



УДК 517.98

Обратимость операторов в гильбертовом пространстве и идеалы в C^* -алгебрах

А. М. Бикчентаев

Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} . Найдены достаточные условия положительности и обратимости операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Произвольная симметрия из алгебры фон Неймана \mathcal{A} записана в виде произведения $A^{-1}UA$ с положительным обратимым A и самосопряженным унитарным U из \mathcal{A} . Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $\|A\| \leq 1$. Если $A^*A - I \in \mathfrak{N}_\varphi$, то $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство $\|A - U\|_{\varphi,2} \geq \| |A| - I \|_{\varphi,2}$. Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A , то в этом неравенстве достигается равенство.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, обратимый оператор, алгебра фон Неймана, C^* -алгебра, вес.

DOI: <https://doi.org/???>

1. Введение. Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} . Поиск достаточных условий положительности и обратимости операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является одной из задач теории операторов, см. например, [1]–[7] и библиографию в них. Перечислим полученные результаты.

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и B обратим, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – операторно монотонная функция с $f(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. Тогда оператор $f(f^{-1}(A) + B) - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим (теорема 1; положительность оператора B здесь существенна). Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и A обратим слева, пусть $(\lambda - \lambda^2)|A|^2 \geq 2|B|^2$ для некоторого числа $0 < \lambda < 1$. Тогда оператор $|A + B|^2 - |B|^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим (теорема 2). В [8; следствие 1] для унитарной C^* -алгебры \mathcal{A} и $S \in \mathcal{A}$ установлена равносильность условий:

- (i) $S^2 = I$;
- (ii) $S = T^{-1}UT$ для некоторых обратимого T и эрмитова унитарного U из \mathcal{A} . Для алгебры фон Неймана \mathcal{A} оператор T можно выбрать положительным (теорема 4).

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

Изучение следов и весов на операторных алгебрах является важной частью работ по теории некоммутативного интегрирования (см. [9]–[11]) и постоянно привлекают внимание исследователей, см., например, [12]–[15] и библиографию в них.

Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $\|A\| \leq 1$. Если $A^*A - I \in \mathfrak{N}_\varphi$, то $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство

$$\|A - U\|_{\varphi,2} \geq \||A| - I\|_{\varphi,2}.$$

Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A , то в этом неравенстве достигается равенство (теорема 5). Пусть φ – конечный вес на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда

$$\|A - zU\|_{\varphi,2}^2 \geq \|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2 \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}$$

(теорема 6).

2. Определения и обозначения. Левый (соответственно, правый) идеал в алгебре \mathcal{A} – это векторное подпространство \mathcal{J} в \mathcal{A} такое, что

$$A \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad B \in \mathcal{J} \implies AB \in \mathcal{J} \quad (\text{соответственно, } BA \in \mathcal{J}).$$

C^* -алгеброй называется комплексная банахова $*$ -алгебра \mathcal{A} такая, что

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}.$$

Для C^* -алгебры \mathcal{A} через \mathcal{A}^{id} , \mathcal{A}^{sa} и \mathcal{A}^+ будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($A = A^2$), эрмитовых ($A^* = A$) элементов и положительных элементов соответственно. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$ и $\text{Re}\{A\} = (A + A^*)/2 \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Если I – единица алгебры \mathcal{A} , то формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между \mathcal{A}^{id} и множеством \mathcal{A}^{sym} всех симметрий ($S^2 = I$) в \mathcal{A} . Через \mathcal{A}^{inv} и \mathcal{A}^{u} обозначим подмножества обратимых элементов и унитарных ($A^*A = AA^* = I$) элементов соответственно. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется изометрией, если $A^*A = I$.

Весом на C^* -алгебре \mathcal{A} называется такое отображение $\varphi: \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, что

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{A}^+, \quad \lambda \geq 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$). Вес φ называется *точным*, если $\varphi(X) = 0 \implies X = 0$, $X \in \mathcal{A}^+$. Для веса φ определим (см. [16; гл. II, II.6.7.3], [11; гл. 2, § 11])

- $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}$, $\mathfrak{M}_\varphi^{\text{sa}} = \text{lin}_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\varphi^+$;
- $\mathfrak{N}_\varphi = \{A \in \mathcal{A} : A^*A \in \mathfrak{M}_\varphi^+\}$ – левый идеал в \mathcal{A} ;
- $\|A\|_{\varphi,2} = \sqrt{\varphi(A^*A)}$ ($A \in \mathfrak{N}_\varphi$) – полунорма (норма для точного φ) на \mathfrak{N}_φ .

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi = \text{lin}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+$, который будем обозначать той же буквой φ . Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса (т.е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными функционалами на \mathcal{A} .

Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} , $\sigma(A)$ – спектр оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Любую

C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства \mathcal{H} (Гельфанд–Наймарк; см. [17; теорема 3.4.1]). Локально выпуклая топология в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, определяемая полунормами $X \mapsto \|X\xi\|$ ($\xi \in \mathcal{H}$), называется *сильной операторной топологией* (so-топологией). Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathcal{X}\}.$$

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , называется $*$ -подалгебра \mathcal{A} алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которой $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Для алгебры фон Неймана \mathcal{A} через \mathcal{A}^{pr} будем обозначать ее решетку проекторов ($A = A^* = A^2$). Для оператора $X \in \mathcal{A}$ через $\text{gr}(X)$ обозначается его ранговый проектор, т.е. проектор на замыкание области значений оператора X ; имеем $\text{gr}(X) \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. При $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ – интервал. Функция $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ называется

- *матрично монотонной порядка n или n -монотонной*, если для всех $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{\text{sa}}$ с $\sigma(A), \sigma(B) \subseteq \mathcal{I}$ из $A \leq B$ следует $f(A) \leq f(B)$;
- *операторно монотонной*, если она n -монотонна для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если f 2-монотонна, то $f \in C^1(\mathcal{I})$ и $f' > 0$ для $f \neq \text{const}$. Функция $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ операторно монотонна тогда и только тогда, когда она операторно вогнута, т.е.

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \quad \text{для всех } A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$$

и $0 \leq \lambda \leq 1$. Примеры

- 1) $f(t) = t^p$, $0 \leq p \leq 1$;
- 2) $f(t) = (t - 1)/\log(t)$, $f(0) := 0$, $f(1) := 1$, см. [18; § 2].

3. Об обратимости некоторых операторов.

ЛЕММА 1. Пусть $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – операторно монотонная функция с $f(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ и число $t_0 > 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall t \in [0, t_0] \quad (f(t + \varepsilon) \geq f(t) + \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [19; гл. VII, теорема 4] 2-монотонная функция f , $f \neq \text{const}$, представляется в виде $f(t) = \int_0^t dx/c(x)^2$, где функция $c(x) > 0$ и вогнута для всех $x > 0$. Перепишем неравенство $f(t + \varepsilon) \geq f(t) + \delta$ в виде $\int_0^{t+\varepsilon} dx/c(x)^2 \geq \int_0^t dx/c(x)^2 + \delta$, т.е.

$$\int_t^{t+\varepsilon} \frac{dx}{c(x)^2} \geq \delta. \tag{1} \quad \{\text{eq1}\}$$

Покажем, что функция $1/c(x)^2$ убывает. Допустим, что $1/c(x)^2$ строго возрастает на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$. Тогда функция

$$f(t) = \int_0^t \frac{dx}{c(x)^2}$$

будет строго выпуклой на (a, b) , что невозможно, так как всякая операторно монотонная на \mathbb{R}^+ функция является вогнутой. Теперь ясно, что число $\delta = \varepsilon/c(t_0 + \varepsilon)^2$ удовлетворяет неравенству (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и B обратим, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – операторно монотонная функция с $f(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. Тогда

оператор $f(f^{-1}(A) + B) - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f^{-1}(A) + B \geq f^{-1}(A)$, в силу операторно монотонности функции f имеем $f(f^{-1}(A) + B) - A \geq 0$. Так как $B \geq 0$ и обратим, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B \geq \varepsilon I$. Тогда

$$f(f^{-1}(A) + B) \geq f(f^{-1}(A) + \varepsilon I) \tag{2} \quad \{\text{eq2}\}$$

в силу операторно монотонности функции f . Покажем, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$f(f^{-1}(A) + \varepsilon I) \geq A + \delta I. \tag{3} \quad \{\text{eq3}\}$$

Для этого воспользуемся спектральной теоремой в форме мультипликаторов (для оператора A) и леммой 1 с достаточно большим параметром t_0 , поскольку неравенство (3) находится в “коммутативной” ситуации. При этом оператор A рассматривается как неотрицательная существенно ограниченная измеримая функция на пространстве с мерой (Ω, Σ, μ) , являющимся прямой суммой пространств с конечными мерами. Теперь из (2), (3) имеем $f(f^{-1}(A) + B) - A \geq \delta I$, что и требовалось.

Для функции $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, выбор числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ можно сделать и без обращения к лемме 1. Возьмем число $\delta > 0$ таким, что $\varepsilon \geq 2\delta\|A\| + \delta^2$. Тогда

$$\varepsilon I \geq 2\delta\|A\|I + \delta^2 I \geq 2\delta A + \delta^2 I, \quad A^2 + \varepsilon I \geq A^2 + 2\delta A + \delta^2 I = (A + \delta I)^2,$$

тем самым (3) установлено в силу операторно монотонности функции f .

ПРИМЕР 1. Положительность оператора B существенна в теореме 1. В $M_2(\mathbb{C})$

$$\text{для } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{имеем } A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обратимой матрицы

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица

$$A^2 + B = \sqrt{A^2 + B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является проектором. Поэтому матрица

$$\sqrt{A^2 + B} - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

и необратима.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и A обратим слева, пусть

$$(\lambda - \lambda^2)|A|^2 \geq 2|B|^2 \quad \text{для некоторого числа } 0 < \lambda < 1. \tag{4} \quad \{\text{eq4}\}$$

Тогда оператор $|A + B|^2 - |B|^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обратим слева, если он ограничен снизу, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad (\|A\xi\| \geq \varepsilon\|\xi\|).$$

Тогда

$$\langle A^*A\xi, \xi \rangle = \langle A\xi, A\xi \rangle = \|A\xi\|^2 \geq \varepsilon^2\|\xi\|^2 = \varepsilon^2\langle I\xi, \xi \rangle \quad \text{для всех } \xi \in \mathcal{H},$$

т.е. $A^*A \geq \varepsilon^2 I$. Имеем

$$\begin{aligned} |A+B|^2 - |B|^2 &= (1-\lambda)|A|^2 + \lambda|A|^2 + A^*B + B^*A + \frac{1}{\lambda}|B|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \\ &= (1-\lambda)|A|^2 + \left| \sqrt{\lambda}A + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B \right|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \\ &\geq (1-\lambda)|A|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \geq \frac{1-\lambda}{2}|A|^2 \geq \frac{(1-\lambda)\varepsilon^2}{2}I. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Условие (4) существенно в теореме 2. Для произвольного числа $0 < \varepsilon < 1/10$ в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ положим

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix},$$

и пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$|A|^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \\ 1-\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2|B|^2,$$

т.е. условие (4) не выполнено для всех $0 < \lambda < 1$. Оператор

$$|A+B|^2 - |B|^2 = (A+B)^2 - B^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6+4\varepsilon+2\varepsilon^2 & 4-2\varepsilon-2\varepsilon^2 \\ 4-2\varepsilon-2\varepsilon^2 & 2+2\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

обратим и имеет отрицательное собственное значение.

ЛЕММА 2. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ со-сходится. Пусть выполнено $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ и

$$0 < a = \inf_{n \geq 1} \lambda_n \leq \sup_{n \geq 1} \lambda_n = b < \infty.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$ со-сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ обратим} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n \text{ обратим.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$ со-сходится в силу [20; теорема 2]. Заметим, что

- 1) $a \sum_{n=1}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n \leq b \sum_{n=1}^{\infty} A_n$;
- 2) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ обратим $\iff \exists \varepsilon > 0$ такое, что $A \geq \varepsilon I$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и числа $\lambda, \mu > 0$. Тогда

- (i) если $A^*B + B^*A$ обратим, то $\lambda A^*A + \mu AA^*$ обратим;
- (ii) если $A \geq 0$ и $AB^* + BA$ обратим, то $\lambda A + \mu BAB^*$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 можно положить $\lambda = \mu = 1$. Пусть $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $-X \leq Y \leq X$. Если Y обратим, то X обратим [21; следствие 2].

(i) Поскольку $(A \pm B)^*(A \pm B) \geq 0$, имеем

$$-A^*A - B^*B \leq A^*B + B^*A \leq A^*A + B^*B.$$

(ii) Поскольку $(\sqrt{A} \pm B\sqrt{A})(\sqrt{A} \pm B\sqrt{A})^* \geq 0$, имеем

$$-A - BAB^* \leq AB^* + BA \leq A + BAB^*.$$

4. Симметрии и идеалы в алгебрах фон Неймана. В [8; следствие 1] для унитарной C^* -алгебры \mathcal{A} и $S \in \mathcal{A}$ установлена равносильность условий: (i) $S^2 = I$, т.е. $S \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$; (ii) $S = T^{-1}UT$ для некоторых $T \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и $U \in \mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Покажем, что для алгебры фон Неймана \mathcal{A} оператор T можно выбрать положительным.

ТЕОРЕМА 4. Пусть \mathcal{A} – алгебра фон Неймана и $S \in \mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $S^2 = I$;
- (ii) $S = A^{-1}UA$ для некоторых $A \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и $U \in \mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) \Rightarrow (ii) Формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между множествами \mathcal{A}^{id} и \mathcal{A}^{sym} . Если $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то существует $T \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ такой, что

$$Q \equiv T^{-1}PT \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$$

[22; лемма 16]. Если $T^{-1} = V|T^{-1}|$ – полярное разложение оператора T^{-1} , то $V = T^{-1}|T^{-1}|^{-1} \in \mathcal{A}^u$ и $T = |T^{-1}|^{-1}V^*$ в силу теоремы об обратном к произведению операторов. Теперь

$$P = TQT^{-1} = |T^{-1}|^{-1}V^*QV|T^{-1}| = A^{-1}RA \quad \text{с} \quad A = |T^{-1}| \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^{\text{inv}}$$

и $R = V^*QV \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Следовательно,

$$S = 2P - I = 2A^{-1}RA - I = A^{-1}(2R - I)A$$

и можно положить $U = 2R - I$.

ЛЕММА 3. Пусть \mathcal{J} – левый (или правый) идеал в унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} и $A \in \mathcal{A}^+, I - A \in \mathcal{J}$. Тогда

- (i) $I - A^{1/2^n} \in \mathcal{J}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) если \mathcal{A} – алгебра фон Неймана и $A \leq I$, то $I - \text{gr}(A) \in \mathcal{J}$; для со-замкнутого \mathcal{J} условие $A \leq I$ можно опустить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть \mathcal{J} – левый идеал в унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} . Поскольку

$$(I + \sqrt{A})(I - \sqrt{A}) = I - A \in \mathcal{J}$$

и элемент $I + \sqrt{A}$ обратим, имеем $I - \sqrt{A} \in \mathcal{J}$. Поскольку

$$(I + A^{1/4})(I - A^{1/4}) = I - \sqrt{A} \in \mathcal{J}$$

и элемент $I + A^{1/4}$ обратим, имеем $I - A^{1/4} \in \mathcal{J}$. Продолжая такой процесс, получаем требуемое.

(ii) Пусть \mathcal{A} – алгебра фон Неймана и $A \leq I$. Так как $\text{gr}(A) \geq A$, имеем $I - A \geq I - \text{gr}(A) \geq 0$ и $\text{gr}(A)A = A \text{gr}(A) = A$. Если $X, Y \in \mathcal{A}^+$ и $X \leq Y$, то найдется $Z \in \mathcal{A}$ с $\|Z\| \leq 1$ такой, что $\sqrt{X} = Z\sqrt{Y}$ [23; гл. 1, § 1, лемма 2]. Поэтому

$$\sqrt{I - \text{gr}(A)} = I - \text{gr}(A) = Z\sqrt{I - A}$$

для некоторого $Z \in \mathcal{A}$ с $\|Z\| \leq 1$. В силу спектральной теоремы в форме мультипликаторов имеем

$$\begin{aligned} I - \text{gr}(A) &= \sqrt{I - \text{gr}(A)} = \sqrt{(I - \text{gr}(A))(I - A)} = (I - \text{gr}(A))\sqrt{I - A} \\ &= Z\sqrt{I - A} \cdot \sqrt{I - A} = Z(I - A) \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Пусть теперь левый идеал \mathcal{J} so-замкнут. Так как \mathcal{J} – выпуклое подмножество в \mathcal{A} , в силу [9; гл. II, § 2, п. (iv) теоремы 2.6] \mathcal{J} σ -слабо замкнут. Поэтому в силу [9; гл. II, § 3, предложение 3.12] в \mathcal{J} содержится единственный проектор E такой, что $\mathcal{J} = \mathcal{A}E$. Пусть $X \in \mathcal{A}$ такой, что $I - A = XE$. Тогда

$$I - \text{gr}(A) = I - A - \text{gr}(A)(I - A) = (I - \text{gr}(A))(I - A) = (I - \text{gr}(A))XE \in \mathcal{J}$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $\|A\| \leq 1$. Если $A^*A - I \in \mathfrak{N}_\varphi$, то $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство

$$\|A - U\|_{\varphi,2} \geq \||A| - I\|_{\varphi,2}. \quad (5) \quad \{\text{eq5}\}$$

Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A , то в (5) достигается равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|A| = \sqrt{A^*A}$ и \mathfrak{N}_φ является левым идеалом в \mathcal{A} , имеем $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ в силу п. (i) леммы 3. Для доказательства неравенства (5) без ограничения общности достаточно рассмотреть случай произвольной изометрии $U \in \mathcal{A}$, для которой $A - U \in \mathfrak{N}_\varphi$. Пусть $B = |A| - I$, тогда полярное представление оператора A будет иметь вид $A = W(I + B)$, где W – унитарный оператор. Пусть $V = W^*U$, тогда V является изометрией и

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 = \|I + B - V\|_{\varphi,2}^2 = \varphi((B + I - V)^*(B + I - V)).$$

Поэтому

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 = \varphi(B^2) + \varphi(D), \quad (6) \quad \{\text{eq6}\}$$

где

$$D = 2I + 2B - V - V^* - BV - V^*B \in \mathfrak{M}_\varphi^{\text{sa}}.$$

Покажем, что $D \geq 0$. Так как $\|A\| \leq 1$, имеем $|A|^2 \leq |A|$. Тогда

$$\begin{aligned} D &= 2I + |A| - I - V - V^* - |A|V^* + V^* - V|A| + V \\ &= I + |A| - |A|V - V^*|A| = (|A| - V)^*(|A| - V) + (|A| - |A|^2) \geq 0, \end{aligned}$$

как сумма двух неотрицательных операторов и (5) выполнено в силу (6) и монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$.

Пусть U является унитарным оператором из полярного разложения оператора A , т.е. $U = A|A|^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A - U\|_{\varphi,2}^2 &= \varphi((A - A|A|^{-1})^*(A - A|A|^{-1})) \\ &= \varphi(|A|^2 - |A|^{-1}|A|^2 - |A|^2|A|^{-1} + |A|^{-1}|A|^2|A|^{-1}) \\ &= \varphi(|A|^2 - 2|A| + I) = \varphi((|A| - I)^2) = \||A| - I\|_{\varphi,2}^2, \end{aligned}$$

т.е. в (5) достигается равенство.

Для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi = \text{tr}$ и унитарного оператора A утверждение теоремы 5 получено в [24; гл. VI, лемма 3.1] и показано, что в этом частном случае знак равенства в (5) достигается тогда и только тогда, когда U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A .

ЛЕММА 4. Для чисел $a, c > 0$ и $b \in \mathbb{C}$ определим функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $f(z) = c|z|^2 - 2\Re\{z\bar{b}\} + a$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\min_{z \in \mathbb{C}} f(z) = f\left(\frac{b}{c}\right) = a - \frac{|b|^2}{c}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$f(z) = \left(\sqrt{c}z - \frac{b}{\sqrt{c}}\right)\left(\sqrt{c}\bar{z} - \frac{\bar{b}}{\sqrt{c}}\right) - \frac{|b|^2}{c} + a = \left|\sqrt{c}z - \frac{b}{\sqrt{c}}\right|^2 - \frac{|b|^2}{c} + a.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть φ – вес на унитарной C^* -алгебре \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда

- (i) $A \in \mathfrak{N}_\varphi \Leftrightarrow UA \in \mathfrak{N}_\varphi$ и при этом $\|UA\|_{\varphi,2} = \|A\|_{\varphi,2}$;
- (ii) если φ конечен, то $\|A - zU\|_{\varphi,2}^2 \geq \|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем

$$\|UA\|_{\varphi,2}^2 = \varphi(A^*U^*UA) = \varphi(A^*A) = \|A\|_{\varphi,2}^2.$$

(ii) Продолжение конечного веса φ на всю алгебру \mathcal{A} обозначаем той же буквой φ . Поскольку $\varphi(X^*) = \overline{\varphi(X)}$ и $\varphi(\text{Re}\{X\}) = \Re\{\varphi(X)\}$ для всех $X \in \mathcal{A}$, для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} \|A - zU\|_{\varphi,2}^2 &= \varphi((A^* - \bar{z}U^*)(A - zU)) = \varphi(A^*A) - \varphi(2\text{Re}\{\bar{z}U^*A\}) + |z|^2\varphi(I) \\ &= \|A\|_{\varphi,2}^2 - 2\Re\{\bar{z}\varphi(U^*A)\} + |z|^2\varphi(I). \end{aligned}$$

Минимум этого выражения (при фиксированных A и U) достигается в точке $z = \varphi(I)^{-1}\overline{\varphi(U^*A)}$ и равен $\|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2$, см. лемму 4.

Из теоремы 5 и теоремы 6 с $z = 1$ имеем

СЛЕДАТЕЛЬНО 1. Пусть φ – конечный вес на алгебре фон Неймана \mathcal{A} , $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| \leq 1$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 \geq \max\{\| |A| - I \|_{\varphi,2}^2, \|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1} |\varphi(U^* A)|^2\}.$$

ПРИМЕР 3. Пусть положительный функционал $\varphi: \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ задается матрицей плотности $S_\varphi = \text{diag}(t + s, t - s)$ с фиксированными $t > 0$ и $0 \leq s \leq t$. Тогда

$$\varphi(X) = \text{tr}(S_\varphi X) = (t + s)x_{11} + (t - s)x_{22} \quad \text{для всех } X = [x_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}).$$

Положим $A := \text{diag}(1, 0)$, $U := \text{diag}(1, -1)$. Тогда

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 = \| |A| - I \|_{\varphi,2}^2 = t - s$$

и в неравенстве теоремы 5 достигается равенство для всех $0 \leq s \leq t$. Имеем $\varphi(I) = 2t$ и

$$\|A\|_{\varphi,2}^2 = \varphi(U^* A) = \varphi(A) = t + s,$$

поскольку A – проектор. Неравенство в п. (ii) теоремы 6 переписывается в виде

$$t - s \geq t + s - \frac{(t + s)^2}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{s^2}{2t},$$

и для $s = t$ здесь достигается равенство. Таким образом, и в неравенстве следствия 1 для $s = t$ достигается равенство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Г. Авсянкин, “Об обратимости многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами”, *Матем. заметки*, **108:2** (2020), 291–295.
- [2] А. М. Бикчентаев, “Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы”, *Сиб. матем. журн.*, **63:2** (2022), 272–282.
- [3] А. М. Bikchentaev, “On invertibility of some operator sums”, *Lobachevskii J. Math.*, **33:3** (2012), 216–222.
- [4] А. М. Bikchentaev, “On τ -essentially invertibility of τ -measurable operators”, *Int. J. Theor. Phys.*, **60:2** (2021), 567–575.
- [5] M. Kostadinov, “Injectivity of linear combinations in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ”, *Electron. J. Linear Algebra*, **37** (2021), 359–369.
- [6] M. H. Mortad, “On the invertibility of the sum of operators”, *Anal. Math.*, **46:1** (2020), 133–145.
- [7] X. Ding, Sh. Wu, X. Zhao, “Invertibility and spectral properties of dual Toeplitz operators”, *J. Math. Anal. Appl.*, **484:2** (2020), Article ID 123762.
- [8] А. М. Бикчентаев, Х. Фауаз, “Разности и коммутаторы идемпотентов в C^* -алгебрах”, *Изв. вузов. Матем.*, 2021, № 8, 16–26.
- [9] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5, Encyclopaedia Math. Sci., **124**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [10] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [11] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.

- [12] L. Zsidó, “On the equality of operator valued weights”, *J. Funct. Anal.*, **282**:9 (2022), Article ID 109416.
- [13] A. Bikchentaev, “Trace inequalities for Rickart C^* -algebras”, *Positivity*, **25**:5 (2021), 1943–1957.
- [14] А. М. Бикчентаев, “Полунормы, ассоциированные с субаддитивными весами на C^* -алгебрах”, *Матем. заметки*, **107**:3 (2020), 341–350.
- [15] K. Thomsen, “The factor type of dissipative KMS weights on graph C^* -algebras”, *J. Non-commut. Geom.*, **14**:3 (2020), 1107–1128.
- [16] B. Blackadar, *Operator Algebras. Theory of C^* -Algebras and von Neumann Algebras*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III, Encyclopaedia Math. Sci., **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [17] Дж. Мёрфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [18] F. Hiai, “Matrix analysis: matrix monotone functions, matrix means, and majorization”, *Interdiscip. Inform. Sci.*, **16**:2 (2010), 139–248.
- [19] W. F. Donoghue, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Die Grundlehren Math. Wiss., **207**, Springer, New York, 1974.
- [20] А. М. Бикчентаев, “Сходимость по мере и τ -компактность τ -измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана”, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, № 5, 89–93.
- [21] А. М. Бикчентаев, “Об одной лемме Ф. А. Березина”, *Матем. заметки*, **87**:5 (2010), 787–791.
- [22] I. Kaplansky, “Modules over operator algebras”, *Amer. J. Math.*, **75**:4 (1953), 839–858.
- [23] J. Dixmier, *Les algèbres d’opérateurs dans l’espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [24] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный
университет, г. Казань

E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Поступило

15.04.2022

После доработки

16.05.2022

Принято к публикации

20.05.2022