

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

*Кафедра системного анализа и информационных технологий*

**Р.Н. АБАЙДУЛЛИН**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ**

**Конспект лекций**

**Казань – 2015**

**УДК 51.74**  
**ББК в6**

*Принято на заседании кафедры системного анализа и информационных технологий*  
*Протокол № 7 от 14 апреля 2015 года*

**Рецензенты:**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры вычислительной математики КФУ **О.В.Панкратова**;  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры анализа данных и исследования операций КФУ  
**В.В.Бандеров**

**Абайдуллин Р.Н.**

**Математические модели управления производством: Конспект лекций** / Р.Н.Абайдуллин. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 36 с.

Производство является одним из поставщиков большого количества задач управления. Для эффективного управления производственным процессом требуется регулировать состояние многих параметров, что человеку, даже с большим опытом, непросто. Применение информационных технологий может способствовать эффективности управления. Но для этого требуется построить математические модели производственных процессов.

В данном пособии описываются принципы построения математических моделей управления производством для нескольких технологических процессов. Пособие представляет собой конспект лекций и предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

© Абайдуллин Р.Н., 2015

© Казанский университет, 2015

## **СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ .....	4
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ .....	5
ЗАДАЧА ПОДДЕРЖАНИЯ МИКРОКЛИМАТА .....	9
МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБЖИГА НА КИРПИЧНОМ ЗАВОДЕ .....	15
МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ГИДРИРОВАНИЯ .....	22
МОДЕЛИРОВАНИЕ БИНАРНОЙ РЕКТИФИКАЦИИ .....	25
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННИКОВ.....	29
ОПТИМИЗАЦИЯ КАСКАДА БИОХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ.....	33
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	35

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Пособие затрагивает важные аспекты применения математических моделей в различных производственных задачах, показывает широту возможных применяемых в производстве подходов к математическому моделированию и, тем самым, широкий спектр задач, связанных с применением информационных технологий в производстве.

В пособии рассмотрены несколько производственных задач. Среди них задачи моделирования работы конвейера, модель поддержания микроклимата, моделирование процесса обжига кирпичей, моделирование работы сложного оборудования (газо-жидкостных реакторов, ректификационной колонны, теплообменников, биохимических реакторов). Для проведения математического моделирования этих задач требуются знания дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории вероятностей и математической статистики.

Пособие представляет конспект лекций с методическими указаниями по выполнению самостоятельной работы студента. Предполагается, что студенты будут реализовывать данные модели в виде программного обеспечения, которое позволит в режиме имитационного моделирования исследовать рассматриваемые производственные процессы.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

Моделирование и управление поточной линии (конвейера) является одной из распространенных задач массового производства. Конвейер представляет собой поточную линию, по которой двигаются детали, над которыми выполняются последовательно определенные операции.

Модель движения деталей по конвейеру использует показательный закон распределения для определения интервалов времени поступления деталей на конвейер. Показательный закон легко моделируется методом обратной функции. Обозначим через  $\alpha$  – равномерно распределенные случайные величины в интервале  $[0;1]$  (базовые случайные величины). Функция распределения для показательного закона  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  при  $x \geq 0$ . Надо решить уравнение  $F(x) = y$  относительно переменной  $x$ :  $x = F^{-1}(y)$ . Таким образом, случайные числа  $\xi$ , подчиненные показательному закону, генерируются по формуле:  $\xi = F^{-1}(\alpha)$ .

При моделировании поточной линии также требуются величины, распределенные по нормальному закону. Для этого рассмотрим два метода. Введем в рассмотрение стандартную гауссовскую случайную величину  $\xi^*$  с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратичным отклонением, равным 1. Легко убедиться, что в этом случае при любых значениях  $a, \sigma$  нормально распределенная величина будет получена по формуле:

$$\xi = a + \sigma \xi^* .$$

Таким образом, задача сводится к генерации стандартной случайной величины  $\xi^*$ .

Первый метод есть частный случай метода обратной функции:

$$\xi^* = \begin{cases} \Phi^{-1}(\alpha), & 0.5 < \alpha \leq 1 \\ -\Phi^{-1}(1 - \alpha), & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \end{cases}$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  – функция распределения стандартного нормального закона, а  $\Phi^{-1}(\cdot)$  – обратная ей функция. Так как  $\Phi^{-1}(z)$  через элементарные функции не выражается, используется аппроксимация

$$\Phi^{-1}(z) \approx \Psi(z) = \frac{230753 + 0,27061\theta}{1 + 0.99229\theta + 0.04710\theta^2} - \theta$$

с ошибкой  $|\Phi^{-1}(z) - \Psi(z)| < 4.5 \cdot 10^{-4}$  при  $z < 0.9$ .

Второй метод генерации нормально распределенной величины основан на использовании центральной предельной теоремы. Предлагаем изучить этот способ студентам самостоятельно.

Рассмотрим теперь примеры, относящиеся к производству изделий с использованием оборудования и перемещением изделий в рабочие позиции по мере выполнения некоторой последовательности операций. Для каждого примера студенты должны самостоятельно создать модель и исследовать ее поведение.

Первый пример схематично изображен на рис.1.

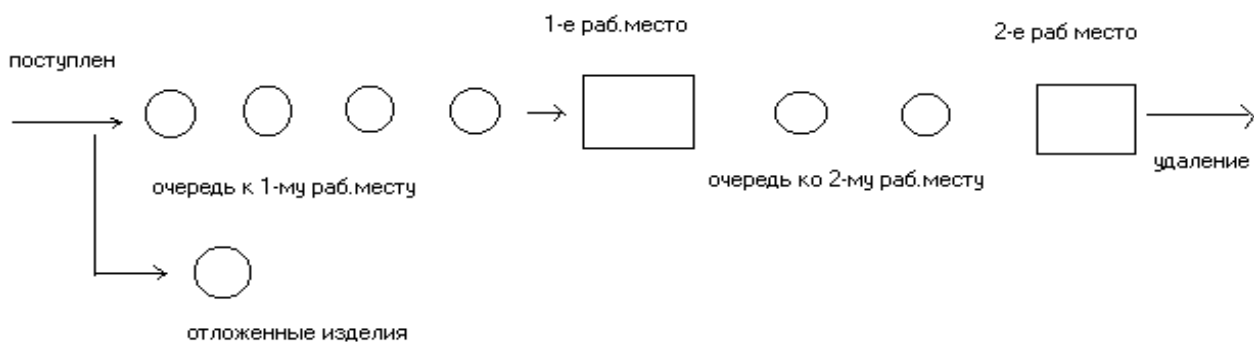


Рис. 1. Модель производственной поточной линии.

Описание технологического процесса, проходящего по данной модели:

1. Выполняются последовательно две операции.
2. На поточной линии имеется место для восьми изделий (изделия являются громоздкими), четыре места до первого рабочего места и

два места до второго рабочего места. Еще два изделия обрабатываются непосредственно на рабочих местах.

3. Если нет места на конвейере, то поступившие изделия откладываются.
4. Интервалы времени между поступлениями изделий распределены экспоненциально с математическим ожиданием 0.4 единицы времени.
5. Время обработки в среднем 0.25 на первом рабочем месте и 0.5 на втором рабочем месте.
6. Если вторая очередь (очередь ко второму рабочему месту полная), то блокируется первое рабочее место.

Цель моделирования заключается в выборе достаточно продолжительного интервала, например, 300 единиц времени и оценить следующие показатели:

1. Загрузка рабочих мест;
2. Время обработки одного изделия на линии;
3. Число изделий, обработка которых отложена (в единицах времени);
4. Число изделий, находящихся в очереди к каждому рабочему месту;
5. Доля времени, в течение которого первое рабочее место заблокировано.

Второй пример более сложный. Это модель производственной поточной линии с пунктами технического контроля и настройки (рис. 2).

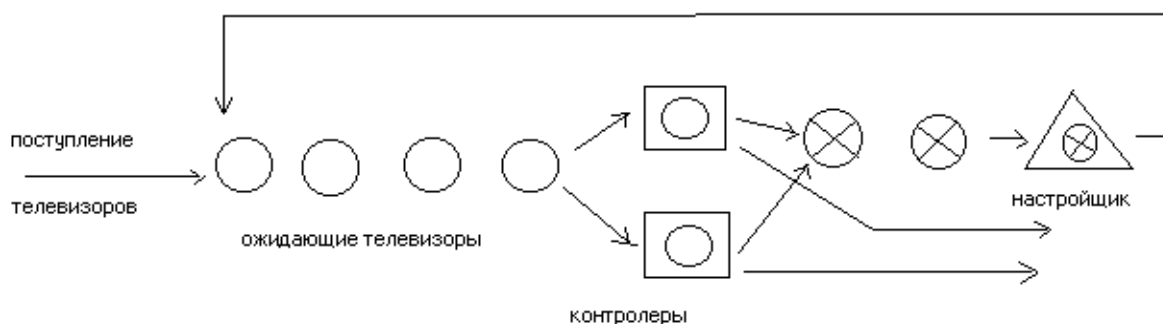


Рис. 2. Модель производственной поточной линии с пунктами технического контроля и настройки.

Опишем технологический процесс, представленный на схеме:

1. Время поступления телевизоров равномерно распределено на интервале 3.5-7.5 минут;
2. Время проверки одного телевизора равномерно распределено на интервале 6-12 минут;
3. В среднем 85% телевизоров успешно проходят проверку;
4. Время настройки равномерно на интервале 20-40 минут.

Цель моделирования заключается в выборе достаточно продолжительный интервала, например, 480 единиц времени и оценки следующих параметров:

1. Время обслуживания одного телевизора.
2. Загрузку контролеров.
3. Загрузку настройщика.

Таким образом, для проведения имитационного моделирования всегда необходимо:

1. Обследовать объект (если он существует);
2. Построить схему и описание технологического процесса (если рассматривается производственный процесс);
3. Поставить цель;
4. Реализовать модель.



## ЗАДАЧА ПОДДЕРЖАНИЯ МИКРОКЛИМАТА

Задача поддержания микроклимата является одной из самых распространенных задач не только на производстве, но и в других сферах. Например, для выращивания овощей круглый год можно построить теплицы, в которых в зимнее время требуется поддерживать комнатную температуру и т.п. Мы рассмотрим конкретную задачу поддержания микроклимата в группе овощехранилищ "под ключ", т.е. мы не ограничимся только моделью, а предложим способ автоматизации поддержания микроклимата. Пусть имеются три овощехранилища, два из которых большие и одно – маленькое (рис. 3):

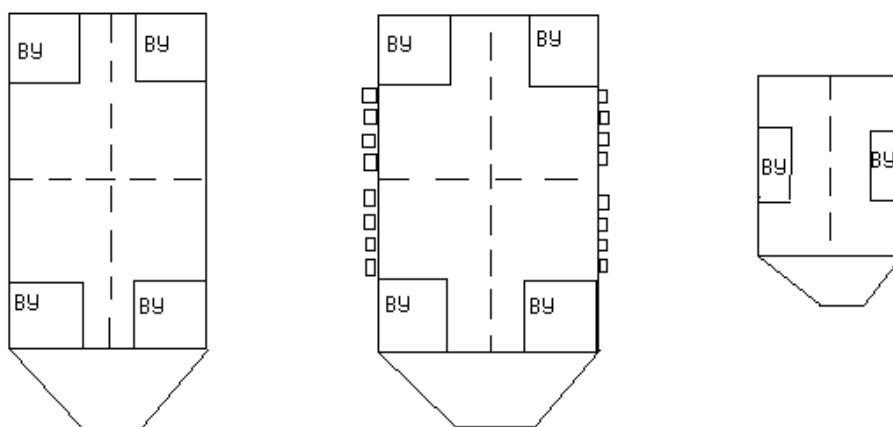


Рис. 3. План расположения овощехранилищ.

На четырех углах первого и второго овощехранилища имеются вентиляционные устройства (ВУ), а для маленького овощехранилища ВУ установлены по бокам. Второе овощехранилище еще имеет по бокам по восемь окон, имеющих задвижки для открывания и закрывания. ВУ могут нагнетать наружный воздух вовнутрь. Поток воздуха через ВУ регулируется с помощью задвижки, которая может прийти в любое состояние между полным закрытием и открытием. При полном закрытии задвижки двигатель ВУ отключается (работа двигателя не имеет смысла). Кроме ВУ и окон в овощехранилищах имеются обогреватели, изменение состояния которых (включение и выключение) может повлиять на микроклимат.

Если обратить внимание на рис.3, можно обнаружить некоторые закономерности. Например, пунктирные линии разделяют все помещения на участки,

в каждом из которых оказываются по одному ВУ. Всего таких участков будет десять по количеству ВУ. Условно можно рассматривать эти участки как независимые и решать задачу поддержания микроклимата для каждого участка отдельно. Реально при этом получится некоторое усреднение по истечению некоторого времени, и, в каком-то приближении, это будет решением общей задачи. Такая идеализация нам необходима для выделения однотипных блоков алгоритма, которые позволят стандартизовать весь алгоритм управления. Очевидно также, управлять всем этим можно "не спеша", так как процесс выравнивания температуры и влажности в помещении длительный. В итоге мы можем программу составить таким образом, чтобы периодически следить одинаковым способом за каждым участком и этот период может составить десятки минут.

Среди выделенных десяти участков есть участки, которые относятся второму овощехранилищу. Будем считать, что к ним относятся по четыре окна из общего количества шестнадцати окон. Тогда для участков первого и третьего овощехранилищ можно считать "окна" всегда закрытыми. После всех предположений можно заняться только одним участком, тиражируя поддержание микроклимата этого участка на другие участки.

Поддержание микроклимата предполагает слежение за температурой и влажностью и, если эти параметры выходят за пределы допустимого, необходимо воздействовать доступными средствами в направлении возврата в допустимые пределы.

Слежение за параметрами плюс воздействие на них и представляет собой регулирование. Для наглядности обычно рисуют схему регулирования, где отображаются объекты, участвующие в регулировании, и связи между ними. Регулирование, привязанное к конкретному месту и объектам, представляет из себя контур регулирования. Мы будем считать наши выделенные участки независимыми и сопоставим каждому участку свой контур регулирования.

На микроклимат участка мы можем воздействовать с помощью ВУ со своей задвижкой, окнами и обогревателем. Очевидно также, что для регулиро-

вания достаточен самый медленный компьютер или контроллер, который будет "успевать" контролировать и переключаться между контурами регулирования.

Перечислим необходимые датчики и исполнительные механизмы, относящиеся к отдельному  $i$ -му контуру регулирования.

Датчики:

1.  $t_{1i}, t_{2i}, t_{3i}, t_{4i}$  – датчики температуры, внедряемые вовнутрь продукта;
2.  $t_{5i}$  – датчик температуры воздуха над участком;
3.  $V_{1i}$  – влагомер;
4.  $S_{1i}$  – датчик положения задвижки ВУ;
5.  $C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, C_{4i}$  – датчик "открыто" задвижки соответствующего окна;
6.  $C_{5i}, C_{6i}, C_{7i}, C_{8i}$  – датчик "закрыто" задвижки соответствующего окна;
7.  $V_{9i}$  – датчик состояния "включен-выключен" обогревателя.

Исполнительные устройства:

1.  $d_{1i}$  – включение двигателя ВУ;
2.  $d_{2i}$  – отключение двигателя ВУ;
3.  $d_{3i}$  – выбор направления на открытие задвижки ВУ;
4.  $d_{4i}$  – выбор направления на закрытие задвижки ВУ;
5.  $d_{5i}$  – пуск двигателя задвижки ВУ;
6.  $d_{6i}$  – стоп двигателя задвижки ВУ;
7.  $d_{7i}$  – включение обогревателя;
8.  $d_{8i}$  – отключение обогревателя;
9.  $d_{9i}$  – открытие задвижки первого окна;
10.  $d_{10i}$  – закрытие задвижки первого окна;
11.  $d_{11i}$  – открытие задвижки второго окна;
12.  $d_{12i}$  – закрытие задвижки второго окна;
13.  $d_{13i}$  – открытие задвижки третьего окна;
14.  $d_{14i}$  – закрытие задвижки третьего окна;

15.  $d_{15i}$  – открытие задвижки четвертого окна;

16.  $d_{16i}$  – закрытие задвижки четвертого окна.

Количество необходимых датчиков и исполнительных механизмов для одного контура регулирования составляет 32. Общее их количество для всех трех овощехранилищ (10 контуров) составит 320. Кроме того, будет необходим датчик температуры наружного воздуха. В итоге, контроллер, который управляет всем комплексом, должен будет следить за 321 сигналами.

Сформулируем цель автоматизации регулирования микроклимата в овощехранилищах:

1. Обеспечить  $a_i < t_i < b_i$ , где  $t_i = k_1 t_{1i} + k_2 t_{2i} + \dots + k_5 t_{5i}$ .

2. Обеспечить  $c_i < V_{li} < d_i$ , где  $V_{li}$  – значение влажности на  $i$ -ом участке.

Если в данный конкретный момент условия цели выполнены, текущее состояние исполнительных механизмов сохраняется. Возможны четыре варианта нарушения условий: обобщенная температура  $t$  за пределами либо верхней границы, либо нижней границы диапазона; влажность  $v$  за пределами либо верхней границы, либо нижней границы соответствующего диапазона. Нарушения можно исправить либо за счет обеспечения поступления наружного воздуха, либо за счет подключения-отключения обогревателя. В силу того, что влажность наружного воздуха нам неизвестна, влиять на влажность внутри мы можем только с помощью обогревателя. Будем в первую очередь проверять условия для влажности:

- при условии  $c > v$  & обогреватель включен, следует выключить обогреватель (и так уже сухо);
- при условии  $d < v$  & обогреватель выключен, следует включить обогреватель (стало влажно и сыро).

Очевидно, что влияние изменения исполнительных механизмов скажется на измеряемых параметрах не быстро. Поэтому система управления должна предусматривать подходящие задержки, чтобы обходиться минимальным количеством переключений исполнительного оборудования.

Если же не произошло изменение состояния обогревателя, то следует заняться температурой. Алгоритм следующий:

- если  $a > t$  &  $t_{\text{наруж}} > t$ , то имеет смысл открыть окна, чтобы теплый воздух поступил во внутрь; если они уже открыты, то увеличить поток воздуха, открывая больше задвижку ВУ;
- если  $a > t$  &  $t_{\text{наруж}} < t$ , то имеет смысл уменьшить поток воздуха, закрывая задвижку ВУ; если далее закрыть невозможно, то закрыть окна; если и это не помогает, включить обогреватель;
- если  $b < t$  &  $t_{\text{наруж}} > t$ , то имеет смысл уменьшить поток воздуха, закрывая задвижку ВУ; если далее закрыть невозможно, то закрыть окна (если они есть в данном контуре); если и это не помогает, можно выключить обогреватель;
- если  $b < t$  &  $t_{\text{наруж}} < t$ , то имеет смысл открыть окна, чтобы холодный воздух поступил во внутрь; если они уже открыты, то увеличить поток воздуха, открывая больше задвижку ВУ.

Возможны ситуации, когда целевые условия не выполняются, несмотря на предельное положение исполнительных устройств, например,  $t_{\text{наруж}} < t$ , окна закрыты, поток воздуха через ВУ отсутствует, обогреватели включены, но температура внутри овощехранилища остается низкой. Такая ситуация обозначается как "alarm" ("тревога") и необходимо о ней информировать обслуживающий персонал. Такой персонал может оказаться на большом удалении (диспетчерская, дежурная комната и т.п.). Должны быть разработаны соответствующие экранные формы и средства связи.

Если ставится задача поддержания микроклимата в теплице, число измеряемых и регулируемых параметров значительно возрастет. В первом приближении измеряемым параметрам можно отнести:

- освещенность;
- температура;
- влажность;

- подача воды;
- удобрения;
- изменение времени.

Исполнительными устройствами (инструментами регулирования) могут быть следующие устройства:

- светильники (дневной свет, ультрафиолет);
- подача теплого воздуха (компрессоры);
- подготовка воздуха;
- подготовка воды и периодическая подача (дождевальники);
- рыхление земли и ввод удобрений;
- выдержка суточного режима; диаграммы на более длительный период.

## МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБЖИГА НА КИРПИЧНОМ ЗАВОДЕ

В данном разделе речь пойдет о современном кирпичном заводе с непрерывным производством красного кирпича, использующем так называемую "туннельную" печь. Основные производственные участки такого завода следующие:

- подготовка сырья;
- прессование;
- сушка;
- обжиг.

Производственный процесс является непрерывным: глина с водой смешивается в определенных пропорциях (дозирование), далее происходит прессование и разрезание – получается кирпич-сырец. Содержание влаги в кирпиче-сырце значительное, поэтому его сушат в сушильном участке. Сушильный участок представляет из себя закрытое помещение, в нем перемещаются в четыре ряда от входа к выходу вагонетки с кирпичем-сырцом. Длина помещения составляет около 80 метров, по длине помещаются 37 вагонеток. Этап обжига происходит в туннельной печи, длина 130 метров, по длине помещаются 47 маленьких вагонеток.

Процесс очень энергоемкий. Приведем примерный проектный тепловой баланс на изготовление кирпича в ккал/1000шт.

### *Приход тепла*

Физическое тепло и тепло горения топлива..... 1747000 - 100%

### *Расход тепла*

На испарение и удаление влаги..... 130000 - 7.47%

На химические реакции..... 200000 - 11.40%

Потери тепла с отходящими дымовыми газами..... 133000 - 7.60%

Потери тепла через ограждающие поверхности..... 278000 - 15.90%

Потери тепла через под вагонеток..... 176000 - 10.04%

Потери тепла с выгруз. изделиями и вагонетками.....	62000 - 3.54%
Расход тепла на подогрев воздуха, направляемого в сушилку	
	697000 - 40.00%
Неучтенные потери.....	78000 - 4.05%
Итого.....	1747000 - 100%

Как видно из приведенных показателей, расход тепла на сушку значительный. Расход тепла на обжиг включает: расход на химические реакции, потери тепла с отходящими газами, на испарение и удаление остатков влаги.

С точки зрения моделирования процессы сушки и обжига очень похожи. В обоих случаях происходит перемещение вагонеток. Сушка происходит под действием теплого воздуха, получаемого путем прогрева на верхней поверхности туннельной печи. На обжиг тепло идет от газовых горелок. В обоих случаях тратится тепло.

Математические модели распространения тепла и диффузии частиц представляются в виде похожих дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(p \cdot \text{grad } u) - qu + F(x, y, z, t).$$

Здесь  $F(x, y, z, t)$  – интенсивность внешнего возмущения;  $\rho$  – плотность среды,  $p$  – коэффициент теплопроводности (диффузии),  $q$  – эффект температуры (для случая диффузии – эффект скорости).

Уравнение решается при задании начального условия  $u|_{t=0} = u_0$  и граничного условия

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = V(x, y, z, t).$$

Решение задачи в общем виде очень трудоемкое. В случае кирпичного завода можно ограничиться самым простым случаем, когда время можно не учитывать и свести общую задачу к набору простых (даже одномерных) задач. Такая возможность объясняется тем, что процесс обжига (или сушки) достаточно



длительный и инерционный, влияние регулирования происходит с большой задержкой. Например, толкатель вагонеток туннельной печи перемещает вагонетки в течение часа всего на 2 м., и время продвижения вагонеток от входа к выходу получается  $130/2=65$  часов (около 2.5 суток). Если в общем уравнении не учитываем время, получаем стационарное уравнение:

$$- \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x, y, z).$$

Начальное условие уже не нужно, а для граничного условия можно рассматривать варианты:

1) при  $\beta = 0$  –  $u|_S = u_0$  – на границе поддерживается заданное распределение температуры;

2) при  $\alpha = 0$  –  $\beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1$  – на границе  $S$  поддерживается заданный поток (или отток) тепла;

3)  $k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \Big|_S = 0$  – на границе происходит теплообмен согласно закону Ньютона.

Закон Ньютона утверждает, что поток тепла от нагретого тела в окружающую среду пропорционален разности их температур. Главная цель построения модели для кирпичного завода – определить распределение температуры по всей длине туннельной печи.

Разделяют туннельную печь по длине на две зоны (рис. 4):

- зона подогрева и обжига;
- зона охлаждения.

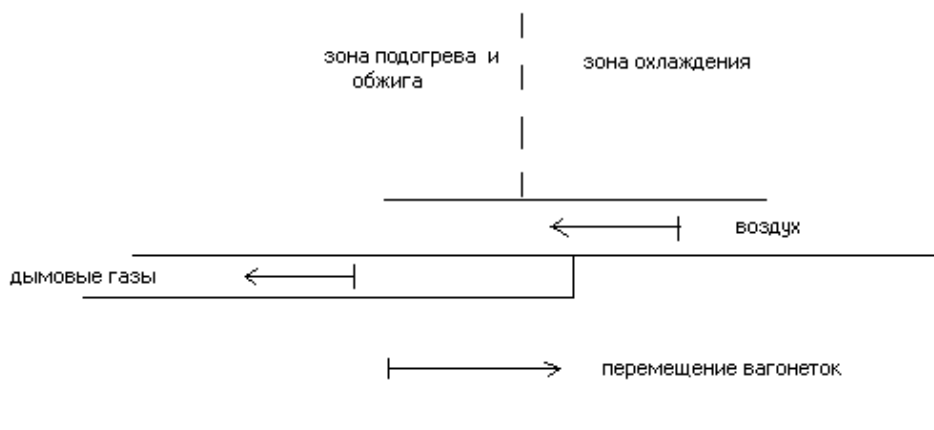


Рис. 4. Схема туннельной печи.

Достаточно точная модель получится, если рассматривать распределение температуры по двум координатам: по  $x$  вдоль туннельной печи и по  $y$  по высоте туннельной печи. Границу будет при этом составлять прямоугольная область, соответствующая виду "сбоку". В рамках такой модели учитываются процессы:

- передача тепла дымовыми газами;
- приобретение тепла воздухом, идущим на сушку;
- теплообмен с кирпичами-сырцами, вагонетками.

Исследования показали, что можно расщепить двумерную задачу на четыре одномерных таким образом, чтобы вычислить итоговую температуру как элементарные суммы результатов решения одномерных задач. При этом сохраняется основной смысл моделирования – адекватность модели к реальному процессу. Мы рассмотрим задачу вычисления распределения температуры на уровне таких упрощений.

Рассмотрим четыре одномерных и однотипных задач с таким физическим смыслом. Имеются четыре стержня 0, 1, 2, 3, расположенные согласно рис. 5:

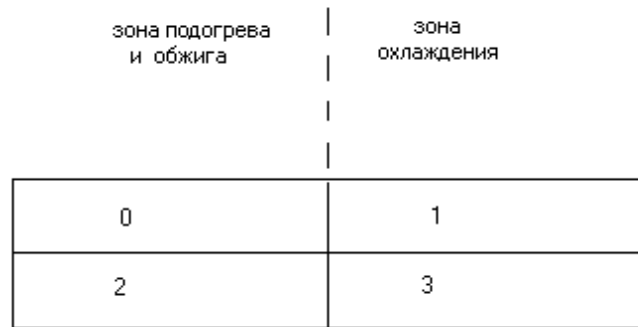


Рис. 5. Схема расположения стержней.

- стержень 0 прогревается на правом конце (газовые горелки) по закону  $u|_S = u_0$ , а на левом конце по закону  $\beta \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1$  (уход дымовых газов);
- стержень 1 прогревается на правом конце (поступающий воздух) по закону  $u|_S = u_0$ , а на левом – по закону  $\beta \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1$  (уход на сушилку теплого воздуха);
- стержень 2 прогревается на обоих концах и вагонетки продвигаются (можно считать потоком тепла) по аналогии с законом Ньютона  $k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)|_S = 0$ .
- стержень 3 аналогичен стержню 2 только с другим коэффициентом.

Вывод уравнения теплопроводности (одномерная задача) для стержня будем считать заданием для самостоятельной работы студентов.

Параметры, входящие в граничные условия, зависят от состояния регулирующих и исполнительных механизмов:

- $\beta_{10}$  – определяется положением задвижки отвода дымовых газов (шамотный шибер);
- $t_{20}$  – определяется подачей газа;

- $\beta_{11}$  – определяется положением задвижки отвода тепла на сушку;
- $t_{21}$  – температура поступающего наружного воздуха + составляющая от температуры газа (тепло поверхности туннельной печи);
- $\frac{k_1}{\gamma_1}, \frac{h_1}{\gamma_1}$  – определяются по скорости  $V$  продвижения вагонеток, температурами кирпича-сырца на входе, обожженного кирпича на выходе и подачей газа.

В реальных условиях температуры кирпича-сырца на входе и обожженного кирпича на выходе получают как учитываемые параметры, скорость  $V$  и подача газа регулируются.

Основная цель моделирования состоит в вычислении распределения температуры вдоль туннельной печи. Есть общая точка задач в районе газовых горелок. На распределение температуры влияют регуляторы:

- задвижка отвода дымовых газов (шамотный шибер);
- подача газа;
- задвижка отвода тепла на сушку;
- скорость движения вагонеток  $V$ .

Учитываются влияние температуры наружного воздуха, температуры кирпича-сырца на входе, температуры обожженного кирпича на выходе. Обозначим  $r$  – расход газа, тогда распределение температуры вдоль туннельной печи представляет собой функцию  $t = t(\beta_{10}, r, \beta_{11}, V)$ , где аргументами указаны параметры, позволяющие воздействовать на распределение температуры. Кроме распределения температуры по результатам вычислений теоретической модели, можно получить реальное распределение температуры от датчиков, установленных вдоль туннельной печи/ Влияние параметров на распределение температуры можно в какой-то степени предугадать:

- увеличение  $\beta_{10}$  уменьшает температурное поле левой половины;
- увеличение  $r$  дает общий подъем температурного поля;

- увеличение  $\beta_{11}$  уменьшает температурное поле правой половины;
- увеличение  $V$  дает общее понижение температурного поля.

Для каждого из параметров определены технологические диапазоны, которые должны быть отдалены от критических значений. Кроме того, местная автоматика поддерживает правильное соотношение между подачей воздуха на газовые горелки, расходом газа и положением шамотного шибера на дымоходе для обеспечения оптимальных условий горения газа. В итоге, автоматизированная система не вмешивается в регулирование шамотного шибера, а влияет на распределение температуры регулированием расхода газа. В модели это отражается тем, что на место  $\beta_{10}$  ставится значение "функции автоматики" для заданного  $r$ -расхода. Таким образом, программа вычисляет  $t = t(r, \beta_{11}, V)$  по всей длине туннельной печи. Оператор может "попробовать" на модели изменить в ту или иную сторону любые из этих аргументов. Это отразится на соответствующем графике и будет ясно как повлияет пробное изменение на температурное поле. В реальных условиях оператор видит график измеренных значений от датчиков, график вычисленных значений по модели и "идеальный" график, соответствующий такому режиму, когда выход продукции по качеству и количеству оптимален. После пробных изменений на модели оператор может определить способ регулирования с помощью реальных исполнительных устройств, чтобы приблизиться к идеальному режиму работы.

## МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ГИДРИРОВАНИЯ

Рассмотрим газо-жидкостный реактор (рис. 6), представляющий собой аппарат колонного типа с непрерывным вводом газовой и жидкостных фаз прямотоком. Катализатор находится в жидкой фазе в суспендированном состоянии. Поток газовых пузырьков образует дисперсную фазу, а жидкость с распределенным в ней катализатором составляет псевдожидкостную (сплошную) фазу. Объем реактора 5000 литров, давление внутри реактора 16 атмосфер, диаметр 800 мм., высота  $L=10$  м. Могут применяться два типа катализаторов: дисперсный и стационарный.

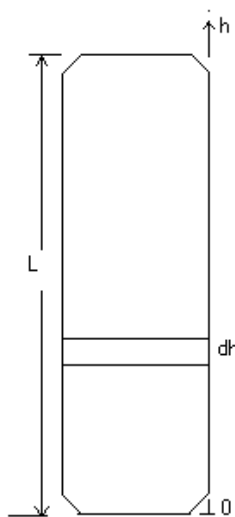


Рис. 6. Схема газо-жидкостного реактора.

Обозначим:

- $C = C(t, h)$  – концентрация газа в сплошной фазе;
- $X = X(t, h)$  – концентрация газа в дисперсной фазе.

Нас интересует как изменяются эти концентрации вдоль колонны. Пусть  $dU$  – элементарный объем реактора толщиной  $dh$ . Выделим из него объем  $(1 - \alpha)dU$ , занимаемый псевдожидкостной фазой. В элементарном объеме сплошной фазы происходит подвод и отвод газа за счет:

- продольной диффузии;
- межфазного обмена;

- химической реакции.

Избыточное количество газа будет выноситься из объема  $(1-\alpha)dU$  потоком сплошной фазы. Этот поток в объеме  $(1-\alpha)dU$  за время  $dt$  изменит концентрацию газа на величину  $(1-\alpha)dUdt \frac{dC}{dt} - dQ_1 + dQ_2 + dQ_3$ , где  $dQ_1$  – влияние продольной диффузии,  $dQ_2$  – межфазный обмен,  $dQ_3$  – учитывает химическую реакцию.

$$dQ_1 = \left\{ -D \frac{\partial C}{\partial h} (1-\alpha) S dt + \left[ D \frac{\partial}{\partial h} \left( C + \frac{\partial C}{\partial h} \right) (1-\alpha) S dt \right] \right\} dh - D(1-\alpha) S dt \frac{\partial^2 C}{\partial h^2} dh,$$

где  $D$  – эффективный коэффициент диффузии,

$$dQ_2 = \beta(X - \psi C) dU dt$$

$$dQ_3 = -\beta(1-\alpha) dU dt$$

где  $\beta$  – коэффициент межфазного обмена,  $\alpha$  – газосодержание (объемная доля дисперсной фазы),  $\psi$  – коэффициент межфазного равновесия,  $R$  – наблюдаемая скорость химической реакции, отнесенная к объему сплошной фазы.

Полную производную можно расписать  $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + V_{жс} \frac{\partial C}{\partial h}$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial C}{\partial t} + V_2 \frac{\partial C}{\partial h} = D \frac{\partial^2 C}{\partial h^2} + \frac{\beta}{1-\alpha} (X - \psi C) = R.$$

Для дисперсной фазы нет необходимости учитывать влияние химической реакции и продольной диффузии, так как внутри газовых пузырьков они не

могут происходить:  $\frac{\partial X}{\partial t} + V_2 \frac{\partial X}{\partial h} = -\frac{\beta}{\alpha} (X - \psi C)$ . Здесь мы использовали обозна-

чения:

- $V_{жс}$  – линейная скорость сплошной (псевдожидкостной) фазы;
- $V_2$  – линейная скорость дисперсной фазы.

Необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + V_{жс} \frac{\partial C}{\partial h} = D \frac{\partial^2 C}{\partial h^2} + \frac{\beta}{1-\alpha} (X - \psi C) - R \\ \frac{\partial X}{\partial t} + V_2 \frac{\partial X}{\partial h} = -\frac{\beta}{\alpha} (X - \psi C) \end{cases}$$

При следующих начальных и граничных условиях:

$$C(0, k) = C_0, X(0, k) = X_n, \frac{\partial C(t, L)}{\partial h} = 0, C(t, 0) = C_0, X(t, 0) = X_0.$$

Итак, процесс зависит от следующих значений:  $D$  – эффективный коэффициент продольной диффузии,  $\beta$  – коэффициент межфазного обмена,  $\alpha$  – газосодержание (объемная доля дисперсной фазы),  $\psi$  – коэффициент межфазного равновесия,  $R$  – наблюдаемая скорость химической реакции, отнесенная к объему сплошной фазы,  $V_{жс}$  и  $V_2$  – линейные скорости.

Все они являются функциями физических параметров:  $\rho_2$  – плотность газа (водород), меняется при изменении температуры  $T$  и давления  $P$ ;  $\mu_2$  – динамическая вязкость, меняется при изменении температуры  $T$ ;  $\rho_{жс}$  – плотность (например, хлопкового масла), меняется при изменении температуры  $T$ ;  $\mu_{жс}$  – динамическая вязкость, меняется при изменении температуры  $T$ ,  $\nu_{жс}$  – кинематическая вязкость, меняется при изменении температуры  $T$ ,  $N$  – число работающих компрессоров,  $Q_k$  – расход катализатора,  $Q_m$  – расход масла.

Таким образом, параметры  $T$ ,  $P$ ,  $N$ ,  $Q_k$ ,  $Q_m$  определяют протекающий процесс для конкретного сырья. Изменилось сырье – значит будет другая зависимость от этих же параметров. Таким образом, путем их изменения можно добиться "хорошего" превращения (конверсии) исходного сырья в конечный продукт (масла в саломас). Обычно задачу решают в безразмерных величинах (безразмерные концентрации). Принято обозначить  $\Phi_1 = \frac{(X_0 - C)}{X_0}$  – степень

превращения сплошной фазы,  $\Phi_2 = \frac{(X_0 - X)}{X_0}$  – степень превращения дисперсной фазы. Соответственно этим обозначениям изменяются система уравнений и граничные условия. Цель состоит в определении состояния на выходе реактора:  $\Phi_{1k}$  и  $\Phi_{2k}$  ( $k$  в индексе соответствует смыслу "конечное").



## МОДЕЛИРОВАНИЕ БИНАРНОЙ РЕКТИФИКАЦИИ

Ректификационная колонна (рис. 7) – это совокупность трех аппаратов:

- колонна, содержащая  $N$  тарелок и поделенная тарелкой питания  $f$  на укрепляющую и исчерпывающие секции;
- куб, в котором происходит испарение (т.е. внутренность колонны) ;
- конденсатор (дефлегматор).

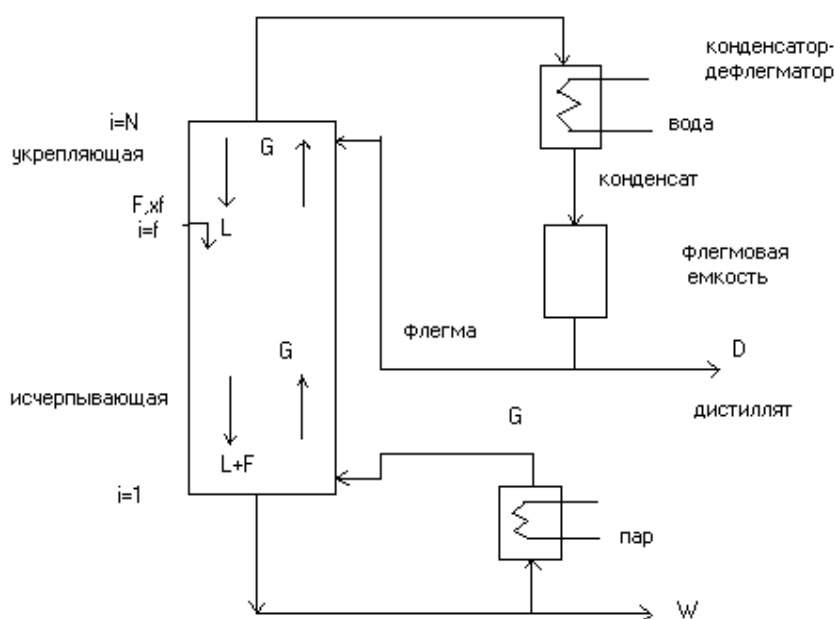


Рис. 7. Схема работы ректификационной колонны.

Перечислим входные параметры технологического процесса:

1. Расход питания  $F$  (моль/час);
2. Расход дистиллята  $D$  (моль/час);
3. Расход кубового остатка  $W$  (моль/час);
4. Расход пара  $G$  (моль/час);
5. Расход флегмы  $L$  (моль/час);
6. Содержание легколетучего компонента в питающей смеси  $x_F$ .

Выходными параметрами являются:

1. Содержание легколетучего компонента в кубовом остатке  $x_W$ ;
2. Содержание легколетучего компонента в дистилляте  $x_D$ .

Переменные процесса:

1. Содержание легколетучего компонента в жидкости, покидающей  $i$ -ю тарелку  $x_i$ ;
2. Содержание легколетучего компонента в паре, уходящем с  $i$ -ой тарелки  $y_i$ ;
3. Равновесная концентрация легколетучего компонента в паре на  $i$ -ой тарелке  $y_i^*$ .

Физико-химические параметры:

1. Объемный коэффициент массопередачи  $K_y$  (моль/час);
2. Относительная летучесть  $\alpha$ ;
3. Эффективность тарелки  $E$ .

Параметры оборудования:

1. Число тарелок  $N$  (нумерация снизу вверх);
2. Номер тарелки питания  $f$ ;
3. Высота парожидкостной системы на тарелке  $H$  (в метрах).

Математическая модель строится без учета теплообмена (т.е. только массообмен). Рассматривается материальный баланс всей колонны и соотношения, описывающие процессы в тарелках, в кубе, на дефлегматоре.

1. Уравнение равновесия.
2. Уравнение, описывающее работу куба.
3. Уравнение для расчета состава пара, уходящего с тарелки.
4. Материальные балансы для тарелок.
5. Соотношение для расчета состава дистиллята.
6. Материальный баланс колонны по легколетучему компоненту.
7. Величины потоков по колонне.

Студентам предоставляется самостоятельно вывести указанные соотношения.

Построим блок-схему расчета по этой математической модели (рис. 8):

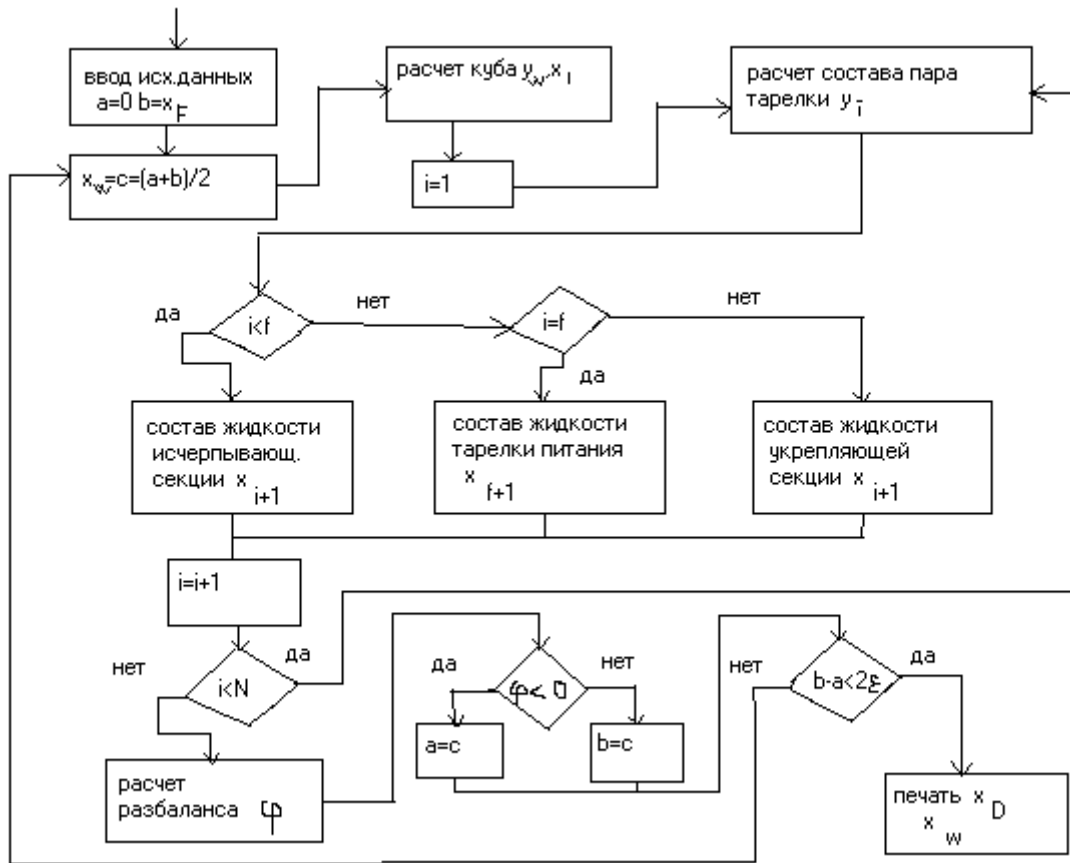


Рис. 8. Блок-схема расчета модели теплообмена.

Как выполняется алгоритм? Мы ищем  $x_D$  и  $x_W$ , т.е. сколько содержится легколетучая компонента в дистилляте и кубовом остатке? Берем интервал от  $a=0$  до  $b=x_F$  и полагаем, что  $x_W$  находится посередине  $x_W = c = \frac{a+b}{2}$ . Подставим  $x_W$  в соотношение уравнения равновесия и вычислим  $y_W = \frac{\alpha x_W}{((\alpha-1)x_W + 1)}$ . Подставим их в уравнение работы куба и получим  $x_1$ . И так далее.

Модель позволяет решать следующие задачи:

1. Определить номер тарелки питания  $f$ , обеспечивающий максимум легколетучего компонента в дистилляте  $x_D$  [ $f = 2 - 7$ ].
2. Исследовать влияние изменения нагрузки по питанию  $F$  на разделительную способность колонны [ $F = 100 - 200$  моль/час]. Например, можно построить зависимость  $x_D = x_D(F)$ .

3. Исследовать влияние изменения состава питания  $x_F$  на разделительную способность колонны [ $x_F = 0.3 - 0.7$ ].
4. Допустим, что нагрузка по питанию возросла на 30%. На сколько необходимо изменить расход пара или дистиллята, чтобы состав дистиллята не изменился?
5. Допустим, что содержание легколетучего компонента в питающей смеси увеличилось на 20%. С какой тарелки необходимо сделать боковой отбор жидкости с прежней концентрацией легколетучего компонента?
6. Исследовать влияние расхода пара (тепловая нагрузка на куб)  $G$  на составы кубового остатка  $x_W$  [ $G = 120 - 170$  моль/час], т.е. построить график  $x_W = x_W(G)$ .

Исходные данные для самостоятельной работы студентов:

1. Коэффициент летучести  $\alpha$  для соответствующей смеси:

- Бензол - Толуол  $\rightarrow 2.75$
- Метиловый спирт - Вода  $\rightarrow 3.9$
- Гексан - Гептан  $\rightarrow 2.5$
- Пропан - Пропилен  $\rightarrow 1.15$
- Пентан - Изопентан  $\rightarrow 1.25$
- Крезол - Инол  $\rightarrow 4.2$

2. Число тарелок в диапазоне  $N = 8 - 15$ ;

3. Эффективность тарелки в диапазоне  $E = 0.6 - 0.99$ ;

4. Расход питания  $F = 120$  моль/час;

5. Расход дистиллята  $D = 60$  моль/час;

6. Содержание легколетучего компонента в питающей смеси  $x_F = 0.5$ ;

7. Расход пара  $G = 150$  моль/час.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Капитальные и эксплуатационные расходы на теплообменники составляют 30-50% от общих капиталовложений на реализацию технологического процесса. Теплообменные аппараты работают в составе большой системы и могут использоваться в технологическом процессе много раз и в нескольких местах. Конструктивные варианты теплообменников могут быть самыми разнообразными, но с точки зрения возможных идеализированных моделей важно рассматривать простейшие элементарные модели перемещения теплоносителей или хладагентов. Наиболее часто в разряд таких моделей относят так называемые типовые модели (рис.9):

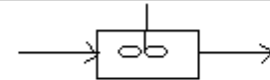
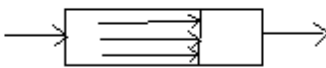

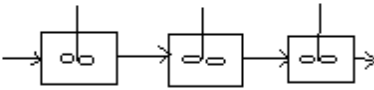
типовые модели	схема потока	математическое описание
модель идеального перемешивания		$\frac{dC}{dt} = \frac{v}{V} (C_{ex} - C)$
модель идеального вытеснения		$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial X}$
однопараметрическая диффузионная модель		$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} + D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$
ячеечная модель		$\frac{dC}{dt} = \frac{nv}{V} (C_{i-1} - C_i)$

Рис. 9. Типовые модели перемещения теплоносителей и хладагентов.

Комбинации указанных моделей соответствуют трем основным типам теплообменных аппаратов:

- "перемешивание–перемешивание";
- "перемешивание–вытеснение";
- "вытеснение–вытеснение".

Мы рассмотрим вертикальный кожухотрубчатый теплообменник, который соответствует типовой модели "вытеснение–вытеснение". Теплообменник предполагается использовать для конденсации насыщенного пара бензола. Вода поступает в трубы, а пары бензола в межтрубное пространство. Делаются предположения (допущения):

- постоянство физических свойств теплоносителей;
- постоянство коэффициентов теплоотдачи по всей поверхности теплообмена;
- постоянство температуры в поперечном сечении;
- отсутствие потери тепла в окружающую среду;
- пренебрежимо малое тепловое сопротивление металлической стенки.

Определим постановку задачи. Требуется определить оптимальную поверхность и высоту теплообменника для конденсации насыщенного пара бензола в количестве  $V_1=8500\text{кг/час}$ . Охлаждение осуществляется водой с начальной температурой  $t_2'=20^\circ\text{C}$ . Решение состоит из 10 этапов:

1. Выбор схемы движения носителей, например, как на рис. 10:

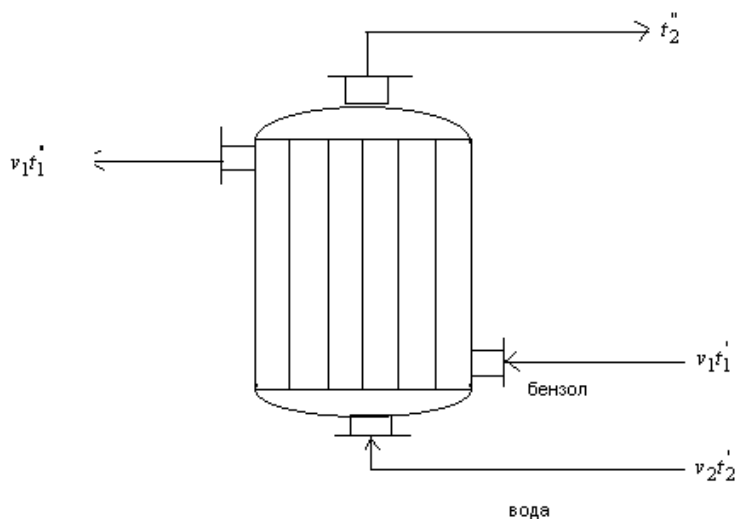


Рис.10. Схема движения носителя.

2. Ввод исходной информации (для программы расчета).

Параметры необходимые для расчета:

- физические константы для бензола (табличные данные) для случая температуры конденсации  $t_k=80^\circ\text{C}$ :  $\lambda_1=0.13\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  –

коэффициент теплопроводности,  $\rho_1=815\text{кг/м}^3$  – плотность,  $i'=323\cdot 10^3$  Дж/кг – энтальпия паров бензола,  $i''=1470\cdot 10^3$  Дж/кг – энтальпия жидкого бензола,  $\mu=0.000316\text{кг}\cdot\text{с/м}^2$  – коэффициент динамической вязкости конденсата бензола.

- физические константы для воды:  $\lambda_2=0.6\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  – коэффициент теплопроводности,  $\nu_2$  – кинематический коэффициент вязкости в  $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\rho_2=1000\text{кг/м}^3$  – плотность воды,  $C_2=4200$  Дж/(кг $\cdot$ °С) – теплоемкость воды.

- проводимость и технико-экономические показатели:  $r_1=2800$  Вт/м<sup>2</sup> – тепловая проводимость загрязнений со стороны бензола,  $r_2=2400$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) – тепловая проводимость загрязнений со стороны воды,  $\lambda_{\text{ст}}=46,5$  Вт/(м·К),  $d = 25\text{мм}$  – диаметр трубы,  $n_1=100$  руб/м<sup>2</sup> – сумма разовых затрат, пропорциональных единице поверхности обмена,  $n_2=0.04$  руб/(кВт·ч) – удельные затраты на привод, ремонт и обслуживание насоса,  $N$  – мощность насосов,  $T_n$  – нормативный срок окупаемости,  $\tau$  – количество часов работы теплообменника в году,  $F$  – поверхность теплообмена,  $L$  – высота теплообменника,

Критерий оптимальности (зависит от  $F$  и  $N$ ):  $\Pi = \frac{Fn_1}{T_n} + n_2N\tau$ .

3. Составление математической модели для вычисления  $L$  – высоты теплообменника:

- $v_1(i'-i'') = v_2C_2(t_2''-t_2')$  – уравнение общего баланса тепла,

- $\frac{v_2}{\rho_2} C_2 \left( \frac{dt_1}{dl} \right) = k\pi d(t_k - t_2)$  – уравнение баланса

тепла для воды, где  $k = \frac{1}{\left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$  –

коэффициент теплопередачи,  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи для бензола,  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи для воды.

4. Ввод конечного значения температуры воды  $t_2'' = 30^\circ\text{C}$  (нужно для решения дифуравнения).

5. Ввод начального значения линейной скорости воды  $w_2=0.1\text{ м/с}$  (уравнение стационарное, это нужно только для расчетов).
6. Технологический и конструктивный расчет теплообменника. Из уравнения общего баланса тепла найдем объемную скорость  $v_2$  и подставим  $n = \frac{v_2}{(w_2 S_T)}$ , где  $S_T$  – сечение трубы в  $\text{м}^2$ . Вычислим по формулам критерий Рейнольдса для воды, критерий Прандтля для воды, критерий Нуссельта для воды при турбулентном течении, коэффициент теплоотдачи воды. Найдите это коэффициенты самостоятельно. Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение п.3 и интегрируя это уравнение, находим длину (высоту) теплообменника и вычисляем поверхность теплообмена  $F=\pi dnL$ .
7. Гидравлический расчет теплообменника: гидравлическое сопротивление в трубах:  $P=10\rho_2 w_2^2/2+\rho_2 gL$ ; мощность насоса для перекачки воды:  $N=v_2 P/1000\eta$  ( $\eta = 0.55$  – к.п.д. насоса).
8. Вычисляем критерий оптимальности (приведенные затраты):
- $$\Pi = \left( \frac{F_{n_1}}{T_H} \right) + n_2 N \tau .$$
9. Оптимизация приведенных приведенных затрат:
- Увеличиваем скорость воды до  $2.5 \text{ м/с}$  с шагом  $0.3 \text{ м/с}$  (т.е. повторяем этапы 6-8).
  - Последовательно увеличиваем значение температуры воды до  $70^\circ\text{C}$  с шагом  $10^\circ\text{C}$  (повторяются этапы 5-9).
10. Построение графиков функции  $\Pi(\cdot, \cdot)$ , по которым определяем минимум затрат и соответствующие  $n$  и  $L$ .



## ОПТИМИЗАЦИЯ КАСКАДА БИОХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ

Биохимический реактор (рис. 11) – это где выращивают биомассу. Мы будем считать процесс соответствующим случаю идеального перемешивания. Процесс происходит в емкости:

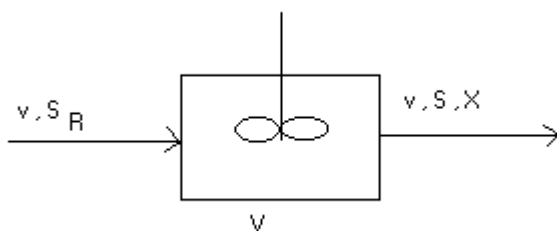


Рис. 11. Схема биохимического реактора.

Здесь используются следующие обозначения:

- $v$  – объемная скорость;
- $S_R$  – концентрация субстрата на входе;
- $V$  – объем биореактора;
- $S$  – концентрация субстрата на выходе;
- $X$  – концентрация биомассы на выходе.

Обозначим  $y$  – коэффициент выхода (кг биомассы/кг субстрата),  $\mu$  – удельная скорость роста биомассы. Запишем уравнения баланса по субстрату и биомассе за время  $dt$ :  $Vds = vS_R dt - vS dt - V\mu X/y$ ;  $Vdx = V\mu X - vXd t$ .

Обозначим  $D = v/V$  – скорость разбавления и поделим соотношения на  $dt$  и на  $V$ :  $ds/dt = DS_R - DS - \mu X/y$ ,  $dx/dt = \mu X - DX$ .

Ограничимся стационарным случаем и полагаем  $ds/dt = 0$ ,  $dx/dt = 0$ . Из второго соотношения  $\mu = D$ , тогда первое соотношение сведется к  $X = y(S_R - S)$ . Продуктивность реактора вычисляется по формуле  $P = vX/V = DX = \mu X$ .

Есть эмпирическая формула (уравнение Моно) для вычисления удельной скорости роста биомассы:  $\mu = \mu_{max} S / (K_S + S)$ , где  $\mu_{max}$  и  $K_S$  – кинетические константы. По формуле видно, при  $S$  стремится к бесконечности и имеем  $\mu = \mu_{max}$ , а при  $S = 0$  –  $\mu = 0$ . Подставим в выражение продуктивности  $\mu$  согласно эмпирической формуле:  $P = \mu X = \mu_{max} S y (S_R - S) / (K_S + S)$ , то есть получили некоторую функцию

$P=P(S)$ . Можно построить график этой функции. Нетрудно убедиться, что график (рис. 12) будет представлять параболу с вершиной вверх и корнями в точках  $S=0$  и  $S=S_R$ .

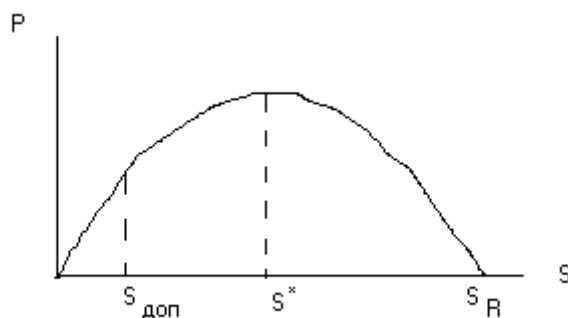


Рис.12. График функции  $P=P(S)$ .

Здесь  $S_{доп}$  – максимально допустимая концентрация субстрата в реакторе,  $S^*$  – концентрация, соответствующая максимуму продуктивности. Из-за того, что  $S^* \gg S_{доп}$ , повышение производительности возможно только при увеличении концентрации выше допустимого. Это нехорошо по медико-биологическим соображениям и из-за того, что субстрат остается неиспользованным. Если брать  $S \ll S_{доп}$ , то получится низкая производительность и для получения необходимого количества продукта потребуется увеличить объем. Эти соображения подсказывают, что надо создавать многостадийный процесс, т.е. надо строить каскад биореакторов.

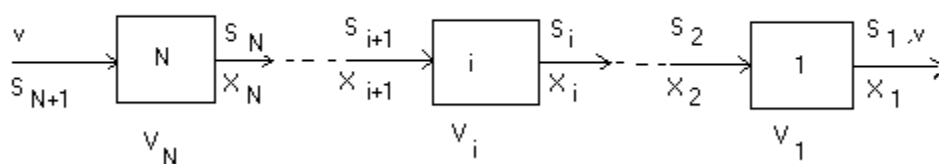


Рис.13. Схема каскада биореакторов.

Постановка задачи. При заданном числе стадий  $N$  в каскаде, заданных  $S_{N+1}$  и  $S_1$  минимизировать величину  $\theta$ . Как правило, такие задачи решаются методом динамического программирования, для которого имеется достаточно много типовых программ и библиотек.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.. Материалы и технологические процессы машиностроительных производств [Электронный ресурс] / Е.А.Кудряшов, С.Г.Емельянов, Е.И.Яцун, Е.В.Павлов. – М.: Альфа-М: НИЦ ИНФРА-М, 2012. – 256 с. – Режим доступа: <http://www.znanium.com/bookread.php?book=336645>

2. Проектирование автоматизированных систем производства [Электронный ресурс]: Учебное пособие / В.Л. Конюх. – М.: КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 312 с. – Режим доступа: <http://www.znanium.com/bookread.php?book=449810>

*Учебное издание*

**Абайдуллин Равиль Нуралиевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ  
ПРОИЗВОДСТВОМ**

Дизайн обложки

***М.А. Ахметов***

Подписано в печать 14.09.2013.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28