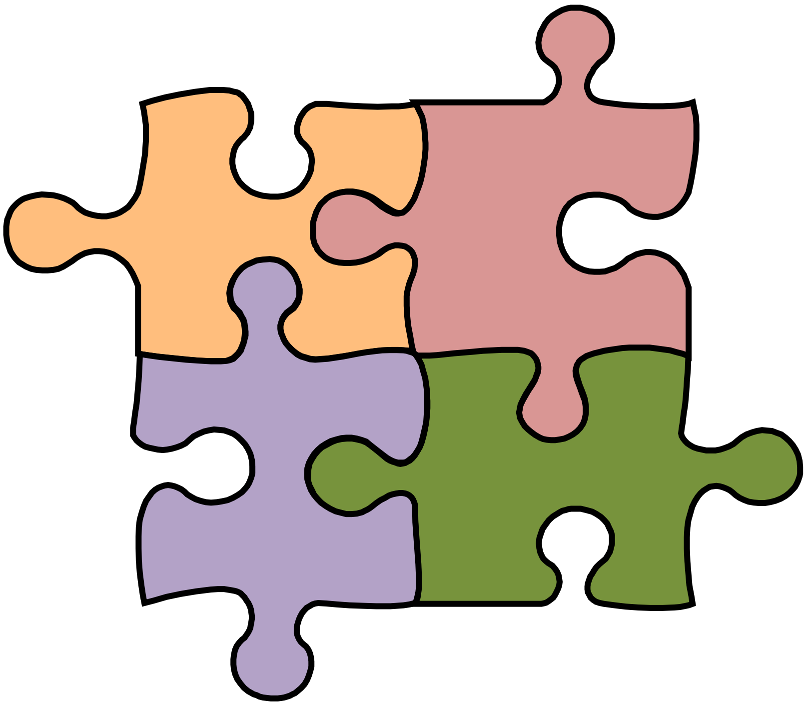
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра анализа данных и технологий программирования



З.Р. ГАБИДУЛЛИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИКИ

КАЗАНЬ
2023

УДК 519.86
ББК 22.1

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 8 от 27 апреля 2023 года

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, профессор КФУ Заботин И.Я.

Габидуллина З.Р.
Математические модели логистики / З.Р. Габидуллина. – Казань: Казанский университет, 2023 . – 115 с.

В учебно- методическом пособии приводится теоретический материал по математическим моделям логистики, необходимый для решения конкретных практических задач логистики, осуществляется визуализация полученных в результате решения данных. Учебное пособие предназначено студентов обучающихся по направлению «Бизнес-информатика», «Прикладная математика и информатика», а также может быть полезно для самостоятельного изучения математических моделей логистики студентами других направлений таких, как, например, «Прикладная математика».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Широко известно в литературе следующее определение логистики как науки о планировании, контроле и управлении транспортированием, складированием и другими материальными и нематериальными операциями, совершаемыми в процессе доведения сырья и материалов до производственного предприятия, внутризаводской переработки сырья, материалов и полуфабрикатов, доведения готовой продукции до потребителя в соответствии с интересами и требованиями последнего, а также передачи, хранения и обработки соответствующей информации.

Высокая значимость математических моделей логистики заключается в реализации потенциальной возможности повышения эффективности функционирования материало-проводящих систем с помощью математических средств моделирования и управления поставками с учетом места хранения материальных ресурсов, способа и времени доставки, интенсивности реализации.

Данное учебно - методическое пособие позволяет студентам получить навыки применения математических моделей и методов для решения прикладных задач логистики. После представления теоретических вопросов логистики, в пособии демонстрируется применение теории для решения конкретных прикладных задач с графической интерпретацией полученных результатов. Тем самым, обучающиеся ориентируются на получение навыков, необходимых для их профессиональной деятельности в будущем.

В конце каждого параграфа учебного пособия предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Книга рассчитана на всех, кто интересуется математическими методами и моделями, применяемыми для решения конкретных задач логистики.

Автор выражают благодарность рецензенту: Заботину И.Я.

§1. МАКРОЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА «ЗАТРАТЫ- ВЫПУСК»

1.1. Краткая историческая справка

Василий Васильевич Леонтьев (5 августа 1905, Мюнхен— 5 февраля 1999, Нью-Йорк) — американский экономист российского происхождения, создатель теории межотраслевого анализа, лауреат Нобелевской премии по экономике за 1973 год «за развитие метода „затраты — выпуск“ и за его применение к важным экономическим проблемам».

1.2. Вопросы для практических занятий по разделу

"Макрологистическая модель Леонтьева «затраты - выпуск» "

1. Истоки и предпосылки возникновения и развития метода межотраслевого баланса.

2. Модели межотраслевого баланса и их использование в практике анализа макроэкономических пропорций.
3. Схема и экономико-математическая модель баланса совокупного общественного продукта в натуральном выражении.
4. Схема и экономико-математическая модель баланса в денежном выражении.
5. Основные балансовые соотношения.
6. Основные методологические вопросы построения МОБ общественного продукта (вопросы классификации отраслей материального производства, вопросы методов учета и оценивания продукции).
7. Принцип чистого продукта и чистой отрасли.
8. Нормативная база межотраслевого баланса: экономическая природа коэффициентов прямых и полных материальных затрат.
9. Математический анализ модели межотраслевого баланса: Основные свойства матрицы прямых материальных затрат А. Продуктивность матрицы прямой материалоемкости.

10. Существование решения системы уравнений $(E - A) \cdot X = Y$.
11. Использование МОБ для распределения трудовых ресурсов, основных фондов, инвестирования: баланс трудовых ресурсов (сводный и развернутый баланс труда), баланс основных производственных фондов.
12. Основные направления развития модели межотраслевого баланса. Динамические модели МОБ.

1.3. Ключевые понятия

- Валовый продукт,
- промежуточный продукт,
- конечный продукт,
- условно-чистый продукт,
- баланс в денежном выражении,
- хозяйственная отрасль,
- чистая (технологическая) отрасль,
- чистый продукт,
- коэффициент прямой (полной) материалоемкости,
- коэффициент прямой (полной) трудоемкости,
- коэффициенты прямой (полной) фондоемкости,
- коэффициенты косвенных материальных затрат различного порядка.
- таблица межотраслевого баланса

1.4. Методические указания по выполнению контрольных заданий. Теория по модели Леонтьева «Затраты - выпуск»

Задания, предложенные по разделу "Макрологистическая модель Леонтьева «Затраты - выпуск» ", предусматривают нахождение показателей валового продукта, межотраслевых потоков, материальных затрат в отрасли, потребности в трудовых ресурсах, основных производственных фондах в зависимости от заданных значений конечного продукта. Основу расчетов этих показателей составляют экономико-математические модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции.

Предположим, что вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции (по принципу чистой отрасли и чистого продукта). Предполагается, что определенная доля выпуска каждой отрасли расходуется, во-первых, в непроизводственной сфере (потребление населением), а, во-вторых, используется в качестве ресурсов производства в других отраслях экономики.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса выражается системой:

$$X = A \cdot X + Y. \qquad (1)$$

где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - матрица коэффициентов прямых материальных затрат i- ой продукции на единицу j- ой продукции (n - число видов продукции; $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор-столбец, i-ая координата которого равна объему производства i-ой конечной продукции, i=l, …, n;

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - вектор-столбец, i-ая координата которого равна объему производства валовой продукции i-го вида, i=l, …, n.

Система (1) может быть записана в следующем виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i, i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Преобразовав систему (1), получим

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \qquad (3)$$

или для i–той отрасли

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot y_i, \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (4)$$

где E – единичная матрица n x n, b_{ij} – соответствующий элемент матрицы $(E\text{-}A)^{-1}$.

С помощью формулы (3) легко пересчитать объем валового выпуска при изменениях величины конечного продукта:

$$X + \Delta X = (E - A)^{-1} \cdot (Y + \Delta Y).$$

$\Delta X=(\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta X_n)$, $\Delta Y=(\Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots, \Delta Y_n)$. Отсюда, учитывая (3), имеем: $\Delta X = (E\text{-}A)^{-1} \Delta Y$.

Отметим, что материальные затраты предметов труда и условно-чистая продукция в сумме образуют ценностный объем совокупного общественного продукта, а для каждого отдельного вида продукции - стоимость объема произведенной продукции соответствующего наименования

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j, \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (5)$$

где x_{ij} - количество продукции вида i, израсходованное на производство продукции вида j (в денежном выражении), x_j - объем валового выпуска j отрасли, z_j - величина чистого продукта и амортизационных отчислений в составе стоимости продукции j-го вида.

Построение межотраслевого баланса общественного продукта основано на принципах деления общественного продукта по материально-вещественному и стоймостному составу. Сводная таблица межотраслевого баланса общественного продукта состоит из четырех основных разделов-квадрантов. Система линейных уравнений (5) описывает взаимосвязи I и III квадрантов следующей таблицы. I квадрант описывает межотраслевые взаимосвязи по использованию продукции на текущее производственное потребление. II квадрант отражает материально-вещественный состав конечного продукта (затраты продукции на возмещение выбытия основных фондов; на накопление производственных фондов; на личное и общественное непроизводственное потребление на экспорт). В III квадранте находит отражение условно-чистый продукт (чистый продукт + амортизационные отчисления в материальном производстве). В IV квадранте дается подробная характеристика процессов перераспределения национального дохода.

Здесь отражается, как полученные в сфере материального производства первичные доходы населения (заработная плата рабочих и служащих промышленных и сельско-хозяйственных предприятий различной формы собственности), государства (прибыль, налог с оборота и т.д.) перераспределяются через различные каналы (финансово-кредитную систему, сферу обслуживания, торговлю, общественное питание, политические организации), в результате чего образуются конечные доходы населения, государства, предприятий, которым противостоят определенные фонды материальных благ (фонды накопления, потребления, капитальных вложений, материального стимулирования и т.д.) .

Алгебраическое решение системы уравнений (3) или (4) тесно связано с определением коэффициентов прямых и полных материальных затрат. Коэффициенты прямых материальных затрат, согласно определению, вычисляются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \qquad (6)$$

Следовательно, система линейных уравнений (2) может быть переписана в следующем виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Отрасли	***1***	***2***	…	***j***	…	***n***	Итого	Конечный продукт	Валовой продукт
1	$\boldsymbol{X_{11}}$	$\boldsymbol{X_{12}}$	…	$\boldsymbol{X_{1j}}$	…	$\boldsymbol{X_{1n}}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{1j}$	Y_1	X_1
2	$\boldsymbol{X_{21}}$	$\boldsymbol{X_{22}}$	…	$\boldsymbol{X_{2j}}$	…	$\boldsymbol{X_{2n}}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{2j}$	Y_2	X_2
…	…	…	…	I квадрант			…	II квадрант	
i	$\boldsymbol{X_{i1}}$	$\boldsymbol{X_{i2}}$	…	$\boldsymbol{X_{ij}}$	…	$\boldsymbol{X_{in}}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$	Y_i	X_i
…									
n	$\boldsymbol{X_{n1}}$	$\boldsymbol{X_{n2}}$	…	$\boldsymbol{X_{nj}}$	…	$\boldsymbol{X_{nn}}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{nj}$	Y_1	X_1
Итого	$\sum_{i=1}^{n} X_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} X_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$	…	$\sum_{i=1}^{n} X_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i$	$\sum_{i=1}^{n} X_i$
Условно чистая продукция	z_1	z_2	…	z_j	…	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j$		
			III квадрант					IV квадрант	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	$\sum_{j=1}^{n} X_j$		

Это значит, что валовый продукт каждой отрасли равен сумме промежуточного и конечного продукта этой отрасли. Система линей ных уравнений (7) описывает взаимосвязи I и II квадрантов балансовой таблицы.

По определению матрица коэффициентов полных материальных затрат равна сумме матриц прямых и косвенных материальных затрат всех порядков, т.е.

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots , \qquad (8)$$

где $A^{(к)}$ - матрица косвенных материальных затрат к- го порядка. Учитывая, что $A^{(k)} = A^{k+1}$, имеем

$$C = A + A^2 + A^3 + \dots \qquad (9)$$

Из теории матриц известно, что разложение в степенной ряд матриц $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^к + \dots$ (если $A^к \to O$ при $к\to +0$, где O – нулевая матрица).

Тогда, если существует $(E-A)^{-1}$ и $A^к \to O$ при $к\to +0$, то

$$C = (E-A)^{-1} - E. \qquad (10)$$

Следовательно, расчет коэффициентов полных материальных затрат является довольно трудоемкой процедурой при больших значениях n.

Существует два способа расчета коэффициентов полных затрат:

1) точное обращение матрицы (Е-А) и вычисление $C = (E-A)^{-1} - E$,

2) приближенное вычисление матрицы С методом простой итерации.

1 способ:

Вычислить

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{\det(E-A)} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

где D_{ik} - алгебраическое дополнение элемента b_{ik} матрицы (Е-А).

Вычислить матрицу коэффициентов полных материальных затрат

$$C=(E-A)^{-1} - E.$$

2 способ.

На первой итерации положить $C^{(1)} = A$, на второй - $C^{(1)} = A + A^2 = A$

$+A \cdot C^{(1)}$, на третьей полагаем $C^{(3)} = A + A^2 + A^3 = A + A \cdot C^{(2)}$, … , $C^{(k)} = A + A \cdot C^{(k-1)}$, и так далее. Тогда $C^{(k)} - C^{(k-1)} = A^{(k)}$. Так как $A^к \to O$ при $к \to +0$, то за конечное число итераций можно добиться заданной точности вычисления матрицы С.

Одна из важнейших аналитических возможностей межотраслевого балансового метода состоит в определении прямых и полных затрат труда, на основе которых разрабатываются балансы трудовых ресурсов. Коэффициенты прямых затрат труда на единицу продукции j-ой отрасли определяются по следующей формуле:

$$t_j = \frac{x_j^t}{x_j}, \qquad (11)$$

где x^t_j - затраты живого труда в j-ой отрасли, x_j - объем производства валовой продукции j-ой отрасли.

Полные затраты труда представляют собой сумму прямых затрат (живого) труда и затрат овеществленного труда (косвенных затрат труда). Пусть T_j - коэффициент полных затрат труда на единицу продукции вида j, то

$$T_j = t_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot T_i, \quad j=1, \dots, n, \qquad (12)$$

где $a_{ij} \cdot T_i$ - косвенные затраты, перенесенные на j-ый вид продукции через использование i-ой продукции в j-ой отрасли.

Матричная запись соотношения (10) имеет вид: $T = t + T \cdot A$ или

$$T = t \cdot (E-A)^{-1}, \qquad (13)$$

где T, t – вектор-строки, $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Из (11) следует, что для любого вида продукции

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot t_j, \quad j=1, \dots, n, \qquad (14)$$

где b_{ij} - соответствующий элемент матрицы $(E-A)^{-1}$.

Потребности в основных фондах рассчитываются с помощью коэффициентов прямой фондоемкости продукции:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{x_j}, \qquad (15)$$

где Φ_j - объем основных фондов (в денежном выражении), занятых в производстве j-ой продукции.

Показатель полной фондоемкости F_j отражает объем основных производственных фондов, необходимых во всех отраслях для обеспечения выпуска единицы продукции j-ой отрасли:

$$F_j = f_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot F_i, \quad j=1, \ldots, n, \qquad (16)$$

где $a_{ij} \cdot F_i$ - косвенные затраты фондов, перенесенные на j-ый продукт через использование i-ой продукции в j-ой отрасли.

Матричная запись соотношения (14) имеет вид:

$$F = f + F \cdot A, \qquad (17)$$

где F, f – вектор-строки, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Отсюда следует, что

$$F = \mathbf{f} \cdot (E-A)^{-1} \qquad (18)$$

или для любого вида продукции j = 1, …, n

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot f_j, \quad j=1, \ldots, n, \qquad (19)$$

где b_{ij} (i,j = 1,…, n) - соответствующий элемент матрицы $(E-A)^{-1}$.

Отметим, что показатели прямой трудоемкости и фондоемкости могут рассматриваться в дифференцированном виде. Например, трудоемкость может быть подразделена по отдельным категориям работников или профессиональным группам. Фондоемкость может быть представлена в разрезе основных фондов (различные типы оборудования, зданий и сооружений).

Описанная выше система нормативов расхода производственных ресурсов (трудовых ресурсов и основных производственных фондов) обеспечивает взаимоувязку основных экономических показателей как на макроэкономическом уровне в целом, так и на уровне отдельных предприятий.

1.5. Контрольные задания. Примеры решения практических задач (Пример 1а, 2а)

Задача 1.

Определить объем валового продукта по отраслям и межотраслевые потоки на основе заданной величины конечного продукта и матрицы материальных затрат трехотраслевой модели.

Определить изменения валового продукта и межотраслевых потоков продукции для следующих изменений конечного продукта:

$\Delta y_1 = 15\%$, $\Delta y_2 = -10\%$, $\Delta y_3 = 10\%$.

Определить совокупную потребность в трудовых ресурсах с учетом изменений конечного продукта, если коэффициенты прямой трудоемкости составляют $t_1 = 1{,}3$, $t_2 = 1{,}5$; $t_3 = 0{,}6$ чел. на 1 млн. руб. валового продукта.

Определить промежуточный продукт каждой отрасли, величину материальных затрат в каждую отрасль; величину чистого продукта и амортизационных отчислений для каждой отрасли.

а)

отрасль пр-ва	коэффициенты прямой материалоемкости			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,4	0,2	0,3	35
2	0,3	0,4	0,3	30
3	0,2	0,2	0,2	80

Решение:

В этой задаче заданы:

1) Матрица коэффициентов прямых материальных затрат i-той продукции на единицу j-той продукции: $A=(a_{ij})_{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

2) Вектор конечного продукта

$$Y=\begin{pmatrix}35\\30\\80\end{pmatrix}$$

3) Коэффициенты прямой трудоемкости

$t=(1.3,\ 1.5\ ,\ 0.6)$

Объем валового продукта по отраслям может быть вычислен по формуле (3). Для этого нам необходимо знать матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$.

Вычислим сначала

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.4&0.2&0.3\\0.3&0.4&0.3\\0.2&0.2&0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6&-0.2&-0.3\\-0.3&0.6&-0.3\\-0.2&-0.2&0.8\end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы E-A:

$D_{11}=(-1)^2\cdot(0.6\cdot0.8-0.2\cdot0.3)=0.42,$
$D_{12}=(-1)^3\cdot(-0.3\cdot0.8-0.2\cdot0.3)=0.3,$
$D_{13}=(-1)^4\cdot(0.3\cdot0.2+0.2\cdot0.6)=0.18,$
$D_{21}=(-1)^3\cdot(-0.2\cdot0.8-0.2\cdot0.3)=0.22,$
$D_{22}=(-1)^4\cdot(0.6\cdot0.8-0.2\cdot0.3)=0.42,$
$D_{23}=(-1)^5\cdot(-0.6\cdot0.2-0.2\cdot0.2)=0.16,$
$D_{31}=(-1)^4\cdot(0.2\cdot0.3+0.6\cdot0.3)=0.24,$
$D_{32}=(-1)^5\cdot(-0.6\cdot0.3-0.3\cdot0.3)=0.27,$
$D_{33}=(-1)^6\cdot(0.6\cdot0.6-0.3\cdot0.2)=0.3.$

Найдем определитель матрицы (E-A):

$\det(E\text{-}A)=0.6\cdot0.6\cdot0.8-0.2\cdot0.2\cdot0.3-0.3\cdot0.3\cdot0.2-0.2\cdot0.6\cdot0.3-0.3\cdot0.2\cdot0.8-0.6\cdot0.2\cdot0.3=0.138.$

Тогда по формуле (12) обратная матрица равна:

$$(E\text{-}A)^{-1}=\frac{1}{0.138}\cdot\begin{pmatrix}0.42&0.3&0.18\\0.22&0.42&0.16\\0.24&0.27&0.3\end{pmatrix}^T=$$

$$=\frac{1}{0.138}\cdot\begin{pmatrix}0.42&0.22&0.24\\0.3&0.42&0.27\\0.18&0.16&0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.043478&1.594203&1.73913\\2.173913&3.043478&1.95652\\1.304348&1.15942&2.17391\end{pmatrix}.$$

Далее вычислим объем валового продукта по отраслям по формуле (3)

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y=\begin{pmatrix}3.043478 & 1.594203 & 1.73913\\ 2.173913 & 3.043478 & 1.95652\\ 1.304348 & 1.15942 & 2.17391\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}35\\ 30\\ 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}293.478261\\ 323.913043\\ 254.347826\end{pmatrix}$$

В правильности расчетов можно убедиться, проверив выполнение равенства

$$X=A\cdot X+Y.$$

Межотраслевые потоки рассчитываются по формуле (8), т.е.

$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$,

$x_{11}= a_{11} \cdot x_1 = 0.4\cdot 293.478261 = 117.391304$,

$x_{12}= a_{12} \cdot x_2 = 0.2\cdot 323.913043 = 64.782609$,

$x_{13}= a_{13} \cdot x_3 = 0.3\cdot 254.347826 = 76.304348$,

$x_{21}= a_{21} \cdot x_1 = 0.3\cdot 293.478261 = 88.043478$,

$x_{22}= a_{22} \cdot x_2 = 0.4\cdot 323.913043 = 129.565217$,

$x_{23}= a_{23} \cdot x_3 = 0.3\cdot 254.347826 = 76.304348$,

$x_{31}= a_{31} \cdot x_1 = 0.2\cdot 293.478261 = 58.695652$,

$x_{32}= a_{32} \cdot x_2 = 0.2\cdot 323.913043 = 64.782609$,

$x_{33}= a_{33} \cdot x_3 = 0.2\cdot 254.347826 = 50.869565$.

$$(x_{ij})_{3x3}=\begin{pmatrix}117.391304 & 64.782609 & 76.304348\\ 88.043478 & 129.565217 & 76.304348\\ 58.695652 & 64.782609 & 50.869565\end{pmatrix}.$$

Найдем изменения валового продукта для предложенных изменений конечного продукта Δy_1 =15%; Δy_2 = -10% ; Δy_3 =10% для этого определим стоймостное выражение для заданного процентного изменения конечного продукта:

35 - 100%

Δy_1 - 15%

Δy_1 = 5.25 млрд. руб.

30 - 100%

Δy_2 - - 10%

Δy_2 = -3 млрд. руб.

80 - 100%

Δy_3 - 10%

Δy_3 = 8 млрд. руб.

$$\Delta Y = \begin{pmatrix} 5.25 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Для определения изменений валового продукта воспользуемся формулой (6)

$$\Delta X = (E-A)^{-1} \cdot \Delta Y = \begin{pmatrix} 3.043478 & 1.594203 & 1.73913 \\ 2.173913 & 3.043478 & 1.95652 \\ 1.304348 & 1.15942 & 2.17391 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.25 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.108696 \\ 17.934783 \\ 20.760870 \end{pmatrix}.$$

Для расчета изменений межотраслевых потоков применим формулу

$\Delta x_{ij} = a_{ij} \cdot \Delta x_j$,

$\Delta x_{11} = a_{11} \cdot \Delta x_1 = 0.4 \cdot 25.108696 = 10.043478$,

$\Delta x_{12} = a_{12} \cdot \Delta x_2 = 0.2 \cdot 17.934783 = 3.586957$,

$\Delta x_{13} = a_{13} \cdot \Delta x_3 = 0.3 \cdot 20.76087 = 6.228261$,

$\Delta x_{21} = a_{21} \cdot \Delta x_1 = 0.3 \cdot 25.108696 = 7.532609$,

$\Delta x_{22} = a_{22} \cdot \Delta x_2 = 0.4 \cdot 17.934783 = 7.173913$,

$\Delta x_{23} = a_{23} \cdot \Delta x_3 = 0.3 \cdot 20.76087 = 6.228261$,

$\Delta x_{31} = a_{31} \cdot \Delta x_1 = 0.2 \cdot 25.108696 = 5.021739$,

$\Delta x_{32} = a_{32} \cdot \Delta x_2 = 0.2 \cdot 17.934783 = 3.586957$,

$\Delta x_{33} = a_{33} \cdot \Delta x_3 = 0.2 \cdot 20.76087 = 4.152174$.

Для вычисления совокупной потребности в трудовых ресурсах по отраслям (с учетом изменений конечного продукта) воспользуемся формулой

$$x_j^t + \Delta x_j^t = t_j (x_j + \Delta x_j).$$

Сначала вычислим $x_j + \Delta x_j$:

$x_1 + \Delta x_1 = 293.478261 + 25.108696 = 318.586957$,

$x_2 + \Delta x_2 = 323.913043 + 17.934783 = 341.847826$,

$x_3 + \Delta x_3 = 254.347826 + 20.76087 = 275.108696$.

Тогда совокупная потребность в трудовых ресурсах по отраслям вычисляется следующим образом

$x_1^t + \Delta x_1^t = 1.3 \cdot 318.586957 = 414.163043$,

$x_2^t + \Delta x_2^t = 1.5 \cdot 341.847826 = 512.771739$,

$x_3^t + \Delta x_3^t = 0.6 \cdot 275.108696 = 165.065217$.

Найдем промежуточный продукт каждой отрасли по формуле

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}.$$

Промежуточный продукт 1-ой отрасли

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 117.391304 + 64.78609 + 76.304348 = 258.478261.$$

Промежуточный продукт 2-ой отрасли

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 88.043478 + 129.565217 + 76.304348 = 293.913043.$$

Промежуточный продукт 3-ой отрасли

$$\sum_{j=1}^{n} x_{3j} = 58.695652 + 64.782609 + 50.869565 = 174.34726.$$

Материальные затраты в каждую отрасль рассчитываем по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}.$$

Материальные затраты в первую отрасль равны

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1} = 117.391304 + 88.043478 + 58.695652 = 264.130435.$$

Материальные затраты во вторую отрасль

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i2} = 64.782609 + 129.565217 + 64.782609 = 259.130435.$$

Материальные затраты в третью отрасль

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i3} = 76.304348 + 76.304348 + 50.869565 = 203.478261.$$

Вычислим величину чистого продукта и амортизационных отчислений для каждой отрасли по формуле:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij},$$

$$z_1 = 293.478261 - 264.130435 = 29.347826,$$

$$z_2 = 323.913043 - 259.130435 = 64.782609,$$

$$z_3 = 254.347826 - 203.478261 = 50.869565.$$

б) Для самостоятельного решения предлагается трехотраслевая модель со следующими данными:

отрасль пр-ва	коэффициенты прямой материалоемкости			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,3	0,1	0,1	90
2	0,3	0,2	0,4	20
3	0,1	0,1	0,1	100

<u>Задача 2.</u>

Для трехотраслевой модели межотраслевого баланса вычислить:
1) валовый выпуск, промежуточный продукт по каждой отрасли,
2) коэффициенты прямых и полных материальных затрат,
3) коэффициенты косвенных материальных затрат 1-го порядка,
4) коэффициенты прямой и полной трудоемкости,
5) коэффициенты прямой и полной фондоемкости,
6) изменения валового выпуска (ΔX) при изменении конечного продукта: $\Delta y_1 = 40\%$; $\Delta y_2 = 10\%$; $\Delta y_3 = 40\%$,
7) дополнительную потребность в трудовых ресурсах и основных производственных фондах в связи с изменением конечного продукта.

а)

Отрасль производства	Межотраслевые денежные потоки в млрд. руб.			Конечный продукт в млрд. руб.
	промышленность	сельск. хоз-во	прочие отрасли	
промышленность	65	35	0	65
сельск. хозяйство	25	25	35	65
прочие отрасли	15	45	45	75
Трудовые ресурсы в тыс. человек	3300	2550	3600	
Основные производ. фонды в млрд. руб.	100	120	150	

Решение:

В данной задаче даны:

1) Межотраслевые потоки – $(x_{ij})_{3x3}$

$$(x_{ij})_{3x3} = \begin{pmatrix} 65 & 35 & 0 \\ 25 & 25 & 35 \\ 15 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

2) Вектор конечного продукта

$$Y = \begin{pmatrix} 65 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix}$$

3) Затраты живого труда в j –той отрасли x_j^t

$x_1^t = 3300$ (тыс. чел.)

$x_2^t = 2550$ (тыс. чел.)

$x_3^t = 3600$ (тыс. чел.).

Вычислим коэффициенты прямых материальных затрат по формуле (8). Для этого нам нужно знать вектор валового продукта по отраслям:

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + y_1 = 65+35+0+65=165$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + y_2 = 25+25+35+65=150$$

$$x_3 = \sum_{j=1}^{n} x_{3j} + y_3 = 15+45+45+75=180.$$

Тогда коэффициенты прямых материальных затрат равны:

$a_{11} = 65/165 = 0.393939$ $a_{12} = 35/150 = 0.233333$ $a_{13} = 0$

$a_{21} = 25/165 = 0.151515$ $a_{22} = 25/150 = 0.166667$ $a_{23} = 35/180 = 0.194444.$

$a_{31} = 15/165 = 0.090909$ $a_{32} = 45/150 = 0.3$ $a_{33} = 45/180 = 0.25$

$$(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})_{3x3} = \begin{pmatrix} 0.393939 & 0.233333 & 0 \\ 0.151515 & 0.166667 & 0.194444 \\ 0.090909 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.393939 & 0.233333 & 0\\ 0.151515 & 0.166667 & 0.194444\\ 0.090909 & 0.3 & 0.25\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0.606061 & -0.233333 & 0\\ -0.151515 & 0.833333 & -0.194444\\ -0.090909 & -0.3 & 0.75\end{pmatrix}.$$

Далее вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы E-A:

$D_{11}=(-1)^2\cdot(0.833333\cdot0.75 - 0.194444\cdot0.3) = 0.566666,$
$D_{12}=(-1)^3\cdot(-0.151515\cdot0.75 - 0.090909\cdot0.194444) = 0.131313,$
$D_{13}=(-1)^4\cdot(\cdot0.151515\cdot0.3+ 0.090909\cdot0.833333) = 0.121212,$
$D_{21}=(-1)^3\cdot(-0.233333\cdot0.75 + 0\cdot0.3) = 0.174999,$
$D_{22}=(-1)^4\cdot(0.606061\cdot0.75 + 0\cdot0.090909) = 0.454546,$
$D_{23}=(-1)^5(-0.606061\cdot0.3 \cdot-0.233333\cdot0.090909) = 0.203030,$
$D_{31}=(-1)^4\cdot(\cdot0.233333\cdot0.194444+ 0\cdot0.3) = 0.04537,$
$D_{32}=(-1)^5\cdot(-0.606061\cdot0.194444+0\cdot0.151515) = 0.117845,$
$D_{33}=(-1)^6\cdot(0.606061\cdot0.833333- 0.233333\cdot0.151515) = 0.469697.$

Определитель матрицы равен:

$\det(E-A) = 0.606061\cdot0.833333\cdot0.75 + 0\cdot0.151515\cdot0.3 - 0.090909\cdot0.233333\cdot0.194444+ 0\cdot0.833333\cdot0.090909 - 0.606061\cdot0.3\cdot0.194444 - 0.75\cdot0.151515\cdot0.233333= 0.312795.$

Тогда обратная матрица может быть вычислена по формуле (12):

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.312795}\cdot\begin{pmatrix}0.566666 & 0.131313 & 0.121212\\ 0.174999 & 0.454546 & 0.203030\\ 0.04537 & 0.117845 & 0.469697\end{pmatrix}^T=$$

$$=\frac{1}{0.312795}\cdot\begin{pmatrix}0.566666 & 0.174999 & 0.04537\\ 0.131313 & 0.454546 & 0.117845\\ 0.121212 & 0.203030 & 0.469697\end{pmatrix}.$$

После соответствующих вычислений, получаем матрицу $(E-A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.811621 & 0.559469 & 0.145047 \\ 0.419805 & 1.453175 & 0.376748 \\ 0.387512 & 0.649084 & 1.501613 \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов полных материальных затрат может быть вычислена по формуле (11). Итак, матрица полных материальных затрат равна:

$$\mathbf{C}=(E-A)^{-1} - E.$$

$$C=(E-A)^{-1} - E = \begin{pmatrix} 1.811621 & 0.559469 & 0.145047 \\ 0.419805 & 1.453175 & 0.376748 \\ 0.387512 & 0.649084 & 1.501613 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.811621 & 0.559469 & 0.145047 \\ 0.419805 & 0.453175 & 0.376748 \\ 0.387512 & 0.649084 & 0.501613 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты косвенных материальных затрат 1-го порядка могут быть вычислены по формуле:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{i1}^{(1)} \cdot a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(1)} + \ldots + a_{in}^{(1)} \cdot a_{nj}^{(1)},$$

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{1})_{n \times n} = A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0.190542 & 0.130808 & 0.04537 \\ 0.102617 & 0.121465 & 0.081019 \\ 0.103994 & 0.146212 & 0.120833 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты прямых затрат труда на единицу продукции j-той отрасли определяются по формуле (9):

$$t_1 = \frac{x_1^t}{x_1} = \frac{3300 \text{ тыс. чел.}}{165 \text{ млрд. руб.}} = 20 \ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}},$$

$$t_2 = \frac{x_2^t}{x_2} = \frac{2550 \text{ тыс. чел.}}{150 \text{ млрд. руб.}} = 17 \ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}},$$

$$t_3 = \frac{x_3^t}{x_3} = \frac{3600 \text{ тыс. чел.}}{180 \text{ млрд. руб.}} = 20 \ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}}.$$

По формуле (11) найдем коэффициенты полной трудоемкости Т:

$$T = t\cdot(E\text{-}A)^{-1} = \begin{pmatrix}20 & 17 & 20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1.811621 & 0.559469 & 0.145047\\ 0.419805 & 1.453175 & 0.376748\\ 0.387512 & 0.649084 & 1.501613\end{pmatrix} =$$

$$= (51.119462,\ 48.875135,\ 39.337993).$$

Определим величину изменения валового выпуска продукции отраслей

$$\Delta x = (E\text{-}A)^{-1}\cdot\Delta y = \begin{pmatrix}1.811625 & 0.559473 & 0.145048\\ 0.419806 & 1.453175 & 0.376749\\ 0.387513 & 0.649085 & 1.501615\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\ 6.5\\ 30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}55.09026\\ 31.66306\\ 59.34284\end{pmatrix}$$

Дополнительную потребность в трудовых ресурсах определим следующим образом:

$$\Delta x_1^t = t_1\cdot\Delta x_1,\ \ \Delta x_1^t = 20\ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}}\cdot 55.09026\ \text{млрд. руб.} = 1101.8052\ \text{тыс. чел.}$$

$$\Delta x_2^t = t_2\cdot\Delta x_2,\ \ \Delta x_2^t = 17\ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}}\cdot 31.66306\ \text{млрд. руб.} = 538.27202\ \text{тыс. чел.}$$

$$\Delta x_3^t = t_3\cdot\Delta x_3,\ \ \Delta x_3^t = 20\ \frac{\text{тыс. чел.}}{\text{млрд. руб.}}\cdot 59.34284\ \text{млрд. руб.} = 1186.8565\ \text{тыс. чел.}$$

Вычислим коэффициенты прямой и полной фондоемкости:

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{x_1} = \frac{100\ \text{млрд. руб.}}{165\ \text{млрд. руб.}} = 0.606060,$$

$$f_2 = \frac{\Phi_2}{x_2} = \frac{120\ \text{млрд. руб.}}{150\ \text{млрд. руб.}} = 0.8,$$

$$f_3 = \frac{\Phi_3}{x_3} = \frac{150\ \text{млрд. руб.}}{180\ \text{млрд. руб.}} = 0.833333,$$

$$F = f\cdot(E\text{-}A)^{-1} = \begin{pmatrix}0.606060 & 0.8 & 0.833333\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1.811625 & 0.559473 & 0.145048\\ 0.419806 & 1.453175 & 0.376749\\ 0.387513 & 0.649085 & 1.501615\end{pmatrix} =$$

$$= (1.756726,\ 2.042518,\ 1.640652).$$

Наконец, вычислим дополнительную потребность в основных производственных фондах:

$\Delta\Phi_1 = f_1 \cdot \Delta x_1, \ \Delta\Phi_1 = 0.606060 \cdot 55.09026$ млрд. руб. = 33.388002 млрд. руб.

$\Delta\Phi_2 = \mathrm{f}_2 \cdot \Delta x_2, \ \Delta\Phi_2 = 0.8 \cdot 31.66306$ млрд. руб. = 25.330448 млрд. руб.

$\Delta\Phi_3 = \mathrm{f}_3 \cdot \Delta x_3, \ \Delta\Phi_3 = 0.833333 \cdot 59.34284$ млрд. руб. = 49.452347 млрд. руб.

Отрасль производства	Межотраслевые денежные потоки в млрд. руб.			Конечный продукт в млрд. руб.
	промышленность	сельск. хоз-во	прочие отрасли	
промышленность	68	30	18	54
сельск. хозяйство	34	30	45	41
прочие отрасли	17	45	45	73
Трудовые ресурсы в тыс. человек	3400	1800	2700	
Основные произв. фонды в млрд. руб.	120	150	250	

Задача 3.

Для трехотраслевой модели межотраслевого баланса вычислить:

1) валовый выпуск каждой отрасли производства ,

2) коэффициенты прямых материальных затрат; коэффициенты полных материальных затрат,

3) коэффициенты прямой и полной фондоемкости отраслей,

4) изменение валового выпуска (ΔX) и межотраслевых потоков продукции при следующем изменении конечного продукта:

$\Delta y_1 = 10\%$; $\Delta y_2 = -30\%$; $\Delta y_3 = 25\%$,

5) дополнительную потребность в основных фондах.

6) величину материальных затрат в каждую отрасль,

7) долю чистого продукта и амортизационных отчислений для каждой отрасли.

а)

Отрасль пр-ва	Межотраслевые ден. потоки в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	65	25	0	60
2	25	25	15	75
3	10	0	45	45
Основные фонды в млрд. руб.	160	120	100	

б)

Отрасль пр-ва	Межотраслевые ден. потоки в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	50	20	10	30
2	20	10	10	60
3	10	0	40	40
Основные фонды в млрд. руб.	140	100	80	

в)

Отрасль пр-ва	Межотраслевые ден. потоки в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	70	30	5	65
2	30	30	20	75
3	15	0	50	50
Основные фонды в млрд. руб.	150	120	110	

г)

Отрасль пр-ва	Межотраслевые ден. потоки в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	85	25	0	60
2	35	25	25	80
3	10	5	45	45
Основные фонды в млрд. руб.	160	130	80	

__Задача 4.__

Дана трехотраслевая модель межотраслевого баланса.

а)

Отрасли пр-ва	Промежуточный продукт в млрд. руб.			Конечный продукт (млрд. руб.)			
	1	2	3	потреби-тельские товары и услуги	капитало-вложения	гос. закуп-ки товаров	экспорт
1	10	15	25	15	5	4	1
2	5	5	10	3	1	0,5	0,5
3	35	0	15	30	12,5	5	2,5

Вычислить:

1) промежуточный, конечный, валовый продукт по каждой отрасли;

2) коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

3) коэффициенты косвенных материальных затрат 1-го порядка,

4) величину материальных затрат в каждую отрасль,

5) долю чистого продукта и амортизационных отчислений для каждой отрасли;

6) изменение валового выпуска (Δx) и межотраслевых потоков (Δx_{ij}) при изменении конечного продукта:

$\Delta y_1 = 30\%$; $\Delta y_2 = -10\%$; $\Delta y_3 = 20\%$.

б)

Отрасли пр-ва	Промежуточный продукт в млрд. руб.			Конечный продукт (млрд. руб.)			
	1	2	3	потреби-тельские товары и услуги	капитало-вложения	гос. закупки товаров	экспорт
1	15	25	10	10	5	4	0,5
2	5	10	5	4	2	1	1
3	0	15	35	25	14	5	2,5

Задача 5.

Для трехотраслевой модели МОБ

Вычислить:

1) промежуточный и валовый продукт заданных отраслей,

2) матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат первого порядка, и полных материальных затрат,

3) векторы коэффициентов прямой и полной трудоемкости,

4) векторы коэффициентов прямой и полной фондоемкости,

5) изменения в потребности в основных фондах и трудовых ресурсах при следующих изменениях конечного продукта:

$\Delta y_1 = 30\%$; $\Delta y_2 = -20\%$; $\Delta y_3 = 10\%$,

6) изменения объемов валового продукта отраслей, изменения межотраслевых денежных потоков продукции с учетом изменений конечного продукта,

7) величину материальных затрат в каждую отрасль,

8) долю чистого продукта и амортизационных отчислений для каждой чистой отрасли,

9) совокупную потребность в основных производственных фондах с учетом изменения конечного продукта,

10) совокупную потребность в затратах живого труда с учетом изменения конечного продукта.

а)

а)

отрасль пр-ва	Использовано на производство в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	45 35 55	75 60 35	60 55 40	40 60 50
Основные фонды в млрд. р.	150	120	80	
трудов. ресурсы в тыс. чел.	300	200	400	

б)

отрасль пр-ва	Использовано на производство в млрд. руб.			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	65 25 0	25 15 35	0 10 35	50 60 40
Основные фонды в млрд. руб.	140	100	90	
трудов. ресурсы в тыс. чел.	200	300	400	

Задача 6.

Пусть в данной трехотраслевой модели МОБ величина конечного продукта изменяется следующим образом:

$\Delta y_1 = 20\%$; $\Delta y_2 = 10\%$; $\Delta y_3 = -20\%$.Определить:

1) изменение валового выпуска (Δx) и межотраслевых потоков (Δx_{ij}),
2) изменение потребности в трудовых ресурсах по отраслям,

3) изменение потребности в основных производственных фондах по отраслям,

4) промежуточный и валовый продукт заданных отраслей, условно-чистый продукт, материальные затраты в каждую потребляющую отрасль,

5) матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат первого порядка, и полных материальных затрат,

6) совокупные затраты живого труда в каждой отрасли,

7) совокупные затраты ОПФ в каждой отрасли.

а)

отрасль производства	Прям. материалоемкость по отраслям			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,3	0,1	0,4	30
2	0,2	0,3	0,1	20
3	0,2	0,1	0,2	80
коэфф. прям. труд. затрат (чел. /млн. р.)	2,5	3,9	1,1	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	0,8	1,2	1,5	

б)

отрасль производства	Прям. материалоемкость по отраслям			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,4	0,2	0,1	80
2	0,5	0,3	0,4	30
3	0,1	0,4	0,1	40
коэфф. прям. труд. затрат (чел. /млн. р.)	2,5	3	1,5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	0,5	2	2,5	

в)

отрасль производства	Прям. материалоемкость по отраслям 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,4	0,1	0,1	40
2	0,5	0,3	0,4	30
3	0,1	0,1	0,2	80
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2,5	4	1,2	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	0,9	1,3	1,5	

г)

отрасль производства	Прям. материалоемкость по отраслям 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,3	0,2	0,4	90
2	0,2	0,4	0,2	30
3	0,1	0,3	0,1	45
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2	3,5	1,5	
Прям. фондоем.	0,6	2,5	2,5	

д)

отрасль производства	Прям. материалоемкость по отраслям 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,2	0,3	0,4	40
2	0,2	0,4	0,3	90
3	0,1	0,1	0,1	45
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	3,5	1,5	2	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	2,5	3	2,5	

е)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,3	30
2	0,3	0,1	0,3	35
3	0,2	0,2	0,2	90
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	1,5	3	4,5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	5	1,5	4	

ж)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,2	0,4	0,3	25
2	0,3	0,4	0,3	35
3	0,2	0,2	0,1	50
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	3	1,5	2,5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	5	3	8	

з)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,4	0,1	0,3	30
2	0,2	0,3	0,3	30
3	0,3	0,2	0,2	85
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	1,5	2	3	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	4	3,5	2	

и)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,2	0,4	0,3	85
2	0,3	0,4	0,2	30
3	0,2	0,2	0,3	60
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	3	2	5,5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	10	5	8	

к)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,3	30
2	0,3	0,4	0,1	30
3	0,4	0,2	0,2	80
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	4	10	8,5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	3	5	2	

л)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,3	30
2	0,2	0,4	0,2	30
3	0,3	0,2	0,4	85
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2	1	3	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	5	4	8	

м)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,5	0,2	0,3	30
2	0,2	0,4	0,3	30
3	0,2	0,2	0,2	70
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2,5	2	4	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	6	4	2	

н)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,1	0,1	0,1	100
2	0,3	0,3	0,4	20
3	0,2	0,1	0,1	90
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	3,5	5	6	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	7	3	2	

о)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1	0,3	0,2	0,1	95
2	0,3	0,2	0,4	20
3	0,1	0,1	0,1	100
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	0,5	9	5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	2	4	1	

п)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,4 0,3 0,1	0,1 0,3 0,1	0,1 0,4 0,2	90 25 100
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	9	5	2	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	1	4	3	

р)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,3 0,2 0,1	0,1 0,5 0,1	0,1 0,4 0,1	90 30 90
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2	3	2	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	12	9	10	

с)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,2 0,3 0,1	0,2 0,2 0,1	0,1 0,3 0,1	80 30 100
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	1	3	6	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	9	8	1	

т)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,4 0,3 0,2	0,2 0,2 0,1	0,2 0,3 0,1	90 70 100
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	2	3	2	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	8	3	9	

у)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,4 0,2 0,2	0,2 0,3 0,1	0,2 0,3 0,1	90 20 80
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	6	3	4	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	2	1	6	

ф)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат			конечный продукт в млрд. руб.
	1	2	3	
1 2 3	0,1 0,5 0,1	0,2 0,2 0,1	0,1 0,4 0,1	20 90 90
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	4	5	3	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	5	7	6	

х)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,2	0,2	0,2	25
2	0,3	0,3	0,3	80
3	0,1	0,1	0,1	95
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	9	7	4	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	2	4	9	

ц)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,2	0,2	0,1	20
2	0,3	0,3	0,4	80
3	0,1	0,1	0,2	70
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	4	5	3	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	1	8	6	

ч)

отрасль производства	Коэффициенты прямых материальных затрат 1	2	3	конечный продукт в млрд. руб.
1	0,1	0,2	0,1	40
2	0,4	0,1	0,3	90
3	0,2	0,3	0,2	90
Прям. трудоем. (чел. /млн. р.)	6	8	5	
коэффиц. прямых затрат ОПФ	7	3	6	

§2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

2.1. Система управления товарными запасами

Цели

- Изучить основные характеристики и правила работы моделей управления запасами.
- Научиться рассчитывать по формуле оптимальный размер заказа.
- Научиться анализировать влияние скидок на определение оптимального размера заказа.
- Уметь определять размер партии, когда пользователь одновременно является и производителем.
- Уяснить различие между методами непрерывного и периодического учета состояния запасов.
- Овладеть практическими навыками, связанными с определением необходимой политики управления запасами.
- Научиться графически интерпретировать работу моделей при разных типах контроля за состоянием запасов.
- Научиться проводить сравнительный анализ различных политик управления запасами.

Основные понятия

- Размер заказа(или партии).
- Время выполнения заказа.
- Точка заказа (критический уровень запасов).
- Цикл управления запасами.
- Интенсивность спроса.
- Тип контроля уровня запасов (постоянный, периодический, смешанный).
- Интервал между моментами проверки состояния запасов.
- Количество заказов в год.
- Затраты на размещение заказа.
- Затраты на хранение запасов.
- Интенсивность пополнения.
- Страховой (резервный) запас.
- Дефицит.
- Потери от дефицита.

- Закупочный затраты.
- Ценовой разрыв.
- Оптовые скидки.

Проблема управления запасами.

Модели управления товарными запасами чрезвычайно важны для современных фирм. Задача управления запасами возникает тогда, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени (конечном или бесконечном). В разработке системы управления запасами в первую очередь заинтересованы предприятия материально-технического снабжения, поточно-массового производства, оптовой и розничной торговли, обрабатывающей промышленности, службы сервиса. Текущий уровень наличных запасов может оказаться одним из важнейших факторов успешной деятельности фирм.

В основном, цель моделей управления запасами состоит в минимизации общих издержек хранения товарных запасов, и в определении оптимального количества товарных запасов, которое фирма должна хранить. Почему же модели управления запасами чрезвычайно важны? Существует множество различных причин, которые заставляют фирмы создавать товарные запасы. Одной из таких причин является то, что спрос и предложение не могут быть в постоянном равновесии.
Если спрос на товар выше чем предложение, то потребители товаров могут получить товары от других фирм. Переключение спроса приводит к потере выручки первой фирмы. Если же спрос на продукт меньше предложения, фирма может хранить с минимальными издержками оптимальное количество продукта, которое в свое время будет использовано для удовлетворения спроса потребителей. Соответственно, можно утверждать, что хранение запасов позволяет поставщику не только нейтрализовать колебания спроса, но и способствует установлению хороших бизнес-отношений с партнерами по бизнесу.

Фирма может использовать модель управления запасами для того чтобы получить прибыль в результате выгодного изменения цен. Например, если сегодня фирма ожидает, что цена на баррель нефти возрастает с текущей цены $75.00 до $80.00 в течение следующих двух недель, то лучшее решение для фирмы хранить нефть сейчас и продавать в будущем, получая на $5.00 больше за баррель. Подобным образом, если фирма ожидает, что цена будет снижаться, то она имеет две возможности: или продать нефть сейчас, или хранить до поры увеличения цены.

Спрос можно удовлетворить путем однократного создания запаса для каждой единицы времени или посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода, т.е. путем создания избыточного по отношению к единице времени запаса или создания недостаточного по отношению к полному периоду времени запаса. При избыточном запасе требуются более высокие удельные капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше. С другой стороны, при недостаточном запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают. Для каждого из указанных крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

Любая модель управления запасами в конечном счете должна дать ответ на два главных вопроса:

1. **Какое количество продукции заказывать**?
2. **Когда заказывать**?

Ответ на первый вопрос выражается через размер заказа, определяющего оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять всякий раз, когда происходит размещение заказа. В зависимости от рассматриваемой ситуации размер заказа может меняться во времени. Ответ на второй вопрос зависит от типа системы управления запасами. Если система предусматривает периодический контроль состояния запаса через равные промежутки времени (например, еженедельно или ежемесячно), момент поступления нового заказа обычно совпадает с началом каждого интервала времени.

Если в системе предусмотрен непрерывный контроль состояния запаса, то точка заказа обычно определяется уровнем запаса, при котором необходимо размещать новый заказ. В моделях возможен и смешанный контроль (за наиболее важными запасами устанавливается непрерывный контроль, за менее важными - периодический). При таком типе контроля отслеживаются критические запасы (например, дорогостоящие комплектующие, участвующие в производстве) и периодически контролируются менее важные запасы (например, запасы канцелярских товаров).

Время между определением потребности и пополнением запасов обычно складывается из следующих составляющих:

- время, необходимое покупателю на заказ;
- время, необходимое поставщику на отгрузку материалов;
- время движения материалов от поставщика к заказчику;
- время на разгрузку и складирование.

Очевидно, решение задачи управления запасами состоит в следующем:

1. В случае периодического контроля состояния запаса следует обеспечивать поставку нового количества ресурсов в объеме размера заказа через равные интервалы времени.
2. В случае непрерывного контроля состояния запаса необходимо размещать новый заказ в размере объема заказа всякий раз, когда его уровень достигает точки заказа.

Затраты на приобретение становятся важным фактором, когда цена единицы продукции зависит от размера заказа, что обычно выражается в виде оптовых скидок в тех случаях, когда цена единицы продукции убывает с возрастанием размера заказа. Затраты на оформление заказа представляют собой постоянные расходы, связанные с его размещением. Таким образом, при удовлетворении спроса в течение заданного периода времени путем размещения более мелких заказов (более часто) затраты возрастают по сравнению со случаем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов (и следовательно реже). Затраты на хранение запаса, которые представляют собой расходы на содержание запаса на складе (например, процент на инвестированный капитал, затраты на переработку, амортизационные расходы и эксплуатационные расходы), обычно возрастают с увеличением уровня запаса. Наконец, потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции. Обычно они связаны с ухудшением репутации поставщика у потребителя и с потенциальными потерями прибыли. Отметим, что модель управления запасами не обязательно должна включать все 4 вида затрат, т.к. некоторые из них могут быть незначительными, а иногда учет все видов затрат чрезмерно усложняет функцию суммарных затрат. На практике какую-либо компоненту затрат можно не учитывать при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Структура системы управления запасами.

Общая система управления запасами представляет собой три системы разного уровня:

Система 1 уровня: предусматривает обработку, ведения учета и хранения информации о запасах. Оперативный цикл системы 1-го уровня равен 1 дню.

Система 2 уровня: задача предполагает разработку правил принятия решения, на основе которых устанавливается срок подачи заказа и размер заказа, необходимого для пополнения запаса. Оперативный цикл задачи 2-го уровня 1 месяцу.

Система 3 уровня: позволяет на основе разработанных правил принятия решений построить модель управления запасами и определить в соответствии с данной моделью стратегии финансирования на следующий год.

Целесообразность создания товарных запасов.

Существует две точки зрения относительно необходимости создания товарных запасов.

1) С одной стороны, наличие товарных запасов позволяет поставщику нейтрализовать колебания спроса в условиях равномерного производства продукции;
2) С другой стороны, наличие товарных запасов позволяет быстро удовлетворять запросы потребителей.

Основными причинами создания запасов служит необходимость обеспечения бесперебойного материально-технического снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика потребителю партиями, а также не- совпадение ритма производства и ритма потребления.

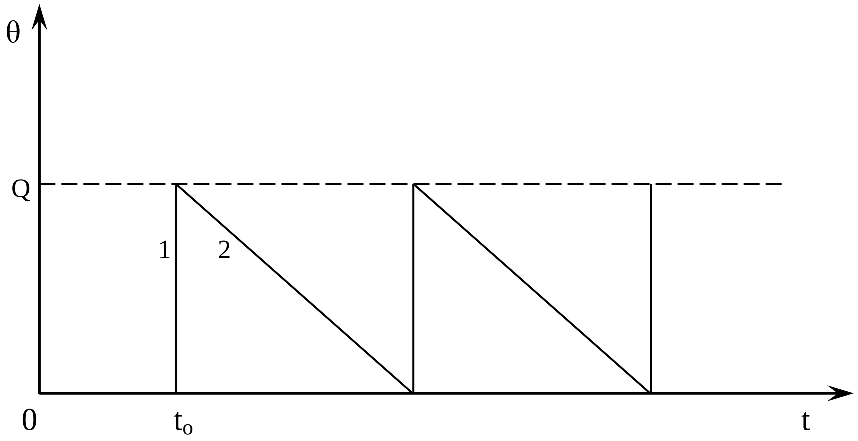
Исходные предположения относительно условий функционирования системы управления запасами.

Для того, чтобы формализовать задачу управления товарными запасами, необходимо сделать некоторые предположения относительно работы системы управления запасами.

А. Предположения о способе поставки заказанной продукции.

θ – уровень товарных запасов; t – время доставки заказа.

1А: продукция поставляется в виде единой партией, например, согласно следующей графической интерпретации.



1 – поставка товара одномоментно в размере одной партии;

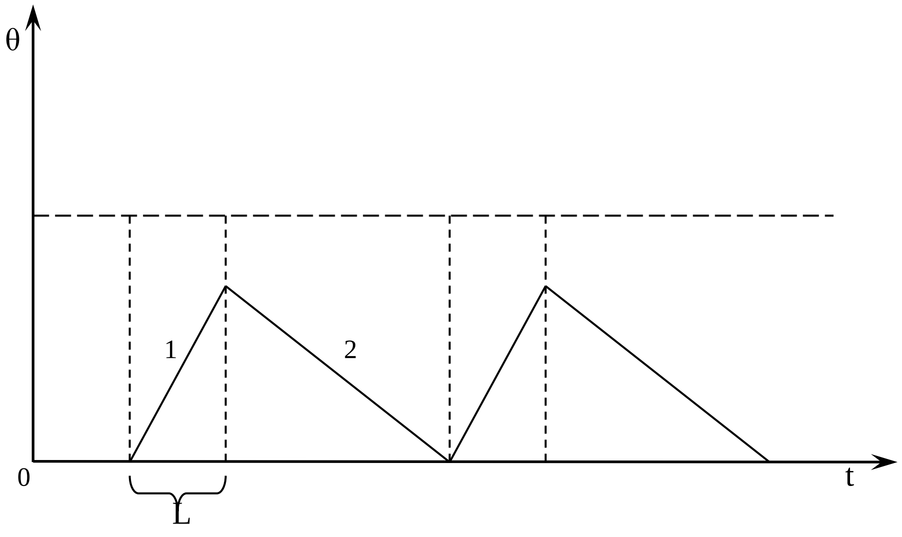
Q – размер одной партии;

2 – сбыт товарных запасов во времени, товарный запас расходуется с определенной интенсивностью.

Согласно модели наличный запас возрастает от минимального уровня таким образом, что к началу следующего цикла достигает размера партии.

2А: уровень товарных запасов функционально зависит от времени, спрос постоянный и постоянное время поставки заказа.

Согласно этой модели продукция поступает на склад с начала производственного цикла в течение интервала времени, достаточного для реализации продукции до поставки всей партии.



1 – интенсивность пополнения товарных запасов;

2 – интенсивность сбыта

Б. Предположения относительно интенсивности и сроков реализации продукции.

1Б: продукция реализуется с постоянной интенсивностью в течение неограниченного времени;

2Б: продукция реализуется с некоторой известной или прогнозируемой интенсивностью, изменяющейся во времени;

3Б: при значительных колебаниях спроса минимальный уровень запасов отличен от нуля, существует резервный запас (страховой запас).

В. Предположения о затратах на запуск в производство.

Данные затраты могут включать в себя затраты на наладку производственной линии, на организацию выполнения календарного графика производства, на размещение заказа. В этом случае возможны следующие предположения:

1В: освоение производства продукции нового типа независимо от выпускаемых ранее видов продукции требует новых затрат;

2В: основные затраты связаны с размещением заказа на изготовление совокупности изделий и незначительные затраты, связанные с включением в текущий заказ дополнительных единиц продукции этой же совокупности. Например, в случае изготовления деталей путем штамповки с использованием сменяющихся штампов из одинаковых рулонов материала одинаковой толщины и ширины, основные затраты связаны с наладкой производственной линии на штампование и небольшие затраты требуются для смены штампов.

Г. Предположения относительно себестоимости единицы продукции. При определении объема капитальных вложений в запасы учитываются соображения относительно себестоимости продукции, что приводит к целесообразности выпуска более крупных партий изделий, чем требуется в данный момент.

1Г: любой объем продукции может быть произведен при постоянной ее себестоимости.

2Г: существуют непредвиденные изменения цен на продукцию. В данном случае, если затраты на размещение будущих заказов могут возрасти по сравнению с существующей себестоимостью продукции, то текущий объем заказываемой партии должен быть больше того, который определяется величиной вероятности невыполнения заказа потребителей в необходимый срок. Это позволяет отдалить точку увеличения расходов на приобретение изделий по повышенной цене.

Д. Предположения относительно текущих затрат на хранение запасов.

1Д: текущие затраты определяются политикой капитальных вложений, основанной на учете риска возникновения товарного дефицита;

2Д: учитывается занимаемое пространство, особенно при складировании товаров с крупными габаритами. В этом случае высокие затраты требуют сокращения запасов до уровня, определяемого имеющимся свободным пространством.

Для более точного управления запасами последние могут быть классифицированы по различным основаниям (признакам), например, следующим образом:

Классификация товарных запасов.

1. – признак - стадия готовности:
   - материалы (сырье и полуфабрикаты);
   - запас комплектующих изделий;
   - готовая продукция на складе предприятия;
   - продукция, поступившая в систему распределения.
2. - признак - производитель:
   - продукция собственного производства;
   - продукция, поставляемая другими независимыми поставщиками;
   - продукция подразделений данной фирмы.
3. - признак – наличие выбора у заказчика продукции:
   - продукция от конкурирующих предприятий;
   - продукция, поставляемая только одной компанией.

Существует большое разнообразие моделей управления запасами и методов решения соответствующих задач, базирующихся на различном математическом аппарате: от простых схем дифференциального и интегрального исчисления до сложных алгоритмов динамического и других видов математического программирования. Такое разнообразие методов определяется характером спроса, который может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (задаваемым плотностью вероятности).

В этом пособии изучаются несколько простых классических моделей управления запасами, в большинстве из которых интенсивность поступления заказов предполагается известной и постоянной во времени. Несмотря на то, что на практике редко встречаются такие детерминированные случаи, детерминированные модели представляют очень большой интерес. Поскольку они позволяют познакомиться с методами анализа, используемыми в более сложных системах. Кроме того, результаты, полученные с помощью этих моделей, дают качественно правильные суждения о поведении системы даже при отказе от гипотезы детерминированности спроса.

2.2. Классические модели управления запасами

2.2.1. Модель с фиксированным размером заказа

Отметим, что данная модель известна в отечественной литературе под различными названиями, например как «Модель с экономичным размером партии». В зарубежной литературе эта модель более известна под названием (Q,P)–политика управления запасами. Данная классическая модель управления запасами была разработана более 70-80 лет назад. В такой системе размер заказа является постоянной величиной и повторный заказ делается при уменьшении наличных запасов до определенного критического уровня, который называется *точкой заказа*.

Система с фиксированным размером заказа основана на выборе размера партии, минимизирующего общие издержки управления запасами. *Общие издержки управления запасами* состоят из издержек выполнения заказа и издержек хранения товарных запасов.

Предположим, что

S – интенсивность реализации продукции (ед / год);

Q – размер партии для одномоментного пополнения товарных запасов;

A – затраты, связанные с запуском в производство заказанной партии продукции;

v – себестоимость единицы продукции (в денежных единицах),

r – отдача (в денежных единицах) от каждой денежной единицы, вложенной в товарные запасы.

Стратегия управления запасами состоит в том, чтобы обеспечить отдачу в r денежных единиц от каждой вложенной в товарные запасы денежной единицы, поскольку если бы капитал, вложенный в запасы, использовался в другой сфере деятельности фирмы, то он приносил бы определенную отдачу. Самый простой случай - когда r определяется банковским процентом от суммы, использованной для создания запасов, предполагая, что эта сумма могла бы хранится в банке. *Издержки выполнения заказа* – это накладные расходы, связанные с реализацией заказа.

Считается, что эти затраты не зависят от размера заказа (в промышленности – это подготовительно-заключительные операции).

$\frac{A}{Q}$ - издержки выполнения заказа в расчете на единицу товара из данной партии.

Для определения годовых издержек выполнения заказа необходимо издержки, приходящиеся на единицу товара, умножить на количество товара S, реализованного за год. $C_1(Q)=\frac{A}{Q}\cdot S$ - общие годовые затраты на выполнение заказа. Пусть N = S/Q - число поданных заказов на пополнение запасов, тогда

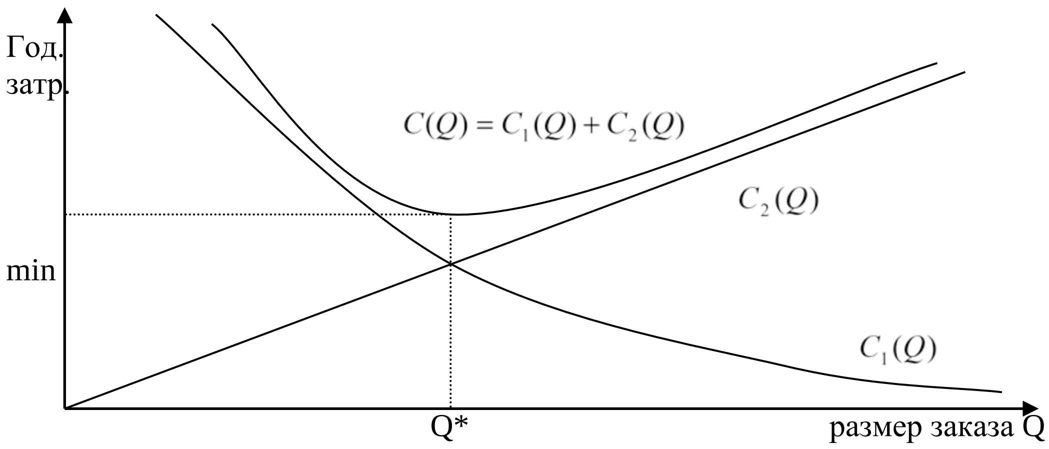
$$C_1(Q)=\frac{A}{Q}\cdot S=A\cdot N.$$

Издержки хранения запасов определяются средним уровнем запасов. При постоянной интенсивности сбыта годовые издержки хранения запасов составляют:

$$C_2(Q)=r\cdot v\cdot \frac{Q}{2}.$$

К этим издержкам относятся страховка, налоги, порча товара, мелкие хищения с места хранения, арендная плата за складское помещение, если оно не принадлежит системе и стоимость эксплуатации помещения склада, куда входят плата за освещение, отопление, охрану и т.п. В ряде случаев наиболее важными являются не прямые издержки, а те косвенные экономические потери, которые никогда не указываются в отчетных документах. Эти потери возникают от того, что капитал вкладывается в запасы вместо того, чтобы использоваться в других сферах деловой активности. Обозначим через k – косвенные экономические потери, тогда k = r· v. Запишем выражение через k: $C_2(Q)=r\cdot v\cdot \frac{Q}{2}=k\cdot\frac{Q}{2}$. Тогда функция общих затрат управления запасами определяется следующим образом:

$$C(Q)=C_1(Q)+C_2(Q).$$



Легко определить точку пересечения графиков функций $C_1(Q)$ и $C_2(Q)$, приравняв значения этих функций. Далее у нас будет возможность убедиться в том, что именно в точке пересечения графиков функций $C_1(Q)$ и $C_2(Q)$ достигается минимум функции общих затрат C(Q).

Чтобы определить *Q** - экономичный размер партии, обеспечивающий минимум функции общих издержек, необходимо вычислить производную функции общих издержек и приравнять ее нулю:

$$\min_{Q} C(Q)$$

$$C(Q) = \frac{A}{Q} S + r \cdot v \cdot \frac{Q}{2}$$

$$C'(Q) = -\frac{A\ S}{Q^2} + \frac{1}{2}\ r \cdot v = 0$$

$$\frac{A \cdot S}{Q^2} = \frac{1}{2}\ r \cdot v$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot S}{r \cdot v}}$$ формула Уилсона-Харрисона (1915 г.)

Так как Q* доставляет минимум функции C(Q), это самый экономичный размер заказа. Мы знаем, что *число заказов в год* определяется следующим образом: N= S/Q*. *Цикл управления запасами* (Inventory cycle) можно вычислить по формуле:

IC = КРД/N = КРД ·Q*/S,

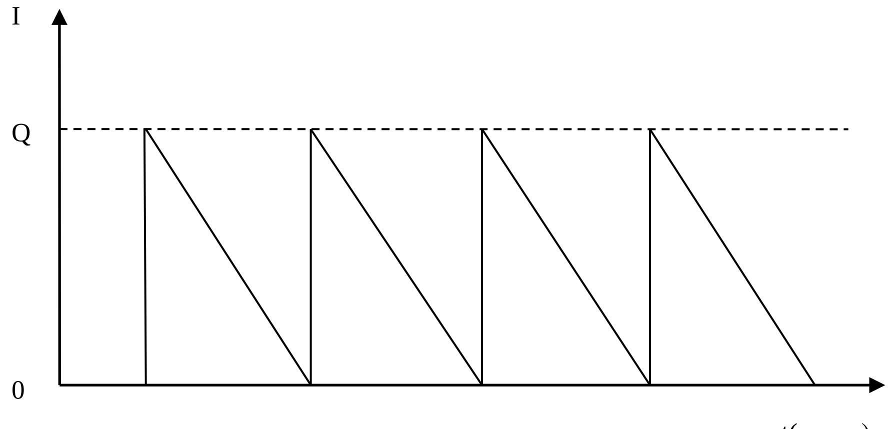
где КРД – число рабочих дней в году. Предположим, что в году 250 рабочих дней, тогда *цикл управления запасами* равен: IC = 250/N =

250 ·Q*/S. Отметим, что средне-суточный сбыт товаров вычисляется по формуле:

$$\overline{S}_L = \frac{S}{КРД}.$$

Графическая интерпретация.

В идеальном случае уровень запасов уменьшается с некоторой постоянной интенсивностью. И как только уровень запасов достигает нуля, немедленно поступает новый заказ размера Q.



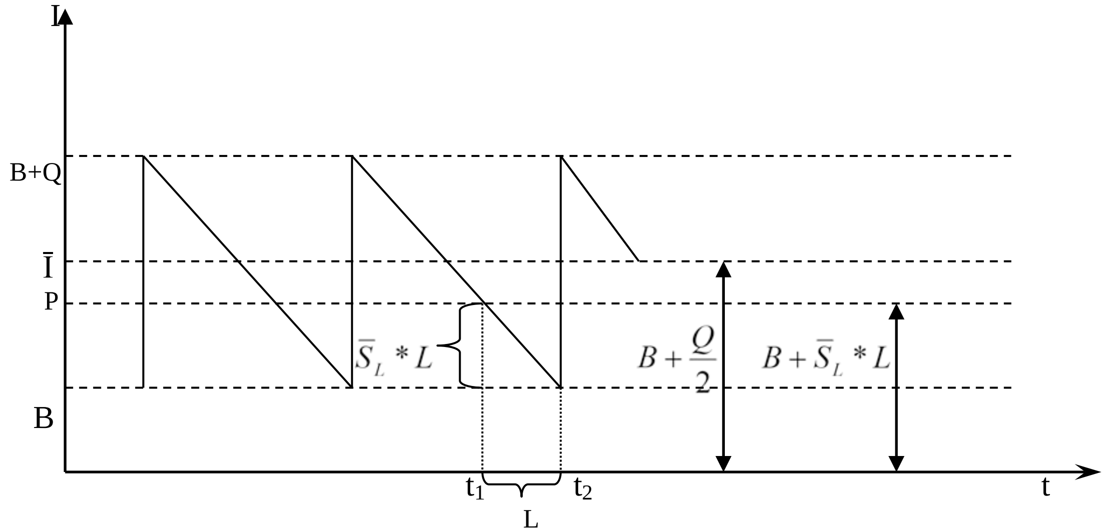
Рассмотрим более сложную модель, в которой для определения точки заказа, необходимо знать временную задержку между моментом подачи заказа и моментом выполнения заказа, среднесуточный ожидаемый сбыт $\overline{S_L}$ за время доставки заказа L (суток). Но примерно в половине случаев фактический сбыт за время доставки товара может превысить среднее значение и может возникнуть временная нехватка товарных запасов, т.е. появится дефицит. Поэтому необходим страховой (резервный) запас *B*. В этом случае *точка заказа* определяется по формуле:

$$P = B + \overline{S_L} \cdot L. \qquad (1)$$

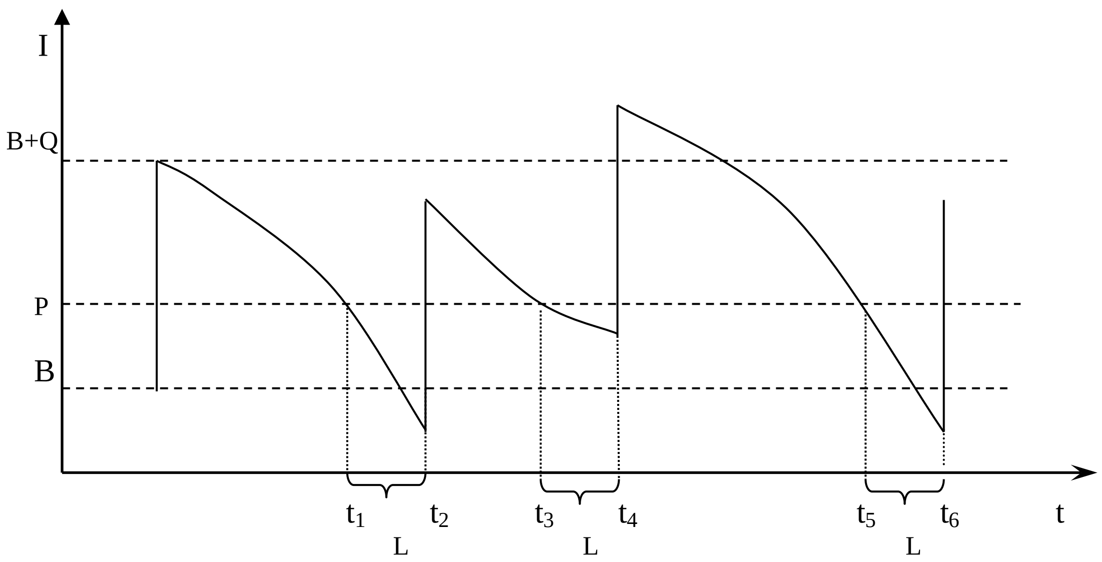
Средний уровень запаса составляет

$$\overline{I} = B + \frac{Q}{2}.$$

На графике I – наличные запасы, P - заказа, t_1 – момент подачи заказа, t_2 - момент получения заказа.



Рассмотрим более реальный случай, когда интенсивность сбыта представляет собой случайную величину.

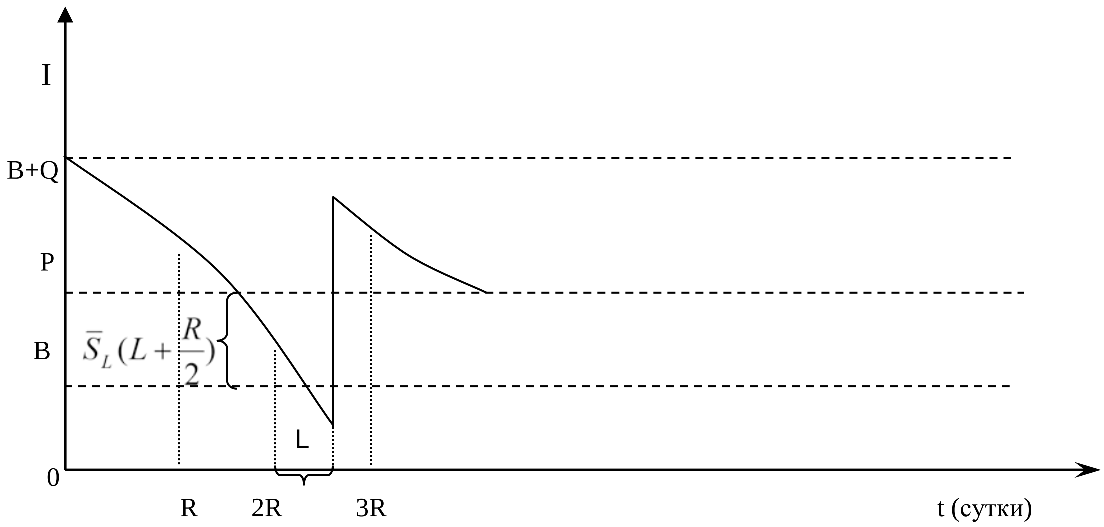


Формула (1) для определения точки заказа основана на предположении, что учет состояния товарных запасов ведется непрерывно и как только уровень запасов опускается ниже точки заказа, подается новый заказ. Однако в реальных условиях непрерывный учет состояния запасов не ведется и уровень запасов проверяется периодически. При периодических проверках уровень запасов может опуститься значительно ниже точки заказа, прежде чем обнаружится необходимость в повторении заказа. Поэтому классическую формулу для определения точки заказа необходимо скорректировать с учетом сбыта за время между моментами проверки.

Пусть R – временной промежуток между моментами проверками, определяющий с какой периодичностью осуществляется инвентаризация состояния запасов. В этом случае, формулу вычисления точки заказа добавится член $\frac{R}{2}$:

$$P = B + \overline{S_L}\left(L + \frac{R}{2}\right).$$

В данной модели с фиксированным размером заказа действует следующее основное правило: если на момент инвентаризации уровень запасов оказался меньше критического уровня $\theta \le P$, то подается заказ в фиксированном размере Q и выполняется этот заказ в течении L суток. Если же выполняется $\theta > P$, то заказ не подается (и соответственно через L суток нет поступления товаров).



$\bar{S}_L(L+\frac{R}{2})$ - сбыт за время $\left(L+\frac{R}{2}\right)$.

2.2.1.1. Примеры применения модели с фиксированным размером заказа для решения задачи управления запасами

Пример 1.

Букинистический магазин имеет ежегодный спрос на книгу Паула Кеннеди в количестве 1000 штук. Каждая книга стоит $10.00. Было оценено, что реализация каждого заказа стоит $74.89, а издержки хранения запасов составляют 15 % от цены каждой книги. L = 4 дня,

B = 0, КРД = 250 рабочих дней. Определить Q^*,$C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, средний и критический уровни запасов, число заказов в течение года, длину цикла управления запасами IC, считая при этом, что имеет место постоянный контроль за уровнем запасов. Осуществить графическую интерпретацию полученных результатов.

Решение:

Согласно условиям задачи, k=($10.00) (0.15)= $1.5, A=$74.89, S= 1000. Тогда по формуле Уилсона:

$$Q^* = \sqrt{2A \cdot S / k} = \sqrt{(2 \cdot 74.89 \cdot 1000/1.5)} = 315.99578 \approx 316 \text{ книг.}$$

$$C_1(Q^*) = A \cdot S/Q^* = (74.89 \cdot 1000)/316 = \$\,236.99367 \approx \$237.$$

$$C_2(Q^*) = k \cdot Q^*/2 = 1.5 \cdot 316/2 = \$236.99367 \approx \$237.$$

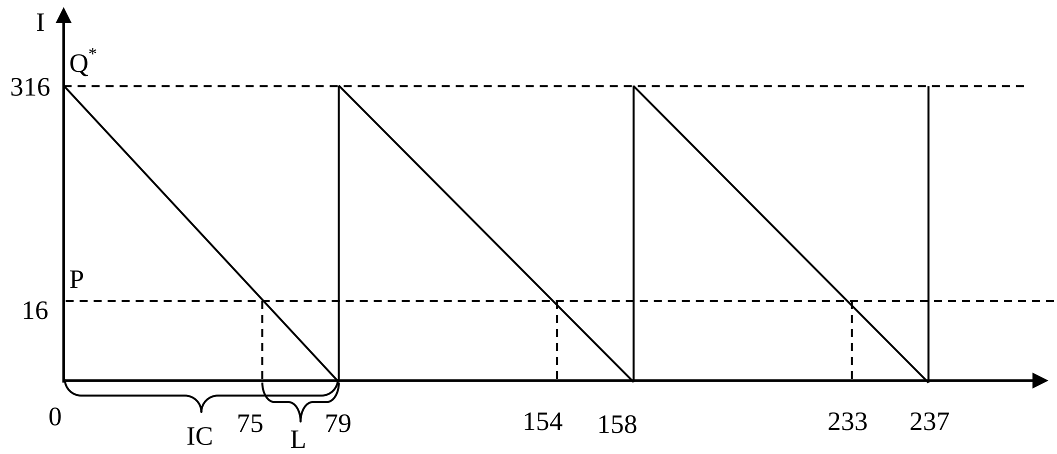
$$C(Q^*) = \$474.$$

$$J = Q^*/2 = 316/2 = 158 \text{ книг.}$$

$$N = S/Q^* = 1000/315.99578 = 3.16456 \approx 3 \text{ заказа.}$$

Длина цикла равна IC = 250/N = 250/3.16456 = 78.9999 ≈ 79 рабочих дней, что означает, что магазин должен заказывать товар через каждые 75 рабочих дней с начала цикла. Если известно время выполнения заказа L , то точка заказа может быть вычислена по формуле $P = B + S_L \cdot L$. В примере B = 0, $S_L = 1000/250 = 4$ книги реализуются за один рабочий день, тогда $P = 4 \cdot 4 = 16$ книг, если L = 4 дня. Другими словами букинистический магазин должен подавать заказ как только уровень запасов достигает 16 книг.

Графическая интерпретация решения:



Моменты подачи заказа 75, 154, 233 … дни

Моменты выполнения заказа 79, 158, 237 … дни

Пример 2.

Жидкие продукты нескольких видов разливаются в пакеты на одной производственной линии упаковки. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют $700, потребность в продуктах составляет 140000 литров в месяц, стоимость хранения 1 л в течение месяца равна $4.00. Определить оптимальные параметры системы управления запасами. Сравнить затраты при экономичном размере партии с затратами при действующей системе разлива одного продукта в течение трех дней.

Решение:

Согласно условиям задачи A = 700, S = 140000, k = 4. Тогда

$$Q^* = \sqrt{2A \cdot S / k} = 7000 \text{ литров.}$$

$$C_1(Q^*) = A \cdot S/Q^* = (700 \cdot 140000)/7000 = \$\,14000.$$

$$C_2(Q^*) = k \cdot Q^*/2 = 4 \cdot 7000/2 = \$14000.$$

$$C(Q^*) = C_1(Q^*) + C_2(Q^*) = \$28000.$$

Число заказов в месяц должно быть

$$N = S/Q^* = 140000/7000 = 20.$$

Длина цикла при этом равна IC = 30/N = 30/20 ≈ 1.5 дня (считаем при этом, что в месяце 30 дней). При действующей системе разлива одного продукта в течение трех дней разливают Q = (S·3 дня) /30 = 14000 литров продукта с затратами $C(Q^*) = (700 \cdot 140000)/14000 + (4 \cdot 14000)/2 = \$\,35000$.

Пример 3.

Фирма LLG Company специализируется на продаже различных марок холодильников и другой бытовой техники. Предположим, что LLG Company является дилером определенного бренда холодильников. При условии, что годовой спрос равен 720 шт., издержки размещения заказа равны $25.00 за заказ, издержки хранения одного изделия составляют $90.00; определить оптимальное количество холодильников, минимизирующее общие годовые издержки управления запасами, J. Определить также $C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, N, IC, P, предполагая, что в году всего 250 рабочих дней и время выполнения заказа равно 3 дням, страховой запас равен нулю, осуществляется постоянный контроль за уровнем запасов.

Решение: По условиям задачи A = $25.00, S = 720, k = $90.00.

Тогда $Q^* = \sqrt{2A \cdot S / k} = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 720 / 90} = 20$ шт.

$$C_1(Q^*) = A \cdot S/Q^* = (25 \cdot 720)/20 = \$\,900.$$

$$C_2(Q^*) = k \cdot Q^*/2 = 90 \cdot 20/2 = \$900.$$

$$C(Q^*) = C_1(Q^*) + C_2(Q^*) = \$1800.$$

$$J = Q^*/2 = 20/2 = 10 \text{ шт.}$$

Число заказов в год должно быть

$$N = S/Q^* = 720/20 = 36.$$

Длина цикла при этом равна $IC = 250/N = 250/36 = 6.94444 \approx 7$ дням (так как в году 250 рабочих дней). Поскольку время выполнения заказа $L = 3$ дням, то точка заказа равна $P = B + S_L \cdot L$. В примере $B = 0$, $S_L = 720/250 = 2.88 \approx 3$ холодильника в день. Тогда $P = 2.88 \cdot 3 =$
$8.64 \approx 9$
холодильников. То есть, фирма LLG должна подавать заказ как только уровень запасов достигает 9 штук.

Модель с фиксированным размером заказа может быть применена и для описания производственного процесса, если при этом издержки заказа A замещаются издержками (Setup costs) SC на запуск нового производства (Hiller, Lieberman 1980; Draper, Klingman 1972). Эти издержки связаны с подготовкой производственного процесса на производство нового продукта.

Например, производственную линию можно переналадить с производства книг на производство газет. Это изменение требует изменения сырья, материалов и других элементов для того, чтобы наладить производственную линию. Следующий пример иллюстрирует это.

<u>Пример 4.</u>

Фирма Lin LTD должна обеспечивать одного из своих продавцов 4000 кондиционеров ежегодно. Ежегодные издержки хранения составляют \$50.00 на единицу изделия, затраты на запуск новой производственной линии составляют \$160.00. Определить количество изделий, которое должно быть произведено за каждый производственный цикл с минимальными полными издержками управления запаса. Также определить общегодовые затраты на запуск нового производства, TSC, число производственных циклов NP, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$.

<u>Решение:</u>

Выпишем известные из условия задачи параметры $S = 4000$ штук, $k =$ \$50.00 за единицу изделия, $SC = \$160.00$.

Таким образом $Q^* = 2 \cdot SC \cdot S/k = 2 \cdot 160 \cdot 4000/50 = 160$ штук.

Общегодовые затраты на запуск новой производственной линии равны $TSC = SC \cdot S/Q^* = 160 \cdot 4000/160 =$ \$4000, число производственных циклов в год NP= S/Q* = 4000/160 = 25 циклов за год. Издержки хранения запасов $C_2(Q^*)= k\cdot Q^*/2 = 50\cdot 160/2=$ \$4000. Общие затраты составляют

$$C(Q^*) = TSC + C_2(Q^*) = \$4000+\$4000 = \$8000.$$

2.2.1.2. Модель с экономичным размером партии при наличии ценовых разрывов

Часто цена на какой-либо товар не является постоянной. На практике стоимость изделия иногда зависит от размера заказа, и многие поставщики предлагают привлекательные скидки на большие заказы. Часто при закупке товара большими партиями вводятся скидки (discount) (Winston 1987). Продавец, которому необходимо решить покупать продукт со скидкой или нет, должен сравнить значения функций издержек со скидкой и без, выбрать минимальные издержки.

В этом случае, функция C(Q) модифицируется включением закупочных затрат PC (Purchasing cost):

$$C(Q) = C_1(Q) + C_2(Q) + PC(\beta) = \frac{r\cdot\beta\cdot Q}{2} + C_2(Q) + \beta\cdot S$$

$$PC(\beta) = \beta\cdot S, \beta = \begin{cases} \beta_1, \textit{ цена за единицу товара без скидки,} \\ \beta_2, \textit{ цена за единицу товара со скидкой.} \end{cases}$$

<u>Пример 5.</u>

Пусть известна следующая информация: β_1 = \$80.00, β_2=\$70.00, Пусть S, r, A не зависят от размера закупки: S = 250, r=0.30, A=\$15.00.

<u>Решение:</u>

Результаты решения оформлены в виде следующей таблицы:

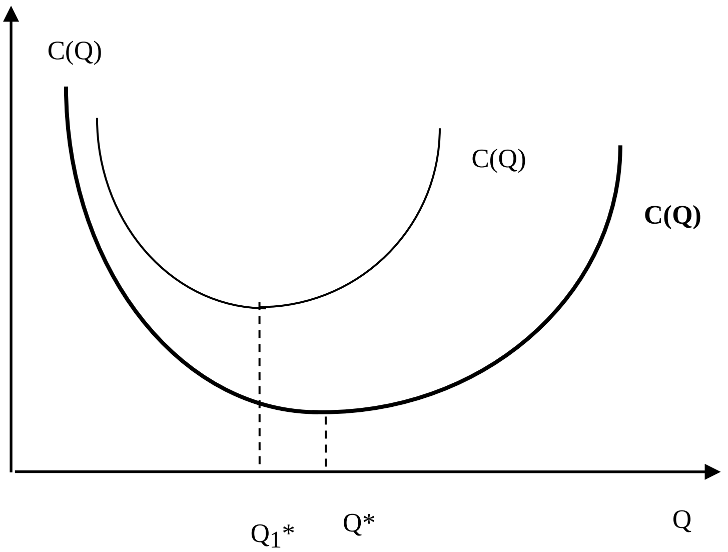
	Без скидки	Со скидкой
Q*	17.67767≈ 18	18.89822≈19
$C_1(Q^*)=A\cdot S/Q^*$	208.33333	197.36842
$C_2(Q^*)=r\cdot v\cdot Q^*/2$	216	199.5
$PC(\beta)=\beta\cdot S$	20000	17500
$C(Q^*)=C_1(Q^*)+ +C_2(Q^*)+PC(\beta)$	20424.33333	17896.86842

На следующем рисунке изображены графики функций общих затрат управления запасами при наличии ценовой скидки и без скидки.

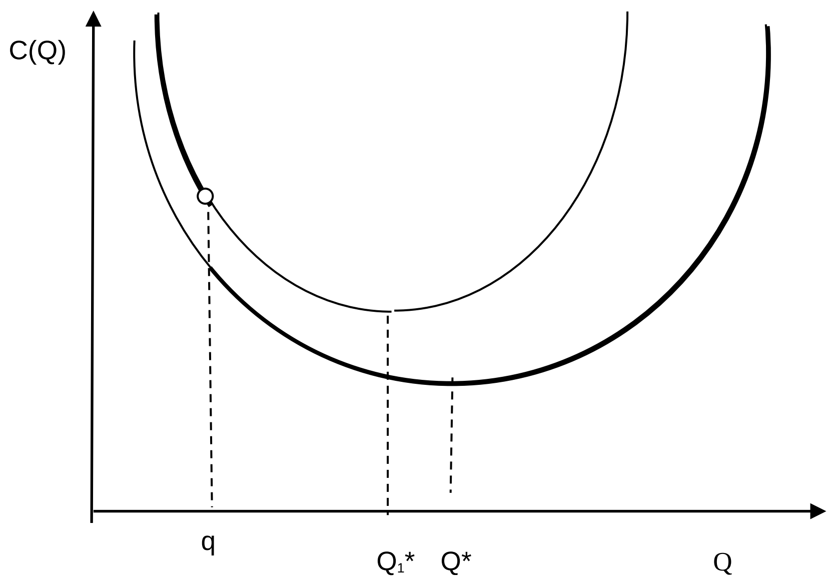
Область допустимых значений Q разделена на три зоны: 1) $[0, Q_1^*]$,

2) $[Q_1^*, Q^*]$,

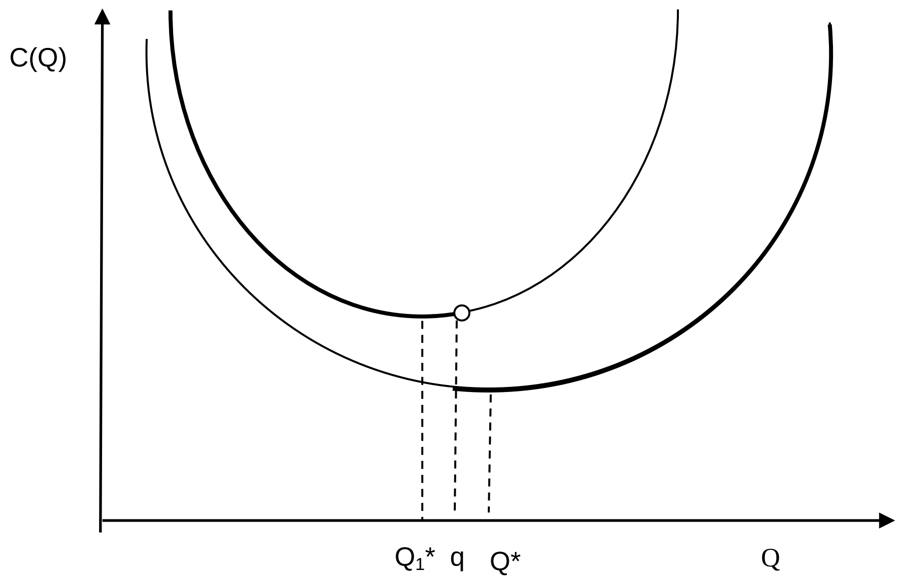
3) $[Q^*, +\infty]$. Принятие решения о том какое количество товара (со скидкой или без) покупать определяется тем, какой зоне принадлежит величина q (размер партии, с которого начинает действовать скидка). На следующем рисунке и везде далее график функции затрат со скидкой выделен более темным цветом.



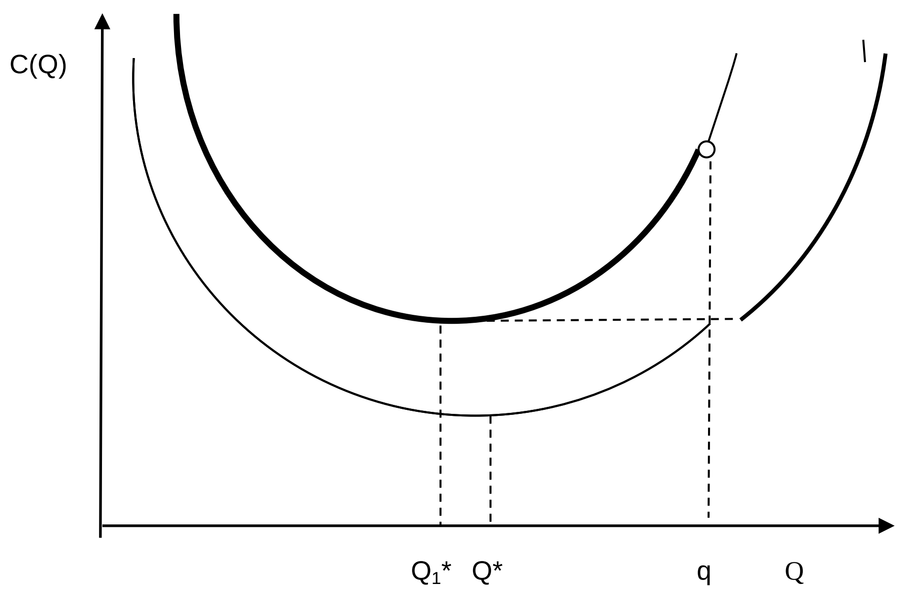
При принятии решений о размере покупки мы должны проанализировать пять возможных случаев (при одном ценовом разрыве). В первом случае, величина q лежит в первой зоне. Поэтому в этом случае оптимальный размер покупки равен Q^* .



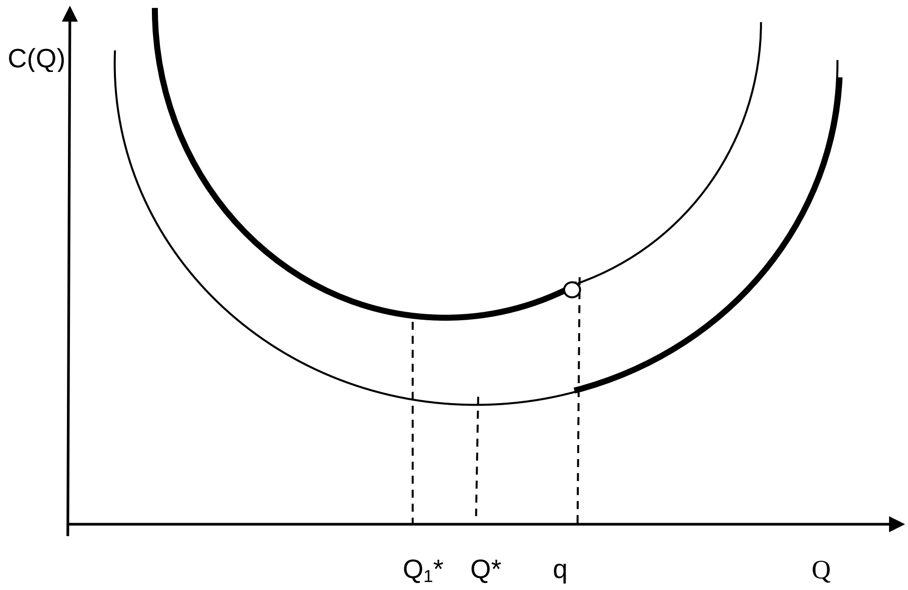
Во втором случае величина q лежит во второй зоне. Следовательно, размер партии, минимизирующий разрывную функцию общих издержек управления запасами равен также Q^*.



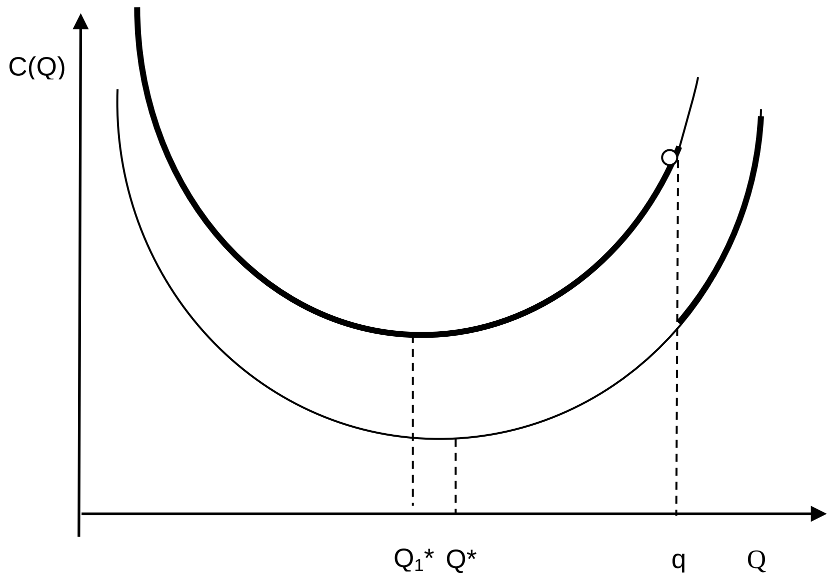
Когда величина q лежит в третьей зоне, необходимо рассмотреть три следующих возможных случая: 3.1) C(q) = C(Q_1^*), тогда оптимальные размеры покупки будут равны q или Q_1^*. Раз с точки зрения затрат эти размеры партии эквивалентны, то при принятии решении о размере покупки можно руководствоваться другими соображениями (критериями). Например, необходимо принимать решение с учетом емкости складского помещения.



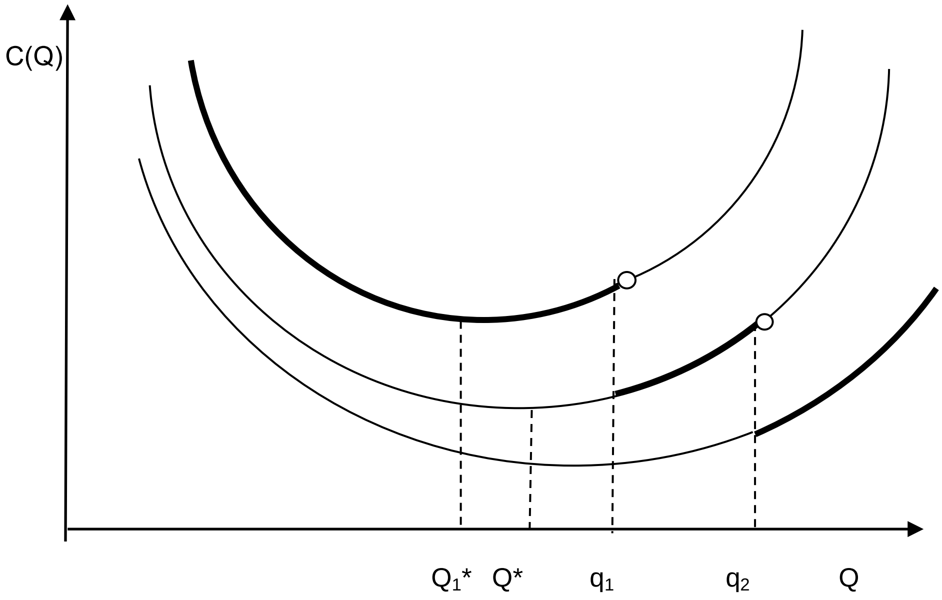
3.2) C(q) < C(Q_1^*), в этом случае оптимальное решение равно q, *т.е.* необходимо воспользоваться ценовой скидкой. Данная ситуация демонстрируется на графике, приведенном ниже.



3.3) C(q) > C(Q_1^*), в этом случае оптимальное решение равняется Q_1^*, т.е. в этом случае рекомендуется не пользоваться ценовой скидкой. Графическая интерпретация данной ситуации представлена ниже по тексту.



На следующем графике отображена ситуация, когда функция общих затрат претерпевает два ценовых разрыва. Данная ситуация демонстрируется дальше по тексту на конкретном числовом примере (см. Пример 6).



Пример 6.

Пусть интенсивность сбыта составляет 600 единиц товара в год, стоимость одного изделия равна \$6, затраты на хранение одного изделия составляет 20 % от стоимости единицы изделия, размещение заказа в размере партии стоит \$10. Определить экономичный размер партии. Предположим, что поставщик предлагает следующие скидки при покупке крупных партий товара:

1) 4%-ная скидка при заказе от 200 и более единиц (q_1 =200);
2) 8%-ная скидка при заказе от 1000 и более единиц (q_2 =1000).

Интерес представляет следующий вопрос: стоит ли воспользоваться какой-либо из этих скидок? Графически проинтерпретировать полученный результат.

Решение.

Вначале вычислим оптимальный размер партии по формуле Уилсона:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2\cdot A\cdot S}{r\beta_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 600}{0.2\cdot 6}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 600}{1.20}} = 100 \text{ [шт.]}.$$

Вычислим общие затраты для различных размеров заказов.

Умножив годовой спрос на цену приобретения, определяем **закупочные затраты**: 600 x 6 = $3600. Отметим, что k = 20% от $6 = $ 1.20. Тогда **расходы на хранение запасов** составляют: k x (средний уровень запасов) = 1.20 x 100/2 = $ 60.

Затраты на размещение заказа равны 600 /100 x $ 10 = $ 60. Следовательно, **общие издержки управления запасами** равны:

$$C(Q_1^*) = \$\ 3600 + \$\ 60 + \$\ 60 = \$\ 3720.$$

Далее определим затраты при условии размещения заказа на 200 единиц изделий при 4%- ной скидке на закупочную цену.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AS}{r\beta_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 600}{0.2 \cdot 5.76}} = \sqrt{\frac{12000}{1.152}} = 102.062\ (\text{шт.})$$

Цена приобретения единицы изделия равна $ 6 x 0.96 (при 4%- ной скидке) равна $ 5.76. Закупочные затраты в этом случае составляют:

600 x $ 5.76 = $ 3456.

Расходы на хранение единицы изделия = 20 % от $ 5.76 = $ 1.152. Расходы на хранение среднего уровня запасов равны $ 1.152 x 200/2 = $ 115.20. Расходы на размещение заказа = 600/ 200 x $ 10 = $ 30. Тогда при размере заказа 200 единиц товара общая стоимость управления запасами равна: $C(q_1)$ = $ 3456 + $ 115.20 + $ 30 = $ 3601.20. Аналогично определим затраты при условии размещения заказа от 1000 единиц изделий и более при 8%- ной скидке на закупочную цену. Цена приобретения единицы изделия равна $ 6 x 0.92 (при 8%- ной скидке) равна $ 5.52. Закупочные затраты в этом случае составляют:

600 x $ 5.52 = $ 3312.

Расходы на хранение единицы изделия = 20 % от $ 5.52 = $ 1.104. Расходы на хранение среднего уровня запасов равны $ 1.104 x 1000/2 = $ 552. Расходы на размещение одного заказа = 600/ 1000 x $ 10 = $ 6. Тогда при размере заказа 1000 единиц товара общая стоимость управления запасами равна: $C(q_2)$ = $ 3312 + $ 552 + $ 6 = $ 3870. Проведем анализ полученных результатов :

$$Q_1^* < Q^* < q_1 , C(q_1) < C(Q_1^*).$$

Следовательно, q_1 = 200 принадлежит 3 зоне, т.е. имеет место четвертый из разобранных в теоретической части случаев. Поскольку выполняется следующее соотношение $C(q_1) < C(q_2)$. Итак, затраты минимальны при размещении заказов размером в 200 единиц товара и при наличии 4%-ной скидки. 8%-ная скидка при размещении заказов размером в 1000 единиц товара и более не имеет смысла с точки зрения затрат. Скидка, получаемая при приобретении 1000 единиц, перевешивается дополнительными расходами на хранение, возникающими при складировании большого количества запасов. Ответ: рекомендуется покупать товары партиями по 200 единиц изделий в каждой.

Пример 7.

Пусть затраты на размещение заказа равны 10 руб., затраты на хранение продукции 1 руб. в сутки, интенсивность сбыта товара 5 шт. в день, цена товара – 2 руб. за штуку, а при объеме закупки 15 шт. и более – 1 руб. Определите оптимальный размер заказа, цену покупки и затраты на управление запасами.

Решение.

Начинаем решение с приблизительного построения пунктирными линиями графиков двух функций общих затрат, соответствующих двум ценам, которые указываем над соответствующими линиями затрат: $\beta_1 = 2$ руб./шт. и $\beta_2 = 1$ руб./шт. Заметим, что $k = r \cdot \beta_1 \Rightarrow r = \frac{k}{\beta_1} = \frac{1}{2}$. Отметим, что везде далее отдача от каждого рубля , вложенного в запасы, составляет $r = 0.5$ *рубля*. После этого, используя параметры $A = 10$ руб., $S = 5$ шт. в день, $k = 1$ руб. за 1 шт. в сутки, вычисляем значение Q_1^* и *подписываем его на графике под обозначением* Q_1^*, $Q_1^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10$ [шт.].

Очевидно, что в область I $q_1 = 15$ шт. не попадает, т.к. $q_1 > Q_1^*$. Таким образом, q_1 может попасть в области II или III.

Вычислим значения функции затрат $C(Q_1^*)$ = 20 руб. в сутки и $C(q_1) = 10 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{15}{2} + 1 \cdot 5 = 15.8(3)$ руб. в сутки. Следовательно, выполняется следующее соотношение: $C(q_1) < C(Q_1^*)$. Границей между этими областями служит размер заказа Q^*. Сначала вычислим

$Q^* = \sqrt{\dfrac{100}{\frac{1}{2}\cdot 1}} = \sqrt{200} \approx 14.1421.$ Следовательно, $q_1 > Q^* > Q_1^*$. Итак, q_1 принадлежит III зоне. Ответ: приобретать партии в 15 единиц товара по цене со скидкой. Если бы заказывали по 10 шт. товара, то общие затраты составили бы 20 рублей, т.е. при заказе в 15 шт. экономия средств составляет 4,17 рублей в сутки.

2.2.2. Модель с фиксированным уровнем запасов

Данная модель основана на фиксированных моментах подачи заказа, в ней издержки управления запасами в явном виде не учитываются и отсутствует фиксированный размер заказа.

В данной модели через определенные промежутки времени проводится проверка состояния запасов. Если после предыдущей проверки было реализовано какое-либо количество товаров, то подается заказ. При этом размер заказа равен разности между максимальным уровнем товарных запасов и фактическим уровнем запасов в момент проверки.

M – максимальный уровень товарных запасов

$\overline{S_L}$ - среднесуточный сбыт

L – время выполнения заказа

R – время между проверками

B – страховой запас

Q – размер заказа

I – фактический уровень запасов

q_o – заказанное количество товарных единиц, первый на очереди невыполненный заказ.

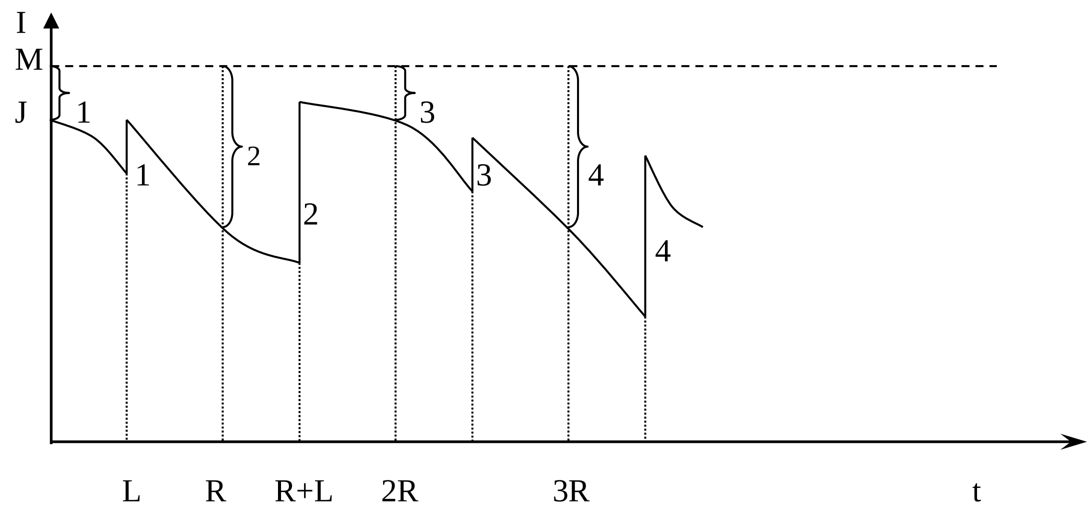
В данной модели предполагается осуществление периодического контроля за уровнем запасов. Пусть, например в моменты 0, R, 2R, 3R,… замеряется уровень запасов и размещаются заказы на пополнение запасов, тогда в моменты времени 0+L, R+L, 2R+L, ... сформированные заказы выполняются. При этом используются следующие правила определения размера заказа:

$$M = B + \overline{S_L}(L+R).$$

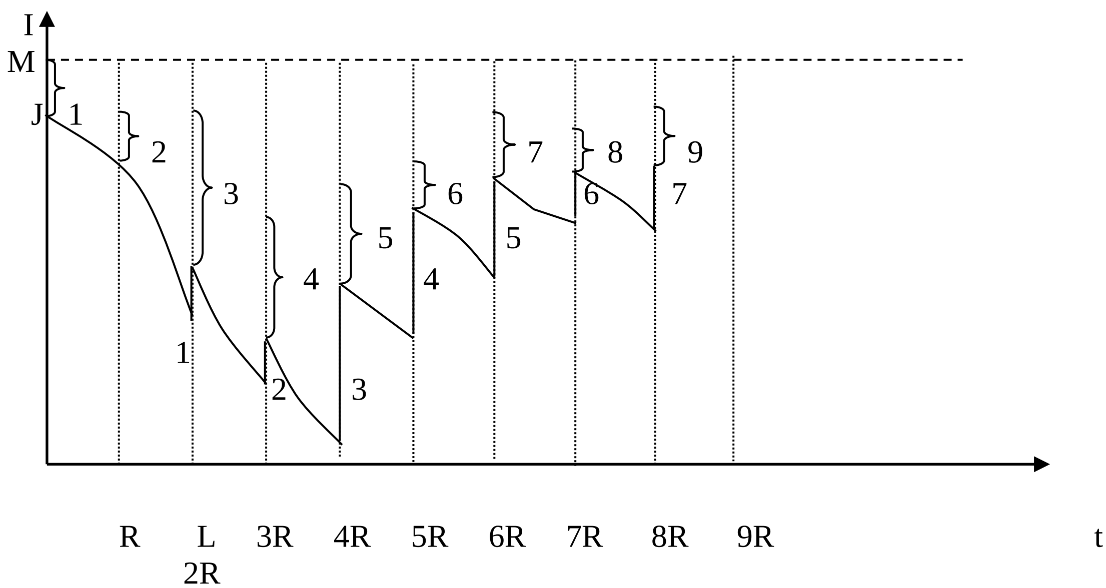
$$Q = \begin{cases} M - J, \ \textit{если} \ \ L \le R, \\ M - J - q_0, \ \textit{если} \ \ L > R. \end{cases}$$

Рассмотрим графическую интерпретацию работы модели.

Случай 1: L $\le$ R



Случай 2: L > R.



Во втором случае предполагается, что сначала выполняется предыдущий заказ, а потом формируется следующий (хотя и одномоментно).

В данной модели максимальный уровень М достигается только в том случае, когда в интервале от момента подачи заказа до момента его получения отсутствует сбыт. Размер заказа зависит от величины сбыта после последней проверки. Уровень резервного запаса В обычно достаточно точно определяется путем изучения сбыта за промежуток времени R+L.

2.2.3. Двухуровневая модель управления товарными запасами ((s, S) – система)

Эта двухуровневая система по существу также является системой с фиксированным уровнем запасов, для которой определяется нижний предел для размера заказа.

В данной модели присутствуют понятия *максимальный уровень запаса* М и *критический уровень запаса* Р (точка заказа).

$$M = B + \overline{S_L}(L + R).$$

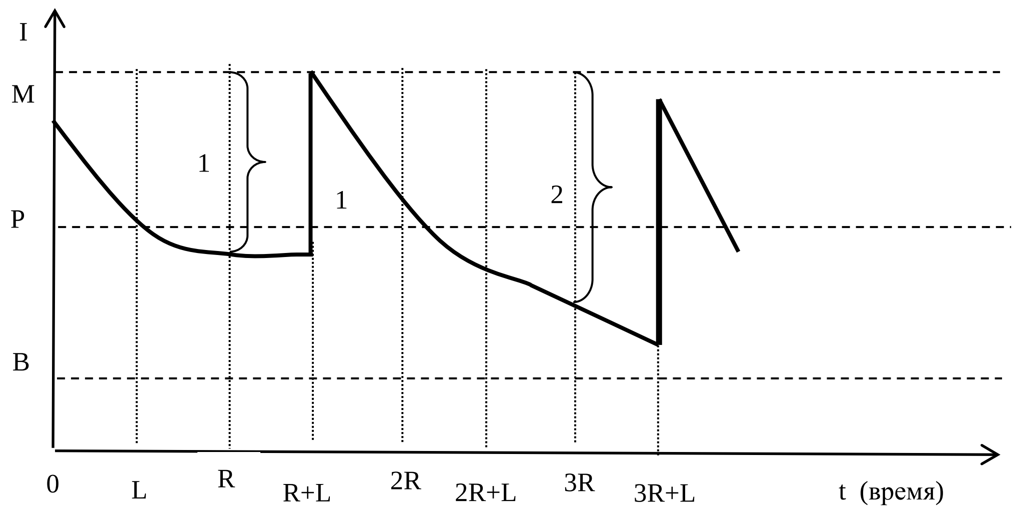
$$P = B + \overline{S_L}\left(L + \frac{R}{2}\right).$$

Данная система управления запасами называется двухуровневой, так как в ней выделяется два уровня: М, Р. Порядок работы данной системы можно описать следующим образом: если в момент периодической проверки выполняется $I+q_o \le P$, то подается заказ в размере

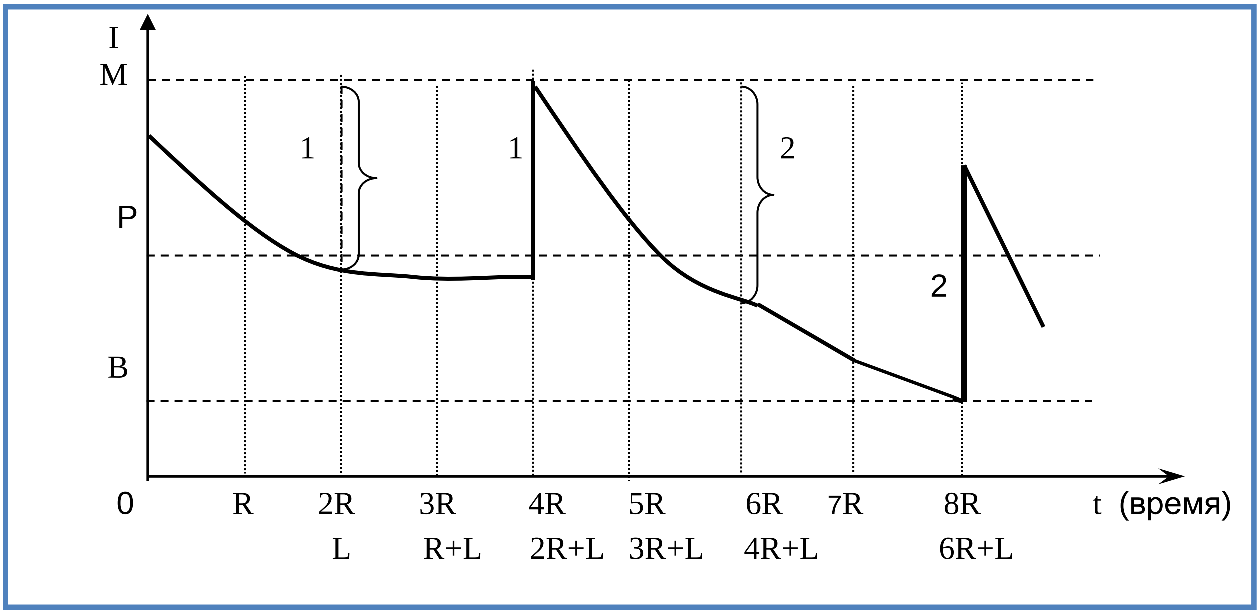
$Q = M - I - q_o$. Если I+qo > P, то заказ не формируется.

Далее рассмотрим графическую интерпретацию работы модели для различного соотношения временных параметров L, R.

Случай 1: $L \le R$



Случай 2: L > R.



Далее докажем существование нижнего предела для размера партии в данной системе управления запасами.

$$Q = M - I - q_o = M - (I + q_o) \geq M - P = \overline{S_L} \cdot \frac{R}{2}.$$

Таким образом, размер заказа не превышает разности максимального и критического уровней запасов.

2.2.4. Сравнение трех классических политик управления запасами

Проведем сравнение трех рассмотренных ранее политик управления запасами при одинаковом распределении спроса и одинаковой длительности интервала между проверками R, конечной одной и той же длительности доставки L (причем L< R).

1. Политика фиксированного размера заказа (Q,P). Проверка состояния

товарных запасов осуществляется через интервалы времени длительностью R. Если на момент проверки уровень запасов удовлетворяет неравенству I≤ P, то подается заказ в размере $Q^* = \sqrt{\dfrac{2 \cdot A \cdot S}{r \cdot v}}$. Если уровень запасов I> P, то заказ не подается.

2. Политика постоянного уровня запасов (M). Проверка состояния запасов через интервалы длительностью R. В любом случае подается заказ M-I- q_o .

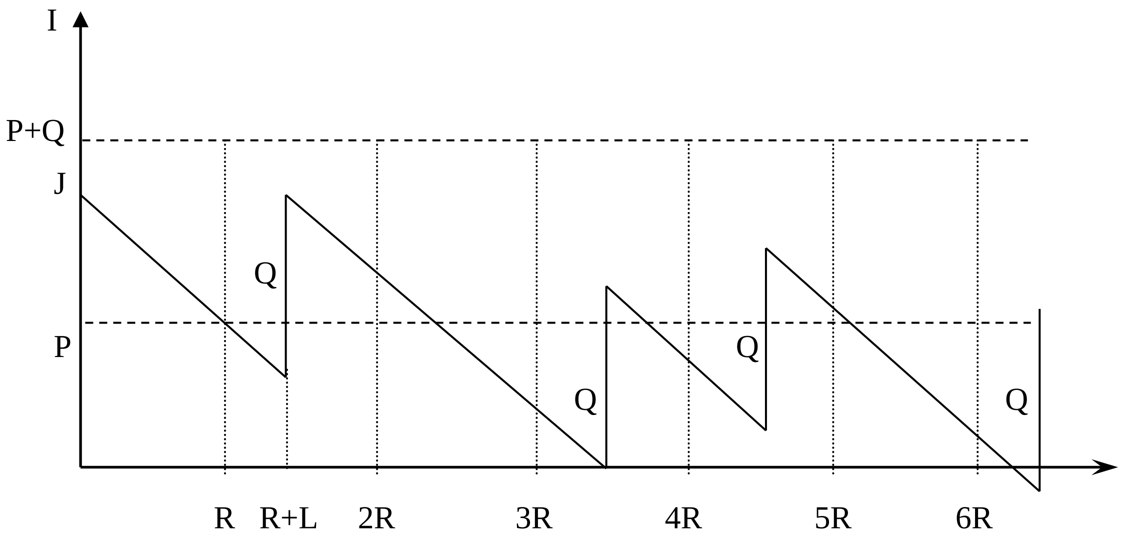
3. Политика двух уровней (M,P) . Проверка состояния запасов через интервалы длительностью R. Если уровень запасов $I+q_o \leq P$, то подается заказ $M-I-q_o$.Если $I+q_o > P$, то заказ не подается.

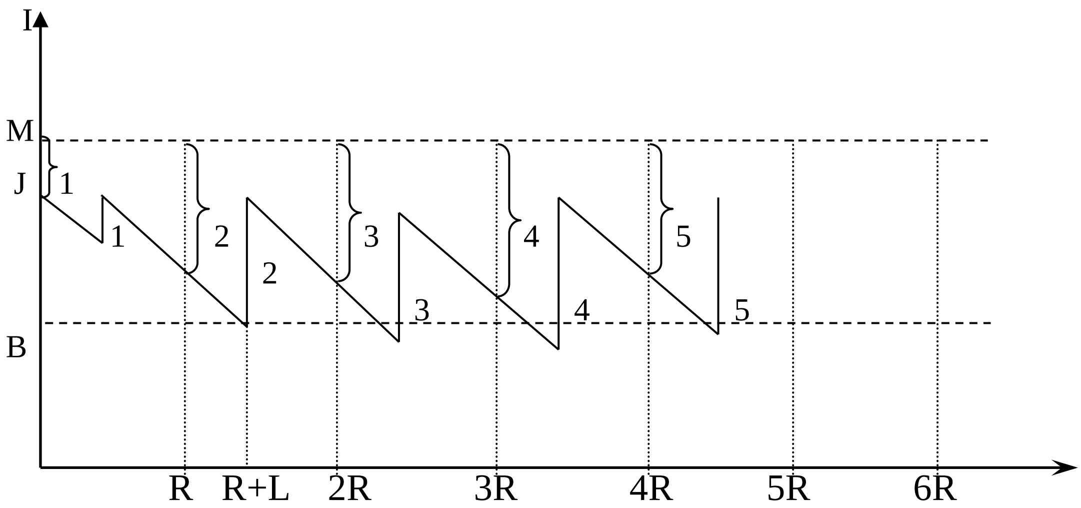
Для сравнения кривых будем предполагать, что для трех политик управления запасами выполняются следующие равенства:

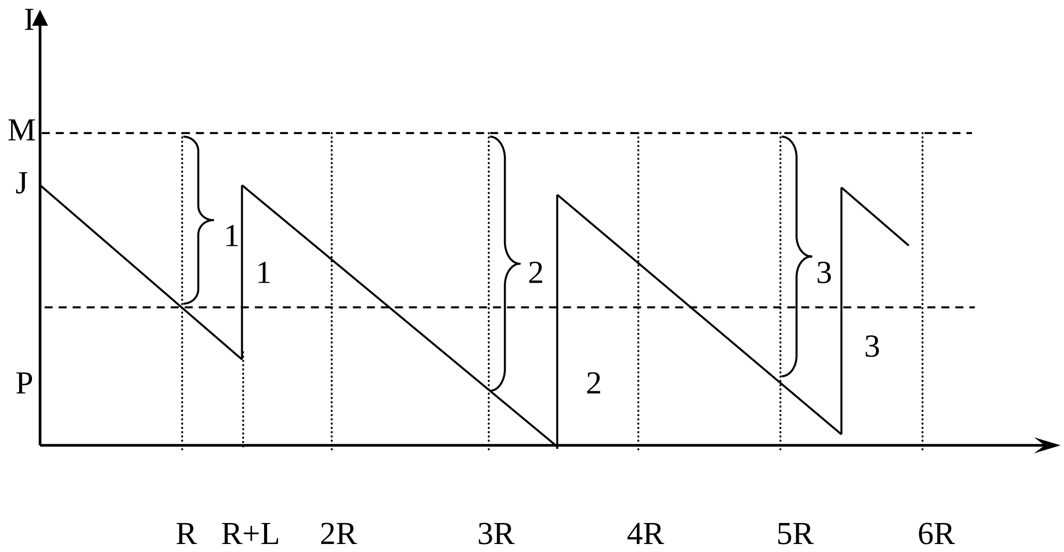
Политика		
(Q,P)	(M)	(M,P)
Q+P =	M =	M
P =	B =	P

Обычно на практике эти равенства не выполняются. Однако можно заметить, что если бы проверки состояния запасов проводилось непрерывно (постоянный учет запасов) , то для (Q,P) – политики и (M,P)-политики были бы получены одинаковые результаты . Основное различие между (Q,P) и (M,P) политиками заключается в размере заказа, который является постоянным в первом случае и переменным во втором. Вследствие переменного размера заказа (M,P)-политика быстро реагирует на изменение спроса. Это обстоятельство делает данную политику предпочтительной, когда значения спроса в смежных периодах сильно коррелированы. Система с фиксированным размером заказа более устойчива и реагирует на изменения спроса более медленно, наличие этого свойства во многих случаях является предпочтительным. Система с постоянным уровнем запасов также быстро реагирует на увеличение спроса, однако при снижении спроса уровень запасов продолжает оставаться слишком большим. Во многих случаях, особенно, когда возможна поставка товаров лишь на короткие промежутки времени (например, допускается только недельная поставка), данная система оказывается самой простой. На всех графиках $q_o=0$ (заказанное количество единиц продукции – невыполненный заказ, возникающий в случае $L>R$).

Графическая интерпретация работы моделей:







Рассмотренные три модели не являются единственно возможными, существуют их различные модификации. Использование на практике той или иной модели зависит от ряда обстоятельств. Если издержки управления запасами велики и их можно в явном виде вычислить, то обычно более предпочтительной является система с фиксированным размером заказа, так как система с постоянным уровнем запаса не позволяет учитывать издержки в явном виде.

Если же издержки незначительны, то часто более предпочтительна система с фиксированным уровнем запасов. Если при заказе определенных товаров поставщик накладывает определенные ограничения на минимальный размер партии, то желательно использовать систему с фиксированным размером заказов, т.к. легче один раз скорректировать фиксированный наиболее экономичный размер партии, чем непрерывно регулировать переменный размер партии. И наоборот, система с постоянным уровнем запасов является более предпочтительной, когда на общий размер заказов, подаваемых одним клиентом на несколько товаров, налагаются ограничения по грузоподъемности транспортных средств. Система с постоянным уровнем запасов также предпочтительна в том случае, когда поставка товаров осуществляется в строго установленные сроки.

Основанием для выбора системы с фиксированным размером заказа может служить ведение точного и непрерывного учета товарных запасов.

При периодических проверках целесообразнее применять систему с постоянным уровнем запасов или двухуровневую систему.

Система с постоянным уровнем и система с двумя уровнями часто выбираются в том случае, когда необходимо быстро реагировать на изменение сбыта.

Эффективность любой модели управления запасами в значительной степени зависит от способности с приемлемой точностью дать прогноз сбыта товарных запасов. Наиболее экономичный размер заказа и точка заказа находятся на основании определенной оценки сбыта товара. Простые способы прогнозирования основаны на распространении (линейной экстраполяции) данных о предыдущем сбыте на ближайшее будущее и использовании модели, в которой допускается, что временной ряд сбыта состоит из 4-х составляющих:

- средний сбыт за единицу времени;
- несезонные изменения сбыта в последовательных промежутках времени;
- сезонные колебания сбыта относительно линии тренда;
- случайные колебания относительно модели.

2.2.5. Модель с постоянной интенсивностью поступления заказа

Модель с экономичным размером партии может быть расширена в результате предположения, что отношение S/E не равно нулю. Другими словами, предполагается, что продукт доставляется ежедневно с некоторой постоянной (или равномерной) интенсивностью пополнения E. Пусть S обозначает годовую интенсивность сбыта для одной единицы товара. Однако, S/E есть процент спроса, удовлетворенного со скоростью E. В этой модели предполагается, что E больше S (E>S), чтобы обеспечить работу системы без дефицита. Очевидно, что отношение S/E не использовалось в модели с фиксированным размером партии, так как там предполагалось, что запасы пополняются одномоментно.

Пусть t - число дней, Q_{max} - максимальный уровень запасов, тогда Q_{max} = (E-S)·t. Время t (в сутках) – это время, необходимое для пополнения запасов до уровня Q определяется: t = Q/E . Тогда

$$Q_{\max} = (E - S)\cdot t = (E - S)\cdot \frac{Q}{E} = (1 - \frac{S}{E})\cdot Q.$$

Очевидно, что минимальный уровень запаса (при сделанных предположениях) $Q_{\min} = 0.$ Тогда средний уровень запасов равен

$$(Q_{\min} + Q_{\max})/2 = (1 - \frac{S}{E})\cdot \frac{Q}{2}.$$

Как известно, что ежегодные затраты на хранение единицы запасов равны k, то общие годовые затраты хранения запасов составляют

$$C_2(Q) = (1 - \frac{S}{E})\cdot \frac{Q}{2}\cdot k.$$

Функция затрат на выполнение заказа определяется следующим образом

$$C_1(Q) = \frac{A\cdot S}{Q}.$$

Тогда функция общих затрат равна

$$C(Q) = C_1(Q) + C_2(Q) = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{Q}} + (1 - \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{E}})\frac{\mathrm{Q}}{2}\cdot k.$$

$$C'(Q) = -\frac{A\cdot S}{Q^2} + (1 - \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{E}})\frac{\mathrm{k}}{2} = 0.$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A \cdot S}{(1 - \frac{S}{E}) \cdot k}},$$

$$C''(Q) = \frac{2A \cdot S}{Q^3} > 0.$$

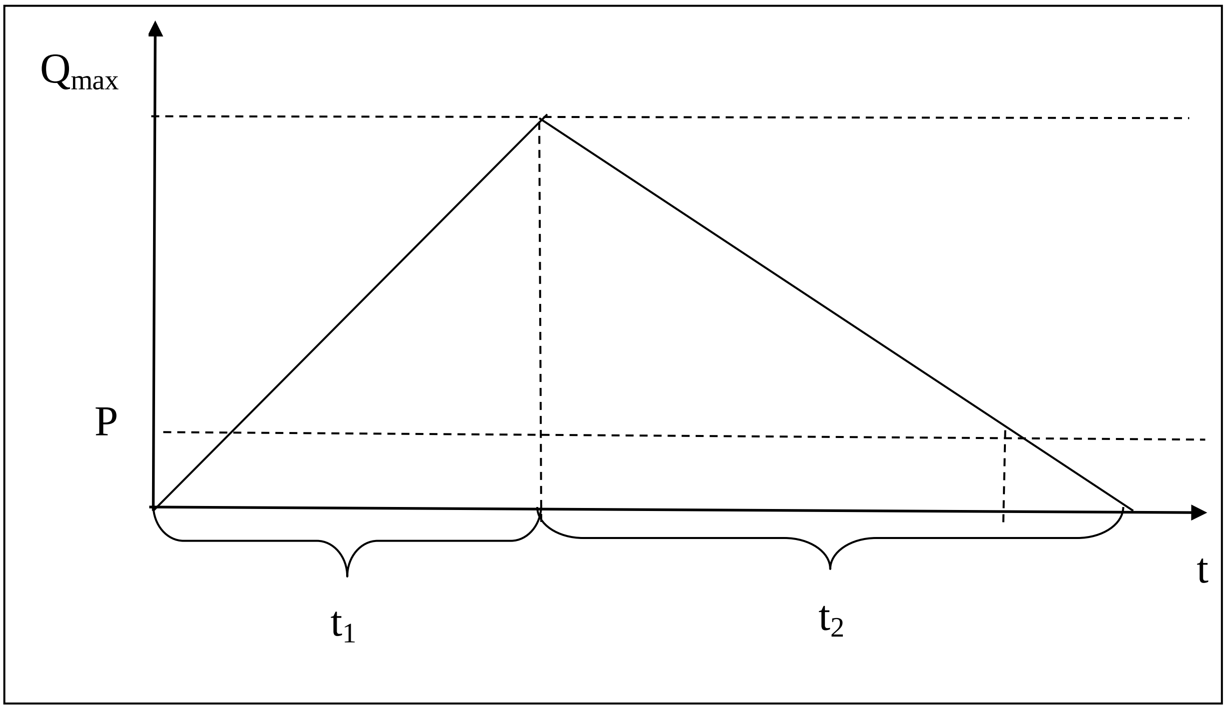
Следовательно, размер заказа Q* обеспечивает минимум функции общих годовых затрат.

Как видно, формула вычисления Q* для этой модели отличается от формулы Уилсона-Харрисона только отношением S/E - отношением интенсивностей сбыта и пополнения.

Цикл управления запасами в этой модели определяется по формуле $IC = \frac{KPD}{N}$, где число заказов в год $N = \frac{S}{Q^*}$. Для реализации модели также важны следующие временные параметры: $t_2 = \frac{Q_{\max}}{\bar{S}_L} = \frac{Q_{\max} \cdot KPD}{S}, t_1 = IC - t_2.$

Здесь t_1 – длина временного интервала, в течение которого имеет место сбыт и пополнение, t_2 – длина интервала, в течение которого имеет место только сбыт. Основное правило работы модели с постоянной интенсивностью пополнения запасов состоит в следующем: если на момент проверки состояния за-пасов выполняется соотношение $I \le P$, то формируется заявка на пополнение запасов. Заказ по заявке начинает поступать через L суток с годовой интенсивностью E.

Рассмотрим графическую интерпретацию работы модели:



Пример 8.

Букинистический магазин имеет ежегодный спрос на книгу П. Кеннеди в количестве 1000 шт., интенсивность пополнения равна 2000 томов. Каждая книга стоит $10 . Издержки выполнения заказа составляют $74.89, издержки хранения составляют 15% от стоимости каждой книги. Определить Q^*, $C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, Q_{max}, N, и IC, предполагая, что в году всего 250 рабочих дней; P, если время выполнения заказа равно 4 дням; резервный запас равен нулю; имеет место постоянный контроль за состоянием запасов. Рассмотреть графическую интерпретацию системы управления запасами.

Решение:

Согласно условиям задачи: A=$74.89, k=$1.5, S=1000, E=2000. Число заказов в год равно

$N= S/Q^* = 2.237136 \approx 2.24$ заказов .

Длина цикла при этом равна $IC=250/N=111.75002\approx112$ дней (так как предполагается, что в году 250 рабочих дней). Поскольку время выполнения заказа L =3 дня, то точка заказа может быть вычислена по формуле $P= B+S_L\cdot L$. Пусть данном примере страховой запас B = 0, а средне-суточный сбыт, согласно условиям, равен $S_L = 1000/250 =$

4 книги в день. Тогда P = 4 ·4 = 16 книг. То есть, магазин должен подавать заказ как только уровень запасов достигает 16 книгам.

$$t = Q^*/E = 447/2000 = 0.2235 \text{ года.}$$

((250 рабочих дней)• 0.2235) = 56 дней) – время пополнения – время, за которое уровень достигает максимального.

$$C_1(Q^*) = A \cdot S/Q^* = (74.89 \cdot 1000)/447 = \$\ 167.53915 \approx \$168.$$

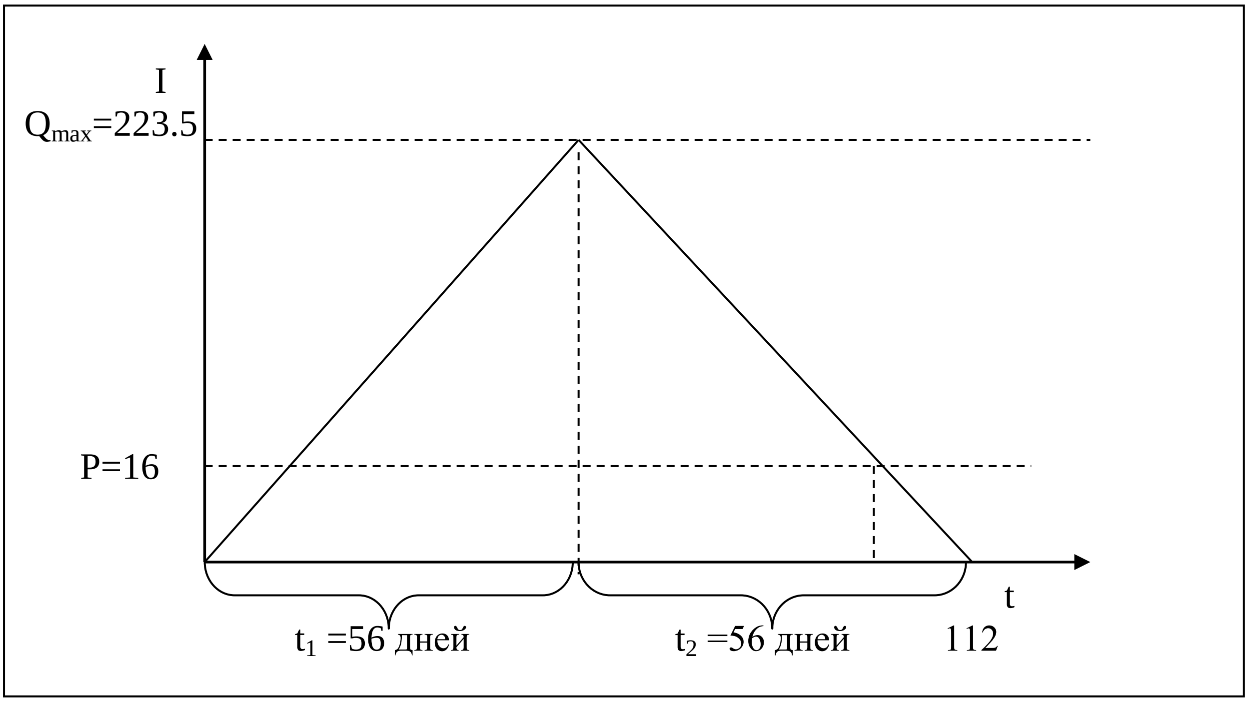
$$C_2(Q) = (1 - \frac{S}{E}) \cdot \frac{Q}{2} \cdot k = (1 - \frac{1000}{2000}) \cdot \frac{447}{2} \cdot 1.5 = \$167.625 \approx \$168.$$

$$C(Q^*) = C_1(Q^*) + C_2(Q^*) = \$336.$$

В течение времени t потребляется (S/E)·Q*=(1000/2000)·447=223.5 книг. Период пополнения запасов до максимального уровня

$\tau = Q_{max}/(E/250) = =Q_{max}/(2000/250) = 223.5/8 = 28$ дней при отсутствии сбыта.

Период расходования запасов $t_2 = Q_{max}/(S/250) = 223.5/(1000/250) = 223.5/4 = 56$ дней. В течение времени t_2 запасы только расходуются. В течение времени t_1 запасы одновременно и поступают и расходуются: t_1=IC-t_2 , t_1= 112-56 = 56 дней.



Пример 9.

Пусть дана следующая информация: издержки хранения на единицу равны $26, издержки выполнения заказа на партию товаров равны $10, ежегодный спрос равен 210 единицам, число рабочих дней в году равно 210, суточная интенсивность сбыта - 210/210 = 1 единице, ежедневная интенсивность пополнения равна 2 единицам, годовое пополнение составляет 2·210 = 420.

Пусть L = 3, B= 0. Необходимо вычислить параметры модели и графически интерпретировать полученные результаты.

Решение:

$$A=10,\ S=210,\ k=26,\ E=420.$$

$$Q^*=\sqrt{2A\cdot S/((1-S/E)\cdot k)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 210/((1-1/2)\cdot 26)}=17.974334\approx 18 \textit{ единицам.}$$

$C_1(Q^*) = A\cdot S/Q^* =(10\cdot 210)/18 = \$ 116,8332579.$

$C_2(Q^*) = k\cdot Q^*/4 = 26\cdot 18/4 \approx \$117.$

$C(Q^*) = C_1(Q^*) + C_2(Q^*) \approx \$234.$

Число заказов в год должно быть

$$N = S/Q^* = 210/18 = 11.68332579 \approx 12.$$

Длина цикла

$$IC = 210/N = 17.974334 \approx 18 \text{ дней.}$$

$$Q_{max} =(1-S/E)\cdot Q^* = (1-210/420)\cdot 18=9 \text{ ед.}$$

Время расходования

$$t_1 = Q_{max}\cdot 210/S = 9\cdot 210/210 = 9 \text{ дней.}$$

$$t_2 = IC-t_2= 18- 9 = 9 \text{ дней.}$$

Данная модель может также быть применена для описания производственного процесса, если издержки выполнения заказа будут заменены на издержки на запуск в производство SC. При этом E называется годовой производительностью или интенсивностью производства. Проиллюстрируем эту мысль на следующих трех примерах.

Пример 10.

Книжный магазин имеет ежегодный спрос на книгу П.Кеннеди в количестве 1000 шт., производственная линия имеет производительность 2000 книг в год. Каждая книга стоит $10 . Издержки на запуск в производство оцениваются в $74.89, издержки хранения составляют 15% от стоимости каждой книги. Определить Q*, N; и IC, предполагая, что в году всего 250 рабочих дней. Определить также точку заказа P, если время выполнения заказа равно 4 дням.

Решение:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A \cdot S}{(1-\frac{S}{E}) \cdot k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 74.89}{(1-\frac{1000}{2000}) \cdot 1.5}} = \sqrt{149780/0.75} \approx 447.$$

Q_{max} =(1-S/E)· Q* = (1-1000/2000)·447= 223.5.

Длина производственной фазы равна Q*/E=447/2000 = 0.2235 года (56

$$\bar{I} = \frac{1}{2}(1-\frac{S}{E}) \cdot Q^* = 223.5$$

дней). Длина фазы расходования запасов равна

Q_{max}·250/S== 223.5·250/1000= 223.5/4= 56 дней.

Число производственных циклов S/Q* = 1000.447 = 2.24.

C_1(Q*) = A·S/Q* =(10·210)/18=$ 117.

C_2(Q*) = k ·Q*/ 2 = 26·18/2 = $117.

C(Q*) = C_1 (Q*) + C_2(Q*) = $234.

Длина цикла IC = 56+ 56 = 112 дней.

Общие годовые издержки на запуск в производство

TSC=SC·S/Q* = 74.89·2.24 = $167.5.

Пример 11.

Фирме HD требуется 2500 фенов каждую четверть года. Хранение одного фена в течение месяца стоит $3.00. Стоимость заказа на снабжение фенами составляет $0.50 в четверть. Компания имеет две возможности:

1) закупать фены периодически партиями,
2) закупать фены постепенно у поставщика, который доставляет их и интенсивностью 1500 ед. в месяц, пока заказ не выполнится.

Определить какая возможность для компании оптимальна по стоимости.

Решение:

A=$0.50, S= 2500, k=$3·3(мес.)= $9 за четверть, E= 1500·3= 4500 за четверть. В первом случае оптимальный размер заказа равен

C_1(Q*) = A·S/Q* =(0.5·2500)/(50/3)=$75.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A \cdot S}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5 \cdot 2500}{9}} = 50/3 = 16.66667.$$

C_2(Q*) = k ·Q*/ 2 = 9·(50/3)/2 = $75.

$$C(Q^*) = C_1 (Q^*) + C_2(Q^*).$$

Во втором случае оптимальный размер заказа равен

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A \cdot S}{(1 - S/E) \cdot k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5 \cdot 2500}{(1 - \frac{2500}{4500}) \cdot 9}} = 25.$$

Следовательно, совокупные затраты управления запасами при второй стратегии равны:

$C(Q^*) = C_1(Q^*) + C_2(Q^*) = (0.5 \cdot 2500)/25 + (1- 2500/4500) \cdot (25/2) \cdot 9 = \$100$. Следовательно, компании HD необходимо выбрать вторую возможность, так как она требует меньших затрат.

2.2.6. Модель управления запасами с запланированным дефицитом

Потери от дефицита на промышленных предприятиях исчисляются как суммарные потери прибыли в расчете на одну денежную единицу стоимости дефицитных материалов. Прибыль предприятия при дефиците может снизиться за счет простоя производственных мощностей и рабочих, переналадки производственного процесса, замены дефицитных материалов другими, более дорогими, выпуск продукции в сверхурочное время после ликвидации причины простоя, штраф за нарушение сроков поставки.

Менеджеры компаний не всегда могут хранить сырье и материалы в достаточном количестве из-за больших издержек хранения и ограниченности складских помещений. Поэтому в некоторых случаях, когда потери из-за дефицита сравнимы с издержками хранения, дефицит допускается. Пусть требования, поступающие в момент отсутствия запаса, берутся на учет. Возникает период ожидания для потребителей. В модели с запланированным дефицитом общие издержки управления запасами C(Q) включают три различные компоненты затрат: общие издержки заказа, общие издержки хранения запасов и общие издержки дефицита (с учетом неудовлетворенных требований).

Рассмотрим в начале вопрос формирования функции издержек хранения. Если максимальную величину задолженного спроса, приходящуюся на заказ, обозначим через y, то максимальный уровень запаса равен Q-y, где Q - размер заказа. Поскольку минимальный размер запаса равен нулю, то средний уровень равен (Q-y)/2.

Общее время цикла в данной системе управления запасами IC делится на два периода τ_1 - время, в течение которого расходуются наличные запасы (время существования или хранения запаса), τ_2- время, в течение которого поступающие требования ставятся на учет (время дефицита). При поступлении очередной партии в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Средний уровень запаса за время τ_1 будет

$$\overline{J_1} = \frac{Q-y}{2} \cdot \tau_1.$$

$$\overline{J_1} = \frac{Q-y}{2} \cdot \tau_1 = \frac{Q-y}{2} \cdot \frac{Q-y}{S} = \frac{(Q-y)^2}{2S}.$$

Также отметим, что цикл управления запасами здесь равен IC=Q/S, и τ_1 =(Q-y)/S, откуда τ_2 =y/S, т.к. IC= $\tau_1 + \tau_2$.
Тогда полные издержки хранения за цикл составляют

$$k \cdot \frac{(Q-y)^2}{2S}.$$

Заметим, что общие затраты на выполнение заказа за цикл равны A.
Чтобы вычислить третью компоненту функции затрат, необходимо вычислить средний уровень дефицита в период времени τ_2 (величина дефицита в период τ_1 равна нулю). Минимальный уровень дефицита равен нулю, а максимальный равен y. Тогда средняя величина дефицита за время его существования τ_2 =y/S равна y^2 /(2·S). Предположив, что убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени, составляют d, вычислим убытки от дефицита

$$C_3(Q,y) = \frac{y^2}{2 \cdot S} \cdot d.$$

Средние издержки работы системы в течение цикла, включающие затраты на размещение заказа, содержание запаса и потери от возникновения дефицита разделим издержки цикла на его величину IC = Q/S и получим издержки работы системы в единицу времени, где присутствуют две неизвестные величины Q - размер заказа, y – уровень дефицита. Для расчета значений Q* и y* продифференцируем функцию

$$A+k\cdot\frac{(Q-y)^2}{2S}+\frac{y^2}{2\cdot S}\cdot d.$$

$$C(Q,y)=C_1(Q,y)+C_2(Q,y)+C_3(Q,y)=\frac{S}{Q}\cdot A+k\cdot\frac{(Q-y)^2}{2Q}+\frac{y^2}{2\cdot Q}\cdot d,$$

C(Q,y) по переменным Q и y, приравняем их производные нулю.

$$\frac{\partial C(Q,y)}{\partial Q}=\frac{-2A\cdot S+Q^2\cdot k-y^2\cdot(k+d)}{2Q^2}=0\Rightarrow Q^2=\frac{2A\cdot S+y^2\cdot(k+d)}{k}.$$

$$\frac{\partial C(Q,y)}{\partial y}=\frac{-k\cdot(Q-y)}{Q}+\frac{y\cdot d}{Q}=0\Rightarrow y=\frac{k\cdot Q}{k+d}.$$

Подставив выражение y в выражение Q^2 , получим

$$Q^2=\frac{2A\cdot S+y^2\cdot(k+d)}{k}\Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{2A\cdot S\cdot(k+d)}{k\cdot d}}.$$

Тогда оптимальный размер дефицита равен

$$y^*=Q^*\cdot\frac{k}{k+d}=Q^*=\sqrt{\frac{2A\cdot S\cdot k}{(k+d)\cdot d}}.$$

Подставив значения Q* , y* в соответствующие выражения, найдем другие оптимальные параметры системы:

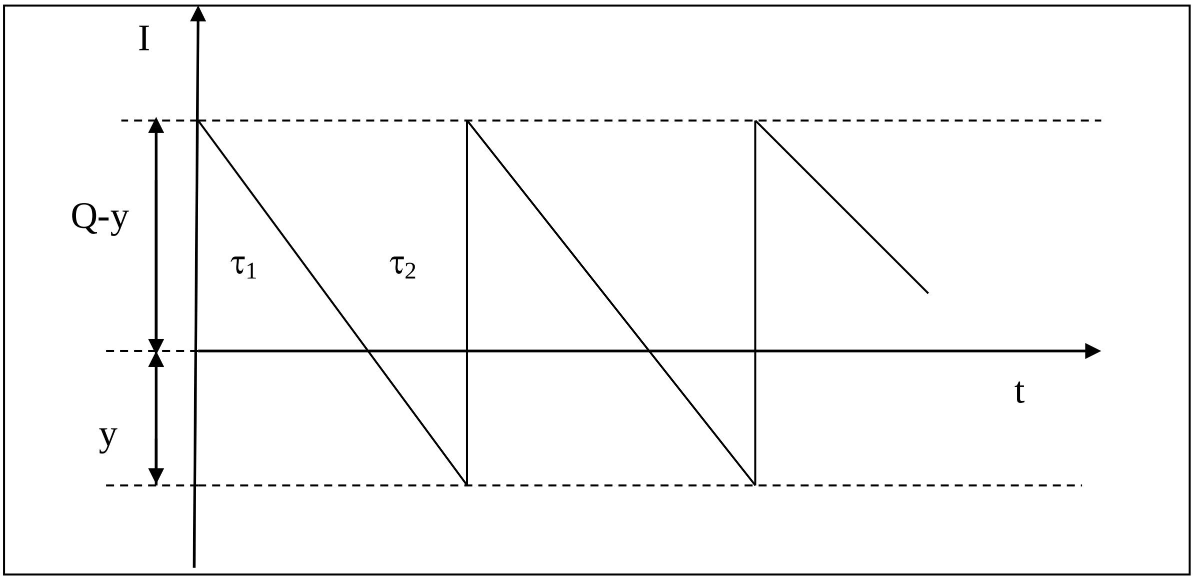
$$IC=\frac{Q^*}{S}=\sqrt{\frac{2A\cdot(k+d)}{k\cdot d\cdot S}}.$$

$$\tau_1^*=\frac{Q^*-y^*}{S}=\frac{Q^*(1-\frac{k}{k+d})}{S}=\sqrt{\frac{2A\cdot d}{k\cdot(k+d)\cdot S}}.$$

$$\tau_2^*=IC-\tau_1^*=\frac{Q^*k}{S\left(k+d\right)}.$$

Полезно иметь в виду, что для параметров времени выполняется следующее соотношение

$$\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*}=\frac{d}{k}.$$



<u>Пример 12</u>.

Фирма Super Buyer старается использовать новую политику управления запасами, которая допускает возникновение дефицита для того, чтобы минимизировать общие издержки. Дана следующая информация относительно одного из продуктов – годовой спрос S=4000, издержки выполнения заказа A=$50, k=$20, издержки дефицита за единицу товара d=$60. Определить оптимальный размер заказа, оптимальную величину дефицита, IC, C(Q*).

<u>Решение:</u>

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A \cdot S \cdot (k+d)}{k \cdot d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 4000 \cdot (20+60)}{20 \cdot 60}} = \sqrt{26666.66666} = 163.29932.$$

$$IC = \frac{Q^*}{S} = \frac{163.29932}{4000} = 0.04082.$$

$$y^* = Q^* \cdot \frac{k}{k+d} = Q^* \cdot \frac{20}{20+60} = 40.82483.$$

Данная модель также может быть использована для выработки оптимальных параметров производственного процесса. При этом затраты выполнения заказа должны быть замещены затратами на запуск в производство. Если предполагается, что производственные заказы выполняются без задержки, и если сбыт постоянен, то эта модель может быть применена для исследования производственного процесса.

Пример 13.

Фирма Lico должна ежегодно обеспечивать фирму Famous Tarr стульями в количестве 1350. Издержки дефицита составляют $50 на единицу, издержки хранения составляют $40 на единицу. Стоимость запуска производственной линии на производство стульев равна $150. Определить Q*, y*, при условии, что производственные заказы выполняются без задержки, интенсивность сбыта постоянна.

Решение:

Пусть D=$50, S=1350 стульев, SC=A=$150, k=$40. Тогда

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A\cdot S\cdot(k+d)}{k\cdot d}} = \sqrt{\frac{2\cdot 150\cdot 1350\cdot(40+50)}{40\cdot 50}} = 135.$$

$$y^* = Q^*\cdot\frac{k}{k+d} = 135\cdot\frac{40}{50+40} = 60.$$

$$N = S/Q^* = 1350/135 = 10.$$

$$IC = \frac{KPD}{N} = \frac{250}{10} = 25\,дней.$$

2.2.7. Динамическая двумерная задача управления запасами

Цели

- Изучить основные правила решения двумерной задачи управления запасами (УЗ).
- Научиться рассчитывать величину прибыли по рекуррентным формулам.
- Освоить метод динамического программирования для решения задачи (УЗ).
- Уметь определять оптимальный вектор покупок (продаж).
- Научиться графически строить область допустимых значений параметров двумерной задачи.
- Научиться проводить сравнительный анализ решений, полученных с применением различных стратегий управления запасами.
- Научиться проводить сравнительный анализ альтернативных решений, полученных с применением одной стратегии управления запасами.
- Научиться определять оптимальное местоположение складского комплекса методом центра тяжести.

Основные понятия

- Двумерная задача управления запасами (УЗ).
- Стратегии решения задачи.
- Размер покупки (реализации).
- Емкость склада.
- Начальный уровень запасов.
- Метод динамического программирования для решения задачи управления запасами.
- Состояние склада на начало периода.
- Графический анализ в решении двумерной задачи УЗ.
- Цена покупки.
- Цена продажи.

Постановка двумерной задачи управления запасами.

Очень часто для решения задач оптимального управления запасами применяют метод динамического программирования. Это обусловлено тем, что во многих задачах управления запасами процесс естественно разворачивается во времени, причем управление как раз и заключается в том, что решение на данном промежутке времени принимается с учетом того состояния, к которому пришла система за предшествующие периоды времени. Как правило, метод динамического программирования для этого класса задач используется при дискретном характере переменных.

Пусть емкость склада по хранению запасов ограничена некоторой величиной с. В каждом из n промежутков времени запасы могут пополняться с затратами α_k на единицу продукции и расходоваться с получением β_k за единицу продукции, причем решение о пополнении или расходовании запасов принимается однократно в каждом промежутке времени. Определить оптимальную стратегию в управлении запасами из условия максимизации суммарной прибыли при заданном начальном уровне запасов.

Решение:

Возможны три варианта в очередности пополнения и расходования запасов в каждом из промежутков времени: I вариант – пополнение предшествует расходу; II вариант – расход предшествует пополнению; III вариант - очередность любая.

В III варианте выбор оптимальной стратегии означает не только определение размера пополнения и расхода, но и выбор оптимальной очередности в каждом из промежутков времени.

Рассмотрим n- шаговый процесс, понимая под k-м шагом – промежуток времени, в котором принимается решение о пополнении или расходовании запасов (k=1,2,…n).

ξ_{k-1}- запас товаров в начале k-го шага,

x_k - размер пополнения,

y_k- размер расходования запасов на k-ом шаге.

$$\xi_k=\xi_{k-1}+x_k-y_k. \qquad (2)$$

Будем решать задачу с помощью обратной вычислительной схемы, т.е. используя рекуррентные соотношения в виде:

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_n, y_n} \{\beta_n \cdot y_n - \alpha_n \cdot x_n\} \qquad (3)$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_k, y_k} \left\{\beta_k \cdot y_k - \alpha_k \cdot x_k + Z_{k+1}^*(\xi_k)\right\} \qquad (4)$$

Переменные задачи должны удовлетворять условиям неотрицательности:

$$x_k \geq 0,\ y_k \geq 0, \qquad (5)$$

а также следующим дополнительным ограничениям:

I вариант: $\xi_{k-1}+x_k \leq c$; $y_k \leq \xi_{k-1}+x_k$. (6)

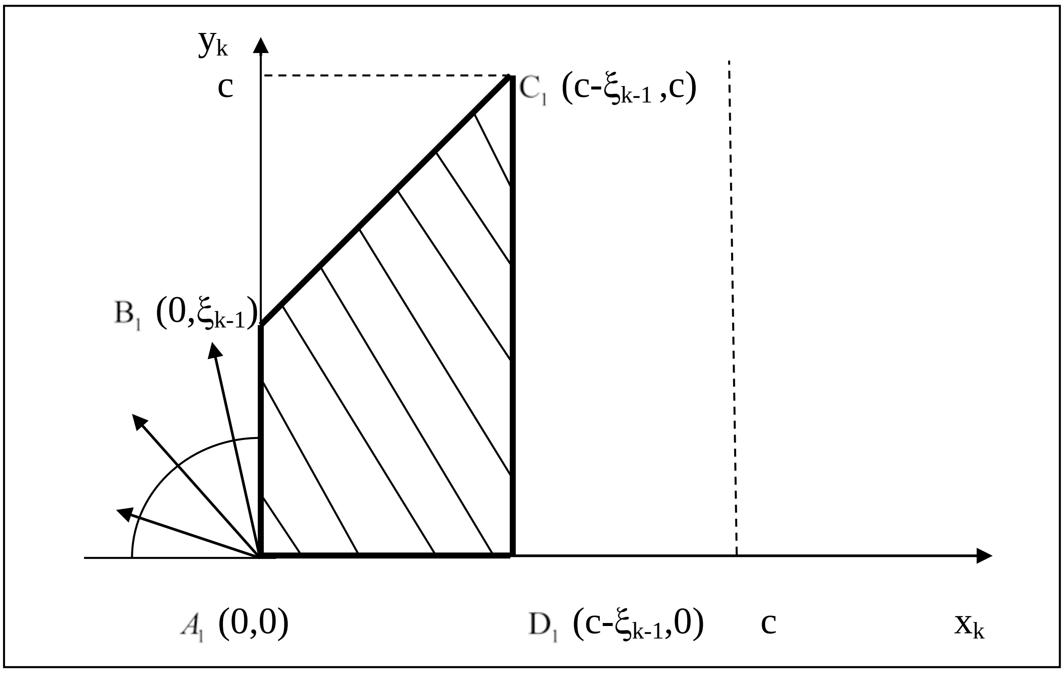
II вариант: $\xi_{k-1}-y_k+x_k \leq c$; $y_k \leq \xi_{k-1}$. (7)

Ш вариант: или (6), или (7)

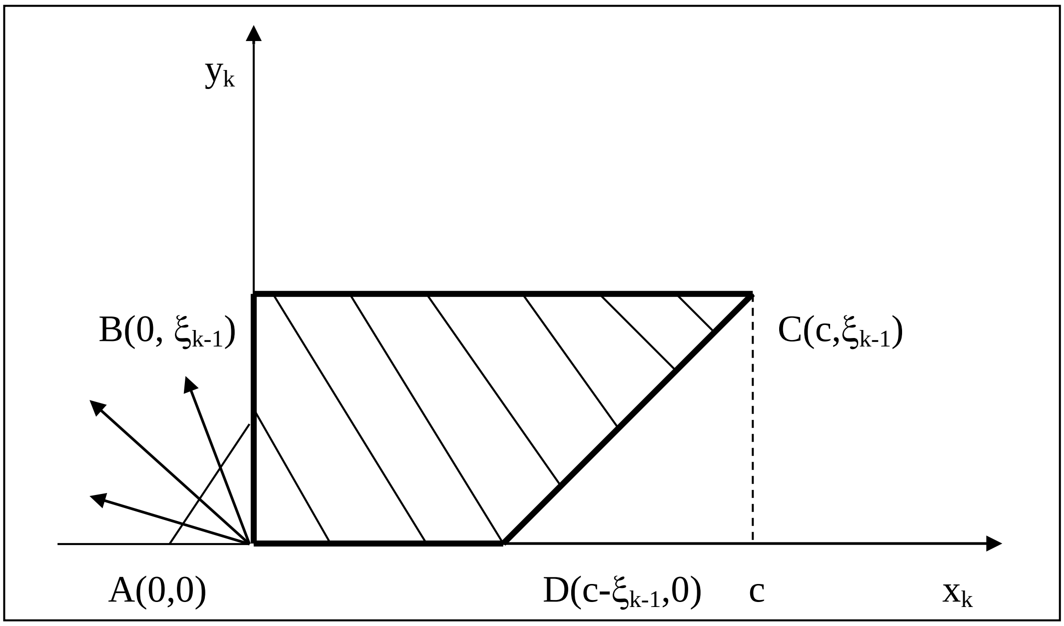
(т.к. емкость склада ограниченная; расход не может превышать наличные запасы).

Для варианта III альтернативные условия означают, что если бы принять решение сначала пополнить запасы, а затем их расходовать, то должны выполняться условия (6); если же принят противоположный порядок, то должны выполняться условия (7).

Линейность функций Z_n, $Z_k(x_k, y_k)$ позволяет упростить решение задачи с помощью графических соображений. Несложно убедиться., что в первом варианте область допустимых значений x_k, y_k имеет следующий вид:



Во втором варианте область допустимых значений x_k, y_k задается следующим образом:



Итак, мы имеем задачу линейного программирования, для которой оптимальное решение достигается, по крайней мере в одной из вершин области. При этом для n-го шага можно ограничиться выбором из двух альтернатив, так как значение $Z_n(x_n,y_n)=\beta_n \cdot y_n+\alpha_n \cdot x_n$ в точках A, D дает меньшее значение, чем в точках B, C. Отсюда

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_n, y_n} \begin{Bmatrix} \beta_n \cdot \xi_{n-1} & \text{в вершине B} \\ (\beta_n - \alpha_n)\cdot c + \alpha_n \cdot \xi_{n-1} & \text{в вершине C} \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

Из (1) определим значение переменной ζ_k для каждой точки. Тогда получим $\zeta_k = \zeta_{k-1}$ в точке A, $\zeta_k=0$ в точке B, $\zeta_k=0$ в точке C, $\zeta_k=c$ в точке D. Вместо (3) легко получить

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_k, y_k} \begin{Bmatrix} Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}) & \text{(в вершине A)} \\ \beta_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & \text{(в вершине B)} \\ (\beta_k - \alpha_k)\cdot c + \alpha_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & \text{(в вершине C)} \\ -\alpha_k \cdot c + \alpha_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(c) & \text{(в вершине D)} \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

При выполнении практических расчетов оказывается достаточным не табулировать функции

$$Z_k^*(\xi_{k-1})$$

для всех значений ξ_{k-1}, а ограничиться вычислением этих функций для крайних значений ξ_{k-1}, т.е. $\xi_{k-1}=0$, $\xi_{k-1}=c$.

Во II варианте аналогично получим:

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \beta_n \cdot \xi_{n-1} \quad \text{в вершине B} \qquad (10)$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_k, y_k} \begin{Bmatrix} Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}) & \text{(в вершине A)} \\ \beta_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & \text{(в вершине B)} \\ -\alpha_k \cdot c + \beta_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(c) & \text{(в вершине C)} \\ -\alpha_k \cdot c + \alpha_k \cdot \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(c) & \text{(в вершине D)} \end{Bmatrix} \qquad (11)$$

При III варианте задачи на каждом шаге мы должны выбрать наибольшее значение по формулам (8), (9) и сравнить его с наибольшим значением по формулам (10), (11). В зависимости от того, к какому варианту относится найденный максимум, устанавливается выгодная на данном шаге очередность пополнения и расходования запасов.

При решении практических задач удобно пользоваться следующими таблицами, содержащими информацию о координатах вершин допустимых множеств и о состоянии склада для этих вершин (отдельно по стратегиям).

Первая стратегия:

	(x_k,y_k)	ξ_k
A	(0,0)	ξ_{k-1}
B	$(0, \xi_{k-1})$	0
C	$(c- \xi_{k-1},c)$	0
D	$(c- \xi_{k-1},0)$	c

Вторая стратегия:

	(x_k,y_k)	ξ_k
A	(0,0)	ξ_{k-1}
B	$(0, \xi_{k-1})$	0
C	(c, ξ_{k-1})	c
D	$(c- \xi_{k-1},0)$	c

Пример 14.

Пусть дана следующая информация: n=5, c=50, ξ_0=0.

k	1	2	3	4	5
α_k	5	16	12	15	18
β_k	15	10	8	15	22

Определить оптимальные размеры пополнения и расходования при первой стратегии управления запасами.

Решение:

По I варианту управления: пополнение предшествует расходу. Все расчеты ведутся по формулам (8), (9). Сравнив значения функции $z_k^*(\xi_{k-1})$ в различных вершинах A, B, C, D, определим каково ее максимальное значение и в какой вершине этот максимум достигается.

Вычислим значение функции

$$Z_5^*(\xi_4) = \max\begin{cases}\beta_5 \cdot \xi_4 \\ (\beta_5 - \alpha_5)\cdot c + \alpha_5 \cdot \xi_4\end{cases} = \max\begin{cases}22 \cdot \xi_4 = 18\xi_4 + 4\xi_4 \le 18\xi_4 + 4c \\ 4\cdot c + 18\xi_4\end{cases} = 18\xi_4 + 4c.$$

Максимум функции $Z_5^*(\xi_4)$ достигается в вершине C.

Тогда условно оптимальные значения $x_5 = c - \xi_4$, $y_5 = c$.

$$Z_4^*(\xi_3) = \max\begin{cases}18\xi_3 + 4c \le 15\xi_3 + 7c \\ 15\xi_3 + 4\cdot c \\ 15\xi_3 + 4\cdot c \\ 15\xi_3 + 7\cdot c\end{cases} = 15\xi_3 + 7c\,.$$

Поскольку максимум функции $Z_4^*(\xi_3)$ достигается в вершине D, то условно оптимальные значения $x_4 = c - \xi_3$, $y_4 = 0$.

$$Z_3^*(\xi_2) = \max\begin{cases}15\xi_2 + 7c \le 12\xi_2 + 10c \\ 8\xi_2 + 7\cdot c \\ 12\xi_2 + 3\cdot c \\ 12\xi_2 + 10\cdot c\end{cases} = 12\xi_2 + 10\cdot c\,.$$

Тогда соответствующие условно оптимальные значения пополнения и расходования равны: $x_3 = c - \xi_2$, $y_3 = 0$ (максимум достигается в вершине D).

$$Z_2^*(\xi_1) = \max\begin{cases}12\xi_1 + 10c \\ 10\xi_1 + 10\cdot c \\ 16\xi_1 + 4\cdot c \le 12\xi_1 + 8\cdot c \\ 16\xi_1 + 6\cdot c \le 12\xi_1 + 10\cdot c\end{cases} = 12\xi_1 + 10c\,.$$

Условно оптимальные значения $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.

$$Z_1^*(\xi_0) = \max\begin{cases} 12\xi_0 + 10c = 10\cdot c \\ 15\xi_0 + 10\cdot c \le 5\xi_0 + 10\cdot c \\ 5\xi_0 + 20\cdot c \\ 5\xi_0 + 17\cdot c \end{cases} = 5\xi_0 + 20\cdot c.$$

Откуда условно оптимальные значения $x_1 = c - \xi_0$, $y_1 = c$, т.к. максимум достигается в вершине C.

С учетом полученных условно оптимальных значений x_k, y_k вычислим значения ξ_k для всех недель: $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = c$, $\xi_4 = c$.

Откуда легко получить следующие истинно оптимальные значения размеров пополнения и расходования запасов x_k, y_k (см. таблицу):

k	1	2	3	4	5
x_k	c	0	c	0	0
y_k	c	0	0	0	c
ξ_k	0	0	c	c	0

В последней строке представленной таблицы отображено состояние склада в соответствующую неделю.

При этом максимальная суммарная прибыль при управлении запасами при использовании I стратегии будет равна

$$Z_1^*(0) = 5\cdot 0 + 20\cdot 50 = 1000.$$

Полученное решение легко проверить, рассчитав разницу выручки от реализации и общих затрат на приобретение товаров.

<u>Пример 15.</u>

Пусть условия задачи те же, что в практическом примере 12. Необходимо определить оптимальные размеры пополнения и расходования запасов при управлении запасами по второй стратегии.

<u>Решение</u>:

По II стратегии управления запасами: расходование предшествует пополнению. Расчеты проводим по формулам (10), (11). Здесь также сравниваем значения функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$ в различных вершинах

A,B,C,D области допустимых значений, определяем каково ее максимальное значение и в какой вершине оно достигается.

$$Z_5^*(\xi_4) = 22\xi_4.$$

Откуда условно оптимальные значения $x_5= 0$, $y_5= \xi_4$.

$$Z_4^*(\xi_3) = \max\begin{cases} 22\xi_3 \le 15\xi_3 + 7c \\ 15\xi_3 \\ 15\xi_3 + 7\cdot c \\ 15\xi_3 + 7\cdot c \end{cases} = 15\xi_3 + 7\cdot c.$$

Тогда имеем альтернативные условно оптимальные значения $x_4= c$, $y_4= \xi_3$ или $x_4= c-\xi_3$, $y_4=0$ (максимум целевой функции достигается в вершинах C, D).

$$Z_3^*(\xi_2) = \max\begin{cases} 15\xi_2 + 7c \le 12\xi_2 + 10c \\ 8\xi_2 + 7\cdot c \\ 8\xi_2 + 10\cdot c \le 12\xi_2 + 3\cdot c \\ 12\xi_2 + 10\cdot c \end{cases} = 12\xi_2 + 10\cdot c.$$

Следовательно, соответствующие условно оптимальные значения пополнения и расходования равны: $x_3= c-\xi_2$, $y_3=0$. В этом случае максимум целевой функции достигается в вершине D.

$$Z_2^*(\xi_1) = \max\begin{cases} 12\xi_1 + 10c \\ 10\xi_1 + 10\cdot c \\ 10\xi_1 + 6\cdot c \\ 16\xi_1 + 6\cdot c \le 12\xi_1 + 10\cdot c \end{cases} = 12\xi_1 + 10c.$$

Условно оптимальные значения $x_2= 0$, $y_2=0$ (максимум в вершине A).

$$Z_1^*(\xi_0) = \max\begin{cases} 12\xi_0 + 10c \\ 15\xi_0 + 10\cdot c \\ 15\xi_0 + 17\cdot c \\ 5\xi_0 + 17\cdot c \end{cases} = 15\xi_0 + 17\cdot c.$$

Тогда получим следующие условно оптимальные значения $x_1= c$, $y_1= \xi_0$ (т.к. в этом случае максимум достигается в вершине C допустимого множества).

С учетом полученных условно оптимальных значений x_k, y_k вычислим значения ξ_k для всех недель: ξ_1=с, ξ_2=с, ξ_3=с, ξ_4=с.
Легко получить два альтернативных решения задачи (оптимальные значения размеров пополнения и расходования запасов x_k, y_k см. в таблицах):

k	1	2	3	4	5
x_k	c	0	0	c	0
y_k	0	0	0	c	c
ξ_k	c	c	c	c	0

или

k	1	2	3	4	5
x_k	c	0	0	0	0
y_k	0	0	0	0	c
ξ_k	c	c	c	c	0

При этом максимальная суммарная прибыль при управлении запасами по II стратегии будет равна

$$Z_1^*(0) = 15 \cdot 0 + 17 \cdot 50 = 850.$$

Правильность полученных решений легко проверить (способ проверки описан в решении предыдущего примера).

Большой интерес представляет сравнение полученных двух альтернативных решений задачи. С точки зрения критерия максимизации прибыли эти два решения одинаковы. В каком случае первое решение лучше второго, и наоборот? Необходимо провести анализ решения. Интерес представляет рассмотрение практических примеров, обосновывающих преимущества тех или иных принятых решений. Например, первое решение лучше с точки зрения дополнительного критерия максимизации выручки от реализации товаров. Второе решение следует выбрать в случае учета дополнительного критерия минимизации логистических затрат (в том числе, транспортных).

Отметим также, что существенный интерес вызывает также сравнение решений, полученных по различным стратегиям.

Пример 16.

Рассмотрим решение задачи из примера 12 по III стратегии. Основное отличие III стратегии решения задачи от предыдущих двух стратегий состоит в том, что в этом случае очередность пополнения и расходования товарных запасов – любая. Наша цель в III стратегии состоит как раз в определении для каждого из промежутков времени оптимальной очередности.

$$Z_5^*(\xi_4) = \max\begin{cases}\beta_5 \cdot \xi_4 \\ (\beta_5 - \alpha_5)\cdot c + \alpha_5 \cdot \xi_4\end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases}22 \cdot \xi_4 = 18\xi_4 + 4\xi_4 \le 18\xi_4 + 4c, (\text{в вершине } B_1, B_2) \\ 18\xi_4 + 4\cdot c, (\text{в вершине } C_1)\end{cases} = 18\xi_4 + 4c.$$

Следовательно, условно оптимальные значения $x_5 = c - \xi_4$, $y_5 = c$. Условно оптимальной стратегией на этом шаге является I стратегия.

$$Z_4^*(\xi_3) = \max\begin{cases}18\xi_3 + 4c \le 15\xi_3 + 7c, (\text{в вершинах } A_1, A_2) \\ 15\xi_3 + 4\cdot c, (\text{в вершинах } B_1, B_2) \\ 15\xi_3 + 4\cdot c, (\text{в вершине } C_1) \\ 33\xi_3 - 11\cdot c, (\text{в вершине } C_2) \\ 15\xi_3 + 7\cdot c, (\text{в вершинах } D_1, D_2)\end{cases} = 15\xi_3 + 7c$$

$x_4 = c - \xi_3$, $y_4 = 0$, условно оптимальные стратегии: I или II стратегии.

$$Z_3^*(\xi_2) = \max\begin{cases}15\xi_2 + 7\cdot c, (\text{в вершинах } A_1, A_2) \\ 8\xi_2 + 7\cdot c, (\text{в вершинах } B_1, B_2) \\ 12\xi_2 + 3\cdot c, (\text{в вершине } C_1) \\ 8\xi_2 + 10\cdot c, (\text{в вершине } C_2) \\ 12\xi_2 + 10\cdot c, (\text{в вершинах } D_1, D_2)\end{cases} = 12\xi_2 + 10\cdot c$$

$x_3 = c - \xi_2$, $y_3 = 0$, условно оптимальные стратегии: I или II стратегии.

$$Z_2^*(\xi_1) = \max\begin{cases} 12\xi_1 + 10\cdot c, (\text{в вершинах } A_1, A_2) \\ 10\xi_1 + 10\cdot c, (\text{в вершинах } \mathrm{B}_1, B_2) \\ 16\xi_1 + 4\cdot c, (\text{в вершине } \mathrm{C}_1) \\ 10\xi_1 + 6\cdot c, (\text{в вершине } \mathrm{C}_2) \\ 16\xi_1 + 6\cdot c, (\text{в вершинах } \mathrm{D}_1, D_2) \end{cases} = 12\xi_1 + 10\cdot c$$

.

$x_2=0$, $y_2=0$, условно оптимальные стратегии: I или II стратегии.

$$Z_1^*(\xi_0) = \max\begin{cases} 12\xi_0 + 10\cdot c, (\text{в вершинах } A_1, A_2) \\ 15\xi_0 + 10\cdot c, (\text{в вершинах } \mathrm{B}_1, B_2) \\ 5\xi_0 + 20\cdot c, (\text{в вершине } \mathrm{C}_1) \\ 15\xi_0 + 17\cdot c, (\text{в вершине } \mathrm{C}_2) \\ 5\xi_0 + 17\cdot c, (\text{в вершинах } \mathrm{D}_1, D_2) \end{cases} = \max\begin{cases} 5\xi_0 + 20\cdot c, \text{ в вершине } C_1 \\ 15\xi_0 + 17\cdot c, \text{в вершине } C_2 \end{cases}.$$

Учитывая, что ξ_0 =0, заключаем $Z_1^*(\xi_0) = 5\xi_0 + 20\cdot c = 20\cdot c = 20\cdot 50 = 1000$. Максимум достигается в вершине C_1, и тогда $x_1=c-\xi_0$, $y_1=c$. Условно оптимальной стратегией является первая. С учетом того, что ξ_0 =0, строим оптимальное решение:

k	1	2	3	4	5
x_k	c	0	c	0	0
y_k	c	0	0	0	c
ξ_k	0	0	c	c	0
Номер страт.	1	$1\vee 2$	$1\vee 2$	$1\vee 2$	1

2.2.8. Задачи для самостоятельного решения.

1. Книжный магазин имеет спрос на книгу в количестве 800 штук. Каждая книга стоит $20.00, каждый заказ стоит $80.00. Затраты хранения составляют 5% от стоимости книги. Определить Q^*, $C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, число заказов N в течение года. Также определить длину цикла управления запасами, предполагая, что в году 250 рабочих дней.

2. Отдел магазина реализует примерно 1000 сумок в год. Каждая сумка стоит $1.10 и каждый заказ требует $100.00. Затраты хранения составляют 5% от стоимости изделия. Определить Q^*, $C(Q^*)$, число заказов в течение года, Определить также длину цикла, при условии, что в году 250 рабочих дней и время выполнения заказа равно 5 дням.

3. Отдел магазина реализует определенную марку фенов. При условии, что годовой сбыт составляет 2000 фенов, издержки хранения составляют $80.00 за изделие, издержки заказа $200; определить оптимальное количество изделий, которое должно быть заказано. Также определить $C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, N, IC, P, предполагая, что L =3 дням, NN=250 рабочих дней в году.

4. Пусть в условиях задачи 1 интенсивность пополнения равна 1600 книг. Используя всю предыдущую информацию вычислить Q^*, N, IC, P, если время выполнения заказа составляет два дня. Определить также Q_{max}, $C1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$.

5. Магазин реализует компьютеры фирмы IBM. Годовой сбыт составляет 10000 изделий, количество рабочих дней магазина в году равно 200. Издержки хранения равны $30, издержки заказа равны $15 за изделие. Предполагая, что каждодневная интенсивность пополнения равна 100 компьютерам, определить Q^*, $C_1(Q^*)$, $C_2(Q^*)$, $C(Q^*)$, N, IC, период пополнения и период сбыта товара.

6. Магазин использует новую политику управления запасами, позволяющую возникновение дефицита фенов для того, чтобы минимизировать общие издержки управления запасами. Пусть известна следующая информация: ежегодный сбыт фенов равен 3500, издержки хранения $25 за изделие, стоимость заказа $60, издержки дефицита $70. Определить Q*, y*, C(Q*,y*).

7. Фирма обеспечивает один из своих магазинов определенной маркой радиоприемников в количестве 3000 штук. Годовые издержки хранения равны $5.00, издержки на запуск в производство составляют $100.00. Какое количество изделий должно быть произведено с минимальными издержками. Определить также C(Q*), количество запусков производственной линии.

8. Поставщик обеспечивает авто-магазин шинами в количестве 2000 штук ежегодно. Затраты хранения равны $30 за изделие, издержки дефицита составляют $40.00 в год, затраты на запуск в производство составляют $120.00. Определить Q*, y*, предполагая, что интенсивность сбыта постоянна и производственные заказы выполняются сразу без задержки.

9. Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок кофе в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2,5 руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 руб. По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 40 коп. за один пакет. Пусть поставщик кофе предоставляет следующие скидки

Размер заказа	Цена, руб./шт.
1–299	2,5
300–499	2,45 (2% скидки)
500 и более	2,4 (4% скидки)

Следует ли владельцу магазина воспользоваться одной из скидок, предоставляемых поставщиком? Каковы при этом будут размер заказа и общие затраты на управление запасами?

10. Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации управления запасами? Известно, что

$S = 320$ шт./дн.; A=20 руб.; k=2 руб./шт.*дн.; $\beta_1 = 6$ руб./шт.; $\beta_2 =$ 5 руб./шт.; $\beta_3 = 4$ руб./шт.; $q_1 = 500$ *шт.*; $q_2 = 700$ шт.

11. Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации управления запасами? Известно, что $S = 250$ шт./дн.; A=20 руб.; k=3 руб./шт.*дн.; $\beta_1 = 7$ руб./шт.; $\beta_2 = 5$ руб./шт.; $\beta_3 = 2$ руб./шт.; $q_1 = 50$ шт.; $q_2 =$ 400 шт.

12. Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации управления запасами? Известно, что $S = 0.560$ т/дн.; A=20 руб.; k=4,2 руб./т*дн.; $\beta_1 =$ 9 руб./т; $\beta_2 = 6$ руб./т.; $\beta_3 = 4$ руб./т; $q_1 = 4$ т; $q_2 = 5$ т.

13. Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации управления запасами? Известно, что $S = 0{,}6$ т/дн.; A=25 руб.; k =2,6 руб./т*дн.; $\beta_1 =$ 10 руб./т; $\beta_2 = 8$ руб./т.; $\beta_3 = 6$ руб./т; $q_1 = 2$ т; $q_2 = 3$ т.

14. Какое количество товара заказывать и по какой цене, каковы затраты при оптимальной организации управления запасами? Известно, что $S = 0{,}390$ т/дн.; A=40 руб.; k =6,5 руб./т*дн.; $\beta_1 =$ 9 руб./т; $\beta_2 = 7$ руб./т.; $\beta_3 = 5$ руб./т; $q_1 = 3{,}5$ т; $q_2 = 5$ т.

15. Решить динамическую двумерную задачу управления запасами по I и II стратегиям, если известно, что n=4, c=12, ξ_0=5. Провести сравнительный анализ полученных результатов.

k	1	2	3	4
α_k	10	15	10	6
β_k	7	12	9	8

16. Решить динамическую двумерную задачу управления запасами по трем стратегиям, если известно, что n=5, c=15, ξ_0= 4. Проанализировать результаты, полученные по первой и второй стратегиям.

k	1	2	3	4	5
α_k	10	18	8	11	12
β_k	15	13	10	7	9

17. Пусть в условии задачи 9 изменены следующие данные: c=10, ξ_0= 0.

18. Пусть в условии задачи 10 изменены следующие данные: c=20, ξ_0= 0.

19. Предприниматель занимается покупкой и продажей одних и тех же изделий. Его базой является склад , вмещающий 500 таких изделий. Ежемесячно он может закупать любое число изделий, которое он намеревается поставить в конце данного месяца, но при условии, что складской запас не превысит 500 изделий. На последующие шесть месяцев имеется следующий безошибочный прогноз затрат и продажных цен:

месяц	1	2	3	4	5	6
затраты	27	24	26	28	22	21
цена прод.	28	25	25	27	23	23

Если текущий запас составляет 200 изделий, то какова оптимальная стратегия на этот период?

20. Пусть известно, что $c=50$, $\xi_0= 20$. Определить оптимальные решения двумерной задачи по первым двум стратегиям управления.

k	1	2	3	4	5	6
α_k	11	12	18	16	14	17
β_k	13	13	17	15	15	18

21. Решить двумерную задачу управления запасами при следую щих значениях емкости склада и начального состояния склада: $c=1000$, $\xi_0= 400$.

k	1	2	3	4	5	6
α_k	13	12	17	19	18	15
β_k	14	14	16	18	19	16

Решить следующие двумерные задачи управления запасами:
а) по первой стратегии,
б) по второй стратегии,
в) по третьей стратегии.

22. Пусть $c=200$, $\xi_0= 80$.

k	1	2	3	4	5	6
α_k	16	19	20	18	13	14
β_k	17	20	19	17	15	15

23. $c=400$, $\xi_0= 160$.

k	1	2	3	4	5	6
α_k	10	14	13	19	12	14
β_k	12	11	9	15	17	11

24. $c=15$, $\xi_0= 4$.

k	1	2	3	4	5
α_k	12	11	8	18	10
β_k	9	7	10	13	15

25. $c=150$, $\xi_0 = 40$.

k	1	2	3	4	5
α_k	13	14	11	20	13
β_k	12	10	13	14	18

26. $c=500$, $\xi_0 = 100$.

k	1	2	3	4	5
α_k	9	13	10	20	12
β_k	12	9	13	15	16

27. $c=220$, $\xi_0 = 40$.

k	1	2	3	4	5
α_k	14	13	10	20	12
β_k	11	9	12	15	17

28. $c=240$, $\xi_0 = 50$.

k	1	2	3	4	5
α_k	16	15	12	22	14
β_k	14	12	14	17	19

29. $c=300$, $\xi_0 = 30$.

k	1	2	3	4	5
α_k	14	13	9	21	13
β_k	11	10	12	15	18

§3. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ХАБА МЕТОДОМ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ (МЦТ).

Основные понятия.

- Оптимальное местоположение складского комплекса.
- Логистические затраты.
- Объем грузопотока.
- Транспортный тариф.
- Евклидово расстояние между объектами моделирования.

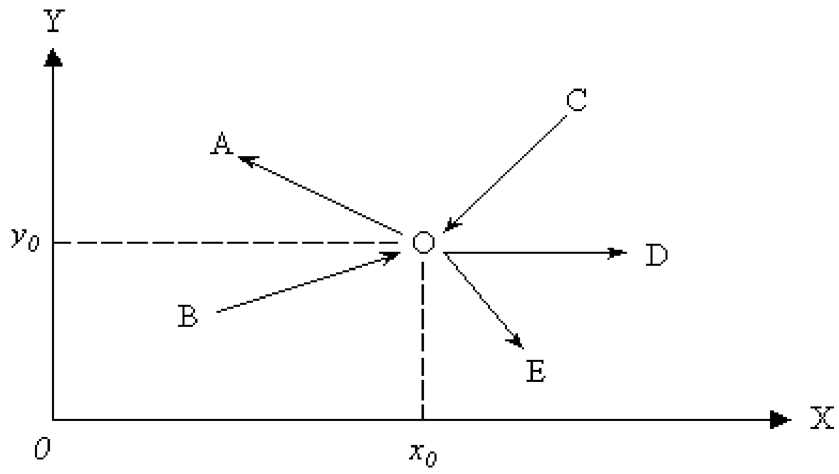
3.1. Постановка задачи. Алгоритм МЦТ

Задача оптимального размещения логистических мощностей давно уже стала классической задачей логистики.

Экономическую и технологическую эффективность складского комплекса определяет его местоположение относительно расположения поставщиков и потребителей продукции, распределяемой через склад. Местоположение склада (или так называемых пунктов перевалки продукции) отражается на таких важных экономических показателях, как затраты на транспортировку продукции, арендная плата за землю (занятую под склад), а также объем продаж или выручку от реализации, так как зачастую место расположения производителя или дистрибьютера оказывает влияние на выбор потребителя.

При решении задачи нахождения оптимального местоположения склада, метод центра тяжести обычно применяется в тех случаях, когда в качестве основного критерия оптимизации размещения складского комплекса выбирается минимум общих транспортных расходов. На рисунке 1, графически интерпретируется суть поставленной задачи:

Как показано на рисунке, в данной задаче объектами моделирования являются: поставщики и\или производители, потребители продукции и складской комплекс, опосредующий связи поставщиков и потребителей. Направление потоков продукции на рисунке указано стрелками. Для отражения географического расположения моделируемых объектов применяется декартовая система координат (прямоугольная система координат с одинаковым масштабом по осям). При этом, координаты поставщиков и потребителей предполагаются известными. Задача заключается в определении неизвестных координат размещения оптовой базы. Необходимо определить оптимальные координаты (x_0, y_0) склада, минимизирующие суммарные годовые транспортные расходы на перевозку грузов в рассматриваемой системе.



Задача оптимизации
оположения склада
– предприятия- по-
ели
предприятия- постав-

адской комплекс
аправление грузопото-
ров из склада или на

Чтобы рассчитать транспортные затраты, нам потребуются значения следующих величин:

- расстояние между поставщиком (потребителем) и складским комплексом, км;
- объем грузопотока от поставщика в складской комплекс или из складского комплекса в пункт потребления , т/год;
- транспортный тариф, руб/ткм.

Для выражения транспортного тарифа используется такая единица измерения, как «руб/ткм», означающая «рубль на тонно-километр» и отражающая расходы на транспортировку одной тонны груза на один километр.

Для формализации поставленной и описания алгоритма метода центра тяжести, примем следующие условные обозначения:

- n – общее количество поставщиков и потребителей;
- v_i – объем грузопотока *i*-го поставщика (потребителя), т/год;
- t_i – транспортный тариф *i*-го поставщика (потребителя), руб/ткм;
- (x_i, y_i) – координаты *i*-го поставщика (потребителя);
- (x_0, y_0) – координаты складского комплекса;

- r_{0i} – расстояние между складским комплексом и i-м поставщиком (потребителем).

Необходимо вычислить оптимальные значения координат склада (x_0,, y_0) согласно следующему критерию:

$$TC = \sum_{i=1}^{n} v_i t_i r_{0i} \to \min ,$$

где TC (Total Costs) – совокупные затраты на транспортировку продукции в руб/год.

Для нахождения оптимальных координат размещения склада (x_0,,y_0), предлагается использовать эвристический итерационный алгоритм. Число итераций в процессе вычислений как обычно определяется требованиями к степени точности получаемого результата. В алгоритме, число итераций регулируется с помощью параметра из условия останова. По сути, можно констатировать, что метод центра тяжести позволяет найти не оптимальное место сосредоточения складских помещений, а такое, относительно которого суммарные логистические издержки в любых двух диаметрально противоположных точках области потребления и поставки находятся в равновесии. К сожалению, это условие отнюдь не обеспечивает оптимального размещения склада с точки зрения минимума целевой функции суммарных издержек. В литературе, известны практические примеры (так называемые контрпримеры), для которых координаты складского комплекса, вычисленные по методу центров не обеспечивают оптимальности логистических затрат. На простейших примерах нетрудно показать, что найденные методом центра тяжести координаты

(x, y) склада не являются оптимальными, поскольку не доставляют минимума целевой функции:

— метод центра тяжести, разрекламированный учебниками по логистике, не дает возможности определить координаты оптимального расположения склада;

— логистические издержки минимальны, если поставка груза потребителям производится непосредственно от производителя;

— при прочих равных условиях, введение в логистическую цепочку промежуточного пункта, каковым является склад, приводит к увеличению издержек.

Что означает, что метод центров тяжести является эвристическим, который дает приемлимые решения для некоторых практических задач, в которых обязательным требованием является наличие складского комплекса, опосредующего отношения между поставщиками и потребителями.

Алгоритм метода центра тяжести

Шаг 0. Вычисляются начальные значения координат (x_0, y_0):

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(v_i t_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i); \qquad (12)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i(v_i t_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i). \qquad (13)$$

Шаг 1. Рассчитываются расстояния между складским комплексом и объектами из множества поставщиков и потребителей:

$$r_{0i} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, i = 1, ..., n.$$

Шаг 2. Вычисляются суммарные затраты на транспортировку:

$$TC = \sum_{i=1}^{n} v_i t_i r_{0i}.$$

Шаг 3. Координаты оптового склада пересчитываются по следующей формуле:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(v_i t_i / r_{0i}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i / r_{0i});$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i(v_i t_i / r_{0i}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i / r_{0i}).$$

Шаг 4. Повторяются шаги 1, 2 и 3 до тех пор, пока совокупные транспортные затраты *TC* не перестанут изменяться на значимую величину, т.е. пока будет выполняться соотношение $\text{TC(k)} - \text{TC(k+1)} \geq \varepsilon, \varepsilon -$ достаточно маленькое число, k – номер итерации, TC(k), TC(k+1) – значения затрат на k- ой и k+1- ой итерациях алгоритма.

3.2. Пример практического применения МЦТ с визуализацией полученных результатов в Excel

Для решения выберем задачу с пятью экономическими объектами. Реализуем решение этой задачи в Excel, результаты счета выгрузим в таблицы и проанализируем процесс решения. Кроме того, результаты решения задачи визуализируем. При этом при округлении координат точек, оставляются не менее шести знаков после запятой. Пусть заданы следующие исходные данные: n=5.

№ п/п	Объект	Объем грузопотока т/год	Тариф руб/ткм	Координаты	
				X_i	Y_i
1	A	1600	4	18	42
2	B	1700	6	26	7
3	C	500	2	94	8
4	D	1100	3	68	73
5	E	1300	4	41	80

Решение:

Для удобства расчета координат (x_0, y_0) на нулевом шаге, вначале вычислим величины, используемые в формуле (12), и заполним их в следующую таблицу:

Таблица 1.

№ п/п	Объект	$x_i*(v_i*t_i)$	$y_i*(v_i*t_i)$	v_i*t_i
1	A	115200,0000	268800,0000	6400,0000
2	B	265200,0000	71400,0000	10200,0000
3	C	94000,0000	8000,0000	1000,0000
4	D	224400,0000	240900,0000	3300,0000
5	E	213200,0000	416000,0000	5200,0000
Сумма		**912000,0000**	**1005100,0000**	**26100,0000**

На основании предыдущей таблицы, определяем начальные значения координат складского комплекса:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(v_i t_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i);$$

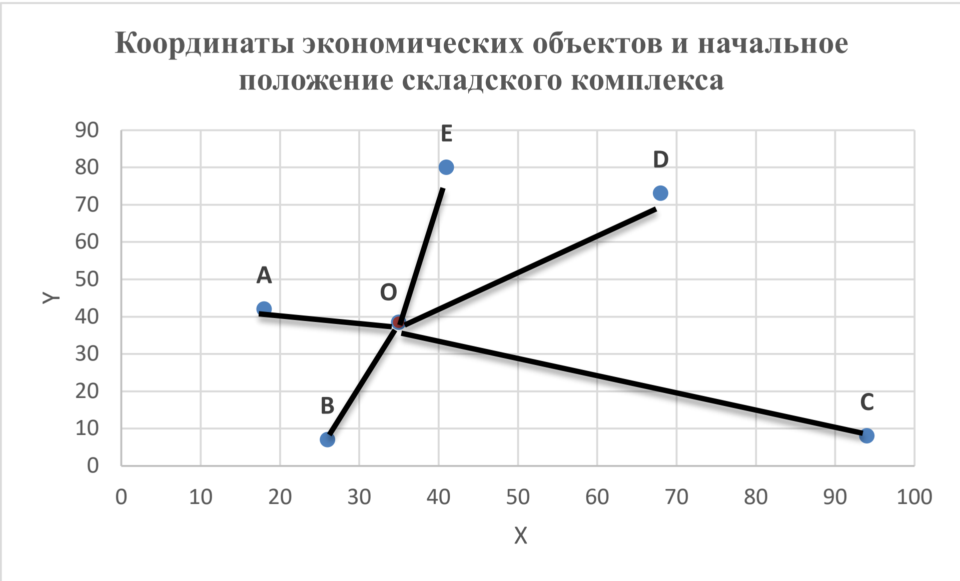
$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i(v_i t_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i)$$

x_0 = 912000,0000/26100,0000= 34,942529;

y_0 = 1005100,0000/26100,0000 = 38,509579.

объекты	X_i	Y_i
A	18	42
B	26	7
C	94	8
D	68	73
E	41	80
O(Xo,Yo)	34,94	38,51

Следующая графическая интерпретация демонстрирует начальное взаиморасположение экономических объектов и транспортного хаба.



На первом шаге алгоритма, рассчитаем расстояния между складским комплексом и объектами из множества поставщиков/потребителей:

$$r_{0i} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, i = 1, \ldots, n.$$

Результаты занесем в Таблицу 2. На втором шаге алгоритма, вычисляем:

$$TC = \sum_{i=1}^{n} v_i t_i r_{0i}.$$

Таблица 2.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	17,298333	110709,330704	6659,601276	15539,069644	369,977849
2	B	32,753967	334090,464330	8096,729146	2179,888616	311,412659
3	C	66,472696	66472,695861	1414,114454	120,350166	15,043771
4	D	47,774319	157655,253484	4697,084199	5042,458037	69,074768
5	E	41,930276	218037,434287	5084,631470	9921,232136	124,015402
Сумма			**886965,178666**	**25952,160545**	**32802,99860**	**889,524448**

На третьем шаге, осуществим повторный расчет координат складского комплекса:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i (v_i t_i / r_{0i}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i / r_{0i});$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i (v_i t_i / r_{0i}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (v_i t_i / r_{0i}).$$

В соответствии с проведенными вычислениями, определяем новые координаты оптового склада:

$$x_0 = 25952{,}160545/889{,}524448= 29{,}175320;$$

$$y_0 = 32802{,}99860/889{,}524448= 36{,}877006.$$

Отметим также, что при старых координатах складского комплекса (34,942529; 38,509579) суммарные затраты на транспортировку, согласно Таблице 2, составляют: ТС = 886965,178666 руб/год.

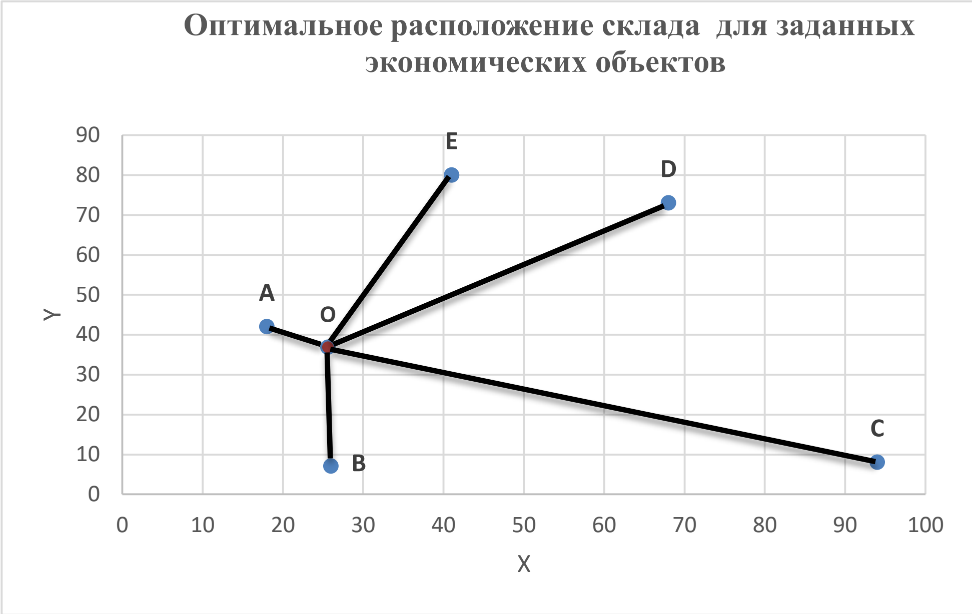
Повторяем шаги 1, 2 и 3 до тех пор, пока суммарные транспортные расходы ТС не перестанут изменяться на значимую величину. Пользователь может выбрать заранее эту малую величину изменения значения функции затрат для двух смежных итераций.

Результаты выполнения вычислений на различных итерациях метода центра тяжести представлены в следующей сводной таблице:

Таблица 3.

Столбец1	Столбец2	Столбец3	Столбец4	Столбец5
№ итерации	**Коорди- наты**		**TC**	**TC(k) - TC(k+1)**
	X_0	**Y_0**		
0	34,942529	38,50957854	886965,178666	
1	29,17532	36,87700621	863623,983285	23341,19538
2	27,093789	36,28801805	860225,676956	3398,306329
3	26,345188	36,27144257	859778,551958	447,1249974
4	26,048181	36,40015369	859681,445830	97,10612832
5	25,901374	36,53339378	859641,856912	39,58891765
6	25,812695	36,64002299	859622,034856	19,82205642
7	25,752706	36,71936893	859611,749605	10,28525123
8	25,710118	36,77704369	859606,378703	5,370902019
9	25,679349	36,81867857	859603,567895	2,810808183
10	25,656999	36,84870013	859602,094798	1,473096552
11	25,640743	36,87036248	859601,321944	0,772854069
12	25,628922	36,88601019	859600,916139	0,405804958
13	25,620329	36,89732481	859600,702932	0,213207038
14	25,614087	36,90551309	859600,590864	0,112067922
15	25,609553	36,91144266	859600,531938	0,058926

Следующая графическая интерпретация демонстрирует оптимальное взаиморасположение экономических объектов и транспортного хаба, полученное по МЦТ.



объекты	X_i	Y_i
A	18	42
B	26	7
C	94	8
D	68	73
E	41	80
O(Xo,Yo)	25,61	36,91

Далее представляем выгруженные в текстовый файл результаты решения задачи в пакете Excel по итерациям:

Таблица 4.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i{*}t_i{*}r_{0i}$	$x_i{*}v_i{*}t_i/r_{0i}$	$y_i{*}v_i{*}t_i/r_{0i}$	$v_i{*}t_i/r_{0i}$
1	A	12,293610	78679,103652	9370,721904	21865,017777	520,595661
2	B	30,045268	306461,738468	8826,680986	2376,414112	339,487730
3	C	70,965630	70965,629760	1324,584877	112,730628	14,091328
4	D	53,030429	175000,417172	4231,532770	4542,674885	62,228423
5	E	44,714826	232517,094232	4767,993526	9303,402002	116,292525
Сумма			**863623,983285**	**28521,514064**	**38200,239404**	**1052,695668**

Итерация 1	Xo	Yo
	27,09378876	36,28801805

Таблица 5.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	10,738889	68728,888090	10727,366912	25030,522795	595,964828
2	B	29,308435	298946,039215	9048,589528	2436,158719	348,022674
3	C	72,640575	72640,574524	1294,042629	110,131288	13,766411
4	D	54,964422	181382,594135	4082,640915	4382,835099	60,038837
5	E	45,870689	238527,580991	4647,848250	9068,972196	113,362152
Сумма			**860225,676956**	**29800,488234**	**41028,620097**	**1131,154903**

Итерация 2	Xo	Yo
	26,3451877	36,27144257

Таблица 6.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	10,122180	64781,952009	11380,947581	26555,544355	632,274866
2	B	29,273478	298589,473897	9059,395044	2439,067896	348,438271
3	C	73,324267	73324,266737	1281,976680	109,104398	13,638050
4	D	55,534767	183264,730310	4040,712028	4337,823206	59,422236
5	E	46,118871	239818,129007	4622,836499	9020,168779	112,752110
Сумма			**859778,551958**	**30385,867831**	**42461,708636**	**1166,525532**

Итерация 3	Xo	Yo
	26,04818069	36,40015369

Таблица 7.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,804667	62749,867553	11749,506872	27415,516034	652,750382
2	B	29,400193	299881,970294	9020,348897	2428,555472	346,936496
3	C	73,647936	73647,935999	1276,342626	108,624904	13,578113
4	D	55,673188	183721,521331	4030,665513	4327,037977	59,274493
5	E	46,092337	239680,150654	4625,497760	9025,361483	112,817019
Сумма			**859681,445830**	**30702,361667**	**43305,095870**	**1185,356502**

Итерация 4	Xo	Yo
	25,90137365	36,53339378

Таблица 8.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,608095	61491,807825	11989,889809	27976,409555	666,104989
2	B	29,533558	301242,296342	8979,615522	2417,588794	345,369828
3	C	73,834799	73834,798518	1273,112433	108,349994	13,543749
4	D	55,696568	183798,675075	4028,973548	4325,221603	59,249611
5	E	46,014284	239274,279152	4633,343809	9040,670847	113,008386
Сумма			**859641,856912**	**30904,935121**	**43868,240794**	**1197,276563**

Итерация 5	Xo	Yo
	25,81269531	36,64002299

Таблица 9.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,474574	60637,276659	12158,857400	28370,667266	675,492078
2	B	29,640615	302334,270977	8947,182836	2408,856917	344,122417
3	C	73,957822	73957,822020	1270,994703	108,169762	13,521220
4	D	55,693955	183790,050963	4029,162602	4325,424558	59,252391
5	E	45,942810	238902,614237	4640,551982	9054,735575	113,184195
Сумма			**859622,034856**	**31046,749522**	**44267,854078**	**1205,572301**

Итерация 6	Xo	Yo
	25,75270642	36,71936893

Таблица 10.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,380273	60033,747109	12281,092477	28655,882447	682,282915
2	B	29,720398	303148,057259	8923,164557	2402,390458	343,198637
3	C	74,043874	74043,873705	1269,517589	108,044050	13,505506
4	D	55,687683	183769,352957	4029,616408	4325,911732	59,259065
5	E	45,887830	238616,718575	4646,112002	9065,584394	113,319805
Сумма			**859611,749605**	**31149,503033**	**44557,813081**	**1211,565928**

Итерация 7	Xo	Yo
	25,71011804	36,77704369

Таблица 11.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,312636	59600,871622	12370,288889	28864,007408	687,238272
2	B	29,778455	303740,237668	8905,767707	2397,706690	342,529527
3	C	74,105507	74105,507362	1268,461729	107,954190	13,494274
4	D	55,682463	183752,127710	4029,994152	4326,317251	59,264620
5	E	45,847622	238407,634341	4650,186656	9073,534939	113,419187
Сумма			**859606,378703**	**31224,699133**	**44769,520478**	**1215,945879**

Итерация 8	Xo	Yo
	25,67934944	36,81867857

Таблица 12.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,263827	59288,495898	12435,464736	29016,084384	690,859152
2	B	29,820403	304168,106005	8893,240108	2394,333875	342,047696
3	C	74,150034	74150,033897	1267,700027	107,889364	13,486171
4	D	55,678770	183739,942648	4030,261408	4326,604159	59,268550
5	E	45,818652	238256,989446	4653,126872	9079,271945	113,490899
Сумма			**859603,567895**	**31279,793152**	**44924,183728**	**1219,152468**

Итерация 9	Xo	Yo
	25,65699858	36,84870013

Таблица 13.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,228517	59062,505868	12483,046379	29127,108217	693,502577
2	B	29,850671	304476,842589	8884,222449	2391,906044	341,700863
3	C	74,182298	74182,298040	1267,148666	107,842440	13,480305
4	D	55,676263	183731,667588	4030,442926	4326,799024	59,271220
5	E	45,797842	238148,780713	4655,241134	9083,397335	113,542467
Сумма			**859602,094798**	**31320,101554**	**45037,053059**	**1221,497431**

Итерация 10	Xo	Yo
	25,64074287	36,87036248

Таблица 14.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,202942	58898,825763	12517,736822	29208,052584	695,429823
2	B	29,872523	304699,732926	8877,723567	2390,156345	341,450906
3	C	74,205700	74205,699678	1266,749056	107,808430	13,476054
4	D	55,674567	183726,069934	4030,565724	4326,930850	59,273025
5	E	45,782883	238070,993642	4656,762183	9086,365235	113,579565
Сумма			**859601,321944**	**31349,537351**	**45119,313444**	**1223,209374**

Итерация 11	Xo	Yo
	25,62892176	36,88601019

Таблица 15.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,184407	58780,207265	12542,997623	29266,994453	696,833201
2	B	29,888314	304860,801111	8873,033168	2388,893545	341,270506
3	C	74,222678	74222,677966	1266,459289	107,783769	13,472971
4	D	55,673410	183722,251538	4030,649493	4327,020779	59,274257
5	E	45,772111	238014,978259	4657,858123	9088,503656	113,606296
Сумма			**859600,916139**	**31370,997697**	**45179,196203**	**1224,457232**

Итерация 12	Xo	Yo
	25,62032947	36,89732481

Таблица 16.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,170971	58694,216548	12561,373903	29309,872440	697,854106
2	B	29,899735	304977,301706	8869,643691	2387,980994	341,140142
3	C	74,234997	74234,996623	1266,249131	107,765884	13,470735
4	D	55,672611	183719,616736	4030,707298	4327,082835	59,275107
5	E	45,764341	237974,571319	4658,649005	9090,046840	113,625585
Сумма			**859600,702932**	**31386,623029**	**45222,748992**	**1225,365676**

Итерация 13	Xo	Yo
	25,614087	36,90551309

Таблица 17.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,161229	58631,865923	12574,731989	29341,041308	698,596222
2	B	29,908003	305061,630343	8867,191842	2387,320881	341,045840
3	C	74,243934	74243,934324	1266,096697	107,752910	13,469114
4	D	55,672054	183717,778489	4030,747629	4327,126131	59,275700
5	E	45,758727	237945,381785	4659,220497	9091,161946	113,639524
Сумма			**859600,590864**	**31397,988654**	**45254,403175**	**1226,026400**

Итерация 14	Xo	Yo
	25,60955347	36,91144266

Таблица 18.

№ п/п	Объект	r_{0i}	$v_i*t_i*r_{0i}$	$x_i*v_i*t_i/r_{0i}$	$y_i*v_i*t_i/r_{0i}$	v_i*t_i/r_{0i}
1	A	9,154164	58586,650043	12584,436889	29363,686074	699,135383
2	B	29,913991	305122,707022	8865,416889	2386,843009	340,977573
3	C	74,250419	74250,418809	1265,986125	107,743500	13,467938
4	D	55,671662	183716,483942	4030,776031	4327,156622	59,276118
5	E	45,754668	237924,272123	4659,633883	9091,968552	113,649607
Сумма			**859600,531938**	**31406,249817**	**45277,397757**	**1226,506618**

Отметим, что представленная сводная таблица (Таблица 3) решений наглядным образом демонстрирует, что уже на первых одиннадцати итерациях можно получить достаточно точные значения координат оптового склада, которые дают достаточно приемлемые результаты по величине суммарных транспортных расходов *TC*. Выполнение дальнейших итераций (в данном случае, для сравнения, представлены результаты 15 итераций) оказывает незначительное влияние на конечный результат. Это значит, что уже после первых нескольких итерациях алгоритма можно прекратить дальнейшие вычисления.

Следует также отметить, что метод центра тяжести может не давать строгой релаксации значения (ЦФ) целевой функции. Это объясняется тем, что как обычно наблюдается в практике работы и других вычислительных методов в окрестности оптимального решения, метод центра тяжести также может давать сбои в релаксации ЦФ. В данном методе, в качестве критерия остановки можно выбрать проверку изменения норму вектора, соответствующего расположению складского комплекса.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Определите координаты оптимального местоположения складского комплекса и рассчитайте суммарные транспортные затраты на доставку продукции, опираясь на следующие исходные данные:

Вариант а

№	Объект	Объем грузопотока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	600	3	20	19
2	B	1 300	4	25	70
3	C	2 100	3	75	49
4	D	1 650	3	61	97
5	E	950	4	85	15

Вариант б

№	Объект	Объем грузопотока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	500	4	95	75
2	B	1300	4	40	60
3	C	1200	2	20	75
4	D	1800	3	20	55
5	E	1600	5	55	100

Вариант в

№	Объект	Объем грузопотока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1800	5	45	22
2	B	1 600	4	66	68
3	C	2 200	4	5	82
4	D	400	6	13	22
5	E	600	5	94	37

Вариант г

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1950	2	98	69
2	B	650	1	59	39
3	C	250	2	20	70
4	D	2050	1	23	45
5	E	550	2	57	91

Вариант д

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1600	3	59	46
2	B	1900	2	10	54
3	C	1200	1	66	23
4	D	1300	3	77	85
5	E	500	3	36	87

Вариант е

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1300	3	95	65
2	B	1800	2	68	10
3	C	1500	1	35	65
4	D	500	2	6	52
5	E	1200	3	7	25

Вариант ж

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1600	4	46	68
2	B	1 800	5	65	62
3	C	400	6	13	83
4	D	2 200	4	5	21
5	E	650	3	95	35

Вариант з

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1650	1	99	70
2	B	950	2	60	41
3	C	50	1	21	71
4	D	2060	2	24	45
5	E	650	3	58	95

Вариант и

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1900	2	60	45
2	B	1600	3	11	55
3	C	1300	3	67	24
4	D	1200	1	78	84
5	E	600	3	35	88

Вариант к

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1200	2	90	65
2	B	1500	3	65	10
3	C	1800	1	30	65
4	D	500	3	7	50
5	E	1300	2	6	20

Вариант л

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1500	4	95	55
2	B	1200	3	60	15
3	C	1700	2	30	65
4	D	600	4	15	50
5	E	1100	2	60	20

Вариант м

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1100	3	90	65
2	B	1400	3	60	10
3	C	1800	4	30	65
4	D	700	2	15	50
5	E	1200	3	20	30

Вариант н

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	700	4	15	10
2	B	1200	5	20	15
3	C	2000	7	10	5
4	D	1400	3	5	40
5	E	900	2	80	15

Вариант о

№	Объект	Объем грузо-потока т/год	Тариф, руб/ткм	Коорд-ты	
				X	Y
1	A	1200	6	16	40
2	B	1600	4	20	8
3	C	600	3	90	5
4	D	1000	2	65	70
5	E	1200	5	40	60

При работе над пособием автор использовал многочисленные источники, как отечественные, так и зарубежные, часть из которых указана в списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев В.К.* Межотраслевая экономика / В.К. Леонтьев. -, М.: Экономика, 1997. - 480 с.
2. Федеральное статистическое наблюдение «Затраты-выпуск» за 2011 г.
3. Таблицы «затраты-выпуск» США, Германии.
4. *Ведута Н.И.* Социально-эффективная экономика / Под ред. Ведута Е.И.- М.:РЭА, 1999.- 254 с.
5. URL: http://www/sbras.nsc.ru/HBC/2001/no3/f1/html , (дата обращения: 15.04.2023)

6. *Орлова И.В., Половинкин В.А.* Экономико-математические методы и модели: Компьютерное моделирование. Вузовский учебник / И.В. Орлова, В.А. Половинкин .- 2008. - 200 с.
7. *Воркуев Б.Л.* Математические методы анализа экономики. / Б.Л. Воркуев. - М. : МГУ, 1990. - 106 с.
8. *Жафяров А.Ж.* Матричные модели экономики. / А.Ж. Жафяров . Новосибирск, 1990. - 106 с.
9. *Иванилов Ю. П.* Математические модели в экономике. / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. - М.: Наука, 1979.
10. Математические методы в планировании отраслей и предприятий. / Под ред. И. Г. Попова. - М.: Экономика, 1981.
11. Моделирование глобальных экономических процессов /ред. Дадаян В.С. - М. : Экономика, 1984. - 319 с.
12. *Терехов Л.Л.* Экономико-математические методы. / Л.Л. Терехов. - Киев: Вища школа, 1984.
13. *Лотош Я. М.* , Шапиро Л.Д. Моделирование процесса воспроизводства основных производственных фондов. / Я.М. Лотош, Л.Д. Шапиро.- Томск, 1982. - 120 с.
14. System of National Accounts 2008. New York, 2009.
15. Система таблиц «Затраты-Выпуск» России за 2002 год. М., 2005.
16. José M. Rueda-Cantuche , Jörg Beutel. Technical report on advantages and disadvantages of types of Input-Output tables (product-by-product or industry-byindustry), World Input-Output Database: Construction and Applications, 2009.
17. José Manuel Rueda-Cantuche. The Choice of Type of Input-Output Table Revisited: Moving Towards the Use of Supply-Use Tables in Impact Analysis//18th International Input-Output Conference, 2010. URL: http://www.gks.ru   (дата обращения: 15.04.2023)
18. *Клопер Алмон.* Искусство экономического моделирования / Отв. ред. Узяков М.Н. - М.: МАКС Пресс, 2012.
19. URL: http://самарина.рф/Book/book-08-html/book-10-08-02-03.html (дата обращения: 15.04.2023)
20. *Габидуллина З.Р.* Макрологистические модели Леонтьева «затраты выпуск» / З.Р. Габидуллина. - Казань: Казанский университет, 2016. - 31 с.

21. *Габидуллина З.Р.* Математическое моделирование процессов управления запасами. Часть I / З.Р. Габидуллина. - Казань: Казанский университет, 2016. - 50 с.
22. *Габидуллина З.Р.* Математическое моделирование процессов управления запасами. Часть II / З.Р. Габидуллина. - Казань: Казанский университет, 2016. - 36 с.
23. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций./ Х.А. Таха. - М.: Издательский дом Вильямс; 2005. - 912 с.
24. *Сакович В.А.* Модели управления запасами /.В.А. Сакович. - Минск: Наука и техника, 1986. - 386 с.
25. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие (Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.И. Жихар и др.) / Под общ. ред. А.В. Кузнецова.- Минск: БГЭУ, 1999.- 413 с.
26. Исследование операций . Модели и приложения . 2 т. /Под общ. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.- М.: Мир, 1981. - 677 с.
27. *Калихман И.Л.* Динамическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко.- М.: Высшая школа, 1979.-125 с.
28. *Стерлигова А.Н.* Управление запасами в целях поставок / А.Н. Стерлигова. - М.: Инфра-М, 2008. - 430 с.
29. *Томас Р.* Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Р. Томас. - М.:Дело и сервис, 1999.- 432 с.
30. *Черкесов А.Г.* Экономическая теория. Математические модели**:** Учеб. особие. / А.Г.Черкесов. -СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.- 52 с.

Учебное издание

Габидуллина Зульфия Равилевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИКИ

Учебное пособие