u_0^+(x) &= u_0^-(x), \quad u_1^+(x) = u_1^-(x) \quad \text{на } \mathcal{N}.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Будем искать решение задачи дифракции в форме задачи о скачке (см. п. 5). Из условий сопряжения определяются скачки искомой потенциальной функции: во-первых, $a(x) = 0$ и на \mathcal{M} , и на \mathcal{N} ; во-вторых, $b(x) = 0$ на \mathcal{N} . При этом функция $b(x)$ остается неизвестной на \mathcal{M} . Но из формулы, дающей решение задачи о скачке, и любого из двух первых условий в (6.18) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i b(\xi)}{\gamma_-^0(\xi) + \gamma_+^0(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Если перейдем от образа Фурье $b(\xi)$ к его прообразу $b(x)$, то получим

$$\int_{\mathcal{M}} b(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma_-^0(\xi) + \gamma_+^0(\xi)} e^{i(t-x)\xi} d\xi \right] dt = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}. \quad (6.19)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 6.5. *Задача дифракции на металлических лентах в случае \parallel -поляризации эквивалентна интегральному уравнению (6.19).*

При $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon$ ядро уравнения (6.19) имеет вид

$$K_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma^0(\xi)} e^{i(t-x)\xi} d\xi = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) H_0^{(2)}(k|t-x|).$$

В случае \perp -поляризации условия (6.18) нужно заменить на

$$\frac{1}{\varepsilon_+} [u_1^+(x) + u_1^0(x)] = 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_-} [u_1^-(x) + u_1^0(x)] = 0 \quad \text{на } \mathcal{M};$$

$$\frac{1}{\varepsilon_+} u_1^+(x) = \frac{1}{\varepsilon_-} u_1^-(x), \quad u_0^+(x) = u_0^-(x) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

При выводе интегрального уравнения задачи дифракции используем формулу, которая дает решение второй задачи о скачке. При этом функция $a(x) = 0$ на \mathcal{N} и остается неизвестной на \mathcal{M} ; функция $b(x) = u_1^+(x)/\varepsilon_+ - u_1^-(x)/\varepsilon_- = 0$ и на \mathcal{M} , и на \mathcal{N} . Тогда из равенств $u_1^\pm(x) = -u_1^0(x)$ на \mathcal{M} следует

Теорема 6.6. *Задача дифракции на металлических лентах в случае \perp -поляризации эквивалентна интегральному уравнению*

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} \frac{\pm \frac{\gamma_{\mp}^0(\xi)}{\varepsilon_{\mp}} a(\xi)}{\frac{\gamma_+^0(\xi)}{\varepsilon_+} + \frac{\gamma_-^0(\xi)}{\varepsilon_-}} e^{\pm i\gamma^{\pm}(\xi)z - i\xi x} d\xi \Big|_{z=0} = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

6.4. Приближенное решение интегральных уравнений. Метод Галеркина

Покажем, как методом Галеркина может быть получено приближенное решение интегральных уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на металлических лентах.

Общая схема метода Галеркина состоит в следующем. Пусть X, Y — линейные пространства, в Y определено скалярное произведение (\cdot, \cdot) , линейный оператор A действует из X в Y . Выберем в пространствах X и Y системы независимых элементов x_1, \dots, x_N (координатная система) и y_1, \dots, y_N (проекционная система).

Будем искать приближенное решение уравнения $Ax = y$ в виде разложения

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^N a_j x_j,$$

коэффициенты a_j которого должны удовлетворять условиям

$$(A\tilde{x} - y, y_k) = (y, y_k), \quad k = 1 \dots N.$$

Следовательно, точное уравнение аппроксимирует система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_j (Ax_j, y_k) = (y, y_k), \quad k = 1 \dots N.$$

Покажем, что интегральное уравнение 1-го рода с функцией Ханкеля в ядре

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) H_0^{(1)}(k|t-x|) dt = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (6.20)$$

сводится к интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре. Здесь волновое число $k = 2\pi/\lambda$, предполагается, что $\beta - \alpha < \lambda$.

1) Перейдем с отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[-1, 1]$. Пусть

$$t_1 = 2\frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} - 1, \quad t = \frac{\beta - \alpha}{2} t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$$x_1 = 2\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} - 1, \quad x = \frac{\beta - \alpha}{2} x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{\beta - \alpha}{2} t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) H_0^{(1)}\left(\pi\frac{\beta - \alpha}{\lambda}|t_1 - x_1|\right) \frac{\beta - \alpha}{2} dt_1 =$$

$$= f\left(\frac{\beta - \alpha}{2} x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right), \quad x_1 \in [-1, 1].$$

2) Выделим логарифмическую особенность из функции Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$

где

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} [J_0(z) \ln \frac{z}{2} + \tilde{Y}_0(z)], \quad \tilde{Y}_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \psi(k+1),$$

$\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции,

$$\psi(k+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad \gamma = 0.57721566\dots$$

Так как $J_0(0) = 1$, то

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{z}{2} + (J_0(z) - 1) \ln \frac{z}{2} + \tilde{Y}_0(z) \right].$$

Обозначим $k_1 = \pi(\beta - \alpha)/\lambda$, тогда

$$H_0^{(1)}(k_1|t_1 - x_1|) = J_0(k_1|t_1 - x_1|) +$$

$$+ \frac{2i}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1 - x_1|\right) + [J_0(k_1|t_1 - x_1|) - 1] \ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1 - x_1|\right) + \tilde{Y}_0(k_1|t_1 - x_1|) \right\}.$$

3) Введем новые обозначения

$$\varphi_1(t_1) = -\frac{i}{\pi}(\beta - \alpha)\varphi\left(\frac{\beta - \alpha}{2}t_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{\beta - \alpha}{2}x_1 + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$K(t_1, x_1) = \frac{\pi i}{2}J_0(k_1|t_1 - x_1|) - \ln\frac{k_1}{2} - \tilde{Y}_0(k_1|t_1 - x_1|) + \\ + [1 - J_0(k_1|t_1 - x_1|)] \ln\left(\frac{k_1}{2}|t_1 - x_1|\right).$$

Получим окончательно

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(t_1) \left[\ln \frac{1}{|t_1 - x_1|} + K(t_1, x_1) \right] dt_1 = f_1(x_1), \quad x_1 \in [-1, +1].$$

Выберем в качестве координатной и проекционной систем функций полиномы Чебышева 1-го рода. По определению

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Полиномы Чебышева ортогональны с весом на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_j(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} k = j = 0 : \pi; \\ k = j \neq 0 : \pi/2; \\ k \neq j : 0 \end{cases}. \quad (6.21)$$

Полиномы Чебышева 1-го рода являются собственными функциями интегрального оператора с логарифмическим ядром

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \begin{cases} j = 0 : \pi \ln 2; \\ j \neq 0 : \pi/j \end{cases} T_j(x). \quad (6.22)$$

Если искать методом Галеркина приближенное решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью в ядре

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t) \left[\ln \frac{1}{|t-x|} + r(t, x) \right] dt = f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (6.23)$$

в виде

$$\varphi(t) \approx \tilde{\varphi}_N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{j=1}^N a_j T_{j-1}(t),$$

то получим для неизвестных a_j , $j = 1 \dots N$, систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_j (\kappa_{kj} + r_{kj}) = f_k, \quad k = 1 \dots N,$$

$$\kappa_{kj} = \left\{ k = j = 1 : \pi^2 \ln 2; \quad k = j \neq 1 : \frac{\pi^2}{2k}; \quad k \neq j : 0 \right\},$$

$$r_{kj} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r(t, x) \frac{T_{j-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dt dx, \quad k, j = 1 \dots N,$$

$$f_k = \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1 \dots N.$$

Интегралы удобно вычислять по квадратурной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M f(x_m), \quad x_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad m = 1 \dots M,$$

при этом

$$r_{kj} \approx \left(\frac{\pi}{M} \right)^2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M r(x_n, x_m) T_{j-1}(x_n) T_{k-1}(x_m),$$

$$f_k \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M f(x_m) T_{k-1}(x_m), \quad k, j = 1 \dots N.$$

6.5. Задача Зоммерфельда

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{M} = (-\infty, 0)$ и $\mathcal{N} = (0, +\infty)$. Пусть $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon$ Явное решение задачи дифракции на проводящей полуплоскости получил впервые (эвристическим методом) Зоммерфельд в 1898 г.

Как было установлено в п. 4, образы Фурье следов решений уравнения Гельмгольца на прямой $z = 0$ удовлетворяют условиям

$$u_{+,1}(\xi) - i\gamma^0(\xi) u_{+,0}(\xi) = 0, \quad u_{-,1}(\xi) + i\gamma^0(\xi) u_{-,0}(\xi) = 0.$$

Вычтем из первого равенства второе. Получим

$$u_{+,1}(\xi) - u_{-,1}(\xi) = i\gamma^0(\xi) [u_{+,0}(\xi) + u_{-,0}(\xi)].$$

Разность слева представляет собой образ Фурье функции, равной нулю при $x > 0$ и неизвестной при $x < 0$. Это выражение является предельным значением на вещественной оси аналитической в верхней полуплоскости функции, обозначим его $b^-(\xi)$. Как следует из граничных условий на металле, $u_{\pm,0}(x) = -u_{0,0}(x)$ при $x < 0$ и $u_{\pm,0}(x) = u(x)$ — неизвестная функция при $x > 0$. Поэтому справа в квадратных скобках стоит выражение $-2u_{0,0}^-(\xi) + 2u^+(\xi)$, содержащее предельные значения на вещественной оси функций, аналитических в нижней и в верхней полуплоскостях соответственно, причем первое слагаемое известно, а второе нет. Мы получили условие краевой задачи Римана на вещественной оси

$$b^-(\xi) = 2i\gamma^0(\xi) u^+(\xi) - 2i\gamma^0(\xi) u_{0,0}^-(\xi).$$

Решение этой задачи можно получить в явном виде.

6.6. Замечания и дополнения

Задачам дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих экранах посвящена монография А.С. Ильинского и Ю.Г. Смирнова, в этой работе подробно рассмотрены вопросы существования и единственности решений соответствующих граничных задач, в том числе в трехмерном случае.

Метод Галеркина для численного решения интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре с использованием полиномов Чебышева стал широко использоваться в последние годы. В случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля при аппроксимации гиперсингулярных интегральных уравнений в качестве координатной и проекционной системы функций удобно брать полиномы Чебышева 2-го рода.

Задача Зоммерфельда неоднократно рассматривалась в литературе как пример задачи дифракции, решение которой может быть получено

в явном виде (см. книгу Б. Нобла, посвященную приложениям метода Винера – Хопфа к граничным задачам для уравнений с частными производными).

С помощью метода интегрального преобразования Фурье можно свести к краевым задачам для аналитических функции (к задаче Римана или более сложным задачам) целый ряд задач математической физики. Многие детали можно найти в монографии Ф.Д. Гахова и Ю.И. Черского.

Литература

1. Плещинский Н.Б. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций / Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков // Препринт 2000–1. Казань: Казан. матем. об-во, 2000. — 50 с.

2. Плещинский Н.Б. Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей / Н.Б. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. Матер. Молодежн. науч. шк.-конф. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 153–185.

3. Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах / Н.Б. Плещинский // Препринт ПМФ–03–02. Казань: Казан. матем. об-во, 2003. — 30 с.

4. Ильинский А.С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции) / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.

5. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. — М.: ИЛ, 1962. — 280 с.

6. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.

7. Дифракция на периодической решетке

Пусть в плоскости xu расположена l -периодическая решетка, состоящая из бесконечно тонких и идеально проводящих металлических лент, параллельных оси u . Обозначим через \mathcal{M} множество точек интервала $(0, l)$, расположенных внутри лент, а через \mathcal{N} — все внутренние точки

оставшейся части интервала.

Будем рассматривать (как и в п. 6) скалярное электромагнитное поле, компоненты которого не зависят от координаты y . Но будем считать, что зависимость гармонического поля от времени задает множитель $e^{-i\omega t}$. Тогда, как уже было сказано, в формулах (2.4) и (2.6) нужно поставить другой знак у параметра ω .

Ограничимся случаем, когда поле имеет параллельную поляризацию, а среда сверху и снизу от решетки одна и та же.

Пусть сверху (из области $z > 0$) на решетку падает под углом θ^0 плоская электромагнитная волна единичной амплитуды, ее потенциальная функция

$$u^0(x, z) = e^{-ik \sin \theta^0 \cdot x - ik \cos \theta^0 \cdot z}.$$

Нужно найти поле, возникающее в процессе дифракции.

7.1. Парное сумматорное уравнение

Будем искать потенциальные функции поля над решеткой (верхний индекс $+$) и под решеткой (верхний индекс $-$) как квазипериодические функции (волны Флоке)

$$\begin{aligned} u^+(x, z) &= e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{iLn x}, \quad z > 0; \\ u^-(x, z) &= e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{iLn x}, \quad z < 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где α — неизвестное пока число (параметр Флоке); здесь обозначено $L = 2\pi/l$ и

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sqrt{k^2 - (Ln + \alpha)^2} = \\ &= \left\{ n \leq l/\lambda : \sqrt{k^2 - (Ln + \alpha)^2}; \quad n \geq l/\lambda : i\sqrt{(Ln + \alpha)^2 - k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ветвь корня выбрана так, чтобы отдельным слагаемым в суммах соответствовали элементарные волны, затухающие или уходящие на бесконечность (при зависимости вида $e^{-i\omega t}$ компонент поля от времени). Структура искомого решения учитывает условия на бесконечности.

Остается открытым вопрос: может ли задача дифракции иметь решение, которое не является волной Флоке?

Лемма 7.1. *Задача дифракции плоской волны на периодической решетке эквивалентна парному сумматорному функциональному уравнению (ПСФУ)*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iLnx} = -1, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (7.2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{iLnx} = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (7.3)$$

Действительно, на границе раздела сред $z = 0$ должны выполняться условия: $u^0 + u^+ = 0$, $u^- = 0$ на \mathcal{M} и $u^0 + u^+ = u^-$, $\partial u^0 / \partial z + \partial u^+ / \partial z = \partial u^- / \partial z$ на \mathcal{N} (мы предполагаем, что падающая волна не проходит под решетку). Так как равенство $u^0 + u^+ = u^-$ должно выполняться всюду (и на \mathcal{M} , и на \mathcal{N}), то

$$\alpha = -k \sin \theta^0.$$

Тогда $\gamma_0 = k \cos \theta^0$, и искомые коэффициенты представлений (7.1) просто выражаются друг через друга:

$$b_0 = a_0 + 1; \quad b_n = a_n, \quad n \neq 0.$$

Поэтому условия на прямой $z = 0$ сводятся к равенствам (7.2), (7.3). •

Также легко получить парное сумматорное уравнение, содержащее другую группу искомых коэффициентов

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{iLnx} = 0, \quad y \in \mathcal{M}, \quad (7.4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \gamma_n e^{iLnx} = k \cos \theta^0, \quad y \in \mathcal{N}. \quad (7.5)$$

7.2. Интегральные уравнения с периодическими ядрами

Перейдем от ПСФУ (7.2), (7.3) к интегральному уравнению. Введем новую искомую функцию

$$j(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{iLnt}$$

(так, что числа $a_n \gamma_n$ — ее коэффициенты Фурье). Уравнение (7.3) сводится к равенству $j(t) = 0$ на \mathcal{M} . Тогда

$$a_n \gamma_n = \frac{1}{l} \int_{\mathcal{M}} j(t) e^{-iLnt} dt.$$

Заменим в уравнении (7.3) искомые коэффициенты a_n на их выражения через функцию $j(t)$. Получим

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{M}} j(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{iLn(x-t)} dt = -1, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (7.6)$$

Ядро этого интегрального уравнения имеет при $t \rightarrow x$ логарифмическую периодическую особенность, так как $\gamma_n \sim iL|n|$ при $|n| \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{iLn(x-t)}}{|n|} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[Ln(x-t)]}{n} = 2 \ln \frac{1}{2 \sin \frac{L|x-t|}{2}}.$$

Если же ввести новую искомую функцию

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{iLnt},$$

то

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{\mathcal{N}} q(t) e^{-iLnt} dt.$$

Тогда ПСФУ (7.4), (7.5) сводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{l} \int_{\mathcal{N}} q(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{iLn(x-t)} dt = k \cos \theta^0, \quad x \in \mathcal{N} \quad (7.7)$$

с гиперсингулярным ядром.

Численное решение интегральных уравнений (7.6) и (7.7) можно получить методом Галеркина.

Рассмотрим уравнение с логарифмической особенностью в периодическом ядре на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \left[-\ln \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| + r(t, x) \right] dt = f(x), \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (7.8)$$

В качестве координатной и проекционной систем элементов возьмем функции e^{ijx} . Два важных свойства:

1) эти функции ортогональны

$$\int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} dx = \{j = k : 2\pi; \quad j \neq k : 0\} = p_{kj};$$

2) они являются собственными функциями интегрального оператора с логарифмическим периодическим ядром

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt} \left[-\ln \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| \right] dt = \{j = 0 : 2\pi \ln 2; \quad j \neq 0 : \frac{\pi}{|j|}\} e^{ijx} = q_j e^{ijx}.$$

Обозначим собственные значения оператора α_j .

Будем искать приближенное решение уравнения (7.8) в виде

$$\varphi(t) \approx \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijt}.$$

Подставим это выражение в уравнение

$$\sum_{j=-N}^N a_j \left[q_j e^{ijx} + \int_0^{2\pi} r(t, x) e^{ijt} dt \right] = f(x), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Умножим обе части на e^{-ikx} и проинтегрируем от 0 до l . Получим

$$\sum_{j=-N}^N a_j [s_{jk} + r_{jk}] = f_k, \quad k = -N \dots N, \quad (7.9)$$

где

$$s_{jk} = p_{jk} q_j = \{j = k = 0 : 4\pi^2 \ln 2; \quad j = k \neq 0 : \frac{2\pi^2}{|k|}; \quad j \neq k : 0\},$$

$$r_{jk} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(t, x) e^{ijt} e^{-ikx} dt dx, \quad j, k = -N \dots N,$$

$$f_k = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = -N \dots N.$$

Для приближенного вычисления интегралов удобно использовать квадратурные формулы Гаусса:

$$f_k \approx \frac{2\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(x_m) e^{-ikx_m}, \quad x_m = m \frac{2\pi}{M},$$

$$r_{jk} \approx \left(\frac{2\pi}{M}\right)^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} r(x_n, x_m) e^{ijx_n} e^{-ikx_m}.$$

В случае интегрального уравнения (7.6) метод Галеркина сводится к следующему.

Пусть $\mathcal{M} = (\alpha, \beta)$. Перейдем с отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[0, 2\pi]$ с помощью замены переменных

$$t_1 = \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} 2\pi, \quad t = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} t_1 + \alpha, \quad x_1 = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} 2\pi, \quad x = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} x_1 + \alpha.$$

При этом

$$x - t = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} (x_1 - t_1).$$

Тогда получим

$$\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} j_1(t_1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{in \frac{\beta - \alpha}{l} (x_1 - t_1)} dt_1 = -l, \quad x_1 \in [0, 2\pi],$$

здесь новая искомая функция

$$j_1(t_1) = j\left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} t_1 + \alpha\right).$$

Покажем, что ядро этого интегрального уравнения имеет логарифмическую особенность. С этой целью запишем коэффициенты ряда Фурье в виде

$$\frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{iL|n|} + \left(\frac{1}{\gamma_n} - \frac{1}{iL|n|}\right).$$

Тогда первые слагаемые этой суммы дают ряд, сумма которого известна:

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{in(x-t)}}{|n|} = -2 \ln \left[2 \sin \frac{|x-t|}{2} \right] = -2 \ln \left| \sin \frac{x-t}{2} \right| - 2 \ln 2.$$

Оставшаяся часть ядра уже не имеет особенности.

7.3. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

Метод решения задачи дифракции, использующий эквивалентные ей интегральные уравнения из п. 7.2, не слишком хорош: 1) расчетный алгоритм достаточно сложный; 2) в результате может быть найдена вспомогательная функция, а не искомые коэффициенты.

Получим из ПСФУ систему уравнений для определения непосредственно коэффициентов a_n .

Очевидно, что если в некотором интервале равны две функции, то равны и их коэффициенты Фурье с одинаковыми номерами, построенные по ортогональной в интервале системе функций. Попробуем приравнять коэффициенты Фурье левой и правой частей парного уравнения.

Умножим обе части (7.2), (7.3) на e^{-iLmx} и проинтегрируем по x от 0 до l . Обозначим

$$I_k = \int_{\mathcal{M}} e^{iLkx} dx, \quad J_k = \int_{\mathcal{N}} e^{iLkx} dx.$$

Эти интегралы вычисляются явно; легко видеть, что $J_k = l\delta_{k0} - I_k$ (здесь δ_{kj} — символ Кронекера). Тогда получим БСЛАУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n I_{n-m} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n J_{n-m} = -I_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Эта БСЛАУ не решается численно, метод усечения приводит к расходящемуся алгоритму.

Покажем, как можно перейти от ПСФУ (7.2), (7.3) к регулярной БСЛАУ с помощью метода интегральных тождеств.

Легко проверить, что имеет место равенство (интегрально-сумматорное тождество)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iLnx} = \int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{iLnt} \right) \left(\frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLm(x-t)} \right) dt, \quad x \in (0, l). \quad (7.10)$$

Следовательно, при $x \in \mathcal{M}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iLn x} = -1,$$

а при $x \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iLn x} &= \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{iLnt} \right) \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLm(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLmx} \int_{\mathcal{M}} e^{iL(n-m)t} dt = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLmx} I_{n-m}. \end{aligned}$$

Перейдем к коэффициентам Фурье (умножим на e^{-iLkx} и проинтегрируем по $[0, l]$). Тогда получим

$$la_k = - \int_{\mathcal{M}} e^{-iLkx} dx + \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} \int_{\mathcal{N}} e^{iL(m-k)x} dx$$

и окончательно

$$la_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (7.11)$$

7.4. Условия разрешимости переопределенной граничной задачи

Уточним смысл интегрально-сумматорного тождества (7.10). Следы искомой функции $u^+(x, z)$ на прямой $z = 0$

$$u_0^+(x) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iLn x}, \quad u_1^+(x) = ie^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{iLn x}.$$

Тогда равенство (7.10) можно переписать в виде

$$u_0^+(x) = \int_0^l u_1^+(t) K_1(t, x) dt, \quad x \in (0, l), \quad (7.12)$$

где

$$K_1(t, x) = -\frac{i}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i(\alpha+Lm)(x-t)}.$$

Интегральное тождество (7.12) — необходимое и достаточное условие разрешимости переопределенной граничной задачи для уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости.

Второе интегральное тождество, обращающее первое, имеет вид

$$u_1^+(x) = \int_0^l u_0^+(t) K_0(t, x) dt, \quad x \in (0, l), \quad (7.13)$$

здесь

$$K_0(t, x) = \frac{i}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i(\alpha+Lm)(x-t)}.$$

7.5. Интегральные уравнения второго рода

Парное сумматорное функциональное уравнение (7.2), (7.3) на языке следов решения уравнения Гельмгольца имеет вид

$$u_0^+(x) = -e^{i\alpha x}, \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Тогда интегральные тождества можно модифицировать так:

$$u_0^+(x) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(t) K_1(t, x) dt, \quad x \in (0, l), \quad (7.14)$$

$$u_1^+(x) = \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt - v_0(x), \quad x \in (0, l), \quad (7.15)$$

где

$$v_0(x) = \int_{\mathcal{M}} e^{i\alpha t} K_0(t, x) dt = \frac{i}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i(\alpha+Lm)x} I_m.$$

Исключим из пары равенств (7.13), (7.14) функцию $u_1^+(t)$. Получим парное интегральное уравнение

$$u_0^+(x) = -e^{i\alpha x}, \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^+(x) = \int_0^l u_0^+(\tau) L_0(\tau, x) d\tau, \quad x \in \mathcal{N}, \quad (7.16)$$

где

$$L_0(\tau, x) = \int_{\mathcal{M}} K_0(\tau, t) K_1(t, x) dt = \\ = \frac{1}{l^2} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m_1} e^{-i(\alpha+Lm_1)\tau} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{m_2}} e^{i(\alpha+Lm_2)x} I_{m_1-m_2}.$$

Спроектируем это уравнение на систему функций e^{iLkx} (умножим на $e^{-i\alpha x} e^{-iLkx}$ и проинтегрируем от 0 до l) и получим точно БСЛАУ (7.11).

Заметим, что если записать вторую половину парного интегрального уравнения (7.16) в виде

$$u_0^+(x) = \int_{\mathcal{N}} u_0^+(\tau) L_0(\tau, x) d\tau - \int_{\mathcal{M}} e^{i\alpha\tau} L_0(\tau, x) d\tau, \quad x \in \mathcal{N},$$

то после проектирования на систему функций сначала получится БСЛАУ более сложная, чем (7.12). Для ее преобразования к более простому виду (7.12) потребуются дополнительные усилия.

7.6. Замечания и дополнения

В монографии В.П. Шестопалова подробно изложен метод задачи Римана – Гильберта (метод полуобращения) решения задач дифракции волн на периодических решетках. Этот метод основан на том, что можно построить явное решение парного уравнения

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iny} = -1, \quad y \in \mathcal{M}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n |n| e^{iny} = 0, \quad y \in \mathcal{N},$$

и с его помощью привести к регулярному уравнению (7.2), (7.3).

В книге С.М. Белоцерковского и И.К. Лифанова численный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке построен на основе метода дискретных особенностей.

Литература

1. Плещинский Н.Б. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций / Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков // Препринт 2000–1. Казань: Казан. матем. об-во, 2000. — 50 с.

2. Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах / Н.Б. Плещинский // Препринт ПМФ-03-02. Казань: Казан. матем. об-во, 2003. — 30 с.

3. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / В.П. Шестопапов. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. — 400 с.

4. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

8. Перегородка в плоском волноводе

Если в плоском волноводе (см. п. 3) имеется неоднородность, не выходящая за границы некоторой ограниченной прямоугольной области, то исследование процесса дифракции электромагнитной волны на неоднородности можно свести к решению граничной задачи для уравнения Гельмгольца в этой области. Полубесконечные участки волновода можно отбросить, при этом на их торцах появятся граничные условия, представляющие собой необходимые и достаточные условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач. Аналогичные условия разрешимости переопределенных задач можно получить и в полубесконечных областях с криволинейным срезом.

8.1. Переопределенные граничные задачи для уравнения Гельмгольца в полуполосе

Рассмотрим переопределенную граничную задачу для уравнения Гельмгольца в полуполосе $a < x < b$, $z > 0$ (рис. 8.1).

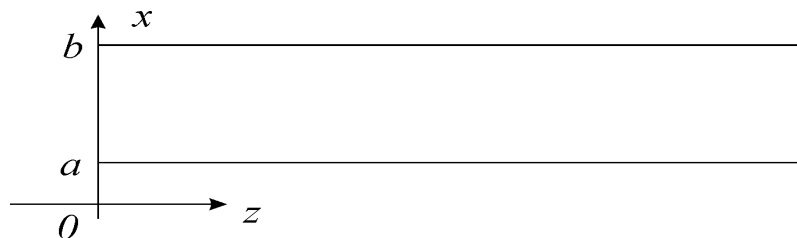


Рис. 8.1. Полубесконечный плоский волновод

Пусть на боковых сторонах полосы заданы однородные граничные условия, соответствующие условиям на металлических стенках для волн \parallel -поляризации или \perp -поляризации:

$$u(a + 0, z) = 0, \quad u(b - 0, z) = 0 \quad (8.1)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a + 0, z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b - 0, z) = 0. \quad (8.2)$$

На срезе волновода $z = 0$ зададим условия Коши

$$u(x, 0 + 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) = u_1(x), \quad a < x < b. \quad (8.3)$$

Такие граничные задачи в полуполосе с такими смешанными граничными условиями будем называть задачей Коши – Дирихле и задачей Коши – Неймана соответственно. Будем искать решения этих задач в классе решений, уходящих на бесконечность (вправо).

Рассмотрим первый случай, соответствующий параллельной поляризации электромагнитного поля. Обозначим

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{\pi n(x - a)}{h}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.4)$$

здесь $h = b - a$. Пусть также

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем эти значения вычисляются (как и в п. **3.1**) так, что или $\operatorname{Re} \gamma_n \geq 0$, или $\operatorname{Im} \gamma_n \leq 0$.

Лемма 8.1. *Решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца с условиями (8.1), (8.3) существует и единственно тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям*

$$u_{1n} + i\gamma_n u_{0n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

Доказательство. Продолжим искомое решение уравнения Гельмгольца с полуполосы на полуплоскость $z > 0$ следующим образом: с полуполосы $a < x < b = a + h$ на полуполосу $a - h, a$ нечетно и затем периодически с периодом $2h$ на всю полуплоскость. При таком доопределении у функции $u(x, z)$ и ее производной по x не будет разрывов при $z = a + jh, j = 0, \pm 1, \dots$. Поэтому при переходе к распределениям будут равны обобщенные и классические производные по x до второго порядка включительно.

Периодические с периодом $2h$ по x распределения $u(x, z)$ можно разложить в ряды Фурье, причем в рассматриваемом случае (четное распределение)

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{h}(x - a) u_n(z),$$

где функции $u_n(z)$ должны быть решениями обыкновенных дифференциальных уравнений $u_n'' + [k^2 - (\pi n/h)^2] u_n = 0$. Из пар функций $e^{-i\gamma_n z}$ и $e^{i\gamma_n z}$, образующих фундаментальную систему решений, только первые удовлетворяют условию на бесконечности. Поэтому

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varphi_n(x) e^{-i\gamma_n z}. \quad (8.6)$$

Отсюда следует, что

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varphi_n(x), \quad u_1(x) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \gamma_n \varphi_n(x).$$

Тогда

$$u_{0n} = \int_0^h u_0(x) \varphi_n(x) dx = u_n, \quad u_{1n} = \int_0^h u_1(x) \varphi_n(x) dx = -i\gamma_n u_n. \quad \bullet$$

Пусть

$$K_0(t, x) = -i \sum_{m=1}^{+\infty} \gamma_m \varphi_m(t) \varphi_m(x), \quad K_1(t, x) = i \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \varphi_m(t) \varphi_m(x). \quad (8.7)$$

Лемма 8.2. *Функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ тогда и только тогда являются следами на границе $z = 0$ решения уравнения Гельмгольца в полуполосе,*

удовлетворяющего условиям (8.1) и условиям на бесконечности, когда

$$u_1(x) = \int_0^h u_0(t) K_0(t, x) dt, \quad x \in (0, h), \quad (8.8)$$

$$u_0(x) = \int_0^h u_1(t) K_1(t, x) dt, \quad x \in (0, h). \quad (8.9)$$

Доказательство. Равенства (8.8) и (8.9) следуют непосредственно из (8.5). Кроме того, они могут быть получены следующим образом. По построению интегральные операторы с ядрами $K_0(t, x)$ и $K_1(t, x)$ имеют собственные значения γ_n и $1/\gamma_n$, которым соответствуют собственные функции $\varphi_n(x)$. Следовательно, выполняются равенства

$$\int_0^h \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varphi_n(t) \right) K_0(t, x) dt = -i \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \gamma_n \varphi_n(x), \quad x \in (0, h), \quad (8.10)$$

$$-i \int_0^h \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \gamma_n \varphi_n(t) \right) K_1(t, x) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varphi_n(x), \quad x \in (0, h). \quad \bullet \quad (8.11)$$

Будем называть пару равенств (8.8) и (8.9) *интегральными тождествами*, а пару (8.10) и (8.11) — *интегрально-сумматорными тождествами*.

Для левой полуполосы $\{z < 0, \quad 0 < x < h\}$ легко получить аналогичные утверждения. Для этого достаточно изменить знак у чисел γ_n .

8.2. Дифракция на вертикальной перегородке

Пусть в плоскости $z = 0$, разделяющей плоский волновод на две части, размещена бесконечно тонкая идеально проводящая пластина (см. рис. 8.2).

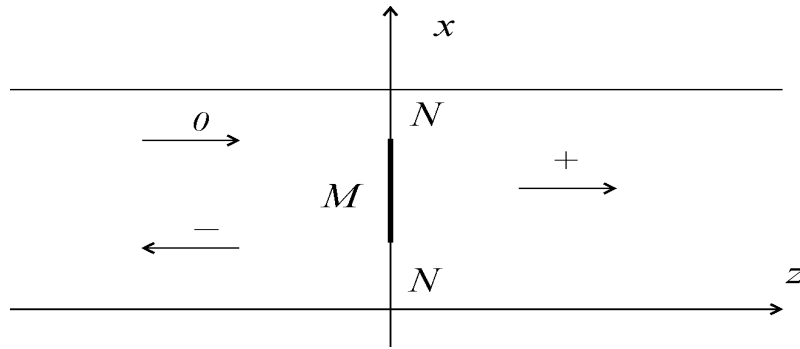


Рис. 8.2. Вертикальная перегородка в плоском волноводе

На перегородку набегают слева собственная волна волновода с потенциальной функцией $u^0(x, z)$. Нужно найти электромагнитные волны, возникающие при ее дифракции.

Будем считать, что $a = 0$, $b = h$. Обозначим \mathcal{M} часть отрезка $[0, h]$, соответствующую перегородке, и \mathcal{N} — оставшуюся его часть. Будем искать решение $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца при $z > 0$, $0 < x < h$ и при $z < 0$, $0 < x < h$ в классе уходящих на бесконечность решений, удовлетворяющее условиям сопряжения и граничным условиям

$$u(x, 0-0) + u_0^0(x) = 0, \quad u(x, 0+0) = 0, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (8.12)$$

$$u(x, 0-0) + u_0^0(x) = u(x, 0+0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) + u_1^0(x) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (8.13)$$

Рассмотрим два подхода к решению задачи дифракции на вертикальной перегородке в плоском волноводе. Первый способ позволяет перейти от граничной задачи к интегральному уравнению с помощью формулы, дающей решение вспомогательной задачи о скачке.

Задача о скачке состоит в следующем: нужно найти, как и в задаче дифракции, решение уравнения Гельмгольца в полосе при $z < 0$ и при $z > 0$ по условиям

$$u(x, 0+0) - u(x, 0-0) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) = b(x), \quad (8.14)$$

где $a(x)$, $b(x)$ — заданные функции.

Теорема 8.1. *Решение задачи о скачке имеет вид*

$$u^\pm(x, z) = \int_0^h a(t) \left(\mp \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma_n^\mp}{\gamma_n^- + \gamma_n^+} \varphi_n(t) \varphi_n(x) e^{\mp i \gamma_n^\pm z} \right) dt + \\ + \int_0^h b(t) \left(i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n^- + \gamma_n^+} \varphi_n(t) \varphi_n(x) e^{\mp i \gamma_n^\pm z} \right) dt. \quad (8.15)$$

Доказательство. Будем искать решение задачи о скачке в виде пары решений переопределенных задач для левой и правой половин полосы, индексы $-$ и $+$ показывают, к какой половине относятся рассматриваемые величины. Перейдем к коэффициентам Фурье следов искомым функций на отрезке $0 < x < h$ относительно системы базисных функций вида (8.4). Получим систему уравнений

$$u_{1n}^+ + i \gamma_n^+ u_{0n}^+ = 0, \quad u_{1n}^- - i \gamma_n^- u_{0n}^- = 0, \quad u_{0n}^+ - u_{0n}^- = a_n, \quad u_{1n}^+ - u_{1n}^- = b_n,$$

здесь первые два уравнения — условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач, а следующие два — условия сопряжения (8.14). Эта система уравнений имеет единственное решение, которое затем подставляется в формулу (8.6) для правой половины составной области и в аналогичную формулу для левой половины. •

Если на границу раздела сред $z = 0$ в плоском волноводе (без перегородки) набегают слева собственная волна с потенциальной функцией $u^0(x, z)$, то должны выполняться условия сопряжения

$$u(x, 0 - 0) + u^0(x, 0 - 0) = u(x, 0 + 0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) + \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0 - 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0).$$

Подставим $a(x) = u^0(x, 0 - 0)$ и $b(x) = \partial u^0 / \partial z(x, 0 - 0)$ в формулу (8.15) и получим потенциальную функцию искомого поля. Легко видеть, что если падающая волна представляет собой только одну гармонику, то отраженная и преломленная волны — собственные волны с тем же номером. Точнее, если

$$u_0(x, z) = C_l \varphi_l(x) e^{-i \gamma_l^- z}, \quad (8.16)$$

то

$$u_-(x, z) = A_l \varphi_l(x) e^{i\gamma_l^- z}, \quad u_+(x, z) = B_l \varphi_l(x) e^{-i\gamma_l^+ z},$$

где

$$A_l = \frac{\gamma_l^- - \gamma_l^+}{\gamma_l^- + \gamma_l^+} C_l, \quad B_l = \frac{2\gamma_l^-}{\gamma_l^- + \gamma_l^+} C_l.$$

Теорема 8.2. При $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon$ задача дифракции электромагнитной волны на вертикальной перегородке в плоском волноводе эквивалентна интегральному уравнению

$$\int_{\mathcal{M}} b(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x) dt = 2i u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}. \quad (8.17)$$

Доказательство. Предположим, что набегающая на перегородку волна проходит за нее в правую половину волновода. Тогда потенциальные функции полного поля слева и справа от перегородки $u^-(x, z) + u^0(x, z)$ и $u^+(x, z) + u^0(x, z)$ соответственно. Из условий (8.12) и (8.13) следует, что $a(x) = 0$ на $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ и $b(x) = 0$ на \mathcal{N} . Для определения функции $b(x)$ на \mathcal{M} можно использовать любое из условий (8.12): из формулы (8.15) следует, что искомая функция должна удовлетворять уравнению (8.17)

•

Теперь покажем, как использовать интегральные тождества вида (8.8) и (8.9) при сведении задачи дифракции к интегральному уравнению или к БСЛАУ.

Пусть потенциальная функция волны от внешнего источника задана формулой (8.16). Будем искать потенциальные функции поля слева и справа от перегородки в виде

$$u^-(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \varphi_n(x) e^{i\gamma_n z}, \quad u^+(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \varphi_n(x) e^{-i\gamma_n z}.$$

Теорема 8.3. При $\varepsilon^{\pm} = \varepsilon$ задача дифракции электромагнитной волны на вертикальной перегородке в плоском волноводе эквивалентна бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$A_k - \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = -C_l I_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.18)$$

и интегральному уравнению

$$u_1^-(x) - \int_{\mathcal{M}} u_1^-(t) L(t, x) dt = -iC_l \psi_l(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad (8.19)$$

где

$$I_{nm} = \int_{\mathcal{M}} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt, \quad J_{mk} = \int_{\mathcal{N}} \varphi_m(t) \varphi_k(t) dt, \quad k, m, n = 1, 2, \dots, \quad (8.20)$$

$$L(t, x) = \int_{\mathcal{N}} K_1(t, t_1) K_0(t_1, x) dt_1,$$

$$\psi_l(x) = \int_{\mathcal{M}} \varphi_l(t) K_0(t, x) dt.$$

Доказательство. Из условий сопряжения следует, что и на \mathcal{M} , и на \mathcal{N}

$$C_l \varphi_l(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \varphi_n(x).$$

Следовательно, $B_n = A_n$ при $n \neq l$ и $B_l = A_l + C_l$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \varphi_n(x) = -C_l \varphi_l(x) \quad \text{на } \mathcal{M} \quad (8.21)$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n A_n \varphi_n(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}. \quad (8.22)$$

Парное сумматорное уравнение (8.21), (8.22) имеет такую же структуру, что и парное уравнение (7.2), (7.3).

Значения функции $u_0^-(x)$ на \mathcal{M} известны. Из тождества (8.11) следует, что на \mathcal{N}

$$u_0^-(x) = -i \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_n \varphi_n(t) \right) K_1(t, x) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \varphi_m(x) I_{nm}.$$

БСЛАУ (8.18) получим, если вычислим коэффициенты Фурье функции $u_0^-(x)$ по системе функций (8.4):

$$A_k = \int_{\mathcal{M}} u_0^-(x) \varphi_k(x) dx + \int_{\mathcal{N}} u_0^-(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Интегральное уравнение (8.19) выводится следующим образом. Из тождества (8.8) следует, что на \mathcal{M}

$$u_1^-(x) = -iC_l \int_{\mathcal{M}} \varphi_l(t) K_0(t, x) dt + i \int_{\mathcal{N}} u_0^-(t_1) K_0(t_1, x) dt. \quad (8.23)$$

С другой стороны, из тождества (8.9) получается, что

$$u_0^-(t_1) = -i \int_{\mathcal{M}} u_1^-(t) K_1(t, t_1) dt. \quad (8.24)$$

Если подставим (8.24) в (8.23), то получим уравнение (8.19).

Отметим в заключение, что легко получить явные формулы для вычисления значений интегралов (8.20). Тогда определяются и значения функций $L(t, x)$ и $\psi_l(x)$ •

8.3. Замечания и дополнения

Метод интегральных (интегрально-сумматорных) тождеств можно распространить на случай криволинейной границы раздела сред в плоском волноводе. Ядра интегралов в тождествах в этом случае представляют собой двойные бесконечные суммы. Хотя расчетный алгоритм становится более сложным, приближенное решение задачи дифракции волны на криволинейной перегородке может быть получено с помощью БСЛАУ или интегральных уравнений, эквивалентных исходной задаче.

Литература

1. Плещинский Н.Б. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций / Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков // Препринт 2000–1. Казань: Казан. матем. об-во, 2000. — 50 с.
2. Плещинский И.Н. О задачах дифракции волн на экранах, расположенных на наклонной границе раздела сред в волноводах с металлическими стенками / И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2002. — С. 175–187.

9. Разветвление плоского волновода

Пусть правая половина плоского волновода разделена на две части бесконечно тонкой идеально проводящей полуплоскостью, параллельной стенкам волновода. Такую волноводную структуру называют плоским разветвленным волноводом. Выберем направления осей декартовой системы координат так, как показано на рис. 9.1.

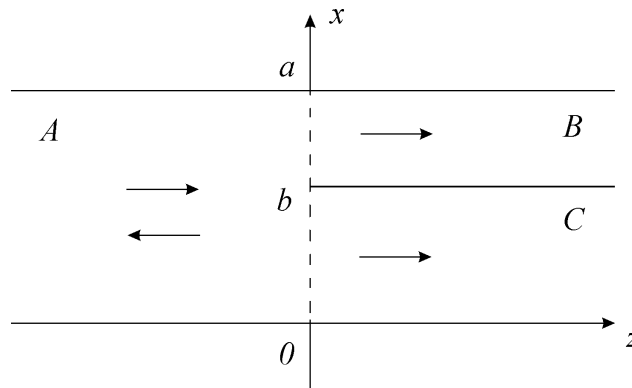


Рис. 9.1. Разветвление плоского волновода

Пространство внутри волновода естественным образом разделяется на три подобласти, каждая из которых представляет собой полубесконечный плоский волновод: $A = \{0 < x < a, z < 0\}$, $B = \{0 < x < b, z > 0\}$ и $C = \{b < x < a, z > 0\}$.

Будем рассматривать гармоническое ТЕ-поляризованное двумерное электромагнитное поле, компоненты которого не зависят от координаты y . Зависимость поля от времени выберем в виде $e^{i\omega t}$.

Пусть из области A на стык полубесконечных волноводов набегают собственная волна с номером l . Нужно найти электромагнитное поле, возникающее при ее дифракции.

9.1. Парные сумматорные уравнения

Напомним (см. п. 3.1), что потенциальные функции собственных ТЕ-волн плоского волновода толщиной h имеют вид

$$u_n(x, z) = \sin \frac{\pi n x}{h} \cdot e^{\pm i \gamma_n z},$$

где знак в показателе экспоненты выбирается в зависимости от направления движения волны (в нашем случае: если вправо, то $-$; если влево, то $+$). Значения продольных постоянных распространения γ_n (комплексных чисел) выбираются так, чтобы при вещественном k получалось или вещественное неотрицательное число, или чисто мнимое с неотрицательной мнимой частью. Потенциальную функцию приходящей слева волны (единичной амплитуды) зададим в виде

$$u^0(x, z) = \sin \frac{l\pi x}{a} e^{-i\gamma_{al}z}$$

и будем искать потенциальные функции рассеянного поля в частичных областях в виде

$$u^a(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i\gamma_{an}z},$$

$$u^b(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{b} e^{-i\gamma_{bn}z},$$

$$u^c(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi(x-b)}{c} e^{-i\gamma_{cn}z},$$

где значения γ_{an} , γ_{bn} или γ_{cn} вычисляются по формуле

$$\gamma_{mn} = \sqrt{k_m^2 - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}, \quad m, h = a, b, c.$$

Для простоты рассуждений предположим, что во всех частичных областях свойства среды одинаковы.

Запишем условия сопряжения полей при $z = 0$ (должны быть непрерывны значения потенциальных функций и их производных по z). В интервале $0 < x < b$

$$\sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad (9.1)$$

$$-i\gamma_{al} \sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_{an} \sin \frac{n\pi x}{a} = - \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \gamma_{bn} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (9.2)$$

и в интервале $b < x < a$

$$\sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi(x-b)}{c}, \quad (9.3)$$

$$-\gamma_{al} \sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_{an} \sin \frac{n\pi x}{a} = -\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \gamma_{cn} \sin \frac{n\pi(x-b)}{c}. \quad (9.4)$$

Исключим из парных сумматорных функциональных уравнений (9.1) – (9.4) неизвестные B_n и C_n . Для этого уравнения (9.4), (9.2) умножим на $\sin \frac{m\pi x}{b}$, $m = 1, 2, \dots$, и проинтегрируем по x от 0 до b , а уравнения (9.3), (9.4) умножим на $\sin \frac{m\pi(x-b)}{c}$, $m = 1, 2, \dots$, и проинтегрируем по x от b до a . Получим для $m = 1, 2, \dots$

$$\frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al}^2 - \gamma_{bm}^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{bm}^2} = \frac{(-1)^{m+1} b^2}{2m\pi} B_m, \quad (9.9)$$

$$-\gamma_{al} \frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al}^2 - \gamma_{bm}^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_{an} \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{bm}^2} = -\gamma_{bm} \frac{(-1)^{m+1} b^2}{2m\pi} B_m, \quad (9.10)$$

$$\frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al}^2 - \gamma_{cm}^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{cm}^2} = \frac{c^2}{2m\pi} C_m, \quad (9.11)$$

$$-\gamma_{al} \frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al}^2 - \gamma_{cm}^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \gamma_{an} \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{cm}^2} = -\gamma_{cm} \frac{c^2}{2m\pi} C_m. \quad (9.12)$$

Эти уравнения получены с учетом того, что при $n \neq m$ ($n, m = 1, 2, \dots$)

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{m\pi x}{b} dx = 0, \quad \int_b^a \sin \frac{n\pi(x-b)}{c} \sin \frac{m\pi(x-b)}{c} dx = 0$$

и при $n = m$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{b} dx = \frac{b}{2}, \quad \int_b^a \sin^2 \frac{m\pi(x-b)}{c} dx = \frac{c}{2}$$

(ортогональность системы функций), а также

$$I_{n,m}^b = \int_0^b \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{b} dx = \frac{(-1)^{m+1} \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{bm}^2},$$

$$I_{n,m}^c = \int_b^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi(x-b)}{c} dx = \frac{\frac{m\pi}{c} \sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an}^2 - \gamma_{cm}^2}.$$

Из (9.5) и (9.6) следует, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an} - \gamma_{bm}} A_n = \frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al} + \gamma_{bm}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9.9)$$

а из (9.7) и (9.8) получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi b}{a}}{\gamma_{an} - \gamma_{cm}} A_n = \frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\gamma_{al} + \gamma_{cm}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

Таким образом, установлена

Теорема 9.1. *Задача дифракции электромагнитной волны на разветвлении в плоском волноводе эквивалентна БСЛАУ (9.9), (9.10).*

В книге Р. Миттры и С. Ли даны два способа построения в явном виде решения БСЛАУ (9.9), (9.10): метод прямого обращения и метод вычетов.

Метод прямого обращения состоит в следующем. Рассматривается усеченная СЛАУ, состоящая из P уравнений группы (9.9) и Q уравнений группы (9.10), в которых оставлено только $N = P + Q$ неизвестных. Решение такой системы уравнений находится по правилу Крамера, поскольку удастся вычислить явно все нужные для этого определители. В итоге решение усеченной БСЛАУ имеет вид

$$\bar{A}_m = -\frac{\sin \frac{l\pi b}{a}}{\sin \frac{m\pi b}{a}} \prod_{p=1}^P \frac{\gamma_{bp} - \gamma_{am}}{\gamma_{bp} + \gamma_{al}} \prod_{q=1}^Q \frac{\gamma_{cq} - \gamma_{am}}{\gamma_{cq} + \gamma_{al}} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\gamma_{an} + \gamma_{al}}{\gamma_{an} - \gamma_{am}}.$$

Но здесь нельзя непосредственно перейти к пределу, когда $P \rightarrow +\infty$, $Q \rightarrow +\infty$. Чтобы получить сходящиеся бесконечные произведения, нужно задать "из физических соображений" условие

$$\lim_{\substack{P \rightarrow +\infty \\ Q \rightarrow +\infty}} \frac{P}{Q} = \frac{b}{c}.$$

Это явление называют в литературе относительной сходимостью. Зависимость между P и Q может быть выведена из дополнительного требования при постановке задачи — условия на остром ребре.

9.2. Метод интегрально-сумматорных тождеств

Рассмотрим другой способ перехода от уравнений (9.1) – (9.4) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Пусть

$$K_b(t, x) = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} \sin \frac{m\pi t}{b} \sin \frac{m\pi x}{b},$$

$$K_c(t, x) = \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} \sin \frac{m\pi(t-b)}{c} \sin \frac{m\pi(x-b)}{c}.$$

Имеют место интегрально-сумматорные тождества

$$\int_0^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \gamma_{bn} \sin \frac{n\pi t}{b} \right) K_b(t, x) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad (9.11)$$

$$\int_b^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \gamma_{cn} \sin \frac{n\pi(t-b)}{c} \right) K_c(t, x) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi(x-b)}{c}, \quad (9.12)$$

с помощью которых можно преобразовать уравнения (9.2) и (9.4) так, что их правые части станут такими же, как в уравнениях (9.1) и (9.3).

Чтобы упростить формулы, переобозначим искомые коэффициенты. Пусть

$$D_n = A_n \text{ при } n \neq l; \quad D_l = A_l - 1.$$

Тогда из уравнений (9.1) – (9.4) следует: в интервале $0 < t < b$

$$2 \sin \frac{l\pi t}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi t}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi t}{b}, \quad (9.13)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sin \frac{n\pi t}{a} = - \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \gamma_{bn} \sin \frac{n\pi t}{b} \quad (9.14)$$

и в интервале $b < t < a$

$$2 \sin \frac{l\pi t}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi t}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi(t-b)}{c}, \quad (9.15)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sin \frac{n\pi t}{a} = - \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \gamma_{cn} \sin \frac{n\pi(t-b)}{c}. \quad (9.16)$$

Умножим обе части уравнения (9.14) на $K_b(t, x)$ и проинтегрируем по t от 0 до b . Получим

$$\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} I_{n,m}^b \sin \frac{n\pi x}{b} = - \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad (9.17)$$

где значения $I_{n,m}^b$ были определены выше.

Умножим обе части уравнения (9.16) на $K_c(t, x)$ и проинтегрируем по t от b до a . Получим

$$\frac{2}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} I_{n,m}^c \sin \frac{n\pi(x-b)}{c} = - \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi(x-b)}{c}, \quad (9.18)$$

где значения $I_{n,m}^c$ также были определены выше.

Сложим попарно формулы (9.13) при $t = x$ и (9.17), (9.15) при $t = x$ и (9.18). Тогда при $0 < x < b$

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{a} + \\ & + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} I_{n,m}^b \sin \frac{n\pi x}{b} = 0 \end{aligned} \quad (9.19)$$

и при $b < x < a$

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{l\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{a} + \\ & + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \gamma_{an} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} I_{n,m}^c \sin \frac{n\pi(x-b)}{c} = 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Приравняем нулю коэффициенты Фурье по системе функций $\sin \frac{k\pi x}{a}$ на $0 < x < a$ левой части парного уравнения (9.19), (9.20) и получим следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Задача дифракции электромагнитной волны на разветвлении в плоском волноводе эквивалентна БСЛАУ*

$$\frac{a}{2} D_k + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n S_{k,n} = -a \delta_{k,l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.21)$$

где

$$S_{k,n} = \gamma_{an} \left(\frac{2}{b} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{bm}} I_{k,m}^b I_{n,m}^b + \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{cm}} I_{k,m}^c I_{n,m}^c \right)$$

(здесь $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера).

После того, как значения D_n и, следовательно, A_n будут найдены, легко вычислить величины B_n и C_n по формулам (9.5) и (9.7).

9.3. Замечания и дополнения

Приближенное решение БСЛАУ (9.21) может быть найдено методом усечения. При доказательстве сходимости этого метода предполагается (достаточное условие), что должно выполняться некоторое соотношение между параметрами усечения (верхними границами изменения параметров в конечных суммах). Но вычислительный эксперимент показал, что на практике это условие не так существенно.

При тестировании расчетного алгоритма можно проверить, выполняется ли закон сохранения энергии (это условие — необходимое, но не достаточное):

$$P^0 + P^a = P^b + P^c,$$

где в случае ТЕ-поляризованного поля

$$P^0 = \frac{a}{4\omega\mu_0\mu} \gamma_{a1}, \quad P^a = -\frac{a}{4\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{an} |A_n|^2,$$

$$P^b = \frac{b}{4\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty*} \gamma_{bn} |B_n|^2, \quad P^c = \frac{c}{4\omega\mu_0\mu} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty*} \gamma_{cn} |C_n|^2,$$

здесь в суммах участвует фактически только конечное число слагаемых — те, у которых продольные постоянные распространения γ_{mn} вещественные.

Случай ТМ-поляризованных волн рассматривается аналогично.

Укажем на некоторые отличия полученных нами формул от формул, приведенных в книге Р. Миттры и С. Ли: выбрана другая зависимость компонент поля от времени (знак у ω) и по-другому вычисляются значения продольных постоянных распространения γ_{mn} . Условия излучения в частичных областях также учитываются в искомым разложениях потенциальных функций, а условие на остром ребре в нашем случае задавать не нужно.

Различные подходы к решению задачи о разветвлении плоского волновода предложены в монографии В.П. Шестопалова, А.А. Кириленко, С.А. Масалова. В работе О.А. Раскиной и Д.Н. Тумакова рассмотрен более общий случай, когда правая часть волновода разделена на N частей.

Литература

1. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли — М.: Мир, 1974. — 328 с.
2. Шестопалов В.П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В.П. Шестопалов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов. — Киев: Наукова думка, 1984. — 296 с.
3. Раскина О.А. Рассеяние электромагнитного поля на N -разветвлении плоского волновода / О.А. Раскина, Д.Н. Тумаков // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Казан. матем. об-во. — Казань: Унипресс, 1999. — С. 240–244.

10. Планарный диэлектрический волновод

Планарный диэлектрический волновод образуют три слоя диэлектрика, которые заполняют все пространство: подложка S ($z < 0$), волноводный слой F ($0 < z < h$) и покровная среда A ($z > h$) с диэлектрическими проницаемостями ε_s , ε_f и ε_a соответственно (см. рис. 10.1). Будем предполагать, что эти числа вещественные и $0 < \varepsilon_a < \varepsilon_s < \varepsilon_f$. ($\varepsilon = n^2$). Собственные электромагнитные волны планарного волновода принадлежат к оптическому диапазону. Поэтому часто вместо диэлектрических проницаемостей ε_m рассматриваются показатели преломления сред n_m , при этом $\varepsilon_m = n_m^2$, $m = a, f, s$.

Существенное отличие планарного волновода от всех рассмотренных ранее волноводных структур состоит в том, что продольные постоянные распространения его собственных волн образуют множество, состоящее как из отдельных точек (дискретный спектр), так и из некоторых интервалов (непрерывный спектр).

Пусть, как и раньше, зависимость электромагнитного поля от времени имеет вид ($e^{i\omega t}$), свободные токи и заряды отсутствуют, а все среды, образующие планарный волновод, являются однородными и изотропны-

ми. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда поле не зависит от координаты y . Как и в предыдущих разделах ненулевые компоненты поля выражаются через потенциальную функцию $u(x, z)$ — решение уравнения Гельмгольца.

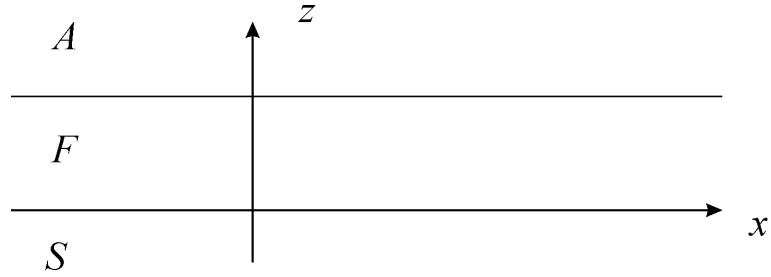


Рис. 10.1. Планарный диэлектрический волновод

Найдем собственные волны планарного диэлектрического волновода — ненулевые решения задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца с кусочно постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z) u(x, z) = 0, \quad (10.1)$$

где $k(z) = k_a, k_f$ или k_s в соответствующих интервалах изменения координаты z . Условия сопряжения на границах раздела сред в случае волн ТЕ-поляризации

$$u(x, 0 - 0) = u(x, 0 + 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0), \quad (10.2)$$

$$u(x, h - 0) = u(x, h + 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, h - 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, h + 0). \quad (10.3)$$

Условие на бесконечности пока сформулируем так: искомые потенциальные функции должны быть ограничены при $|z| \rightarrow \infty$.

Частные решения задачи сопряжения будем искать методом разделения переменных, а точнее в виде

$$u(x, z) = e^{-i\alpha x} f(\alpha; z). \quad (10.4)$$

Параметр α (продольная постоянная распространения) в общем случае принимает комплексные значения. Этот параметр представляет собой

постоянную разделения: если искать $u(x, z)$ в виде $X(x)Z(z)$, то отдельные множители должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha^2 = 0, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2(z) - \alpha^2 = 0. \quad (10.5)$$

Ясно, что достаточно рассматривать только такие комплексные числа α , что значения α^2 заполняют всю комплексную плоскость. Более того, замена α на $-\alpha$ не влияет на уравнения (10.5). Но, как следует из формулы (10.4), эта замена изменяет на противоположное направление движения волн, построенных по потенциальным функциям $u(x, z)$.

Таким образом, функция $f(\alpha; z)$ должна удовлетворять уравнению

$$f'' + [k^2(z) - \alpha^2]f(\alpha; z) = 0, \quad z \neq 0, z \neq h. \quad (10.6)$$

В фундаментальной системе решений уравнения (10.6) содержится две функции: $e^{-i\gamma(\alpha)z}$ и $e^{i\gamma(\alpha)z}$, где $\gamma(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$. В некоторых случаях удобнее использовать другую пару функций: $\cos \gamma(\alpha)z$ и $\sin \gamma(\alpha)z$. Значения $\gamma(\alpha)$ условимся вычислять следующим образом: при вещественных k $\gamma(\alpha)$ — однозначная непрерывная ветвь многозначной функции, выделенная в плоскости с разрезом по отрезку вещественной оси $[-k, k]$, которая принимает вещественные положительные значения в точках положительной мнимой полуоси комплексной плоскости. На рис. 10.2 показано, как эта функция переводит комплексную плоскость α в комплексную плоскость $\gamma(\alpha)$: соответствующие друг другу участки вещественной и мнимой осей отмечены одинаковыми цифрами.

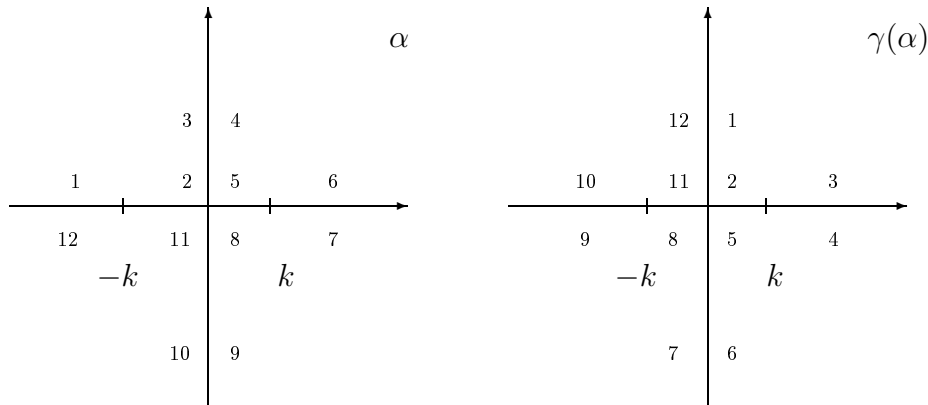


Рис. 10.2. Соответствие комплексных плоскостей

В ограниченной по координате z области F в общем решении уравнения (10.6) остаются обе экспоненты, а в неограниченных областях A и S — или также обе, или только одна, а именно та, которая остается ограниченной (и даже стремится к нулю) при $z \rightarrow \pm\infty$.

10.1. Моды непрерывного спектра

Пусть $\alpha \in (0, k_a)$ или α принадлежит положительной полуоси мнимой оси. В этом случае все значения $\gamma_m(\alpha)$ вещественные и положительные. Поэтому

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : A(\alpha) \cos \gamma_a(\alpha)(z - h) + B(\alpha) \sin \gamma_a(\alpha)(z - h), \\ 0 < z < h & : C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)z + D(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : E(\alpha) \cos \gamma_s(\alpha)z + F(\alpha) \sin \gamma_s(\alpha)z, \end{cases}$$

где $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, $E(\alpha)$, $F(\alpha)$ — некоторые функции от α (не зависящие от z). Эти функции нужно подобрать так, чтобы были выполнены условия сопряжения полей на границах раздела сред $z = 0$ и $z = h$:

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= E(\alpha), \quad \gamma_f(\alpha) D(\alpha) = \gamma_s(\alpha) F(\alpha), \\ A(\alpha) &= C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h + D(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h, \end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\gamma_a(\alpha) B(\alpha) = -\gamma_f(\alpha) C(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h + \gamma_f(\alpha) D(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h.$$

В системе из четырех линейных уравнений (10.9) содержится шесть искомого коэффициентов, два из них остаются произвольными. Можно выделить два независимых частных решения, которые называют четным и нечетным: при $C(\alpha) = 1$, $D(\alpha) = 0$

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : \cos \gamma_f(\alpha)h \cdot \cos \gamma_a(\alpha)(z - h) - \\ & \quad - \frac{\gamma_f(\alpha)}{\gamma_a(\alpha)} \sin \gamma_f(\alpha)h \cdot \sin \gamma_a(\alpha)(z - h), \\ 0 < z < h & : \cos \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : \cos \gamma_s(\alpha)z, \end{cases}$$

и при $C(\alpha) = 0$, $D(\alpha) = 1$

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : \sin \gamma_f(\alpha)h \cdot \cos \gamma_a(\alpha)(z-h) + \\ & + \frac{\gamma_f(\alpha)}{\gamma_a(\alpha)} \cos \gamma_f(\alpha)h \cdot \sin \gamma_a(\alpha)(z-h), \\ 0 < z < h & : \sin \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : \sin \gamma_s(\alpha)z. \end{cases}$$

Если же $\alpha \in (k_a, k_s)$, то значения $\gamma_a(\alpha)$ становятся чисто мнимыми, причем $\text{Im } \gamma_a(\alpha) < 0$. Обозначим $\delta_a(\alpha) = i\gamma_a(\alpha)$, эта величина вещественная и положительная. Следовательно,

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : A(\alpha) e^{-\delta_a(\alpha)(z-h)}, \\ 0 < z < h & : C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)z + B(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : E(\alpha) \cos \gamma_s(\alpha)z + F(\alpha) \sin \gamma_s(\alpha)z, \end{cases}$$

и условия сопряжения на границах раздела сред имеют вид

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= E(\alpha), \quad \gamma_f(\alpha) D(\alpha) = \gamma_s(\alpha) F(\alpha), \\ A(\alpha) &= C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h + D(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h, \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$-\delta_a(\alpha) A(\alpha) = -\gamma_f(\alpha) C(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h + \gamma_f(\alpha) D(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h.$$

Здесь четыре уравнения и три неизвестных коэффициента. Поэтому один коэффициент остается произвольным, а у задачи сопряжения имеется ненулевое решение

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : e^{-\delta_a(\alpha)(z-h)}, \\ 0 < z < h & : p(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)z + q(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : p(\alpha) \cos \gamma_s(\alpha)z + q(\alpha) \sin \gamma_s(\alpha)z, \end{cases}$$

где

$$p(\alpha) = \cos \gamma_f(\alpha)h + \frac{\delta_a(\alpha)}{\gamma_f(\alpha)} \sin \gamma_f(\alpha)h, \quad q(\alpha) = \sin \gamma_f(\alpha)h - \frac{\delta_a(\alpha)}{\gamma_f(\alpha)} \cos \gamma_f(\alpha)h.$$

Найденные частные решения задачи сопряжения образуют непрерывный спектр.

10.2. Моды дискретного спектра

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha \in (k_s, k_f)$, $\alpha \in (k_f, +\infty)$ или комплексные значения α принадлежат первому квадранту комплексной плоскости (без полюсов). В этом случае

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h & : A(\alpha) e^{-\delta_a(\alpha)(z-h)}, \\ 0 < z < h & : C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)z + B(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)z, \\ z < 0 & : F(\alpha) e^{\delta_s(\alpha)z}, \end{cases}$$

где $\delta_a(\alpha) = i\gamma_a(\alpha)$, $\delta_s(\alpha) = i\gamma_s(\alpha)$ — в общем случае комплексные числа, но с положительными вещественными частями. Условия сопряжения при $z = 0$ и $z = h$ дают систему из четырех уравнений для четырех неизвестных

$$C(\alpha) = F(\alpha), \quad \gamma_f(\alpha) D(\alpha) = \delta_s(\alpha) F(\alpha),$$

$$A(\alpha) = C(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h + D(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h, \quad (10.9)$$

$$-\delta_a(\alpha) A(\alpha) = -\gamma_f(\alpha) C(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h + \gamma_f(\alpha) D(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h.$$

Система уравнений (10.9) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Удобно сначала исключить из уравнений неизвестные $F(\alpha)$ и $A(\alpha)$. Тогда останется только два уравнения

$$[\delta_a(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h - \gamma_f(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h] C(\alpha) +$$

$$+ [\delta_a(\alpha) \sin \gamma_f(\alpha)h + \gamma_f(\alpha) \cos \gamma_f(\alpha)h] D(\alpha) = 0,$$

$$\delta_s(\alpha) C(\alpha) - \gamma_f(\alpha) D(\alpha) = 0.$$

У этой системы имеется ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\sin \gamma_f(\alpha)h [\gamma_f^2(\alpha) - \delta_a(\alpha) \delta_s(\alpha)] -$$

$$- \cos \gamma_f(\alpha)h [\delta_a(\alpha) \gamma_f(\alpha) + \delta_s(\alpha) \gamma_f(\alpha)] = 0. \quad (10.10)$$

Установлено, что у уравнения (10.10) может быть только конечное число корней, принадлежащих интервалу (k_s, k_f) , в том числе корней может и не быть вовсе.

Уравнение (10.10) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \gamma_f(\alpha)h = \frac{\frac{\delta_a(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h} + \frac{\delta_s(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h}}{1 - \frac{\delta_a(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h} \frac{\delta_s(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h}}.$$

Отсюда

$$\gamma_f(\alpha)h = \operatorname{arctg} \frac{\delta_a(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h} + \operatorname{arctg} \frac{\delta_s(\alpha)h}{\gamma_f(\alpha)h} + j\pi, \quad (10.11)$$

где j — целое положительное число. Уравнение (10.11) можно решать численно методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального значения любое число из интервала (k_s, k_f) . Если итерационный процесс сойдется при некотором j , то найдем корень уравнения с номером j .

Литература

1. Маркузе Д. Оптические волноводы / Д. Маркузе. — М.: Мир, 1974. — 574 с.
2. Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977. — 368 с.

Оглавление

Предисловие	3
1. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны	5
2. Элементарные волны. Отражение и преломление	13
3. Волноводы и резонаторы с металлическими стенками	25
4. Распределения и преобразование Фурье	33
5. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости	45
6. Дифракция электромагнитных волн на металлических лентах ..	56
7. Дифракция на периодической решетке	70
8. Перегородка в плоском волноводе	80
9. Разветвление плоского волновода	89
10. Планарный диэлектрический волновод	96