

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы
(Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.)

Саратов
ООО Издательство «Научная книга»
2020

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы / А. П. Хромов (гл. редактор), Б. С. Кашин (зам. гл. редактора), Ю. С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. — Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — 480 с. : ил.

ISBN 978-5-9758-1911-6

Представлены результаты исследований участников конференции по актуальным проблемам современной теории функций действительного и комплексного переменного, гармоническому анализу и преобразованиям Фурье, спектральной теории операторов, задачам оптимизации и негладкому анализу, а также их приложениям.

Редакционная коллегия:

А. П. Хромов (гл. редактор), Б. С. Кашин (зам. гл. редактора),
С. В. Конягин (зам. гл. редактора), В. Н. Дубинин (зам. гл. редактора),
Ю. Н. Субботин (зам. гл. редактора), В. В. Арестов, С. В. Асташкин,
Б. И. Голубов, А. Л. Лукашов, С. И. Дудов, В. Г. Кротов, С. Ф. Лукомский,
С. Р. Насыров, С. Я. Новиков, С. С. Платонов, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров,
В. В. Старков, П. А. Терехин, Н. И. Черных, С. С. Волосивец, С. П. Сидоров,
Ю. С. Крусс (отв. секретарь)

Издание осуществлено при финансовой поддержке
лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения»
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
(грант правительства РФ, проект 14.W03.31.0031).



УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9758-1911-6

© Саратовский университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамова В. В., Дудов С. И., Жаркова А. В. О некоторых дифференциальных свойствах функции расстояния в несимметричном пространстве	15
Акишев Г. Неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов по гиперболическим крестам в пространстве Лоренца	19
Акопян Р. Р. Задача Стечкина на классе аналитических ограниченных функций	23
Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh. R. Improved Bernoulli sub-equation function method for exact solutions of conformable time fractional RLW equation	26
Алмохамед М. Восстановление правой части в уравнении Пуассона при помощи специальных краевых условий	30
Алферова Е. Д., Попов А. Ю. Двусторонние оценки L^∞ -нормы суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами $\{b_k\}$ через l^∞ -норму последовательности $\{kb_k\}$	33
Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В. Расширенный алгоритм моделирования устойчивости комбинированных динамических систем	36
Асташкин С. В., Страхов С. И. О некоторых геометрических свойствах пространств Орлича – Лоренца	40
Арестов В. В. Приближение в равномерной норме на оси оператора дифференцирования линейными ограниченными в пространстве L_r операторами и родственные экстремальные задачи	42
Арутюнян Р. В. Прямые сеточные методы решения вариационных задач и опыт их применения в задачах о прогибах балок и пластин	46
Арутюнян Т. Р. Двусторонние методы магнитостатики на основе вариационного подхода	51
Балашов М. В. Невыпуклая оптимизация на гладких многообразиях	54
Баранова И. С. Об асимптотических свойствах коэффициентов орторекурсивных разложений по системе характеристических функций двоичных промежутков	62
Беднаж В. А. О корневых множествах одного класса аналитических в полуплоскости функций	66
Беднов Б. Б. О периодических функциях нескольких переменных и чебышёвских подпространствах, задаваемых ими в L_1	68
Беспалов М. С. Сверточные матрицы	70
Бондаренко Н. П. Спектральный анализ матричного оператора Штурма – Лиувилля с самосопряженным краевым условием общего вида	73
Брайчев Г. Г. Об индикаторах целой функции с корнями нулевой нижней плотности, лежащими на луче	76
Бурлуцкая М. Ш., Коржова Я. П. Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом на графе из двух ребер с циклом	80

Бутерин С. А. Равномерная полная устойчивость обратной задачи для интегро-дифференциальных операторов	84
Васильева А. А. Колмогоровские поперечники пересечений весовых классов Соболева на области	90
Волков Б. О. Связь между лапласианами Леви и калибровочными полями	94
Волосивец С. С., Тюленева А. А. Аппроксимативные свойства частных сумм Фурье в p -вариационной норме	97
Воронов С. М. О сходимости рядов Фурье по системе Виленкина в случае неограниченных p_k	101
Гагарин Ю. Е., Никитенко У. В., Степович М. А. Использование конфлюэнтного анализа для интервального оценивания функции Гаусса	105
Гаджимирзаев Р. М. Приближение дискретных функций специальными рядами по полиномам Мейкснера	108
Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Об одном модельном примере метода подобных операторов	112
Гладышев Ю. А. О свойствах обобщённых степеней Берса в комплексном пространстве	116
Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса	118
Голубков А. А. Обратная задача для уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений	122
Голубов Б. И., Волосивец С. С. Преобразование Фурье и непрерывность функций ограниченной Φ -вариации	126
Гордиенко В. Г. О задаче Бомбиери для ограниченных однолистных функций	134
Григорян М. Г. Функции универсальные относительно классических систем	137
Гудков А. А., Спиридонов К. А., Сидоров С. П. О сходимости одного алгоритма построения сегментной регрессии	144
Данченко В. И. Оценки L_p -норм простых дробей	147
Demirbilek U., Ala V., Mamedov Kh. R., Goktas S. On the exact solution of fractional simplified MSH equation	150
Додонов А. Е. Об оценках квазимногочленов и производных рациональных функций	153
Додонов А. Е. Условия сходимости рядов наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$	156
Жердев А. В. О множестве значений решений хордового уравнения Лёвнера	158
Зайцева Н. В. О глобальных классических решениях двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений	162
Игнатъев М. Ю. Свойства данных рассеяния систем дифференциальных уравнений с особенностью	164
Казанцев А. В., Киндер М. И. Свойства экстремумов конформных радиусов и приведенных модулей	167
Карагулян Г. А. Свойство Фату для аппроксимативных единиц на метрических пространствах с мерой	172
Козловская Т. Д. О множествах относительной единственности для системы Виленкина–Джафарли	177
Комаров М. А. О неравенствах разных метрик для наимпростейших дробей	184
Комиссарова Н. Е. Нестационарный КМА на локально-компактных нульмерных группах с произвольной образующей последовательностью.	189
Компанеев Е. Г., Старков В. В. Оценка модулей производных высших порядков для многочленов	193

Коноплев Б. В. Об обобщенных рангах устойчивых матриц	197
Копылов С. Н. О влиянии выбора масштабных функций на свойства интеграла Хенстока – Курцвейля	200
Корнев В. В., Хромов А. П. О решении смешанной задачи для волнового уравнения	202
Королев Г. М. Оценки функции Грина в модельной нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности	205
Костин А. Б., Шерстюков В. Б. Суммы типа Рэлея для корней уравнения, связанного со спектральной задачей	209
Кривошеева О. А. Фундаментальный принцип в инвариантном подпространстве в неограниченной области	214
Кудрявцева О. С. Неравенство типа Шварца и круги однолиственности подкласса ограниченных голоморфных функций	218
Кузнецова М. А. Спектральный анализ операторов Штурма–Лиувилля на структурах из отрезков	221
Курдюмов В. П., Хромов А. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и однопорядковыми граничными условиями с производной	225
Левизов С. В. О допустимом росте лакун в системе Уолша	229
Ломов И. С. Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера	231
Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А. Численное исследование колебаний малого метеорного тела в следе более крупного тела	237
Лукашенко Т. П. Ортонормированные базисы двумерных тригонометрических многочленов из сдвигов одного из них	241
Лукомский С. Ф. Дискретные ортогональные и рессовские масштабирующие функции	245
Магомед-Касумов М. Г. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по системе функций, ортогональной по Соболеву и порожденной системой Уолша	248
Малютина А. Н., Новик А. В., Дифференциальные свойства отображений с s -усредненной характеристикой	252
Mamedov Kh. R., Demirbilek U. A uniqueness theorem of the inverse problem for a class the Sturm – Liouville problem	256
Мардвилко Т. С. Производные произведений Бляшке на прямой	260
Махина Н. М. Об ограниченности некоторых интегральных операторов в областях с асимптотически конформными границами	263
Назарова Е. В. Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для одного класса интегральных операторов с инволюцией	266
Нараленков К. М. Об абсолютной интегрируемости измеримых по Риману векторнозначных функций	268
Насыров С. Р. Эллиптические функции Вейерштрасса и аппроксимации Паде–Эрмита	273
Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Якоби	277
Новиков С. Я., Рогач Д. А. Матрицы операторов синтеза равномерного жесткого фрейма с полным спарком в \mathbb{R}^d	281
Нурмагомедов А. А. Сходимость сумм Фурье по многочленам $\widehat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на неравномерных сетках в случае целых α и β	284

Орлов И. В., Баран И. В. Компактные субдифференциалы и метрика Хаусдорфа	288
Осипцев М. А., Дудов С. И., Абрамова В. В. О характеристике решения задачи об оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции	296
Охлупина О. В. О факторизации одного класса целых функций	301
Петросова М. А. О явной записи полиномов Бернштейна для рационального модуля на симметричном отрезке	303
Платонов С. С. О преобразовании Фурье функций из классов Дини–Липшица на локальных полях	307
Плотников М. Г. Анализ на p -ичных группах	311
Плотников М. Г., Астапонок В. С. Множества типа Кантора и ряды по системам Виленкина–Крестенсона	319
Подорога А. В. Проблема устойчивости решений в задаче Коши для квазилинейного закона сохранения	324
Половинкин Е. С. Об одном примере экстремальной задачи с дифференциальным включением	328
Попов Н. В. О неравенстве В.В. Арестова	332
Постнов С. С. Задачи оптимального управления для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими производными	335
Постнова Е. А. Оптимальное управление движением систем дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами	340
Родикова Е. Г., Шамоян Ф. А. О дифференцировании в классе И. И. Привалова в круге	345
Рыхлов В. С. О разрешимости смешанной задачи для одного класса гиперболических уравнений при отсутствии полноты корневых функций	347
Садекова Е. Х. Об одной оценке для наилучшего приближения ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа	352
Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. О проекционном методе нахождения моментных функций решения двумерного стохастического уравнения диффузии	354
Симонов Б. В. Оценки сумм двойных тригонометрических рядов в пространствах с весом	357
Симонова И. Э. Оценка производных по направлению сопряженных функций	364
Соколова Г. К. Периодические функции нескольких переменных и их приложения	371
Солиев Ю. С. Об аппроксимации особых интегралов по действительной оси с периодическими плотностями	375
Солодов А. П. Точные константы в оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами	379
Сперанский К. С., Терехин П. А. Построение банахова фрейма в пространстве Харди, определенном на полидиске	382
Старков В. В. Гипотеза о якобиане и некоторые обобщения	385
Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Волков Д. А. Скорость сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций	389
Старовойтов А. П., Рябченко Н. В., Драпеза А. А. О представлении многочленов Эрмита–Паде	393
Султанахмедов М. С. Рекуррентные формулы для ортогональных по Соболеву полиномов, порождённых классическими ортогональными полиномами	397

Tashpulatov S. M. Spectra of five-electron systems in the Hubbard model [Ташпулатов С. М. Спектр пяти-электронных систем в модели Хаббарда]	401
Тилеубаев Т. Е. Прямые и обратные теоремы в пространствах $L_{p,\alpha}$	405
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна: новые продвижения и возможные обобщения	409
Трынин А. Ю., Киреева Е. Д., Олейник М. А. Критерий сходимости обобщённых синк приближений для функций ограниченной вариации.	415
Фадеева А. В. Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов полинома в пространстве тригонометрических многочленов	420
Фарков Ю. А. Конечные жёсткие фреймы в анализе Уолша	425
Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения	433
Хромова Г. В. Об одном семействе операторов с разрывной областью значений	440
Цветкович Д. Г. Конструктивные методы в теории полиномов Бернштейна: формулы, сходимость, нули	443
Chandragiri S., Lyapun A. P. On fundamental solutions to difference equations in lattice cones [Чандрагири С., Ляпин А. П. О фундаментальных решениях разностных уравнений в конусах целочисленной решетки]	449
Чумаченко С. А. О полноте двоичных базисов сплайнов в пространстве L_p	453
Шамоян Ф. А. О слабой обратимости в весовых L_p -пространствах целых функций типа Фока	456
Шах-Эмиров Т. Н. О приближении функций из весовых пространств Лебега и Соболева с переменным показателем средними Валле Пуссена	459
Шустов В. В. К решению интерполяционной задачи Эрмита для функции многих переменных	463
Щербаков В. И. Оценки снизу для ядер Дирихле по обобщенным системам Хаара и Уолша	467
Юрко В. А. О восстановлении дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом: нелинейный случай	472
Янина А. В. Массивные множества Хелсона	478

CONTENTS

Abramova V. V., Dudov S. I., Zharkova A. V. On some differential properties of distance function in asymmetric space	15
Akishev G. The inequality for trigonometric polynomials by hyperbolic crosses in Lorentz space	19
Akopyan R. R. Stechkin's problem in the class of analytic and bounded functions .	23
Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh. R. Improved Bernoulli sub-equation function method for exact solutions of conformable time fractional RLW equation	26
Almohamed M. Reconstruction of the inhomogeneous term for Poisson's equation with special boundary conditions	30
Alferova E. D. , Popov A. Yu. Two-sided estimates for L^∞ -norm of sine series with monotone coefficients $\{b_k\}$ in terms of l^∞ -norm of $\{kb_k\}$ sequence	33
Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V. Advanced algorithm for modeling stability of hybrid dynamical systems	36
Astashkin S. V., Strakhov S. I. On some geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces	40
Arestov V. V. Approximation in the uniform norm on the axis of a differentiation operator by operators bounded in the space L_r and related extremal problems	42
Harutyunyan R. V. Direct grid methods for solving variational problems and experience of their application in problems of deflections of beams and plates	46
Harutyunyan T. R. Two-sided methods of magnetostatic based on the variational approach	51
Balashov M. V. Nonconvex optimization on smooth manifolds	54
Baranova I. S. On the asymptotic properties of the coefficients of orthorecursive expansions in a system of indicators of dyadic intervals	62
Bednazh V. A. On root sets of one class of analytical in the half-plane of the functions	66
Bednov B. B. On periodic functions of several variables and Tchebyshev subspaces defined by them in $L_1[0, 1]^n$	68
Bespalov M. S. Convolutional matrices	70
Bondarenko N. P. Spectral analysis of the matrix Sturm–Liouville operator with the self-adjoint boundary condition in the general form	73
Braichev G. G. On indicators of an entire function with roots zero lower density, lying on a ray	76
Burlutskaya M. Sh., Korzhova Ya. P. Mixed problem for a wave equation with integrable potential on a two-edge graph containing a cycle	80
Buterin S. A. Uniform full stability of the inverse problem for integro-differential operators	84

Vasil'eva A. A. Kolmogorov widths of intersections of weighted Sobolev classes on a domain	90
Volkov B. O. Relationship between Levy Laplacians and gauge fields	94
Volosivets S. S., Tyuleneva A. A. Approximation properties of partial Fourier sums in p -variational norm	97
Voronov S. M. Convergence Fourier series with respect to Vilenkin system in the case of unbounded p_k	101
Gagarin Yu. E., Nikitenko U. V., Stepovich M. A. Using the confluent analysis for interval estimation of the gauss function	105
Gadzhimirzaev R. M. Approximation of discrete functions using special series by Meixner polynomials	108
Garkavenko G. V., Uskova N. B. On one model example of a similar operator method	112
Gladyshev Yu. A. On the properties of generalized powers of Bers in complex space	116
Gladyshev Yu. A., Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the application of the matrix method for mathematical modeling of heat transfer processes	118
Golubkov A. A. The inverse problem for the Sturm–Liouville equation with a piecewise-integer potential on the curve and with conditions for the discontinuity of solutions	122
Golubov B. I., Volosivets S. S. Fourier transform and continuity of functions of bounded Φ -variation	126
Gordienko V. G. On Bombieri problem for bounded univalent functions	134
Grigoryan M. G. Functions that are universal with respect to the classical systems	137
Gudkov A. A., Spiridonov K. A., Sidorov S. P. On the convergence of an algorithm for segment regression construction	144
Danchenko V. I. Estimates of L_p -norms of simple rational fractions	147
Demirbilek U., Ala V., Mamedov Kh. R., Goktas S. On the exact solution of fractional simplified MCH equation.....	150
Dodonov A. E. On estimates of quasipolynomials and derivatives of rational functions	153
Dodonov A. E. Convergence conditions for series of simple partial fractions	156
Zherdev A. V. On a value range of solutions to the chordal Loewner equation	158
Zaitseva N. V. On global classical solutions of two-dimensional hyperbolic differential-difference equations	162
Ignatiev M. Yu. Properties of scattering data of differential systems with a singularity	164
Kazantsev A. V., Kinder M. I. Properties of extrema of conformal radii and generalized reduced moduli	167
Karagulyan G. A., Katkovskaya I. N., Krotov V. G., Safaryan M. H. Fatou property for approximations of identity on metric measure spaces	172
Kozlovskaya T. D. On sets of relative uniqueness for the Vilenkin–Dzhafarli system	177
Komarov M. A. On inequalities between different metrics for simplest fractions	184
Komissarova N. E. Non-stationary MRA on locally compact zero-dimensional groups with arbitrary generation sequence	189

Kompaneets E. G., Starkov V. V. Estimate of higher order derivatives for polynomials	193
Konoplev B. V. On generalized ranks of rigid matrices	197
Kopylov S. N. About effect of gauge functions on properties of the Henstock – Kurzweil integral	200
Kornev V. V., Khromov A. P. On the mixed problem for non-homogeneous wave equation	202
Korolev G. M. Estimates of the green’s function in model nonlocal problem for the heat equation	205
Kostin A. B., Sherstyukov V. B. Sums of Rayleigh type for the roots of the equation associated with the spectral problem	209
Krivosheeva O. A. Fundamental principle in invariant subspace in unbounded domain	214
Kudryavtseva O. S. Inequality of Shwarz type and disks of univalence for subclass of bounded holomorphic functions	218
Kuznetsova M. A. Spectral analysis of Sturm – Liouville operators on the segment structures	221
Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Classical and generalized solutions of the mixed problem for a homogeneous equation with zero initial speed and single-order boundary conditions with a derivative	225
Levizov S. V. About the permissible growth of lacunes in Walsh’s system	229
Lomov I. S. A. P. Khromov’s method for solving a mixed problem for a hyperbolic equation. A generalized formula of D’Alembert	231
Lukashenko V. T., Maksimov F. A. Numerical study of oscillations of a small meteor body in the trace of larger body	237
Lukashenko T. P. The orthonormal bases of two-dimensional trigonometric polynomials of consecutive shifts of one polynomial	241
Lukomskii S. F. Discrete orthogonal and Riesz refinable functions	245
Magomed-Kasumov M. G. Approximation properties of Fourier series in a Sobolev orthogonal system, generated by Walsh system	248
Malutina A. N., Novik A. V. Differential properties of maps with s -averaged characteristic	252
Mamedov Kh. R., Demirbilek U. A uniqueness theorem of the inverse problem for a class the Sturm – Liouville problem	256
Mardvilko T. S. Derivatives of Blaschke products on the straight line	260
Makhina N. M. On the boundedness of some integral operators in domains with asymptotically conformal boundaries	263
Nazarova E. V. An analogue of the Jordan – Dirichlet theorem for a class of integral operators with involution	266
Naralencov K. M. On absolute integrability of Riemann-measurable vector-valued functions	268
Nasyrov S. R. Weierstrass elliptic functions and Pade – Hermite approximations	273
Novikov V. V. Adjustment of functions and Lagrange interpolation based on the nodes close to the Jacobi nodes	277

Novikov S. Ya., Rogach D. A. Matrices of synthesis operators for an equal norm tight full spark frame in \mathbb{R}^d	281
Nurmagomedov A. A. Convergence of Fourier sums by polynomials $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, orthogonal on non-uniform grids in the case integers α and β	284
Orlov I. V., Baran I. V. Compact subdifferential and Hausdorff metric	288
Osiptsev M. A., Dudov S. I., Abramova V. V. On characterization of the solution for the problem on the estimation of a compact by the Lebesgue set of a convex function	296
Okhlupina O. V. Factorization of a class of entire functions	301
Petrosova M. A. On the explicit algebraic representation for Bernstein polynomials of rational module function on the symmetric interval	303
Platonov S. S. Fourier transform of functions from Dini–Lipschitz classes on locally fields	307
Plotnikov M. G. Analysis on the p-adic groups	311
Plotnikov M. G., Astashonok V. S. Cantor type sets and series on the Vilenkin–Chrestenson systems	319
Podoroga A. V. On the solutions stability in the Cauchy problem for the quasilinear conservation laws	324
Polovinkin E. S. On an example of an extremal problem with differential inclusion	328
Popov N. V. About the V. V. Arestov inequality	332
Postnov S. S. Optimal control problems for the systems, modeled by fractional-order equations with multi-parametric derivatives	335
Postnova E. A. Optimal motion control of fractional order systems with concentrated and distributed parameters	340
Rodikova E. G., Shamoyan F. A. On the differentiation in the Privalov classes in a disk	345
Rykhlov V. S. On the solvability of the mixed problem for a class hyperbolic equations in the absence of completeness of the root functions	347
Sadekova E. H. One assessment for best approximation limited functions by trigonometric polynomials in the Hausdorff metric	352
Seregina E. V., Stepovich M. A., Makarenkov A. M. The projective method of finding the moment functions of the solution of the two-dimensional stochastic equation of diffusion	354
Simonov B. V., Vukolova T. M., Simonova I. E. Estimates of sums of trigonometric series in the spaces with weight	357
Simonova I. E., Simonov B. V. Estimates of directional derivatives of conjugate functions	364
Sokolova G. K. Periodic functions of several variables and their applications	371
Soliev Yu. S. On the approximation of special integrals along the real axis with periodic densities	375
Solodov A. P. Sharp constants in estimate of S. A. Telyakovskii for the sum of a sine series with convex coefficients	379
Speransky K. S., Terekhin P. A. On the construction of a Banach frame in the Hardy space defined on a polydisc	382
Starkov V. V. Jacobian conjecture and its generalizations	385

Starovoitov A. P., Kechko E. P., Volkov D. A. The convergence rate Hermite–Padé approximants of exponential functions	389
Starovoitov A. P., Ryabchenko N. V., Drapeza A. A Representation of Hermite–Padé polynomials	393
Sultanakhmedov M. S. Recurrent formulas for Sobolev orthogonal polynomials generated by Jacobi polynomials	397
Tashpulatov S. M. Spectra of five-electron systems in the Hubbard model	401
Tileubayev T. E. Direct and inverse theorems in spaces $L_{p,\alpha}$ spaces	405
Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Approximation of the module function with Bernstein polynomials: new advances and possible generalizations	409
Trynin A. Yu., Kireeva E. D., Oleynik M. A. A criterion for the convergence of generalized sinc approximations for functions of bounded variation	415
Fadeeva A. V. The Parseval’s frames of successive shifts of a polynomial in space of trigonometric polynomials	420
Farkov Yu. A. Finite tight frames in Walsh analysis	425
Khromov A. P. Divergent series and Fourier method for wave equation	??
Khromova G. V. On a family of operators with discontinuous range	440
Tsvetkovich D. G. Constructive methods in the theory of Bernstein polynomials: formulas, convergence, and zeros	443
Chandragiri S., Lyapin A. P. On fundamental solutions to difference equations in lattice cones	449
Chumachenko S. A. Completeness of binary basic splines in L_p	453
Shamoyan F. A. On weak invertibility in l^p -weighted spaces of entire functions of the Fock type spaces	456
Shakh-Emirov T. N. On approximation of functions in weighted variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces by de la Vallee-Poussin means	459
Shustov V. V. To the solution of Hermite interpolation problem for the function of many variables	463
Shcherbakov V. I. Lower estimates of Dirichlet’s kernels by generalized Haars and Walsh’s systems	467
Yurko V. A. On recovering differential operators with deviating argument: nonlinear case	472
Yanina A. V. Massive Helson sets	478

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ И ОБОБЩЁННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ¹

А. В. Казанцев, М. И. Киндер (Казань, Россия)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

Установлены новые условия единственности критической точки конформного радиуса. Исследуется проблема существования критических точек для новых конструкций обобщённых приведенных модулей.

Ключевые слова: конформный радиус, обобщенный приведенный модуль.

PROPERTIES OF EXTREMA OF CONFORMAL RADII AND GENERALIZED REDUCED MODULI¹

A. V. Kazantsev, M. I. Kinder (Kazan, Russia)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

New conditions for the uniqueness of the critical point of the conformal radius are established. We study the problem of the existence of critical points for new constructions of generalized reduced moduli.

Keywords: generalized reduced modulus, conformal radius.

Единственность критической точки конформного радиуса

Через H обозначим класс функций, голоморфных в $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, через H^∞ — пространство функций $F \in H$, ограниченных в D ; $\|F\|_\infty = \sup_{\zeta \in D} |F(\zeta)|$ — норма элемента $F \in H^\infty$. Справедлива

Теорема 1. *Голоморфная в D функция $f(\zeta) = \zeta + \dots$, удовлетворяющая условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leq 2, \quad \zeta \in D, \quad (1)$$

имеет единственную (не обязательно нулевую) критическую точку конформного радиуса

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2) |f'(\zeta)| \quad (2)$$

в круге D . Постоянная 2 в (1) неулучшаема; одновременное нарушение условия (1) и единственности критической точки функции h_f ,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

¹This work was funded by the subsidy of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan, Grant 18-41-160017.

при движении вдоль лучей Хорнича $f_b(\zeta) = \int_0^\zeta f'(t)^b dt$ с ростом b , где $\|f''/f'\|_\infty = 1$, происходит только в случае функции $f(\zeta) = \int_0^\zeta e^{t^2/2} dt$ и её вращений.

Пусть A — подкласс H , состоящий из функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, H_0 — класс функций $f \in A$, локально однолистных в D . Регулярный класс Гахова G_1 состоит из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение Гахова

$$f''(\zeta) / f'(\zeta) = 2\bar{\zeta} / (1 - |\zeta|^2), \quad (3)$$

имеет единственный корень в D , являющийся максимумом функции (2).

Рассмотрим отображение $P : H_0 \rightarrow H : f \mapsto F = f'' / f'$. Пусть $\Delta = \{F \in H^\infty : \|F\|_\infty \leq 2\}$ и $C = P(G_1) \cap H^\infty$; через $Fr_{H^\infty} C$ обозначается граница множества C в пространстве H^∞ . Теорема 1 означает выполнение неумлучшаемого включения $\Delta \subset P(G_1)$. Использование погружения $P_{H^\infty} : P^{-1}(H^\infty) \rightarrow H^\infty$ позволяет усилить утверждение о неумлучшаемости из теоремы 1. Справедлива

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$\Delta \cap Fr_{H^\infty} C = \{F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta : |\varepsilon| = 1\}.$$

Рассмотрим теперь другой подход к неумлучшаемости условия единственности (1). Пусть k_f — число критических точек функции (2), лежащих в D . Если $X \subset H_0$, то \tilde{X} определяется как подкласс всех функций f из X с нулевым корнем уравнения (3), т.е. с условием $f''(0) = 0$. При выполнении последнего неравенство (1) можно записать в виде подчиненности

$$f''(\zeta) / f'(\zeta) \prec F(\zeta) = 2\zeta, \quad \zeta \in D. \quad (4)$$

Из результатов [1] следует, в частности, такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in \tilde{H}_0$ удовлетворяет условию (3). Тогда $f \in \tilde{G}_1$. Кроме того, имеет место эффект Новикова-Хохлова, заключающийся в том, что мажоранту единственности, $F(D) = 2D$, нельзя звездобразно расширить. Это значит, что если голоморфная в D функция H с $H'(0) \neq 0$ удовлетворяет условию $H / H'(0) \in S^*$ и если $F(D) \subsetneq H(D)$, то существует функция $g \in \tilde{H}_0$ с $g'' / g' \prec H$ в D и $k_g > 1$.*

Обобщённые приведенные модули

Пусть D — конечносвязная ограниченная плоская область, и пусть $F(w, w_0) = (w - w_0)f(w, w_0)$, $f(w_0, w_0) \neq 0$, — функция, отображающая D на каноническую область в виде единичного круга с центром в

начале координат и с разрезами предписанной формы: круговыми концентрическими дугами, радиальными разрезами, а также их различными комбинациями.

Обобщенным приведенным модулем области D относительно заданной канонической области называется функция

$$M(w) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(w, w)|.$$

Конформным радиусом области D в точке w будем называть функцию

$$R(w) = \exp(2\pi M(w)).$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля, очевидно, совпадают с критическими точками конформного радиуса области D и являются корнями уравнения

$$\partial M(w)/\partial w = 0. \quad (5)$$

В этой части статьи мы приводим результаты, связанные с исследованием критических точек обобщённых приведённых модулей двусвязных областей относительно различных канонических областей.

Круг с круговым концентрическим разрезом

Если в качестве канонической области выбран единичный круг с круговыми концентрическими разрезами, то количество критических точек функции $M = M(w)$ не меньше порядка связности области D [2].

В качестве примера найдём обобщённый приведенный модуль кольца $E_q = \{w \mid q < |w| < 1\}$ относительно единичного круга с разрезом вдоль дуги с центром в начале координат. Функция $F(w, w_0)$, осуществляющая конформное и однолистное отображение E_q на область указанного типа, имеет вид (см. например, [3, с. 233]):

$$F(w, w_0) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - q^{2k} w/w_0)(1 - q^{2k} w_0/w)}{(1 - q^{2k} w \bar{w}_0)(1 - q^{2k}/(w \bar{w}_0))} \right].$$

Обобщённый приведенный модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом равен $M(w) = \frac{1}{2\pi} \ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w , с точностью до постоянного множителя равный

$$R(w) = (1 - r^2) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} r^2)(1 - q^{2k} r^{-2}), \quad r = |w|,$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля кольцевой области E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом находятся из уравнения (5):

$$\frac{r^2}{1-r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2} - \frac{q^{2k}/r^2}{1-q^{2k}/r^2} \right] = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k}(r^4 - q^2)}{(1-q^{2k}r^2)(r^2 - q^{2k+2})} = 0.$$

Теорема 4. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом имеет бесконечное количество критических точек, расположенных на окружности $|w| = \sqrt{q}$.*

Единичный круг с радиальным разрезом

Найдем обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом. Обозначим через $F(w, w_0)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает E_q на область указанного типа, при этом для удобства будем считать, что радиальный разрез расположен на вещественной оси. Функция $F(w, w_0)$ имеет вид

$$F(w, w_0) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - q^{2k}w/w_0)(1 - q^{2k}w_0/w)}{(1 - q^{2k}w\bar{w}_0)(1 - q^{2k}/(w\bar{w}_0))} \right]^{(-1)^k}.$$

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно этой области равен $M(w) = \frac{1}{2\pi} \ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w , с точностью до постоянного сомножителя равный

$$R(w) = (1 - r^2) \prod_{k=1}^{\infty} [(1 - q^{2k}r^2)(1 - q^{2k}r^{-2})]^{(-1)^k}, \quad r = |w|.$$

Уравнение (5) для нахождения критических точек обобщённого приведённого модуля области E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом

$$\frac{r^2}{1-r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2} - \frac{q^{2k}/r^2}{1-q^{2k}/r^2} \right] = 0 \iff \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2m} + r^{-2m}q^{2m}}{1 + q^{2m}} = 0.$$

не имеет решений.

Теорема 5. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом не имеет критических точек.*

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q можно исследовать также относительно других канонических двусвязных областей специального вида, у которых внутренний контур — круговой или радиальный разрез, а внешний — звездообразная кривая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Kazantsev A. V.* Hohlov effects for pre-Schwarzian derivatives of functions in the Gakhov class // *Lobachevskii J. Math.* 2019. Vol. 40, № 9. P. 1324–1329.
- [2] *Киндер М. И.* О числе решений уравнения Ф. Д. Гахова в случае многосвязной области // *Изв. вузов. Матем.* 1984. № 8. С. 69–72.
- [3] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970. 304 с.