КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Второе издание, переработанное
и дополненное

КАЗАНЬ
2019

УДК 517.54
ББК 22.16
А18

Печатается по решению Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор
Семен Рафаилович Насыров

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор **П.Л. Шабалин;**
доктор физико-математических наук,
профессор **И.Р. Каюмов**

Авхадиев Ф.Г.
А18 **Конформные отображения и краевые задачи** / Ф.Г. Авхадиев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Казань: Издательство Казанского университета, 2019. — 412 с.

ISBN 978-5-00130-228-5

В монографии изложены несколько разделов геометрической теории функций. Описаны применения к краевым задачам и изопериметрическим проблемам математической физики. Предназначена для аспирантов и молодых ученых, интересующихся приложениями комплексного анализа.

Библиография: 168 названий, 16 иллюстраций.

УДК 517.54
ББК 22.16

ISBN 978-5-00130-228-5

Предисловие

В монографии изложены несколько разделов геометрической теории функций, в разработке которых автор принимал активное участие. Основным источником проблем для нас были вопросы, возникающие при изучении краевых задач математической физики.

Глава 1 посвящена развитию классического принципа соответствия границ с учетом потребностей краевых задач. Она связана с топологическими теориями степени и накрывающих отображений, содержит полученное нами обобщение теорем Адамара и Банаха-Мазура о локально гомеоморфных отображениях.

В главе 2 описаны методы построения достаточных условий однолистности аналитических функций. Наиболее глубокие результаты связаны с теоремами З. Нехари о шварциане. Они применялись Л. Альфорсом, Г. Вейлем и Л. Берсом для явного описания квазиконформных продолжений и пространств Тейхмюллера, что стимулировало дальнейшие исследования.

В главе 3 рассматривается функционально-геометрический подход к построению классов однолистных и p-листных отображений. Завершающей частью этой главы является предложенная нами теория допустимых функционалов.

Глава 4 посвящена обратным краевым задачам. Изложены теоремы существования, условия однолистной разрешимости ряда задач, в том числе и прикладных. К этим задачам приобщил меня Л. А. Аксентьев, когда я был еще студентом Казанского государственного университета.

Глава 5 содержит несколько самостоятельных сюжетов, объединенных идеей применения геометрической теории функций в краевых задачах. Кратко излагаются нестандартные применения неевклидовых метрик, решение классической задачи Сен-Венана, описаны также две задачи теории крыла, представлены различные оценки в пространствах Зигмунда и Блоха, а также исследования по гармоническим и бигармоническим отображениям.

Первое издание монографии вышло в 1996 году тиражом 110 экземпляров и стало практически недоступным широкому кругу читателей.

Настоящее второе издание возникло из попытки воссоздать электронную версию книги. Замена стилевого файла привела к тому, что мне пришлось «причесать», весь текст. Кроме того, в книгу включены некоторые дополнения, а именно, подпункты 3.3.4, 5.4.1, 5.4.2, и обновлен список литературы.

Основной материал книги остался прежним. При редактировании нами добавлены отдельные слова и поясняющие фразы, подправлены названия глав и параграфов, некоторые строчные формулы сделаны выносными, изменены обозначения областей: символ $\mathbb{D}$ означает стандартный единичный круг, а символ Ω употребляется для обозначения области в общем случае.

Появлением этой книги я обязан прежде всего моей жене Нине Васильевне, сделавшей оригинал-макет в LaTeX первого издания. Она помогла мне и в подготовке настоящего издания. Благодарю также Р. В. Макарова и Р. Г. Насибуллина за помощь в подготовке оригинал-макета настоящего издания.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 18-11-00115.

Казанский федеральный
университет, август 2019 года

Ф. Г. Авхадиев

Оглавление

Глава 1

Развитие принципа соответствия границ

Классический принцип соответствия границ утверждает однолистность функции $f(z)$ в жордановой односвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, если

1) $f(z)$ аналитична в Ω,

2) непрерывна в $\overline{\Omega}$,

3) $f(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}$ и отображение $f|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to f(\partial\Omega)$ является гомеоморфизмом.

Хорошо известно, что этот результат имеет топологическую природу и справедлив также для открытых и изолированных (т. е. внутренних) отображений. Доказательство этого факта и естественные обобщения изложены в монографиях С. Стоилова [85] и М. Морса [69]. Теория накрывающих внутренних отображений С. Стоилова и общая теорема о порядках (индексах) М. Морса и М. Гейнса находят разнообразные приложения в краевых задачах.

Глава 1 содержит решение нескольких задач. Изучаются ситуации, возникающие в краевых задачах с неизвестными границами, когда применение существующих теорий либо невозможно, либо затруднительно. Мы интересуемся, главным образом, конформными отображениями и аналитическими функциями комплексного переменного с кусочно-гладкими граничными значениями.

Переход к внутренним отображениям обусловлен естественными причинами: это не усложняет доказательств и расширяет область приложений.

Особое место занимает пункт 1.1.3, посвященный обобщениям теорем Адамара и Банаха-Мазура о локально гомеоморфных отображениях областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$.

Ключевыми результатами главы 1 являются три следующих:

— теорема 1.1.2, обобщающая теорему Адамара и Банаха-Мазура (интересны и важны для приложений её частные случаи, когда

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{T}) = \{\infty\}, \qquad\qquad n = 2 \quad \textit{или} \quad n = 3);$$

— теорема 1.2.1 об одновременной рациональной параметризации конечного числа ориентированных квази локально простых кривых;

— лемма 1.3.1 о точных оценках индекса Пуанкаре в зависимости от индекса Уитни и других числовых характеристик вращения кривой.

1.1 Внутренние отображения

Рассматриваются внутренние в смысле С. Стоилова (т. е. открытые и изолированные) отображения $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ области Ω расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Основная задача — описание связей между числом корней уравнения $f(z) = a$ и локальными, а также граничными характеристиками функции $f(z)$.

В простейших случаях предполагаются заданными:

— локальное поведение $f(z)$ в $\overline{\Omega}$ за исключением конечного числа особых точек

$$\{t_k\} = T \subset \overline{\Omega}, \quad f(t_k) = \infty;$$

— граничные условия типа условий М. Морса на каждой из компонент связности $(\partial\Omega) \setminus T$.

1.1.1 Граничные условия М. Морса

Пусть Ω — ν - связная область в $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная замкнутыми жордановыми кривыми $L_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, \nu$. Следуя М. Морсу [69], с.103, определим граничные условия для внутреннего отображения $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ двумя требованиями:

а) для любой граничной точки $t \in \partial\Omega$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{z \to t} f(t), \quad z \in \Omega,$$

т. е. фактически определено отображение

$$f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{C}};$$

б) для любой граничной точки $t \in \partial\Omega$ существует открытая связная дуга $l \subset \partial\Omega$ такая, что $t \in l$ и отображение

$$f \mid l : l \to f(l) \subset \overline{\mathbb{C}}$$

гомеоморфно.

Для множества $X \subset \overline{\Omega}$ через $p(f, X)$ обозначим максимальное число листов отображения $f \mid X$, т. е.

$$p(f, X) = \sup_{W \in \overline{\mathbb{C}}} \#\{z \in X \,:\, f(z) = W\},$$

где $\#Y$ означает число точек множества Y.

Предложение 1.1.1 *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и удовлетворяет указанным выше граничным условиям Морса а) и б).*

Тогда $f(z)$ является конечнолистной в замкнутой области $\overline{\Omega}$, т. е.

$$p(f, \overline{\Omega}) < \infty,$$

в частности, $f(z)$ имеет конечное число полюсов в Ω.

Кроме того, число корней уравнения $f'(z) = 0$ в Ω также конечно.

Доказательство. Если $f(z)$ не является конечнолистной в $\overline{\Omega}$, то существует сходящаяся к некоторой точке $t \in \partial\Omega$ последовательность несовпадающих точек

$$z_j \in \Omega, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

таких, что

$$f(z_j) = w_0 = \mathrm{const} \in \overline{\mathbb{C}}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $w_0 \neq \infty$, l — дуга из граничного условия б) для точки t, l_1 — открытая связная дуга, такая, что $t \in l_1$ и $\overline{l}_1 \subset l$. Пусть, далее, l_2 — жорданова дуга, лежащая вне Ω и соединяющая концы открытой связной дуги l_1. Пусть Ω_1 — область, ограниченная кривой $\overline{l}_1 \cup l_2$. Тогда $\Omega_1 \cap \Omega = \emptyset$.

Известно (см., например, [69], с.106), что гомеоморфизм $f \mid l_1$ может быть продолжен до некоторого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\tilde{f}$ всей плоскости на себя. Функция

$$F(z) = \{f(z),\ z \in \Omega; \quad \tilde{f}(z),\ z \in \Omega_1 \cup l_1\}$$

осуществляет внутреннее по С. Стоилову отображение области

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cup l_1 \cup \Omega_1$$

по теореме Ю. Ю. Трохимчука [87], с.84, причем $t \in \tilde{\Omega}$.

По теореме единственности, $F(z) = w_0$ всюду в $\tilde{\Omega}$, следовательно, функция $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в противоречии с граничным условием б).

Случай

$$w_0 = f(z_j) = \infty$$

сводится к изученному заменой $f_1(z) = 1/f(z)$.

Предположим теперь, что $t \in \partial\Omega$ является пределом нулей z_j производной функции $f(z)$, $j = 1, 2, \ldots$, причем $z_j \neq z_k$ при $j \neq k$.

Без ограничения общности можно считать, что $f(t) \neq \infty$.

В некоторой окрестности $U_0 \subset \tilde{\Omega}$ точки t запишем представление С. Стоилова:

$$F(z) = g(\omega(z)),$$

где ω — гомеоморфизм U_0 на себя, $g(\omega)$ аналитична в U_0.

Условие $f'(z_j) = F'(z_j) = 0$ влечет за собой неоднолистность $F(z)$ в любой окрестности точки z_j, следовательно, $g(\omega)$ неоднолистна в любой окрестности точки $\omega_j = \omega(z_j)$ при $z_j \in U_0$. Поэтому $g'(\omega_j) = 0$, но

$$\lim_{j\to\infty} \omega_j = \omega(t) \in U_0.$$

Тогда по теореме единственности для аналитических функций,

$g'(\omega) \equiv 0$ в U_0, т. е. $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в Ω. Полученное противоречие завершает доказательство.

Граничное условие в следующем утверждении представляет собой частный случай условий Морса, если дополнительно предположить, что $f(z)$ аналитична в области Ω.

Предложение 1.1.2 *Пусть Ω и Ω^* — жордановы области в $\mathbb{C}$,*

$$L = \partial\Omega, \qquad L^* = \partial\Omega^*.$$

Если охраняющее ориентацию внутреннее отображение

$$f\,:\,\Omega \to \mathbb{C}$$

непрерывно продолжимо на $\overline{\Omega}$ и

$$f(L) \subset L^*, \qquad f(z) \not\equiv \mathrm{const},$$

то

а) $f(z)$ является конечнолистной в Ω, $f(\Omega) = \Omega^*$;

б) существует целое число $p \geq 1$, такое, что для любого $a \in \Omega^*$ уравнение $f(z) = a$ имеет p корней в Ω и число прообразов точек ветвления f в Ω равно $p-1$ с учетом кратности корней и порядков точек ветвления;

в) при монотонном движении точки t вдоль L в положительном направлении точка $f(t)$ монотонно в нестрогом смысле обходит L^* в точности p раз в положительном направлении.

Доказательство. Поскольку $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то $f(\Omega)$ — область, поэтому из условий теоремы сразу следует, что

$$f(\Omega) = \Omega^*, \qquad f(L) = L^*.$$

Пусть
$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{и} \quad \Phi : \Omega^* \to \mathbb{C}$$
— гомеоморфизмы, причем $\varphi(z) \to \infty$ и $\Phi(w) \to \infty$ при стремлении z и w соответственно к граничным точкам Ω и Ω^*.

Отображение
$$g = \Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$$
является внутренним в $\mathbb{C}$, причем $g(\zeta) \to \infty$ при $\zeta \to \infty$. Следовательно, g топологически эквивалентно отображению с помощью некоторого полинома $P(z)$ (см. [85], с.163). Поэтому утверждения о поведении отображения f в Ω следуют из простых свойств отображения всей плоскости на себя с помощью полинома $P(z) \not\equiv const$, при этом число p определяется как степень полинома $P(z)$.

Для изучения граничного поведения $f(z)$ воспользуемся представлением С. Стоилова. Имеем $f(z) = F(\psi(z))$, где $\psi(z)$ — гомеоморфизм Ω на себя, $F(\psi)$ аналитична в области Ω.

Отображение $F : \Omega \to \Omega^*$ является p - листным, причем $F(\psi)$ локально однолистно в замыкании $\overline{\Omega}$ области, за исключением множества
$$X_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}\}$$
критических точек, т. е. тех точек, для которых $F'(\psi) = 0$.

Кроме того, в силу жордановости Ω и Ω^*, отображение F будет непрерывным и локально однолистным в $\overline{\Omega} \setminus X_0$ по теореме Каратеодори [47], с.46, поэтому $\psi(z) = F^{-1}(f(z))$ является непрерывным в $\overline{\Omega}$.

Поскольку граничное соответствие при отображении аналитической функцией $F(\psi)$ определяется на основе теоремы Каратеодори, то для завершения доказательства достаточно изучить граничное соответствие для гомеоморфизма ψ. Без ограничения общности достаточно рассмотреть единичный круг

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$$

вместо области Ω. Пользуясь полярными координатами, обозначим

$$\psi(re^{i\theta}) = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le r \le 1,$$

$$\psi(e^{i\theta}) = \exp[it(\theta)], \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Справедлива

Лемма 1.1.1 *Отображение*

$$\exp(i\theta) \mapsto \exp(it(\theta))$$

описывает граничное поведение некоторого непрерывного в $\overline{\mathbb{D}}$ *и сохраняющего ориентацию гомеоморфизма* $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда функция* $t(\theta)$ *является непрерывной, неубывающей и удовлетворяет условию*

$$t(\theta + 2\pi) - t(\theta) = 2\pi$$

для любого вещественного θ.

Доказательство. Необходимость указанных свойств $t(\theta)$, нужная нам для завершения доказательства предложения 1.1.2, почти очевидна.

Действительно, если ψ — непрерывный в $\overline{\mathbb{D}}$ гомеоморфизм $\mathbb{D}$ на себя, то $\psi(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$ и из соотношения

$$\psi(e^{i\theta}) = \exp[it(\theta)]$$

сразу следует существование непрерывной функции $t(\theta)$, удовлетворяющей условиям:

$$t(\theta + 2\pi) - t(\theta) = 0 \pmod{2\pi}$$

для любого вещественного θ, причем

$$\{t(\theta) \,:\, 0 \le \theta \le 2\pi\} \supset [\alpha, 2\pi + \alpha],$$

т. е. $t(\theta) \not\equiv \mathrm{const}$.

Функция $t(\theta)$ будет монотонной в нестрогом смысле и

$$|t(\theta + 2\pi) - t(\theta)| \le 2\pi,$$

так как если

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi + \theta_1, \quad \psi(e^{i\theta_1}) = \psi(e^{i\theta_3}),$$

и l — хорда, соединяющая точки $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_3}$, то определяемый l круговой сегмент, содержащий на границе точку $e^{i\theta_2}$, отображается с помощью $\psi(z)$ на жорданову область с границей $\psi(l)$ и, следовательно, $\psi(e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta_1})$, т. е. $t(\theta) = t(\theta_1)$ для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_3]$.

Таким образом, $t(\theta)$ монотонна в нестрогом смысле и

$$t(\theta + 2\pi) - t(\theta) = \pm 2\pi.$$

Случай отрицательного знака невозможен в силу того, что ψ сохраняет ориентацию.

Достаточность доказывается конструктивно. Пусть $z = re^{i\theta}$, $u(r, \theta)$ — функция, гармоническая в круге $\mathbb{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$, являющаяся решением задачи Дирихле в круге при граничном условии

$$u(1, \theta) = t(\theta) - \theta$$

с непрерывной функцией $t(\theta) - \theta$.

Функция

$$\psi(re^{i\theta}) = re^{i[\theta+u(r,\theta)]}$$

является непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$ и однолистной в $\mathbb{D}$, так как при фиксированном $r \in (0,1)$ функция

$$s(r,\theta) = \theta + u(r,\theta)$$

монотонно растет по θ. Действительно, для любого $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ функция

$$u_0(r,\theta) = s(r,\theta+\theta_0) - s(r,\theta) \equiv \theta_0 + u(r,\theta+\theta_0) - u(r,\theta)$$

является непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$, гармонической в $\mathbb{D}$, но

$$u_0(1,\theta) = t(\theta+\theta_0) - t(\theta) \geq 0, \quad u_0(r,\theta) \not\equiv 0.$$

Следовательно, при $0 < r < 1$ по принципу максимума будем иметь $u_0(r,\theta) > 0$ для любого θ, что и требовалось доказать.

Случай $p = 1$ предложения 1.1.2 дает следующее уточнение классического принципа соответствия границ.

Следствие 1.1.1 *Пусть функция $f(z)$ аналитична в жордановой области Ω, непрерывна в $\overline{\Omega}$, и пусть $L = \partial\Omega$.*

Если L^* — некоторая замкнутая жорданова кривая и имеет место включение $f(L) \subset L^*$, то $f(z)$ будет однолистной в $\overline{\Omega}$ при выполнении одного из условий:

1^0 функция $f(z)$ локально однолистна в Ω;

2^0 существует хотя бы одна точка $t \in L$, для которой уравнение $f(z) = f(t)$ не имеет на L корней, отличных от t.

Замечание 1.1.1 *Если отображение f — внутреннее, то в следствии 1.1.1 можно утверждать однолистность $f(z)$ лишь в открытой области Ω.*

Замечание 1.1.2 *Прямой аналог следствия 1.1.1, даже при одновременном выполнении условий* 1^0 *и* 2^0*, не имеет места, если* Ω *— многосвязная область или если* Ω *односвязна, но функция* $f(z)$ *обращается в бесконечность в* Ω *или на ее границе.*

Приведем простой контрпример.

Пример. Рассмотрим функцию Жуковского

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

в двусвязной области Ω, ограниченной кривыми L_1 и L_2 с уравнениями

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

соответственно. Функция Жуковского аналитична и локально однолистна в Ω, так как $0 \notin \Omega$ и нули производной $\pm 1 \in L_2$. Кривые $f(L_1)$ и $f(L_2)$ просты, отображение

$$f \mid \partial\Omega \,:\, \partial\Omega \to f(\partial\Omega)$$

— гомеоморфизм. Но $p(f, \Omega) = 2$, так как область $f(\Omega)$ ограничена кривой $f(L_1)$, причем точки, внутренние к $f(L_2)$, покрыты дважды.

1.1.2 Наличие особых точек и p-листные отображения

Нам потребуется суммарная характеристика тех точек, в которых отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{C}}$ не является локально однолистным.

Для $X \subset \overline{\Omega}$ *полагаем*

$$V(f, X) = \sum_{z \in X} [p(z, f, \overline{\Omega}) - 1], \tag{1.1}$$

где $p(z,f,\overline{\Omega})$ — *локальная листность* f *в точке* $z\in\overline{\Omega}$, *т. е.*

$$p(z,f,\overline{\Omega})=\lim_{0<\varepsilon\to 0}\sup_{w\in\overline{\mathbb{C}}}\#\{\zeta\in\overline{\Omega}\,:\,f(\zeta)=w,\ S[z,\zeta]<\varepsilon\},$$

$S[z,\zeta]$ — *сферическое расстояние между точками* z *и* ζ.

Кроме того, мы вводим в рассмотрение множество особых точек

$$T:=f^{-1}(\infty).$$

Теорема 1.1.1 *Пусть* Ω — *конечносвязная область в* $\overline{\mathbb{C}}$, *ограниченная замкнутыми жордановыми кривыми,* T — *конечное или пустое множество точек из* $\overline{\Omega}$. *Предположим, что отображение* $f\,:\,\overline{\Omega}\to\overline{\mathbb{C}}$ *является непрерывным в сферической метрике в* $\overline{\Omega}$, *внутренним по С. Стоилову в* Ω, *причем*

$$f(\overline{\Omega}\setminus T)\subset\mathbb{C},\quad f(T)=\{\infty\}.$$

Если отображение f *инъективно на каждой из компонент множества* $(\partial\Omega)\backslash T$, *то величина* $V(f,\overline{\Omega})$ *конечна, справедлива оценка*

$$V(f,\overline{\Omega}\setminus T)-m+2-\alpha_T\geq\max\{m+\alpha_T,2-m-\alpha_T\},$$

отображение f *конечнолистно в* Ω, *причем*

$$p(f,\overline{\Omega}\setminus T)\leq V(f,\overline{\Omega}\setminus T)-m+2-\alpha_T\quad\textit{при}\quad\alpha_T\geq 0,\qquad(1.2)$$

$$p(f,\overline{\Omega})\leq V(f,\overline{\Omega})/2+1\quad\textit{при}\quad\alpha_T=0,\qquad(1.3)$$

где $m=\#\Omega\cap T$ — *число точек из* T, *лежащих в* Ω *(т. е. число полюсов* $f(z)$ *в* Ω *без учета их кратности),* α_T — *число граничных компонент области* Ω, *имеющих общие точки с* T.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\infty \in \Omega$. Действительно, мы можем трансформировать область определения функции с помощью дробно-линейного отображения F. При этом результирующее отображение $f(F^{-1})$ имеет те же характеристики, что и исходное. Сохраним для области и отображения прежние обозначения. Схема дальнейших рассуждений состоит в следующем: если $\alpha_T \geq 1$, то существенно перестроим область определения функции f с помощью специального отображения φ. Если же $\alpha_T = 0$, то полагаем $\varphi(z) \equiv z$.

При $\alpha_T \geq 1$ преобразуем область Ω с применением отображения φ, гомеоморфного в $\overline{\Omega} \setminus T$ и «склеивающего» точки T_j, где T_j — непустое пересечение T с некоторой компонентой $\partial\Omega$, $\quad j = 1, \dots, \alpha_T$. Построение φ можно провести за конечное число шагов, опишем j-й шаг, точнее, опишем преобразования, связанные с j-й граничной компонентой, имеющей непустое пересечение с T. Пусть L_j — замкнутая жорданова кривая,

$$L_j \subset \partial\Omega, \quad T_j = T \cap L_j,$$

где Ω_j — односвязная область с границей $\partial\Omega_j = L_j$, $\infty \in \Omega_j$, т. е.

$$\Omega \subset \Omega_j, \quad \partial\Omega \cap \partial\Omega_j = L_j.$$

Пусть ψ_j — конформное отображение односвязной области Ω_j на область

$$\mathbb{D}^- = \{\zeta \,:\, |\zeta| > 1\}$$

с нормировкой $\psi_j(\infty) = \infty$. Тогда

$$\psi_j(T_j) = \{e^{it_1}, \dots, e^{it_k}\}, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_1 + 2\pi.$$

Далее, строим отображение $\varphi_j \,:\, \mathbb{D}^- \to \overline{\mathbb{C}}$, полагая

$$\zeta = re^{i\theta} \mapsto \varphi_j(\zeta) = w = |w|e^{i\theta},$$

$$|w| = |\varphi_j(re^{i\theta})| = (r-1)^2 + \min_{1\le n\le k}(\theta - t_n)^2.$$

Легко проверяется, что $\varphi_j \circ \psi_j$ гомеоморфно на $\overline{\Omega} \setminus T_j$, кроме того, $\varphi_j(\psi_j(T_j)) = \{0\}$.

Суперпозиция построенных отображений для $j = 1, \ldots, \alpha_T$ дает отображение

$$\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{C}},$$

причем

$\varphi(\infty) = \infty$,

$\varphi(\zeta)$ непрерывна в $\overline{\Omega} \setminus \{\infty\}$, однолистна в $\overline{\Omega} \setminus T$,

$\varphi(T_j) = \{a_j\}$ — одноточечное множество при $j = 1, \ldots, \alpha_T$ (см. рис. 1.1).

Обозначим $\Omega^* = \varphi(\Omega)$ при $\alpha_T \ge 0$ и определим отображение

$$f_0 = f \circ \varphi^{-1} : \overline{\Omega}^* \to \overline{\mathbb{C}},$$

которое непрерывно в $\overline{\Omega}^* \setminus \varphi(T)$, $\quad f_0(\varphi(T)) = \{\infty\}$.

Каждая компонента Ω_j^-, $\quad j = 1, \ldots, j_0$, множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}^*$ является односвязной жордановой областью, сужение f_0 на $\partial\Omega_j^-$ инъективно. Кривая

$$f_0(\partial\Omega_j^-)$$

является замкнутой жордановой кривой в $\mathbb{C}$ или в $\overline{\mathbb{C}}$. Следовательно (см., например, [69], с.106), существуют гомеоморфизмы $f_j : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, ориентированные так же, как и f_0, и такие, что

$$f_j \mid \partial\Omega_j^- = f_0 \mid \partial\Omega_j^-, \quad j = 1, \ldots, j_0.$$

Отображение

$$F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},$$

определяемое равенствами $F(z) = f_0(z)$ при $z \in \Omega^*$ и $F(z) = f_j(z)$ при $z \in \Omega_j^-$, $j = 1, \ldots, j_0$, осуществляет внутреннее по С. Стоилову отображение $\overline{\mathbb{C}}$, так как склейка $f_0(z)$ и $f_j(z)$ вдоль $\partial\Omega_j^-$ возможна в силу известной теоремы Ю. Ю. Трохимчука [87] с учетом простоты $f_0(\partial\Omega_j^-)$.

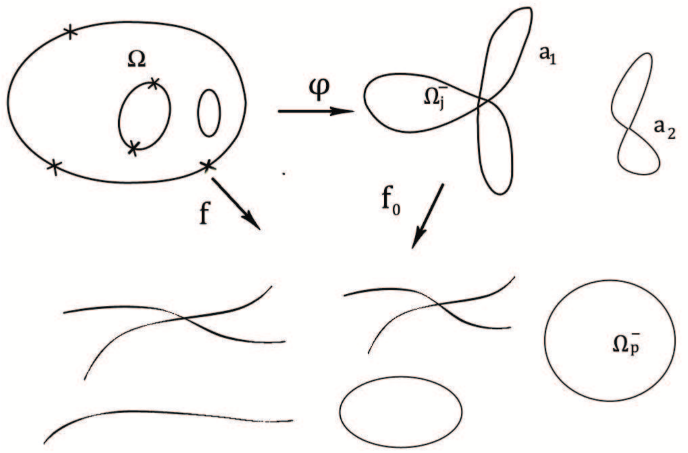

Рис. 1.1: Факторизация f

По формуле Римана-Гурвица

$$V(F, \overline{\mathbb{C}}) = 2[p(F) - 1],$$

где $p(F)$ — число листов компактной римановой поверхности, получаемой как образ $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении F (см. [85], [86]).

По построению,

$$p(f, \overline{\Omega}) \leq p(F) \,\text{при}\, \alpha_T = 0 \quad \text{и} \quad p(f, \overline{\Omega} \setminus T) \leq p(F) \,\text{при}\, \alpha_T \geq 0.$$

При $\alpha_T = 0$ оценка (1.3) следует из того, что

$$V(F, \overline{\mathbb{C}}) = V(f_0, \overline{\Omega}^*) = V(f, \overline{\Omega}).$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_T \geq 0$. Имеем

$$V(f, \overline{\Omega} \setminus T) + V(F, \varphi(T)) = 2[p(F) - 1].$$

По построению, $\#\ \varphi(T) = m + \alpha_T$ — число полюсов $F(w)$ в $\overline{\mathbb{C}}$, $p(F)$ — сумма порядков всех полюсов $F(w)$, поэтому

$$V(F, \varphi(T)) \leq p(F) - m - \alpha_T,$$

следовательно,

$$p(F) \leq V(f, \overline{\Omega} \setminus T) - m + 2 - \alpha_T,$$

что влечет оценку (1.2).

Так как

$$V(f, \overline{\Omega} \setminus T) \leq 2[p(F) - 1] \quad \text{и} \quad p(z, f, \overline{\Omega}) \leq p(F)$$

для любой точки $z \in \overline{\Omega} \setminus T$, то

$$V(f, \overline{\Omega}) \leq V(f, \overline{\Omega} \setminus T) + \sum_{t \in T} p(t, f, \overline{\Omega}) \leq (2 + \#T)\ p(F) < \infty.$$

Далее, неравенство

$$s := V(f, \overline{\Omega} \setminus T) - m + 2 - \alpha_T \geq 2 - m - \alpha_T$$

вытекает из неотрицательности $V(f, \overline{\Omega} \setminus T)$. Далее, $p(F) \leq s$, но $p(F) \geq m + \alpha_T$ по построению T, поэтому $s \geq m + \alpha_T$, т. е.

$$s \geq \max\{m + \alpha_T, 2 - m - \alpha_T\}.$$

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

Следствие 1.1.2 *В предположениях теоремы 1.1.1 отображе-*

ние f однолистно в $\overline{\Omega}\setminus T$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1^0 $\alpha_T = V(f, \overline{\Omega}) = 0$;

2^0 $\alpha_T - 1 = m = V(f, \overline{\Omega}\setminus T) = 0$.

Необходимость 1^0 или 2^0 для однолистности f очевидна. Достаточность 1^0 или 2^0 следует из теоремы 1.1.1.

Требования следствия представляют интерес тем, что однолистность отображения утверждается, на первый взгляд, при недостаточной информации.

Так, в случае 2^0 не требуется локальной однолистности $f(z)$ в особых точках (т. е. в точках множества T), важно лишь то, что $f^{-1}(\infty) = T$; в случае 1^0 не задается, например, число полюсов.

Подчеркнем также, что в теореме 1.1.1 и следствии 1.1.2 нет никаких априорных требований на взаимное расположение образов различных компонент $(\partial\Omega)\setminus T$.

Приведем еще один частный случай.

Пусть $\Omega = \Omega(L^{\pm}, \Gamma)$ — двусвязная область (криволинейная полоса с «дыркой»), а именно:

$$\partial\Omega = L^+ \cup L^- \cup \Gamma,$$

где Γ — замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, L^+ и L^- — бесконечные кривые с уравнениями $y = \psi^{\pm}(x)$, причем $\psi^{\pm}(x)$ непрерывны на всей оси x и везде

$$\psi^+(x) > \psi^-(x), \quad z = x + iy.$$

Пусть, далее, в плоскости w заданы замкнутая жорданова кривая Γ_* и две бесконечные обобщенно жордановы кривые L_*^+ и L_*^- (т. е., по определению, кривые L_*^+ и L_*^- жордановы в $\overline{\mathbb{C}}$).

В этих обозначениях справедливо

Следствие 1.1.3 *Пусть* $\Omega = \Omega(L^{\pm}, \Gamma)$. *Предположим, что отображение*

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

непрерывно и локально однолистно в $\overline{\Omega} \setminus \{\infty\}$, *и*

$$f(z) \to \infty \quad \text{\textit{при}} \quad \Re z \to \pm\infty.$$

Если

$$f(L^+) \subset L_*^+, \quad f(L^-) \subset L_*^-, \quad f(\Gamma) \subset f(\Gamma_*)$$

и для некоторой точки $t \in \Gamma$ *уравнение* $f(z) = f(t)$ *не имеет на* Γ *корней, отличных от* t, *то функция* $f(z)$ *однолистна в* $\overline{\Omega} \setminus \{\infty\}$.

Доказательство. Пусть Φ — гомеоморфизм открытой плоскости w на себя, переводящий L_*^+ на вещественную ось. Тогда функция

$$\psi_*(x) = \Phi(f(\psi^+(x)))$$

непрерывна и локально взаимно однозначна для всех x и, кроме того, $\psi_*(x) \to \infty$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому $\psi_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гомеоморфизм и, следовательно,

$$f(L^+) = L_*^+,$$

отображение f инъективно на L^+.

Аналогично получаем инъективность f на L^-, а также на Γ, причем

$$f(L^-) = L_*^-, \quad f(\Gamma) = \Gamma_*.$$

Остается учесть, что $V(f, \overline{\Omega} \setminus T) = 0$, и применить теорему 1.1.1 после подходящей замены независимой переменной.

Схематично построения в доказательстве теоремы 1.1.1 можно изобразить диаграммой (см. рис. 1.2),

где

$$f = f_0 \circ \varphi, \quad p(f, \overline{\Omega} \setminus T) = p(f_0, \overline{\Omega}^* \setminus T_0) \leq p(F).$$

Подобные построения оказались полезными и применялись нами при решении ряда задач об оценке листности при топологических или геометрических ограничениях. Приведем здесь лишь два утверждения. Первое из них относится к стандартной задаче об оценке величины $p(f, \Omega)$ в том случае, когда задано поведение функции $f(z)$ вблизи всех точек из $T = f^{-1}(\infty)$, а величины $p(z, f, \overline{\Omega})$ в точках $\overline{\Omega} \setminus T$ неизвестны.

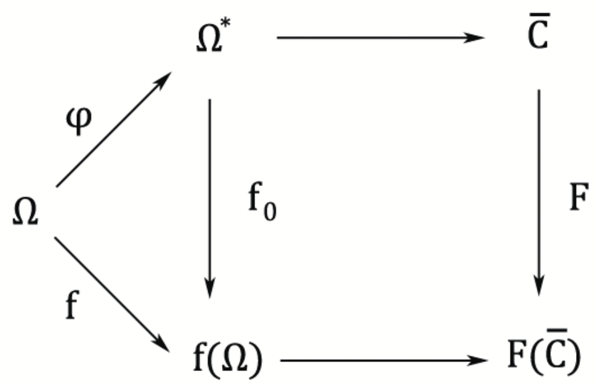

Рис. 1.2: Схема продолжений

Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1.

Через $L_1, \ldots, L_{\nu_0}$ обозначим компоненты $(\partial\Omega) \setminus T$. Кривая L_j считается ориентированной таким образом, что при ее обходе область Ω остается слева.

По условиям теоремы 1.1.1, кривая

$$L_j^* = \overline{f(L_j)} = \{f(L_j) \quad \text{или} \quad f(L_j) \cup \{\infty\}\}$$

является замкнутой жордановой в $\mathbb{C}$ или в $\overline{\mathbb{C}}$. Будем считать, что $f(L_j)$ имеет ориентацию, индуцированную с помощью f. Если $L_j^* \subset \mathbb{C}$, то определен угловой порядок (индекс Уитни) $W(L_j^*)$ этой кривой (см. [69], с. 83).

Пусть $t \in T \cap \partial\Omega$, L_j — дуга из $(\partial\Omega) \setminus T$, имеющая началом точку t. Введем числовой параметр $\mu_t^- \in [0,1]$, характеризующий кривую $L_j^* \ni \infty$ следующим образом. Кривая L_j^* делит плоскость на две бесконечные области. Ту из них, которая лежит справа при обходе L_j^*, будем обозначать через $\Omega^-(L_j^*)$. Если существуют постоянная $\mu \in (0,1]$ и область (угол)

$$A(\alpha, \mu, w_0) = \{w \,:\, 2\pi\alpha < \arg(w - w_0) < 2\pi(\alpha + \mu)\} \supset \Omega^-(L_j^*),$$

то

$$\mu_t^- = \inf_{\alpha, w_0} \{\mu \,:\, \Omega^-(L_j^*) \subset A(\alpha, \mu, w_0)\} \in [0, 1); \tag{1.4}$$

$$\mu_t^- = 1 \quad \text{в других случаях,} \tag{1.5}$$

т. е., по определению, $\mu_t^- = 1$, если $\Omega^-(L_j^*)$ не может быть помещена в однолистный угол.

Для каждого $t \in T \cap \partial\Omega$ в полуокрестности

$$U^+(t, \varepsilon) = \Omega \cap \{z \,:\, S[t, z] < \varepsilon\}$$

при некотором $\varepsilon > 0$ будем предполагать справедливым представление

$$f(z) = \rho(z,t)[e^{i\varphi(z,t)} + \delta(z,t)], \qquad z \in U^+(t, \varepsilon), \tag{1.6}$$

причем функции ρ, φ, δ непрерывны в $\overline{U}^+(t, \varepsilon) \setminus \{t\}$, ρ и

φ вещественнозначны, δ комплекснозначна, $\rho > 0$,

$$\lim_{z\to t}\rho(z,t)=\infty, \quad \lim_{z\to t}\delta(z,t)=0, \qquad z\in U^+(t,\varepsilon)\setminus\{t\}. \tag{1.7}$$

Обозначим $(z\in U^+(t,\varepsilon))$

$$\mu_t^+ = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}[\sup_z \varphi(z,t) - \inf_z \varphi(z,t)]. \tag{1.8}$$

С использованием этих обозначений сформулируем следующее утверждение.

Предложение 1.1.3 *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1 для внутреннего отображения f, сохраняющего ориентацию.*

Предположим, что $W(L_j^*)=-1$, если $L_j^*\subset\mathbb{C}$.

Если для каждой точки $t\in T\cap\partial\Omega$ справедливо представление (1.6) со свойствами (1.7) и $\mu_t^+<\infty$, то

$$p(f,\overline{\Omega}\setminus T)\le n(\infty,f,\Omega)+\sum_{t\in T\cap\partial\Omega}(\mu_t^-+\mu_t^+), \tag{1.9}$$

где $n(\infty,f,\Omega)$ — сумма порядков полюсов функции $f(z)$ в Ω.

Доказательство. Пусть $F(z)$ — функция, построенная при доказательстве теоремы 1.1.1. Имеем:

$$p(f,\overline{\Omega}\setminus T)\le p(F)=n(\infty,F,\overline{\mathbb{C}}).$$

Но, по построению,

$$n(\infty,F,\overline{\mathbb{C}})=n(\infty,f,\Omega)+\sum_{j=1}^{\alpha_T}p(a_j,F,\overline{\mathbb{C}}).$$

При этом мы учли то, что для случая $L_j^*\not\ni\infty$ полюс $f_j(z)$ лежит вне Ω_j^- (см. обозначения в доказательстве теоремы 1.1.1) в силу условия $W(L_j^*)=-1$.

Число $p(a_j, F, \overline{\mathbb{C}})$ равно кратности покрытия окрестности точки $F = \infty$ при отображении окрестности точки a_j функцией $F(z)$. Окрестность $F = \infty$ формируется, по построению, склеиванием однолистных областей $\Omega^-(L_j^*)$ и образов $U^+(t, \varepsilon)$ при отображении функцией $f(z)$, $\quad z \in U^+(t, \varepsilon)$, $\quad$ угловая мера которых ограничена вблизи бесконечности числами $2\pi\mu_t^\pm$. Таким образом,

$$\sum p(a_j, F, \overline{\mathbb{C}}) \leq \sum (\mu_t^- + \mu_t^+),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1.1.4 *В условиях предложения 1.1.3 отображение f будет однолистным в $\overline{\Omega} \setminus T$, если $\alpha_T = 1$ и*

$$n(\infty, f, \Omega) = 0, \qquad \sum_{t \in T} (\mu_t^- + \mu_t^+) < 2. \tag{1.10}$$

Очевидно, из (1.9) при требованиях (1.10) следует оценка $p(f, \overline{\Omega} \setminus T) \leq 1$ с учетом целочисленности $p(f, \overline{\Omega} \setminus T)$.

Соотношения (1.9), (1.10) позволяют записать множество признаков однолистности и p-листности функции $f(z)$, если задавать конкретные области Ω и уточненное поведение $f(z)$ вблизи точки $t \in T$.

На основе (1.10) получаются, например, другие доказательства известных результатов А. И. Маркушевича [66] и Л. А. Аксентьева [34].

В [66], гл.V, множество T состоит из одной точки t, $\Omega^-(L_j^*)$ — полуплоскость, поэтому $\mu^- = 1/2$, и в силу (1.10) вопрос сводится к простой проверке неравенства $\mu^+ < 3/2$.

В [34] множество T состоит из двух точек t_1 и t_2, кроме того, $\mu_1^- = \mu_2^- = 1/2$. Неравенство $\mu_1^+ = \mu_2^+ < 1$, требующееся для выполнения (1.10), проверяется нетрудно из-за того, что в действительности $\mu_1^+ = \mu_2^+ = 0$.

Рассмотрим теперь (ограниченную или неограниченную) область $\Omega' \subset \mathbb{C}$, граница которой разбита на разомкнутые жордановы или обобщенно жордановы дуги L_j, $j = 1, \ldots, m$. Пусть $T = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — множество точек стыка этих дуг.

Вырезав в области Ω' «дырки» вдоль замкнутых жордановых в $\mathbb{C}$ кривых Γ_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, превратим Ω' в n-связную область, которую обозначим через

$$\Omega = \Omega(L, \Gamma).$$

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — сохраняющее ориентацию внутреннее отображение Ω, непрерывное в $\overline{\Omega} \setminus T$, $f(T) = \{\infty\}$.

Предположим, что любая конечная часть $f(L_j)$ является гладкой, $j = 1, \ldots, m$. Тогда для любых двух точек t_1 и t_2 из L_j, $t_1 \prec t_2$ (т. е. t_2 следует за t_1 согласно ориентации L_j) определено вращение

$$\psi(t_1, t_2) = Var_{t_1 \prec t \prec t_2} \arg df(t)$$

образа дуги $\gamma(t_1, t_2)$, совпадающее с изменением угла внешней нормали к $f(L_j)$ в точке $f(t)$ при движении точки t от t_1 до t_2 вдоль L_j.

Будем говорить, что *кривая $f(L_j)$ удовлетворяет условию Каплана — Умедзавы, если для любых точек t_1 и t_2 из L_j, таких, что $t_1 \prec t_2$, справедливо неравенство $\psi(t_1, t_2) \geq -\pi$.*

При этих предположениях справедливо

Предложение 1.1.4 *Локально однолистное в $\overline{\Omega} \setminus T$ отображение f будет однолистным в $\overline{\Omega} \setminus T$, если*

а) для любого ν $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ отображение

$$f \mid \Gamma_\nu : \Gamma_\nu \to f(\Gamma_\nu)$$

гомеоморфно;

б) для любого j $(j = 1, \ldots, m)$ кривая $f(L_j)$ удовлетворяет условию Каплана — Умедзавы.

Доказательство. Предположим, что функция $f(z)$ неоднолистна в $\overline{\Omega} \setminus T$. Тогда, в силу теоремы 1.1.1, существуют точки t_1 и t_2, $t_1 \prec t_2$, лежащие в L_j для некоторого j и такие, что $f(t_1) = f(t_2) \neq \infty$.

Можно считать, что

$$\gamma = f(\{t \in L_j \,:\, t_1 \preceq t \preceq t_2\})$$

— простая петля, т. е. γ — замкнутая жорданова кривая.

Пусть $\Omega(\gamma)$ — область в $\mathbb{C}$, ограниченная кривой γ. Из результатов Т. Умедзавы [164] с учетом того, что $f(L_j)$ локально проста и $f(t_1) = f(t_2)$, следует: $|\psi(t_1, t_2)| > \pi$. Но по условию теоремы $\psi(t_1, t_2) \geq -\pi$, следовательно, если γ — простая петля, то $\psi(t_1, t_2) > \pi$. Геометрически понятно, что это невозможно в силу локальной однолистности $f(z)$ в $\overline{\Omega} \setminus T$. Покажем это подробнее.

Множество всех таких простых петель для всех L_j можно частично упорядочить естественным образом:

$$\gamma_1 \prec \gamma_2 \Longleftrightarrow \Omega(\gamma_1) \subset \Omega(\gamma_2).$$

В силу непрерывности и локальной однолистности $f(z)$ на множестве $\overline{\Omega} \setminus T$ каждая убывающая последовательность $\{\gamma_j\}$ простых петель ограничена снизу, т. е.

$$\cap \Omega(\gamma_j) \neq \emptyset.$$

Поэтому по лемме Цорна существует минимальная петля γ_0, такая, что для любой простой петли γ условие

$$\Omega(\gamma) \subset \Omega(\gamma_0)$$

влечет за собой равенство $\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma_0)$.

Пусть γ_0 является образом дуги $l_0 \subset L_j$, t_1^0 — начало, t_2^0 — конец дуги l_0, причем

$$f(t_1^0) = f(t_2^0), \quad f(\bar{l}_0) = \gamma_0$$

и f инъективно на $l_0 \cup \{t_1^0\}$.

Если l' — связная дуга из $\partial\Omega$, такая, что

$$f(l') \subset \Omega(\gamma_0), \quad f(\bar{l}' \setminus l') \subset \gamma_0,$$

то $f(l')$ не имеет самопересечений в силу локальной однолистности и непрерывности f в $\overline{\Omega} \setminus T$ и минимальности γ_0.

Очевидно, множество дуг типа l' не более, чем счетно. Продолжив функцию $f(z)$ через все такие дуги l', построим область $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ и локально гомеоморфное в $\tilde{\Omega}$ отображение $\tilde{f}$ так, чтобы $\tilde{f} \mid \overline{\Omega} = f$ и множество $\tilde{f}(\partial\tilde{\Omega})$ не имело точек внутри $\Omega(\gamma_0)$.

Поскольку f локально однолистна в $\overline{\Omega} \setminus T$, сохраняет ориентацию и

$$\psi(t_1^0, t_2^0) > \pi,$$

то $\Omega(\gamma_0) \cap f(\Omega) \neq \emptyset$. Следовательно, $\tilde{f}^{-1}[\Omega(\gamma_0)]$ состоит из конечного числа односвязных областей, лежащих в $\tilde{\Omega}$. Пусть Ω_0 — та из них, граница которой содержит дугу l_0. Тогда $\tilde{f}(z)$ однолистна в Ω_0 в силу следствия 1.1.1 предложения 1.1.2, локально однолистна в $\overline{\Omega}_0$, следовательно, должна быть однолистной в $\overline{\Omega}_0$, что противоречит равенству $f(t_1^0) = f(t_2^0)$. Доказательство закончено.

Отметим, что вращение $\psi(t_1, t_2)$ может быть аккуратно определено и для кусочно гладких дуг так же, как это делается при обобщениях теоремы Гаусса-Бонне. Справедливо и соответствующее обобщение предложения 1.1.4.

1.1.3 Обобщения теорем Адамара и Банаха-Мазура о локально гомеоморфных отображениях

Теоремы этого пункта являются новыми и для аналитических функций, заданных в плоских областях, но формулируются и доказываются для локально гомеоморфных отображений областей из $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ где $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $n \geq 2$.

Наша основная теорема 1.1.3 является обобщением следующих теорем Адамара [137] и Банаха-Мазура [112] о достаточных условиях глобальной однолистности локально однолистных отображений.

Теорема (см. Ж. Адамар [137], 1906 г.). *Локально гомеоморфное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, обладающее свойством*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

является глобальным гомеоморфизмом, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Приведенная формулировка представляет собой хорошо известную топологическую версию теоремы Адамара. В оригинальной работе [137] рассматриваются дифференцируемые отображения с положительным якобианом.

Укажем еще одну популярную версию, относящуюся к пространственным отображениям (при $n = 2$ контрпримером служит функция $f(z) = z^2$)

Теорема Адамара для пространственных отображений. *Пусть $n \geq 3$. Непрерывное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, локально гомеоморфное в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и обладающее свойством*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

является глобальным гомеоморфизмом, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Теорема (см. С. Банах и С. Мазур [79], 1934 г.). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, и пусть отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ локально гомеоморфно.*

Если $f(\Omega)$ — односвязная область и $f : \Omega \to f(\Omega)$ — собственное отображение (т. е. прообраз $f^{-1}(K)$ любого компакта $K \subset f(\Omega)$ является компактом, лежащим в области Ω), то $f : \Omega \to f(\Omega)$ — гомеоморфизм.

Отметим, что мы привели лишь один из вариантов теоремы Банаха-Мазура. В работе [112] теорема доказана ими для локально гомеоморфных отображений $f : X \to Y$, где X и Y — метрические пространства.

Имеется интересная монография Т. Партасарати [156], посвященная развитию и применению теорем Ж. Адамара, С. Банаха и С. Мазура. О дальнейших исследованиях см. также статьи М. Кристеа [124] и [125], опубликованные позже.

Следующие ниже теоремы 1.1.2 — 1.1.4 и предложение 1.1.5 доказаны нами в статье [9]. В целом можно сказать, что мы моделируем некоторые проблемы, возникающие в краевых задачах с неизвестными границами, и изучаем такое развитие принципа соответствия границ, когда априорная информация о множестве $f(\Omega) \cap f(\partial\Omega)$ или об ориентации $f(\partial\Omega)$ отсутствует. В частности, в отличие от теоремы Банаха-Мазура и её аналогов, мы не требуем априорной информации о том, что отображение области является собственным.

Справедлива

Теорема 1.1.2 *Пусть Ω — произвольная область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$. Локально гомеоморфное отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является инъективным в Ω, если оно инъективно на каждой из компонент границы.*

Эта теорема является частным случаем следующей более общей теоремы 1.1.3, для формулировки которой нам потребуется стандартное определение предельного множества $f(\mathbf{T})$ для отображения $f : \overline{\Omega} \setminus \mathbf{T} \to \overline{\mathbb{R}^n}$:

$f(\mathbf{T}) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n}$: *существует такая последовательность* $(x_m) \subset \Omega \setminus \mathbf{T}$, *что* $\lim_{m\to\infty} x_m = x \in \mathbf{T}$ *и* $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = y\}$.

Отметим также, что в случае $\mathbf{T} = \emptyset$ в следующей теореме требование б) излишне (формально оно будет выполнено для случая, когда $\mathbf{K} = \emptyset$).

Теорема 1.1.3 *Предположим, что* Ω *— произвольная область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $\mathbf{T}$ *— замкнутое множество в* $\overline{\Omega}$ *(в частности,* $\mathbf{T} = \emptyset$*),* $\Omega \setminus \mathbf{T}$ *— область.*

Предположим, далее, что отображение $f : \overline{\Omega} \setminus \mathbf{T} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *непрерывно в сферической метрике.*

Отображение f *будет инъективным в* $\Omega \setminus \mathbf{T}$, *если выполнены условия:*

а) в сферической метрике f *локально гомеоморфно в* $\overline{\Omega} \setminus \mathbf{T}$ *и инъективно на каждой из компонент множества* $(\partial\Omega) \setminus \mathbf{T}$*;*

б) существует замкнутое множество $\mathbf{K} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, *такое, что*

$$f(\mathbf{T}) \subset \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \cap f(\overline{\Omega} \setminus \mathbf{T}) = \emptyset$$

и $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathbf{K}$ *— односвязная область.*

Доказательство. При обосновании теоремы без ограничения общности можно считать, что $\overline{\Omega}$ и $f(\overline{\Omega})$ — компактные в $\mathbb{R}^n$ множества. Действительно, к этому случаю можно прийти выбрасыванием из $\Omega \setminus \mathbf{T}$ малых шаров, не меняющим условий теоремы, и применением дополнительных гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{R}^n}$ на себя.

Далее, можно считать, что размерность n достаточно велика. Действительно, если условия теоремы верны для данных

$$\Omega, \quad \mathbf{T}, \quad \mathbf{K}, \quad f$$

для размерности n и, кроме того, множества $\overline{\Omega}$ и $f(\overline{\Omega})$ — компактны в $\mathbb{R}^n$, то для новых данных

$$\Omega_1 = \Omega \times \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{T}_1 = (\mathbf{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\},$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{K} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}, \quad f_1(x) = (f(x'), x^{(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где

$$x' = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x', x^{(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

верны условия теоремы в $\mathbb{R}^{n+1}$, а инъективность f_1 в $\Omega_1 \setminus \mathbf{T}_1$ влечет инъективность f в $\Omega \setminus \mathbf{T}$.

Для любого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ через $\overline{X}$ обозначим его замыкание в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Таким образом, можно считать, что $\overline{\Omega}$ и $f(\overline{\Omega})$ компактны в $\mathbb{R}^n$, а число n достаточно велико, например, $n \geq 5$ (*по существу, мы избегаем случая $n = 3$, для которого не проходит один из этапов в дальнейших построениях из-за того, что не всякая замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{R}^3$ является границей топологического диска*).

Итак, пусть $\overline{\Omega}$ и $f(\overline{\Omega})$ компактны в $\mathbb{R}^n$ и $n \geq 5$. Если f не является инъективным в $\Omega \setminus \mathbf{T}$, то в силу условий теоремы 1.1.3 и известных фактов топологии [38], с. 215, существует простая дуга

$$l \subset \Omega \setminus \mathbf{T},$$

гомеоморфная замкнутому отрезку и соединяющая несовпадающие точки x_1 и x_2 из $\Omega \setminus \mathbf{T}$, причем

$$f(x_1) = f(x_2)$$

и $f \mid (l \setminus \{x_1\})$ — инъективное отображение, кроме того, кривая $f(l) = \partial\mathbb{D}_{top}$ — граница топологического диска $\mathbb{D}_{top}$, замыкание которого $\overline{\mathbb{D}}_{top} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{K}$.

Пусть V — такая связная компонента множества $f^{-1}(\mathbb{D}_{top})$, для которой имеем $l \subset \partial V$; обозначим: $g = f \mid V$.

Множество V с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией является ориентируемым двумерным многообразием со счетной базой, кроме того,

$$l \subset \sigma = \Omega \cap \partial V.$$

По аналогии с плоским случаем (см. [86], с. 103) мы можем построить последовательность (V_j) подмногообразий V конечного рода, таких, что

$$V = \cup_{j=1}^{\infty} V_j,$$

граница ∂V_j состоит из конечного числа простых замкнутых кривых.

Расширяя, если это необходимо, подмногообразие V_j, можно считать, что $l \subset \partial V_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots$, и, более того,

$$l \subset \sigma_j = \partial V_j \cap \partial V \subset \sigma = \cup_{j=1}^{\infty} \sigma_j, \quad \sigma_j \subset int\, \sigma_{j+1}$$

и $\overline{V}_j \setminus \sigma_j \subset V_{j+1}$ для всех j.

Отображение g неоднолистно в V_j при любом j, так как

$$l \subset \sigma_j, \quad \overline{\sigma}_j \subset \partial V_j, \quad x_1, x_2 \in l,$$

и в силу локальной однолистности g образы некоторых окрестностей (относительно V_j) точек x_1 и x_2 при отображении g налагаются друг на друга.

Далее, если число m достаточно велико, то отображение g будет инъективным на каждой компоненте $(\partial V_m) \setminus \sigma_m$. Действительно, если это не так, то существуют последовательности α_j компонент $(\partial V_j) \setminus \sigma_j$ (здесь α_j — жорданова дуга или замкнутая жорданова кривая) и точек x_{1j}, x_{2j} из α_j, причем

$$g(x_{1j}) = g(x_{2j}), \quad j = 1, 2, \dots, \qquad \lim_{j\to\infty} x_{1j} = x_{10}, \quad \lim_{j\to\infty} x_{2j} = x_{20}.$$

По построению, имеем включения

$$f(\overline{V}_j) \subset f(\overline{V}) = \overline{\mathbb{D}}_{top} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{K}, \quad f(\mathbf{T}) \subset \mathbf{K},$$

поэтому x_{10} и $x_{20} \in \overline{\Omega} \setminus \mathbf{T}$. Но тогда $x_{10} \neq x_{20}$ в силу локальной гомеоморфности отображения f в $\overline{\Omega} \setminus \mathbf{T}$.

Для последовательности (α_j) специальное предельное множество

$$Ls\,\alpha_j = \{x \,:\, \lim\inf_{j\to\infty} \operatorname{dist}(x, \alpha_j) = 0\}$$

является континуумом (см. [63], § 47, теорема 6). С другой стороны, по построению подмногообразий V_j множество

$$Ls\,\alpha_j \subset (\partial V) \setminus \sigma \subset (\partial\Omega) \setminus \mathbf{T},$$

т. е. $Ls\,\alpha_j$ лежит на компоненте $(\partial\Omega) \setminus \mathbf{T}$, поэтому соотношения $x_{10} \neq x_{20}$, $f(x_{10}) = f(x_{20})$ противоречат условию а) теоремы.

Итак, мы имеем локально гомеоморфное отображение g ориентируемого двумерного многообразия $\overline{V}_m$, ограниченного конечным числом жордановых кривых, причем

$$g(V_m) \subset \mathbb{D}_{top}, \quad g(\sigma_m) \subset \partial\mathbb{D}_{top},$$

g инъективно на каждой из компонент множества

$$(\partial V_m) \setminus \sigma_m,$$

и

$$g(x_1) = g(x_2), \quad x_1, x_2 \in l \subset \sigma_m.$$

В силу известных фактов [38] без ограничения общности будем считать, что $\overline{V}_m$ — компактная ориентированная двумерная поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, а $\mathbb{D}_{top}$ — круг на плоскости, так как этого можно добиться применением дополнительных гомеоморфизмов, не меняющих свойств g.

Пусть замкнутая жорданова кривая β — одна из компонент ∂V_m. В силу условий на отображение g, кривая $g(\beta)$ является локально простой, $g(\beta) \subset \overline{\mathbb{D}}_{top}$, $g(\beta)$ не имеет точек самопересечения внутри $\mathbb{D}_{top}$.

Таким образом, либо $g \mid \beta : \beta \to g(\beta)$ — гомеоморфизм и $g(\beta)$ — жорданова кривая, либо кривая β состоит из конечного числа дуг $\beta_1, \ldots, \beta_k$, таких, что $g \mid \beta_j : \beta_j \to g(\beta_j)$ — гомеоморфизм, $g(\beta_j)$ — простая дуга с концами, расположенными на окружности.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1.1.1, мы можем продолжить V_m и $g \mid V_m$ до двумерной ориентированной поверхности V_0 с краем и, соответственно, до локально гомеоморфного отображения $g_0 : \overline{V}_0 \to \overline{\mathbb{D}}_{top}$, причем

$$g_0(\partial V_0) = \partial \mathbb{D}_{top}, \quad g_0 \mid V_m = g \mid V_m.$$

Тогда g_0 локально гомеоморфно отображает V_0 на односвязную область $\mathbb{D}_{top}$, т. е. однолистно (см., например, теорему Банаха и Мазура в [112]). Но это противоречит равенству $g_0(x_1) = g_0(x_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 1.1.3 представляет интерес в случае $(\partial\Omega) \setminus \mathbf{T} \neq \emptyset$, т. е. если $\partial\Omega \neq \emptyset$ и $\partial\Omega \neq \mathbf{T}$.

Если же $\partial\Omega = \emptyset$ или $\partial\Omega \subset \mathbf{T}$, то наше утверждение непосредственно следует из теоремы Банаха-Мазура.

Отметим также, что приведенное в статье [92] утверждение Ю. Ю. Трохимчука — А. В. Чернавского представляет собой признак существенно иного типа, так как в [92] заранее требуется пустота пересечения $f(\Omega) \cap f(\partial\Omega)$.

Формально теорема 1.1.3 (даже в случае $\mathbf{T} = \emptyset$) значительно усиливает теорему Л. Д. Кудрявцева [59], [60].

Более того, в теореме Л. Д. Кудрявцева заранее задана ориентация $f(\partial\Omega)$, и это позволяет обобщить ее с сохранением метода доказательства на внутренние отображения (т. е. отказаться от локальной гомеоморфности f в Ω). Такое обобщение проведено нами в [9].

В двух следующих утверждениях рассматривается условие, связывающее образы граничных компонент без требования инъективности на этих компонентах.

Определение. *Пусть F_0 — заданный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{R}^n}$ на себя, и пусть $F_0(0) = 0$, $F_0(\infty) = \infty$, K_0 — непустой компакт из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Для целых чисел m через F_0^m обозначим итерации: F_0^0 — тождественное отображение, $F_0^1 = F_0$,*

$$F_0^{m+1} = F_0 \circ F_0^m$$

для любого целого m. Пусть выполнены соотношения:

$$\lim_{m\to+\infty} F_0^m(x) = \infty, \quad \lim_{m\to-\infty} F_0^m(x) = 0$$

равномерно по $x \in K_0$.

Для локально простой ориентированной кривой L через $W(L)$ обозначим ее угловой порядок [69].

Теорема 1.1.4 *Пусть*

$$\Omega = \Omega(a,b) = \{x : a < |x| < b\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < a < b < \infty.$$

Если отображение $f : \overline{\Omega} \to K_0$ локально гомеоморфно в $\overline{\Omega}$, f и F_0 сохраняют ориентацию, имеет место равенство

$$F_0(f(a\xi)) = f(b\xi)$$

для всех $\xi \in \{x : |x| = 1\}$, то при $n \geq 3$ отображение f инъективно, а при $n = 2$ функция f не более чем р-листна в $\overline{\Omega}$, причем число $p = |W(L_a)|$, где кривая L_a определяется как локально взаимно однозначный образ окружности $\{x : |x| = a\}$ при отображении f.

Доказательство. Определим для f продолжение

$$\Phi : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$$

соотношениями

$$\Phi(x) = F_0^m(f(a^m b^{-m} x))$$

при $a^{-m+1}b^m \leq |x| \leq a^{-m}b^{m+1}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \infty$.

Отображение Φ непрерывно в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в силу соотношения $F_0(f(a\xi)) = f(b\xi)$, и

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$$

с учетом свойств F_0. Действительно, если (x_ν) — некоторая последовательность точек, $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \infty$, то для каждого ν существует такой номер $m(\nu)$, что

$$a^{m(\nu)} b^{-m(\nu)} x_\nu \in \overline{\Omega}(a,b), \quad \lim_{\nu\to\infty} m(\nu) = \infty.$$

Тогда $y_\nu = f(a^{m(\nu)} b^{-m(\nu)} x_\nu) \in K_0$ и $\Phi(x_\nu) = F_0^{m(\nu)}(y_\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$, так как

$$\lim_{\nu \to \infty} F_0^{m(\nu)}(y) = \infty$$

равномерно по $y \in K_0$. Аналогично получим непрерывность $\Phi(x)$ в точке $x = 0$.

Далее, продолжение Φ локально гомеоморфно в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ по лемме 1.1.2, приводимой ниже.

Если $n \geq 3$, то инъективность отображения Φ следует, например, из теоремы 1.1.3 при

$$\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad T = \{0, \infty\},$$

так как $\Phi(T) = \{0, \infty\}$ и $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \Phi(T)$ — односвязная область.

Если $n = 2$, то

$$p(0, \Phi, \mathbb{R}^2) = p(\infty, \Phi, \mathbb{R}^2) = |W(L_a)|$$

по теореме М. Морса и М. Хейнса о порядках [69], и утверждение следует, например, из теоремы 1.1.1.

Отметим, что при $n \geq 3$ доказательство теоремы можно было завершить по-другому, если учесть следующий факт (см. [88]):

при $n \geq 3$ изолированные точки 0 и ∞ не могут быть точками ветвления, и, следовательно, отображение Φ оказывается локально гомеоморфным в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Остается привести лемму о склейке.

Лемма 1.1.2 *Пусть Ω_1 и Ω_2 — непересекающиеся области в $\mathbb{R}^n$, s — открытое подмножество некоторого $(n-1)$-мерного псевдомногообразия [38], причем следующее объединение*

$$\Omega = \Omega_1 \cup s \cup \Omega_2$$

является областью.

Если отображение $f_j : \Omega_j \cup s \to \mathbb{R}^n$ локально гомеоморфно в $\Omega_j \cup s$ при $j = 1$ и $j = 2$, справедливо равенство

$$f_1 \mid s = f_2 \mid s,$$

отображения f_1 и f_2 одинаково ориентированы, то отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, определяемое равенствами

$$f \mid (\Omega_j \cup s) = f_j, \quad j = 1, 2,$$

локально гомеоморфно в Ω.

Доказательство. Отображение f является открытым и изолированным по теореме Ю. Ю. Трохимчука [88]. Поэтому (см. [92]) локальный индекс $\gamma(x, f)$ определен всюду в Ω и сохраняет знак, размерность множества s_0 точек ветвления f не превосходит $n-2$, т. е. $s \setminus s_0$ всюду плотно в s.

Если множество s_0 не пусто и $x_0 \in s_0$, то существует последовательность

$$(x_m) \subset s \setminus s_0, \quad \lim_{m\to\infty} x_m = x_0.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\gamma(x_0, f) = d(f - f(x_0), U),$$

где $U = U(x_0, \varepsilon)$.

Здесь $d(g, G)$ — вращение векторного поля, определенное в [57], гл. 1, для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывного отображения $g : \partial G \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Определение локального индекса $\gamma(x, f)$ и его применения см. также в [38], с.574, и в [57], с.51, [77].

В силу известных свойств вращения векторного поля, с учетом непрерывности f, можно указать m_0, такое, что при $m \geq m_0$ имеем

$$d(f - f(x_0), U) = d(f - f(x_m), U) = \sum_{x \in X} \gamma(x, f), \quad X = U \cap f^{-1}(x_m).$$

Но $|\gamma(x_0, f)| > |\gamma(x_m, f)| = 1$, индекс $\gamma(x, f)$ знакопостоянен, следовательно, существует отличная от x_m точка $x'_m \in U \cap f^{-1}(x_m)$.

Таким образом, существуют две последовательности точек $(x_{m_k}) \subset s$ и $(x'_{m_k}) \subset \Omega$, имеющие общий предел $x_0 \in \Omega$, причем

$$x_{m_k} \neq x'_{m_k}, \qquad f(x_{m_k}) = f(x'_{m_k}).$$

Но эти соотношения противоречат локальной гомеоморфности хотя бы одного из отображений f_1 и f_2.

Лемма 1.1.2 и теорема 1.1.4 доказаны полностью.

Следующее утверждение аналогично теореме 1.1.4, но относится к другой топологической ситуации. Мы пользуемся координатной записью

$$x' = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (x', x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n,$$

O' — начало координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Предложение 1.1.5 *Пусть*

$$\Omega = \{(x', x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \, : -1 < x^{(n)} < 1\},$$

c — положительная постоянная, отображение

$$f \, : \overline{\Omega} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}^n$$

непрерывно и локально гомеоморфно, сохраняет ориентацию, и, *кроме того,*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \|f_n(x)\|_\Omega := \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)| < \infty.$$

Если для всех $x' \in \mathrm{R}^{n-1}$ *выполнено равенство*

$$f((x', 1)) = f((x', -1)) + (O', c),$$

то f *инъективно.*

Функция Φ, определенная равенствами

$$\Phi(x) = f((x', x^{(n)} - 2m)) + (O', mc)$$

при $2m-1 \leq x^{(n)} \leq 2m+1$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будет непрерывной в $\mathbb{R}^n$, кроме того, имеет место равенство $\Phi(\infty) = \infty$.

В силу леммы 1.1.2 отображение $\Phi : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ локально гомеоморфно в $\mathbb{R}^n$ и имеет место равенство $\Phi(\infty) = \infty$, что и влечет инъективность этого отображения по теореме Адамара.

1.2 Разветвленное граничное соответствие

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, или же $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — внутреннее отображение.

В общей теореме о порядках (индексах) М. Морс [69] предполагает, что Ω конечносвязна и ограничена жордановыми кривыми, функция $f(z)$ непрерывно продолжима на $\partial\Omega$ и сужение

$$f \mid \partial\Omega : \partial\Omega \to \mathbb{C}$$

определяет локально простые кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$.

Хотя локально простые кривые составляют весьма широкий класс, формулы М. Морса теряют смысл для многих простых кусочно-гладких кривых, встречающихся в приложениях, например, в случае, когда γ — дважды обходимый отрезок, прямая, окружность с отростком и т. п.

Как отмечают Ф. Д. Гахов, Ю. М. Крикунов [46], для применений в краевых задачах желательны такие аналоги формул М. Морса, которые в качестве γ_j допускали бы любые кусочно-гладкие в $\overline{\mathbb{C}}$ кривые. В статье [46] рассмотрены кривые с особыми точками, порождаемые граничными значениями аналитической функции, когда $f(t) = \infty$ в некоторых точках $t \in T \subset \partial\Omega$ с заданной аналитически асимптотикой $f(z)$ вблизи точки $z = t$.

В отличие от этого, ниже предлагается геометрический подход, связанный с введением нового класса кривых γ_j в $\overline{\mathbb{C}}$ взамен локально простых. Естественно, кроме локально простых этот класс должен содержать и все кусочно гладкие кривые в $\overline{\mathbb{C}}$. Возникает вопрос о подходящем определении индексов: определения должны быть инвариантными по отношению к различным параметризациям.

1.2.1 Рациональная параметризация квази локально простых кривых

Под кривой γ будем понимать непрерывное отображение

$$z : \partial\mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}},$$

где $\partial\mathbb{D}$ — окружность. Две кривые γ_1 и γ_2 считаем совпадающими, если

$$z_1(\zeta) \equiv z_2(\tau(\zeta)), \quad \zeta \in \partial\mathbb{D},$$

где $\tau : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ — гомеоморфизм.

Все кривые и их дуги в этом пункте предполагаются ориентированными, если не оговорено противное. Через γ^- будем обозначать кривую γ (или дугу γ некоторой кривой) с противоположной ориентацией, $|\gamma|$ — носитель γ.

Определение. *Кривую γ, определяемую отображением*

$$z : \partial\mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}},$$

назовем квази локально простой (квази л. п.), если:

а) отображение z локально гомеоморфно в $\partial\mathbb{D} \setminus T(\gamma)$, где $T(\gamma)$ — некоторое конечное или пустое подмножество $\partial\mathbb{D}$;

б) для любой точки $e^{it} \in T(\gamma)$ существуют $\varepsilon > 0$, натуральное число $n(e^{it}, \varepsilon)$ и гомеоморфизм

$$w : [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \to \alpha_w \subset \overline{\mathbb{C}},$$

такие, что

$$w^{n(e^{it},\varepsilon)+1}(\tau) = z(e^{i\tau}) + \mathrm{const}$$

при $t - \varepsilon \le \tau \le t + \varepsilon$.

Заданным параметрам t и $\varepsilon > 0$ могут соответствовать, вообще говоря, различные значения $n(e^{it}, \varepsilon)$, удовлетворяющие условию б). Минимальное из всех возможных $n(e^{it}, \varepsilon)$ обозначим через $n_0(e^{it}, \varepsilon)$.

Определение. *Для кривой γ число*

$$n(e^{it}; \gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} n_0(e^{it}, \varepsilon) \tag{1.11}$$

назовем индексом особой точки, определяемой значением параметра t или точкой $e^{it} \in T(\gamma)$.

Очевидно, $n(e^{it}; \gamma) = n_0(e^{it}, \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, если число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t)$ выбрано достаточно малым. Если e^{it} — точка локальной инъективности отображения z, то положим $n(e^{it}; \gamma) = 0$.

Обозначим:

$$T(a,\gamma) = \{\zeta \in \partial\mathbb{D} \,:\, z(\zeta) = a\}, \quad \kappa(a,\gamma) = \#T(a,\gamma), \qquad (1.12)$$

$$K(\gamma) = \sum_{\zeta \in T(\gamma)} n(\zeta;\gamma), \quad K(a,\gamma) = \sum_{\zeta \in T(a,\gamma)} n(\zeta;\gamma), \qquad (1.13)$$

где величина $n(\zeta;\gamma)$ определена в (1.11). Из определения квази л. п. кривой непосредственно следует, что

$$\kappa(a,\gamma) < \infty, \quad K(\gamma) < \infty, \quad K(a,\gamma) < \infty.$$

Приведенное выше определение дано в [28]. Ранее в [8] был введен класс обобщенно л. п. кривых, который является подклассом квази л. п. кривых и совпадает со всем классом в предположении кусочной гладкости кривых.

Пусть α и β — две разомкнутые кривые в $\overline{\mathbb{C}}$, определяемые соответственно как отображения z_α и z_β отрезка $[0,1]$ в $\overline{\mathbb{C}}$, причем $z_\alpha(1) = z_\beta(0)$. Под произведением $\alpha\beta$ будем, как обычно, понимать кривую, определяемую отображением

$$[0,1] \ni t \mapsto z(t) = \{z_\alpha(2t),\ 0 \le t \le 1/2;\ z_\beta(2t-2),\ 1/2 \le t \le 1\}.$$

Если $z_\alpha, z_\beta \,:\, \partial\mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ задают замкнутые кривые α и β, $z_\alpha(e^{it_1}) = z_\beta(e^{it_2})$ для некоторой пары t_1, t_2, то произведение $\alpha\beta$ определяется отображением $z_{\alpha\beta}$, причем

$$z_{\alpha\beta}(e^{it}) = \{z_\alpha(e^{2i(t+t_1)}),\ 0 \le t \le \pi; \quad z_\beta(e^{2i(t_2+t)}),\ \pi \le t \le 2\pi\}.$$

Для полной определенности произведения $\alpha\beta$ нужно указать в этом случае точки t_1 и t_2, так как множества $T(a,\alpha)$ и $T(a,\beta)$ могут содержать более одной точки.

Определим теперь индекс Пуанкаре $\mathrm{ind}_a\gamma$, $a \notin |\gamma|$ (индекс точки относительно кривой γ или порядок γ относительно точки a) и индекс Уитни $W(\gamma)$ для квази л. п. кривой γ.

Если γ — локально простая кривая, определяемая отображением $z = z(e^{it})$, то полагаем (см. [69])

$$\mathrm{ind}_a\gamma = \int_{\partial\mathbb{D}} d\,\mathrm{Arg}[z(e^{it}) - a],$$

$$W(\gamma) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\partial\mathbb{D}} d\,\mathrm{Arg}[z(e^{i(t+\varepsilon})) - z(e^{it})].$$

Определение. *Пусть γ — квази л. п. кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, α^* — некоторая дуга γ, α — некоторая дуга α^*, концы α являются внутренними точками α^*. Если дуга α^* является простой, то полуокрестностью дуги α будем называть однолистную жорданову область Ω, удовлетворяющую условиям:*

$$\infty \notin \Omega, \qquad \Omega \cap (|\alpha^*| \setminus |\alpha|) = \emptyset,$$

граница Ω является произведением дуги α и некоторой простой дуги β, причем ориентация α индуцирует положительную ориентацию $\partial\Omega$, $\infty \notin \beta$.

Если α^* и α содержат одну особую точку индекса $n(\zeta;\gamma) > 0$ и α^* является образом простой дуги α^*_w при отображении вида

$$z = w^{n+1} + \mathrm{const}, \qquad n = n(\zeta;\gamma), \tag{1.14}$$

то построим полуокрестность Ω_w простой дуги α_w, соответствующей дуге α, в плоскости w так, что $0, \infty \notin \Omega_w$ и только одна из точек $w = 0$, $w = \infty$ лежит на $\partial\Omega_w$. В этом случае полуокрестностью дуги α называем не более чем $[1 + n(\zeta;\gamma)]$ - листную односвязную риманову поверхность, являющуюся аналитическим образом Ω_w при отображении (1.14). Отображение

(1.14) определяет в этом случае некоторую дугу β как локально взаимно однозначный образ $(\partial\Omega_w) \setminus \alpha_w$.

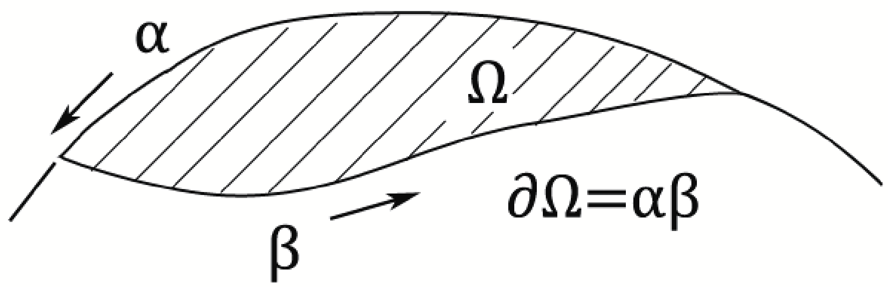

Рис. 1.3: Полуокрестность дуги α

Определение. *Будем говорить, что кривая γ^* получена из γ вдавливанием вдоль дуги α, если γ^* получена из γ заменой дуги α дугой β^-, причем β должна быть такой, чтобы существовала некоторая полуокрестность дуги α, ограниченная кривой $\alpha\beta$.*

Определение. *Пусть γ — некоторая квази л. п. кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, a — точка, не лежащая на γ. По определению, на γ имеется не более, чем конечное число точек, для которых $n(\zeta;\gamma) > 0$. Кроме того, $\kappa(\infty,\gamma) < \infty$, т. е. γ конечное число раз проходит через точку $z = \infty$. Поэтому с помощью конечного числа вдавливаний мы можем получить из γ локально простую кривую γ_ε, лежащую в $\mathbb{C}$. Предположим, что полуокрестности, с помощью которых осуществлены вдавливания, таковы, что точка a лежит вне их проекций на плоскость. Тогда положим*

$$\operatorname{ind}_a\gamma = \operatorname{ind}_a\gamma_\varepsilon, \qquad W(\gamma) = W(\gamma_\varepsilon). \tag{1.15}$$

Корректность определений (1.15) вытекает из теорем Морса и Хейнса о допустимых деформациях [69].

Наше основное утверждение — следующая теорема о существовании одновременной параметризации конечного числа квази л. п.кривых граничными значениями рациональной функции.

Теорема 1.2.1 *а) Если L — замкнутая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, $R(z)$ — рациональная функция, то отображение $R \mid L$ определяет некоторую квази л. п. кривую.*

б) Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$ — ориентированные квази л. п. кривые в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда существуют ν-связная область Ω, ограниченная замкнутыми жордановыми кривыми $L_1, \ldots, L_\nu$, и рациональная функция $R(z)$, такие, что отображение $R \mid L_j$ определяет кривую γ_j для всех $j = 1, \ldots, \nu$, причем положительная ориентация $\partial\Omega$ индуцирует заданную ориентацию кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$.

Доказательство. Утверждение а) очевидно. Для доказательства основного утверждения б) нам нужна

Лемма 1.2.1 *Пусть квази л. п. кривая γ определяется отображением*

$$z = f(e^{it}), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Предположим, что $n(1;\gamma) = 0$, T_1 — заданное конечное множество из $(0, 2\pi)$, такое, что T_1 включает в себя параметры всех точек с ненулевыми индексами, т. е. $T_1 \supset \{t \,:\, n(e^{it};\gamma) > 0\}$. Пусть, далее, для каждой точки $t \in T_1$ задано натуральное число $m(t)$.

Тогда существует сохраняющее ориентацию внутреннее отображение $\tilde{f}$ некоторого кольца

$$\mathbb{D}(r_1, r_2) = \{\zeta \,:\, r_1 < |\zeta| < r_2\}, \quad r_1 < 1 < r_2,$$

такое, что справедливо равенство $f = \tilde{f} \mid \{|\zeta| = 1\}$, *отображение* $\tilde{f}$ *локально однолистно во всех точках множества*

$$\mathbb{D}(r_1, r_2) \setminus \{e^{it} \,:\, t \in T_1\},$$

кроме того,

$$p(e^{it}, \tilde{f}, \Omega) = m(t)[n(e^{it}; \gamma) + 1]$$

для всех $t \in T_1$, *где* $p(z, f, \Omega)$ — *локальная листность отображения области* $\Omega = \mathbb{D}(r_1, r_2)$.

Доказательство леммы состоит в локальном «поднятии» кривой γ на элементы римановой поверхности и последующем склеивании этих элементов.

В силу известных результатов о продолжении гомеоморфизмов дуг (см., например, [63], с. 527) и определения квази л. п. кривой для любого $\tau \in (-\infty, \infty)$ существуют число $\varepsilon = \varepsilon(\tau) > 0$ и такая функция $g(.;\tau) \,:\, \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, что

$$g(e^{it}; \tau) \equiv f(e^{it}) \quad \text{при} \quad t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon],$$

$z = g(\zeta; \tau)$ при любом фиксированном τ определяет сохраняющее ориентацию отображение, локально однолистное в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{i\tau}, \infty\}$ и топологически эквивалентное степенному $(\zeta - e^{i\tau})^{p(\tau)}$, где

$$p(\tau) = \tilde{m}\,(\tau)[n(e^{i\tau}; \gamma){+}1], \;\; \tilde{m}(\tau) = \{1, \tau \in [0, 2\pi]\backslash T_1;\, m(\tau), \tau \in T_1\}.$$

Будем считать, что

$$p(\tau) = p(\tau + 2\pi), \quad g(e^{it}; \tau) \equiv g(e^{it}; \tau + 2\pi)$$

для всех вещественных τ и t,

$$\varepsilon_0(\tau) = \overline{\varepsilon}(\tau)/2,$$

где $\overline{\varepsilon}(\tau)$ — точная верхняя грань всех возможных значений $\varepsilon(\tau)$ при фиксированном $\tau \in [0, 2\pi]$ (т. е. при $0 < \varepsilon(\tau) < \overline{\varepsilon}(\tau)$ возможно построение $g(\zeta; \tau)$ с указанными свойствами).

Выберем теперь фиксированное $\varepsilon_0 > 0$ так, что $2\varepsilon_0 < \varepsilon_0(\tau)$ при любом $\tau \in T_1$, промежутки $[\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0]$ попарно не пересекаются при различных $\tau \in T_1$ и объединение T_2 интервалов $(\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0)$ по всем $\tau \in T_1$ лежит в интервале $(0, 2\pi)$, т. е.

$$T_2 = \cup_{\tau \in T_1} (\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0) \subset (0, 2\pi).$$

Пусть теперь ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, таково, что $2\varepsilon_1 < \varepsilon_0(\tau)$ для всех $\tau \in T_3 = [0, 2\pi] \setminus T_2$. Существование ε_1 следует из компактности T_3 и того факта, что условие

$$\tau' \in (\tau - \varepsilon_0(\tau), \tau + \varepsilon_0(\tau))$$

для любых пар точек τ и τ' из T_3 влечет неравенство

$$\overline{\varepsilon}(\tau') > \overline{\varepsilon}(\tau)/2$$

с учетом выбора $\varepsilon_0(\tau) = \overline{\varepsilon}(\tau)/2$.

Возьмем разбиение

$$0 = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k = 2\pi, \quad \tau_0 = \tau_{k-1} - 2\pi, \quad \tau_{k+1} = \tau_2 + 2\pi,$$

такое, что любой интервал (τ_j, τ_{j+1}) либо совпадает с интервалом $(\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0)$ для некоторого $\tau \in T_1 \subset T_2$, либо не имеет общих точек с T_2 и $0 < \tau_{j+1} - \tau_j < \varepsilon_1$.

Пусть τ_j' — фиксированная точка (τ_j, τ_{j+1}), $j = 0, 1, \ldots, k$, причем $\tau_j' \in T_1$, если $(\tau_j, \tau_{j+1}) \cap T_2 = \emptyset$. По построению,

$$\varepsilon(\tau_j') > |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Пусть $0 < \varepsilon_2 < \min_{m,j} |\tau_m - \tau'_j|$, ε_3 — достаточно малое положительное число.

Образуем линейные множества A'_j, A''_j, $A_j = A'_j \cup A''_j$:

$$A'_j = \{re^{it} \,:\, r = 1, |t - \tau_j| \le \varepsilon_2 \quad \text{или} \quad t = \tau_j - \varepsilon_2,\ |r-1| \le \varepsilon_3\},$$

$$A''_j = \{re^{it} \,:\, r = 1, |t - \tau_j| \le \varepsilon_2 \quad \text{или} \quad t = \tau_j + \varepsilon_2,\ |r-1| \le \varepsilon_3\}.$$

По построению, отображения $g(.;\tau'_j)$ и $g(.;\tau'_{j-1})$ гомеоморфны в некотором открытом множестве, содержащем A_j,

$$g(\zeta;\tau'_j) = g(\zeta;\tau'_{j-1}) = f(\zeta) \quad \forall \zeta = e^{it}, \quad |t - \tau_j| \le \varepsilon_2.$$

Поэтому для достаточно малого $\varepsilon_3 > 0$ существует гомеоморфизм

$$\tilde{g}(.;\tau_j) \,:\, \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},$$

удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{g}(\zeta;\tau_j) \equiv g(\zeta;\tau'_{j-1}) \quad \text{при} \quad \zeta \in A'_j$$

и

$$\tilde{g}(\zeta;\tau_j) \equiv g(\zeta;\tau'_j) \quad \text{при} \quad \zeta \in A''_j.$$

.

Требуемое в лемме 1.2.1 отображение $\tilde{f}$ при $r_1 = 1 - \varepsilon_3$, $r_2 = 1 + \varepsilon_3$ определится теперь из равенств

$$\tilde{f}(re^{it}) = g(re^{it};\ \tau'_{j-1}), \quad \tau_j - 1 + \varepsilon_2 \le t \le \tau_j - \varepsilon_2, \quad |r-1| \le \varepsilon_3;$$

$$\tilde{f}(re^{it}) = \tilde{g}(re^{it};\ \tau_j), \quad |t - \tau_j| \le \varepsilon_2, \quad |r-1| \le \varepsilon_3.$$

Локальная гомеоморфность $\tilde{f}$ на линиях склейки отображений g и $\tilde{g}$ вытекает из того, что g и $\tilde{g}$ сохраняют ориентацию и локально гомеоморфны на этих линиях (см. лемму 1.2 при $n = 2$).

Отметим, что по построению $\tilde{f}(e^{it}) \equiv f(e^{it})$, и $\tilde{f}$ имеет точки ветвления лишь в образах точек $\zeta \in \{e^{it} \,:\, t \in T_1\}$, причем

$$p(e^{it}, \tilde{f}, \Omega) = m(t)[n(e^{it}; \gamma) + 1].$$

Лемма 1.2.1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.2.1.

Пусть $\nu = 1$ и $\gamma = \gamma_1$, применим лемму 1.2.1.

В кольце $\mathbb{D}(r_1, r_2)$ возьмем две замкнутые жордановы кривые β_1 и β_2, лежащие по разные стороны от окружности

$$\beta = \{\zeta \,:\, |\zeta| = 1\}$$

и разделяющие граничные компоненты, образы

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{f}(\beta_1) \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_2 = \tilde{f}(\beta_2)$$

которых являются регулярными аналитическими кривыми.

Кривые β_1 и β_2 разбивают плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на три области Ω_0, Ω_1, Ω_2, причем

$$\partial\Omega_1 = \beta_1, \quad \partial\Omega_2 = \beta_2, \quad \partial\Omega_0 = \beta_1^- \cup \beta_2^-, \quad |\beta| \subset \Omega_0.$$

Применив теорему М. Морса и М. Хейнса [69], с. 95, построим сохраняющие ориентацию внутренние в смысле С. Стоилова отображения $f_j \,:\, \overline{\Omega}_j \to \overline{\mathbb{C}}$, $j = 1, 2$, такие, что $f_j(\zeta) \equiv \tilde{f}(\zeta)$ на β_j, $j = 1, 2$, причем f_j локально гомеоморфно в точках β_j, имеет лишь конечное число критических точек и не более одного полюса.

Отображение $\tilde{R} \,:\, \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, определяемое формулами

$$\tilde{R}(\zeta) = \{f_j(\zeta),\ \zeta \in \overline{\Omega}_j,\ j = 1, 2; \quad \tilde{f}(\zeta),\ \zeta \in \Omega_0\},$$

является внутренним по С. Стоилову и топологически эквивалентно отображению с помощью рациональной функции $R(\zeta)$. Точнее, по теореме С. Стоилова отображение $\tilde{R}(\zeta)$ с точностью до топологического преобразования аргумента, переводящего $\partial\mathbb{D}$ на некоторую жорданову кривую L, совпадает с рациональной функцией $R(\zeta)$, что и требовалось.

Пусть теперь $\nu \geq 2$ и даны ориентированные квази л. п. кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$. Разорвав γ_j для каждого $j = 1, \ldots, \nu$ в некоторой точке локальной простоты, представим формально γ_j как разомкнутую кривую, начало и конец которой находятся в одной и той же точке a_j. Точки $a_1, \ldots, a_\nu$ будем считать различными.

Пусть $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ — простые дуги, имеющие общее начало в точке a_1, а конец α_j — в точке a_j, $j \geq 2$. Дуги α_j можно выбрать так, чтобы произведение

$$\gamma_0 = \gamma_1 \prod_{j=2} \alpha_j \gamma_j \alpha_j^-$$

было квази л. п. кривой, локально простой в точках стыка дуг $\alpha_j^\pm$ и разомкнутых кривых γ_j.

По доказанному выше, существуют жорданова область Ω с ориентированной границей $\partial\Omega = L$ и рациональная функция $R(\zeta)$, такие, что γ_0 определяется отображением $R \mid L$.

Пусть Ω_ν — ν-связная область,

$$\partial\Omega_\nu = L_1 \cup \cdots \cup L_\nu,$$

L_j — замкнутые жордановы кривые. Проведя разрезы $l_2, \ldots, l_\nu$ в Ω_ν, соединяющие L_1 с $L_2, \ldots, Ł_\nu$, (l_j — простая дуга, $l_2, \ldots, l_\nu$ взаимно не пересекаются в Ω_ν), образуем односвязную область Ω_ν^0 с границей

$$L_1 \prod_{j=1}^{\nu} l_j L_j l_j^- .$$

В силу теоремы Римана о конформных отображениях и теорем о продолжении гомеоморфизмов дуг [63], с. 527, существует гомеоморфизм $\varphi\ :\ \Omega\ \to\ \Omega_\nu^0$, непрерывно и локально однолистно продолжимый на $\overline{\Omega}$ и такой, что отображение $R\circ\varphi^{-1}\mid L_j$ определяет кривую γ_j, отображения $R\circ\varphi^{-1}\mid l_j^{\pm}$ определяют кривые $\alpha_j^{\pm}$, значения $R(\varphi^{-1}(w))$ на разных берегах разреза l_j совпадают.

Тогда $R^*(w)=R(\varphi^{-1}(w))$ осуществляет внутреннее отображение ν-связной области Ω_ν, причем отображение R^* локально гомеоморфно на $\partial\Omega_\nu$, за исключением конечного числа точек, $R^*\mid L_j$ определяет γ_j, $j=1,\ldots,\nu$.

Имеем

$$\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega_\nu=\cup_{j=1}^{\nu}\overline{\Omega}_\nu^j,$$

где Ω_ν^j — односвязная область с границей $\partial\Omega_\nu^j=L_j^-$. В силу леммы 1.1.2 при $n=2$ и доказанного выше случая $\nu=1$ теоремы 1.2.1, существует сохраняющее ориентацию локально гомеоморфное, за исключением конечного числа точек, отображение

$$R_j^*\ :\ \overline{\Omega}_\nu^j\to\overline{\mathbb{C}},$$

такое, что

$$R_j^*\mid L_j$$

определяет кривую γ_j^-, справедливо равенство $R_j^*(\zeta)=R(\zeta)$ для всех точек $\zeta\in L_j$. Тогда, образовав функцию

$$\tilde{R}(\zeta)=\{R^*(\zeta),\ \zeta\in\overline{\Omega}_\nu;\quad R_j^*(\zeta),\ \zeta\in\Omega_\nu^j,\ j=1,2,\ldots,\nu\}$$

и применив снова представление С. Стоилова для внутренних отображений, получим то, что нужно. Теорема 1.2.1 доказана.

1.2.2 Теоремы о связи индексов Пуанкаре и Уитни

Напомним, что эти индексы определены в предыдущем пункте для любой квази локально простой кривой γ. Нашей основной целью является изучение связей и оценок для индекса Пуанкаре $\mathrm{ind}_a\gamma$ и индекса Уитни $W(\gamma)$, и применения этих оценок в ситуации, когда квази локально простые кривые порождаются граничными значениями мероморфного отображения области.

Начнем с интересного наблюдения.

Замечание 1.2.1 *В силу леммы 1.2.1 функцию $R(z)$ в теореме 1.2.1 б) можно построить таким образом, что $R(z)$ окажется локально однолистной в точках $\partial\Omega$, соответствующих точкам локальной простоты рассматриваемых кривых, а в точках $\partial\Omega$, соответствующих особым точкам индекса $n(z;\gamma) > 0$, локальная листность $R(z)$ может быть выбрана равной числу $n(z;\gamma)+1$. При таком выборе Ω и $R(z)$ малые вдавливания $\partial\Omega$ определяют некоторые вдавливания γ, позволяющие от γ перейти к ограниченной л. п. кривой γ_ε, причем выполняются (1.15).*

С учетом этого замечания и определений (1.15) из конечнолистности рациональной функции в $\overline{\mathbb{C}}$, принципа аргумента и теоремы 1.2.1 непосредственно вытекает

Предложение 1.2.1 *Для любой квази л. п. кривой γ в $\overline{\mathbb{C}}$*

$$\sup_{a\notin|\gamma|} |\mathrm{ind}_a\gamma| < \infty. \tag{1.16}$$

Судя по литературе, неравенство (1.16) не было известно до нашей работы и для ограниченных локально простых кривых.

Для доказательства следующего предложения 1.2.2 нам потребуется лемма. Конечные точки кривой, для которых индекс

$n(\zeta;\gamma)=0$, будем называть обыкновенными, остальные точки — особыми.

Лемма 1.2.2 *Пусть w_1 и w_2 — различные точки в $\mathbb{C}$,*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

— ориентированные дуги, идущие из w_1 в w_2. Пусть $\gamma=\alpha_1\alpha_2^-$, $\gamma_1=\alpha_1\alpha_3^-$, $\gamma_2=\alpha_2^-\alpha_3$ — квази л. п. кривые, причем точки стыка дуг α_1, α_2, α_3 являются обыкновенными для γ, γ_1 и γ_2, дуга α_3 лежит в $\mathbb{C}$.

Тогда

$$\mathrm{ind}_a\gamma=\mathrm{ind}_a\gamma_1+\mathrm{ind}_a\gamma_2$$

для любой точки a, не лежащей на α_1, α_2, α_3, и

$$W(\gamma)=W(\gamma_1)+W(\gamma_2)+\delta^*,$$

причем $\delta^*=-1$, если дуга α_3 подходит к обеим точкам w_1 и w_2, оставаясь «слева» от γ, $\delta^*=1$, если подход «справа», и $\delta^*=0$, если подход к w_1 и w_2 происходит с разных сторон.

Отметим, что в силу условия на γ, γ_1, γ_2 в точках стыка дуг α_j малые поддуги α_1, α_2, α_3 вблизи начальной или конечной точек не имеют других точек пересечения, кроме w_1 или w_2, поэтому подходы α_3 к γ определены однозначно.

Укажем лишь схему доказательства леммы. Если кривая γ и дуга α_3 являются гладкими, причем α_3 подходит к γ под прямым углом, то требуемые равенства легко устанавливаются, исходя из геометрического смысла индексов. Общий случай сводится к этому с помощью конечного числа вдавливаний, не меняющих значений индексов.

Определение (1.15) индексов $\mathrm{ind}_a\gamma$ и $W(\gamma)$ естественно в том смысле, что если квази л. п. кривая γ является положительно ориентированной границей односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, то

$$W(\gamma) = 1, \quad \mathrm{ind}_a\gamma = \{1, a \in \Omega; \quad 0, a \notin \overline{\Omega}\}.$$

Но в общем случае оказывается потерянным свойство нечетности индексов при смене ориентации γ.

Предложение 1.2.2 *Для квази л. п. кривой γ в $\overline{\mathbb{C}}$ и любой точки $a \notin |\gamma|$*

$$\mathrm{ind}_a\gamma + \mathrm{ind}_a\gamma^- = K(\infty, \gamma) + \kappa(\infty, \gamma), \tag{1.17}$$

$$W(\gamma) + W(\gamma^-) = -K(\gamma) + 2K(\infty, \gamma) + 2\kappa(\infty, \gamma). \tag{1.18}$$

Величины, входящие в правую часть равенств, определены в (1.12), (1.13), замкнутые кривые γ и γ^- отличаются лишь ориентацией.

Доказательство. Пусть α_1 — достаточно малая дуга, содержащая одну из особых точек γ, $\gamma = \alpha_1\alpha_2^-$. Если равенства (1.17) и (1.18) будут доказаны для кривой $\gamma_2 = \alpha_2^-\alpha_3$, полученной вдавливанием γ вдоль α_1, то в силу леммы 1.2.2 соотношения (1.17) и (1.18) будут верны и для γ. Следовательно, осуществив конечное число вдавливаний, мы придем к тому, что (1.17) и (1.18) достаточно обосновать лишь в двух специальных случаях:

1) γ не имеет особых точек;

2) γ содержит одну особую точку и является образом простой кривой $\tilde{\gamma}$ при отображении степенной функцией (1.14), причем $\tilde{\gamma} = \partial\Omega_w$, Ω_w — однолистная область, не содержащая внутри точек $w = 0$, $w = \infty$.

В первом случае $K(\gamma) = K(\infty, \gamma) = \kappa(\infty, \gamma) = 0$, и требуемые соотношения

$$W(\gamma) + W(\gamma^-) = 0, \quad \mathrm{ind}_a\gamma + \mathrm{ind}_a\gamma^- = 0$$

хорошо известны.

Рассмотрим второй случай.

Пусть α — достаточно малая дуга γ, содержащая особую точку. Определим ограниченные л. п. кривые γ_1 и γ_2 вдавливаниями γ и γ^- соответственно вдоль α и α^- так, чтобы применяемые при этом полуокрестности дуг α и α^- не содержали точек, лежащих над точкой $z = a$. Обозначим:

$$\gamma_0 = \gamma \setminus \alpha, \quad \gamma = \gamma_0\alpha, \quad \gamma_1 = \gamma_0\beta_1, \quad \gamma_2 = \gamma_0^-\beta_2,$$

где β_1 и β_2 — дуги, определенные вдавливанием. В силу определения (1.15) и леммы 1.2.2 будем иметь

$$\mathrm{ind}_a\gamma + \mathrm{ind}_a\gamma^- = \mathrm{ind}_a\beta_1\beta_2,$$

$$W(\gamma) + W(\gamma^-) = W(\gamma_1) + W(\gamma_2) = 1 + W(\beta_1\beta_2).$$

Если $n(\zeta;\gamma)$ — индекс особой точки $b = z(\zeta) \in |\alpha| \subset |\gamma|$, то равенства (1.17) и (1.18) для γ следуют в случае 2) из того, что

$W(\beta_1\beta_2) = 1 + n(\zeta;\gamma), \quad \mathrm{ind}_a\beta_1\beta_2 = n(\zeta;\gamma)$ при $b = \infty$;
$W(\beta_1\beta_2) = -[1 + n(\zeta;\gamma)], \quad \mathrm{ind}_a\beta_1\beta_2 = 0$ при $b \neq \infty$.
Предложение 1.2.2 доказано.

Будем писать

$$\gamma_1 \prec \gamma_2,$$

т. е. γ_1 подчинена γ_2, если γ_1 получена из γ_2 с помощью конечного числа вдавливаний. Из определений (1.15) и леммы 1.2.2 непосредственно следует

Предложение 1.2.3 *Пусть γ_1 и γ_2 — квази л. п. кривые, $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma_1 \cup \gamma_2|$. Если $\gamma_1 \prec \gamma_2$, то $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$, $\mathrm{ind}_a\gamma_1 \leq \mathrm{ind}_a\gamma_2$.*

Приведем без доказательства еще одно утверждение, подчеркивающее разницу свойств индексов для ограниченных и для неограниченных кривых. Пусть γ_0 и γ_1 — локально простые кривые в $\overline{\mathbb{C}}$ с представлениями

$$z = z_0(e^{it}), \quad z = z_1(e^{it}), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

соответственно. Рассмотрим деформацию (гомотопию)

$$z = F(t, \tau), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le \tau \le 1,$$

где $F(t, 0) \equiv z_0(e^{it})$, $F(t, 1) \equiv z_1(e^{it})$. Следуя М. Морсу и М. Хейнсу [69], *деформацию F назовем допустимой, если*

а) для любого $\tau \in (0, 1)$ кривая γ_τ, определяемая параметрическим представлением $z_\tau(e^{it}) \equiv F(t, \tau)$, является ограниченной л. п. кривой;

б) существует такое число $\delta > 0$, что любая дуга α кривой γ_τ при $0 \le \tau \le 1$ является простой дугой, если сферический диаметр α не превосходит δ.

Сохранив условие б) и опустив в условии а) требование ограниченности γ_τ при $\tau \in (0, 1)$, получим более общий класс деформаций, которые будем называть допустимыми в $\overline{\mathbb{C}}$.

Известная теорема Грауштейна–Уитни об инвариантности углового порядка (индекса Уитни) гладкой кривой при гладких деформациях является одним из фундаментальных фактов теории комбинаторной и дифференциальной топологии (см., например, монографию В. В. Прасолова [74]). М. Морс и М. Хейнс распространили эту теорему на случай допустимых в $\mathbb{C}$ деформаций локально простых кривых, лежащих в $\mathbb{C}$ (см. [69], с. 84). В случае деформаций, допустимых для неограниченных кривых, лежащих в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, ситуация усложняется. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2.4 *Пусть γ_0 и γ_1 — л. п. кривые в $\overline{\mathbb{C}}$.*
1) Допустимая деформация γ_0 в γ_1 существует тогда и только

тогда, когда $W(\gamma_0) = W(\gamma_1) \pmod 2$ *и*

$$-2\kappa(\infty, \gamma_1) \leq W(\gamma_0) - W(\gamma_1) \leq 2\kappa(\infty, \gamma_0).$$

2) Допустимая в $\overline{\mathbb{C}}$ *деформация* γ_0 *в* γ_1 *существует тогда и только тогда, когда* $W(\gamma_0) = W(\gamma_1) \pmod 2$.

Доказательство аналогично доказательству Морса и Хейнса. Отличие состоит лишь в том, что если деформация «перекидывает» кривую через точку $z = \infty$, то индекс Уитни терпит скачок, равный ± 2.

При этом мы пользуемся тем, что вдавливания γ или γ^- представляют собой частный случай деформаций.

В следующей теореме 1.2.2 используются такие обозначения.

Пусть Ω — ν-связная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с положительно ориентированной границей

$$\partial\Omega = \cup_{j=1}^{\nu} L_j,$$

где L_j — замкнутые жордановы кривые.

Предположим, что отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{C}}$ является внутренним в Ω и сохраняющим ориентацию, непрерывным в сферической метрике в $\overline{\Omega}$, отображение $f \mid L_j$ определяет квази л. п. кривую γ_j, $\gamma_j \subset \overline{\mathbb{C}}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Через T обозначим все те точки $\partial\Omega$, которым соответствуют точки одной из γ_j с ненулевым индексом, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Через $n(a, f, \overline{\Omega})$ обозначим число a-точек $f(z)$ в $\overline{\Omega}$ с учетом кратности, т. е.

$$n(a, f, \overline{\Omega}) = \sum_{z \in f^{-1}(a)} p(z, f, \overline{\Omega}).$$

Напомним, что

$$V(f,\overline{\Omega}) = \sum_{z\in\overline{\Omega}}[p(z,f,\overline{\Omega}) - 1].$$

Определим еще число $p^*(z,f,\overline{\Omega})$ следующим образом.

Если $z \in \overline{\Omega} \setminus T$, то положим

$$p^*(z,f,\overline{\Omega}) = p(z,f,\overline{\Omega}).$$

Пусть

$$z \in T \cap L_j, \quad n(z;\gamma_j) > 0,$$

$U(z,\varepsilon)$ — окрестность точки z с некоторым $\varepsilon > 0$. В силу известных результатов о продолжении гомеоморфизмов дуг и требования б) в определении квази л. п. кривой существует сохраняющее ориентацию и гомеоморфное в $U(z,\varepsilon)$ отображение $\varphi : U(z,\varepsilon) \to \overline{\mathbb{C}}$, такое, что

$$f(\zeta) \equiv \tilde{f}(\zeta) = [\varphi(\zeta)]^{n(z;\gamma_j)+1} + \mathrm{const} \quad \text{\textit{для всех}} \quad \zeta \in L_j \cap U(z,\varepsilon).$$

Полагаем, что

$$p^*(z,f,\overline{\Omega}) = p(z,f^*,\overline{\Omega} \cup U(z,\varepsilon)),$$

где

$$f^*(\zeta) = \{f(\zeta), \zeta \in \overline{\Omega}; \quad \tilde{f}(\zeta), \zeta \in U(z,\varepsilon) \setminus \Omega\}.$$

Тогда, очевидно,

$$p^*(z,f,\overline{\Omega}) \geq p(z,f,\overline{\Omega}).$$

По определению,

$$n^*(a,f,\overline{\Omega}) = \sum_{z\in f^{-1}(a)} p^*(z,f,\overline{\Omega}),$$

$$V^*(f,\overline{\Omega}) = \sum_{z\in\overline{\Omega}}[p^*(z,f,\overline{\Omega}) - 1].$$

Отметим, что если $z \in L_j$ и $n(z;\gamma_j) = 0$ при построении $\tilde{f}$, то имеет место равенство $p^*(z,f,\overline{\Omega}) = p(z,f,\overline{\Omega})$.

Теорема 1.2.2 *Для отображения f справедливы соотношения*

$$V^*(f,\overline{\Omega}) - 2n^*(\infty,f,\overline{\Omega}) = \nu - 2 - \sum_{j=1}^{\nu} W(\gamma_j^-), \tag{1.19}$$

$$n^*(\infty,f,\overline{\Omega}) - n^*(a,f,\overline{\Omega}) = \sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{ind}_a\gamma_j^-, \tag{1.20}$$

где a — произвольная точка из $\overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{j=1}^{\nu}|\gamma_j|$,

$$W(\gamma^-) = -W(\gamma) - K(\gamma) + 2K(\infty,\gamma) + 2\kappa(\infty,\gamma), \quad \gamma = \gamma_j, \tag{1.21}$$

$$\mathrm{ind}_a\gamma^- = -\mathrm{ind}_a\gamma + K(\infty,\gamma) + \kappa(\infty,\gamma), \quad \gamma = \gamma_j. \tag{1.22}$$

Обратно, если $V \geq 0$, $n \geq 0$, $\nu \geq 1$, W — заданные целые числа, причем

$$V - 2n = \nu - 2 + W,$$

то существуют ν-связная жорданова область Ω с границей

$$L_1 \cup \cdots \cup L_\nu$$

и функция $f(z)$, мероморфная в Ω и непрерывная в сферической метрике в $\overline{\Omega}$, такие, что сужение $f \mid L_j$ определяет квази л. п. кривую γ_j и выполняются равенства

$$V^*(f,\overline{\Omega}) = V, \quad n^*(\infty,f,\overline{\Omega}) = n, \quad \sum_{j=1}^{\nu} W(\gamma_j^-) = -W.$$

Доказательство. По лемме 1.2.2 существует такое внутреннее продолжение f^* отображения f на область $\Omega^* \supset \overline{\Omega}$, что

$p^*(z, f, \overline{\Omega}) = p(z, f^*, \overline{\Omega}^*)$ для всех точек $z \in \overline{\Omega}$;

$f^*(z) \neq \infty$ и $f^*(z) \neq a$ при $z \in \overline{\Omega}^* \setminus \overline{\Omega}$, $p(z, f^*, \overline{\Omega}^*) = 1$ для всех $z \in \overline{\Omega}^* \setminus \overline{\Omega}$.

Граничные компоненты Ω^* получаются вдавливанием L_j^-, что порождает с помощью отображения f^* вдавливания γ_j^-, т. е. можно считать, что

$$\partial\Omega^* = \cup_{j=1}^{\nu} L_j^*,$$

отображение $f^* \mid L_j^*$ определяет кривую γ_j^*, причем γ_j^{*-} получена конечным числом вдавливаний γ_j^-, что сохраняет значения индексов:

$$W(\gamma_j^-) = W(\gamma_j^{*-}), \quad \mathrm{ind}_a\gamma_j^- = \mathrm{ind}_a\gamma_j^{*-}.$$

Уменьшив, если нужно, область Ω^*, можно считать, что γ_j^* — ограниченные л. п. кривые. Но тогда

$$W(\gamma_j^{*-}) = -W(\gamma_j^*), \quad \mathrm{ind}_a\gamma_j^{*-} = -\mathrm{ind}_a\gamma_j^{*-},$$

соотношения для f^* получаются из формул Морса [69], что дает (1.19) и (1.20) с учетом связей между f и f^*.

Равенства (1.22) и (1.21) вытекают непосредственно из (1.17) и (1.18).

Для обоснования второй части теоремы построим нужное внутреннее отображение f области Ω, изображенной на рис. 1.4.

Заметим, что

$$\Omega \subset \cup_k \Pi_k \cup \mathbb{D}_{1+\delta},$$

$$\mathbb{D}_{1+\delta} = \{z \,:\, |z| < 1 + \delta\},$$

$$\Pi_k = \{re^{it} \,:\, 1 + \delta \leq r < 1 + 3\delta, |t - t_k| < \varepsilon_k\},$$

$$a_k = (1 + 2\delta)e^{it_k}.$$

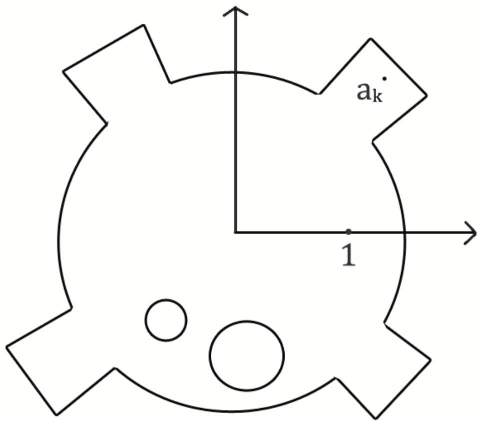

Рис. 1.4: Пропеллер

Положим $f_1(z) = z$ при $|z| \leq 1$. По лемме 1.2.1 построим продолжение f_2 отображения f_1 на область $\mathbb{D}_{1+\delta}$ так, что отображение f_2 локально гомеоморфно в $\overline{\mathbb{D}}_{1+\delta} \setminus \{1\}$ и

$$p(1, f_2, \overline{\mathbb{D}}_{1+\delta}) = V + 1.$$

Если $n = 0$, то отростки Π_k отбросим.

Если $n \geq 1$, то к $\mathbb{D}_{1+\delta}$ присоединим n отростков Π_k, при этом $\varepsilon_k > 0$ выберем так, чтобы отображение

$$f_2 \mid l_k, \quad \text{где} \quad l_k = \{(1+\delta)e^{it} \,:\, |t - t_k| < \varepsilon_k\},$$

было гомеоморфным.

Снова воспользуемся известными фактами о продолжении гомеоморфизмов дуг: существует продолжение $\tilde{f}_{2k}$ отображения $f_2 \mid l_k$, такое, что $\tilde{f}_{2k} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, $\tilde{f}_{2k}(a_k) = \infty$.

Тогда определим

$$f_3(z) = \{f_2(z), z \in \overline{\mathbb{D}}_{1+\delta};\ \tilde{f}_{2k}(z), z \in \overline{\Pi}_k\}.$$

Если $\nu > 1$, то из $\Omega \setminus \{1, a_k\}$ выбрасываем $(\nu - 1)$ малых кружков $\mathbb{D}_j$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$, таких, что $f_3 \mid \overline{\mathbb{D}}_j$ — гомеоморфное отображение, $\Omega^* = \Omega \setminus \cup \overline{\mathbb{D}}_j$ — ν-связная область.

По теореме 1.2.2 имеем

$$V - 2n = \nu - 2 - \sum W(\gamma_j^-),$$

т. е.

$$W = -\sum W(\gamma_j^-),$$

так как

$$V = V^*(f_3, \overline{\Omega}^*),$$

$0 \le j \le \nu$, $n = n^*(\infty, f_3, \overline{\Omega}^*)$ по построению.

Переход от f_3 к мероморфной функции возможен в силу теоремы С. Стоилова об униформизации.

Теорема 1.2.2 доказана.

Следствие 1.2.1 *Если в условиях теоремы 1.2.2 дополнительно предположить, что $f(\partial\Omega) \subset \mathbb{C}$, то*

$$V(f, \overline{\Omega}) \le 2n(\infty, f, \overline{\Omega}) + \nu - 2 - \sum_{j=1}^{\nu} W(\gamma_j^-). \tag{1.23}$$

Действительно,

$$V^*(f, \overline{\Omega}) \ge V(f, \overline{\Omega}),$$

и

$$n^*(\infty, f, \overline{\Omega}) = n(\infty, f, \overline{\Omega})$$

в силу условия $f(\partial\Omega) \subset \mathbb{C}$.

Следствие 1.2.2 *Если для двух отображений $f_j : \Omega_j \to \overline{\mathbb{C}}$, $j = 1, 2$, граничные значения определяют одну и ту же систему* *квази л. п. кривых, то*

$$V^*(f_1, \overline{\Omega}_1) = V^*(f_2, \overline{\Omega}_2)\ (\mathrm{mod} 2).$$

Пример. Рассмотрим отображения $g : \mathbb{D} \to \Omega$, $z \mapsto f(z) = e^{g(z)}$, Ω — область, изображенная на рис. 1.5, g — однолистное конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω, $g(1) = \infty$.

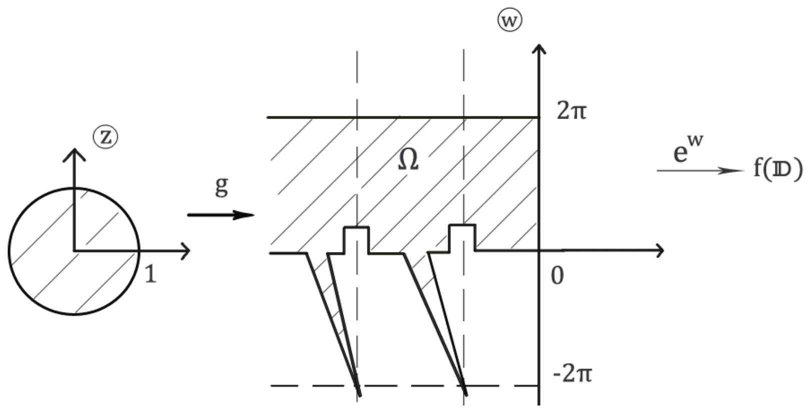

Рис. 1.5: Контрпример

Область Ω состоит из повторяющихся фрагментов. Ясно, что e^w и $e^{w/2}$ не более, чем двулистны в $\overline{\Omega}$, причем

$$p(e^w, \overline{\Omega}) = p(e^{w/2}, \overline{\Omega}) = 2,$$

но $e^{w/3}$ однолистна в области Ω.

По теореме Каратеодори о граничном соответствии [47] функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$. Ясно, что сужение $f \mid \partial\mathbb{D}$ определяет некоторую квази л. п. кривую γ. По построению,

$$n(a; \gamma) = \{0, a \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\};\ 2, a = 1\}.$$

Имеем также $p(1, f, \overline{\mathbb{D}}) = 2$, но $p^*(1, f, \overline{\mathbb{D}}) = 3$.

Пример показывает, что в (1.23) возможен знак строгого неравенства.

Следствие 1.2.3 *Если в условиях теоремы 1.2.2 дополнительно предположить, что γ_j — л. п. кривые в $\overline{\mathbb{C}}$, то*

$$V(f,\overline{\Omega}) - 2n(\infty, f, \overline{\Omega}) = \nu - 2 - \sum_{j=1}^{\nu} W(\gamma_j^-).$$

1.2.3 К задаче Пикара-Лёвнера о построении римановой поверхности по заданной границе

Теорема 1.2.1 дает полное решение одной проблемы о специальном вложении заданной кусочно-гладкой кривой γ в компактную риманову поверхность $R(\gamma)$ рода $\varrho \geq 0$. Запись $R = R(\gamma)$ предполагает, что положительная ориентация ∂R индуцирует заданную ориентацию γ.

Подобная проблема возникает при исследовании обратных краевых задач на римановых поверхностях и описана в статьях Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова [46] (1956 год) и Л. А. Аксентьева [31] (1964 год). Отметим, что для гладкой в смысле Ляпунова кривой γ с трансверсальными самопересечениями вопрос о построении ограниченной римановой поверхности $R(\gamma)$ исследовался К. Й. Титусом [163] (1961 год). Как указывает Титус, этой задачей интересовались Э. Пикар [157] и К. Лёвнер. Исследования Титуса были продолжены М. Л. Марксом [149] , Г. К. Френсисом [129], Х. Леви [145] и другими математиками. Название «задача Пикара-Лёвнера» взято нами из статьи Френсиса [129].

Задача построения $R(\gamma)$ по γ является практически важной и встречается для кривых частного вида во многих задачах механики сплошных сред.

Мы ограничимся здесь этими отрывочными сведениями. Подробную историю проблемы и дальнейшие результаты можно найти в монографии С. Р. Насырова [71], изданной в 2008 году.

Замечание 1.2.2 *Теорема 1.2.1 определяет риманову поверхность (р. п.) $R = R(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)$ как аналитический образ при отображении области Ω рациональной функцией $R(z)$. Справедливо более общее утверждение, доказанное нами в [29], теорема 1, в терминах теории римановых поверхностей. Не приводя здесь этого утверждения, остановимся на постановке одной задачи и ее решении для специального класса кривых.*

Пусть $\varrho = \varrho(R)$ — род, $n = n(\infty, R)$ — число листов над точкой $z = \infty$, $V = V(R)$ — сумма кратностей точек ветвления р. п. R. Поставим следующую задачу:

по заданной системе кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$ определить область Υ допустимых значений параметров

$$(\varrho, n, V) \in \mathbb{R}^3,$$

такую, что для любой р. п. $R = R(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)$ имеем

$$(\varrho(R), n(\infty, R), V(R)) \in \Upsilon,$$

и обратно, если $(\varrho_0, n_0, V_0) \in \Upsilon$, то существует р. п.

$$R = R(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu),$$

причем

$$\varrho(R) = \varrho_0, \quad n(\infty, R) = n_0, \quad V(R) = V_0.$$

Дадим эффективное решение этой задачи для одной кривой γ, принадлежащей специальному подклассу л. п. кривых.

Определение. *Кривую γ назовем звездообразной порядка m, если γ задана уравнением вида*

$$z(t) = z_0 + |z(t) - z_0| \exp[i\theta(t)], \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

где $|z(t) - z_0|$, $\theta(t)$ — непрерывные функции с вещественными значениями, $0 < |z(t) - z_0| < \infty$, $\theta(t)$ монотонно возрастает от $\theta(0)$ до $\theta(2\pi) = \theta(0) + 2\pi m$, где m — натуральное число.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2.5 *Пусть γ — кривая, звездообразная порядка $m \ge 1$. Риманова поверхность $R = R(\gamma)$ с заданными характеристиками $V \ge 0$, $\varrho \ge 0$, $n(\infty) \ge 0$ существует тогда и только тогда, когда*

$$V = 2(n(\infty) + \varrho) - 1 + m, \tag{1.24}$$

за исключением случая $m = 1$, $n(\infty) = 0$, $V = 2\varrho > 0$.

Доказательство. Пусть ϱ, $n(\infty)$, V — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие (1.24), и случай $m = 1$, $n(\infty) = 0$, $V = 2\varrho > 0$ исключен.

Кривую γ можно представить (вообще говоря, неединственным образом) в виде произведения $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ жордановых петель $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ с точками стыка $a_1, \dots, a_{m-1}$.

Пусть $R(\alpha_j)$ — однолистная область, ограниченная петлей α_j, $j = 1, \dots, m$. Пусть $a \in \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ — точка стыка петель α_k и α_j, $k \ne j$.

Разрежем $R(\alpha_k)$ и $R(\alpha_j)$ вдоль некоторой дуги

$$\alpha \subset R(\alpha_k) \cap R(\alpha_j),$$

исходящей из точки a. Склеив противоположные берега разрезов $R(\alpha_k) \setminus |\alpha|$ и $R(\alpha_j) \setminus |\alpha|$, получим р. п. $R(\alpha_k\alpha_j)$ с одной точкой ветвления. Проделав эту операцию с каждой из $m - 1$ точек стыка петель $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, получим односвязную конечную р.п. $R(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m) = R_1(\gamma)$, для которой

$$V(R_1) = m - 1, \quad n(\infty, R_1) = 0, \quad \varrho(R_1) = 0.$$

Добавив $n(\infty)$ пар новых точек ветвления, прикрепим к $R_1(\gamma)$ в точности $n(\infty)$ полных листов плоскости. Полученная р. п. $R_2(\gamma)$ имеет следующие характеристики:

$$\varrho(R_2) = 0, \quad n(\infty, R_2) = n(\infty), \quad V(R_2) = 2n(\infty) + m - 1.$$

Поверхность $R_2(\gamma)$ является искомой р. п. в случае $\varrho = 0$.

Если же $\varrho \geq 1$ и исключен случай

$$m = 1, \quad n(\infty) = 0, \quad V = 2\varrho > 0,$$

то $m + n(\infty) \geq 2$, поэтому $V(R_2) = 2n(\infty) + m - 1 \geq 1$. Следовательно, над некоторой областью лежат по крайней мере два листа $R_2(\gamma)$, и мы можем ввести новые ϱ пар точек ветвления. В результате приходим к р. п. $R_3 = R_3(\gamma)$, для которой

$$V(R_3) = V(R_2) + 2\varrho = 2(n(\infty) + \varrho) - 1 + m,$$

что и нужно было доказать.

Докажем обратное. Пусть $R(\gamma)$ — некоторая р. п. над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная γ. Из формул (1) и (2) статьи [28] следует, что

$$V - 2n(\infty) - 2\varrho = -1 + W(\gamma) - 2\,\mathrm{ind}_\infty\gamma.$$

Последнее соотношение равносильно (1.24), так как $W(\gamma) = m$, $\mathrm{ind}_\infty\gamma = 0$.

Если $m = 1, n(\infty) = 0$, то γ — жорданова кривая. Из принципа аргумента вытекает тогда, что $R(\gamma)$ является односвязной областью, т. е. $V = 2\varrho = 0$. Таким образом, случай $m = 1$, $n(\infty) = 0$, $V = 2\varrho > 0$ действительно нужно исключить.

Предложение 1.2.5 доказано.

1.3 Применения граничного вращения и кривых Радона

Ряд достаточных условий однолистности и p-листности для мероморфной в области Ω функции $f(z)$ выражается через простые характеристики угла касательной к $f(\partial\Omega)$ в предположении, что $f(\partial\Omega)$ — кусочно-гладкие кривые. Наиболее сильным результатом в этом направлении является следующее утверждение.

Теорема Т. Умедзавы [165]. *Пусть Ω — односвязная область в C, ограниченная простой аналитической кривой; $f(z)$ аналитична в $\overline{\Omega}$, $f'(z) \neq 0$ на границе $\partial\Omega$,*

$$\int_{\partial\Omega} d\arg df(z) = 2\pi k > 0, \qquad k = W[f(\partial\Omega)]. \tag{1.25}$$

Если для любых μ взаимно непересекающихся дуг $C_1, \ldots, C_\mu$ из $\partial\Omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu} \int_{C_j} d\arg df(z) > -\mu\pi, \tag{1.26}$$

то $f(z)$ не более чем p-листна в Ω при $p = (k + \mu - 1)$.

Из условия (1.25) следует, что сумма кратностей критических точек $f(z)$ в Ω равна $n(0, f', \Omega) = k - 1$.

Рассмотрим общий случай [7], когда область Ω многосвязна, функция $f(z)$ имеет конечное число полюсов и критических точек, выполнены требования вида (1.25) и (1.26) на каждой из компонент границы области. Применимость геометрических построений Т. Умедзавы в общем случае неясна. Но удается передоказать теорему Т. Умедзавы, сведя ее к оценкам индекса Пуанкаре $\mathrm{ind}_a\gamma$, $\gamma = f(\partial\Omega)$, в зависимости от индекса Уитни $k = W(\gamma)$ и характеристики Т. Умедзавы $\mu = \mu(\gamma)$ и распространить такой подход на случай многосвязных областей.

Две других особенности следующих ниже теорем 1.3.1 и 1.3.2 — *ослабление условий гладкости граничных значений и переход к внутренним отображениям — представляются существенными, но практически не влияют на схему доказательства.*

Введем некоторые **определения.**

Пусть сначала γ — гладкая ориентированная замкнутая кривая, определенная отображением $[0, 2\pi] \ni t \mapsto z(t)$. Функцию $z(t)$ будем называть также уравнением кривой γ. Считаем, что $z(t)$ периодически продолжена на всю числовую ось, $z'(t)$ непрерывна и нигде не обращается в нуль, $z(0) = z(2\pi)$, $z'(0) = z'(2\pi)$.

Через $\varphi(t)$ и $\omega(t) = \omega(t; a)$, если точка a не лежит на γ, обозначим некоторые однозначные непрерывные функции, определяемые из соотношений $\omega(t) = \mathrm{Arg}\,[z(t) - a]$ и $\varphi(t) = \mathrm{Arg}\, z'(t)$. Известно, что

$$2\pi\,\mathrm{ind}_a\gamma = \omega(2\pi) - \omega(0) = 2\pi n \quad \text{и} \quad \varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2\pi W(\gamma) = 2\pi k.$$

Пусть k — целое число, отличное от нуля. *Непрерывную ориентированную замкнутую кривую γ (т. е. отображение отрезка $[0, 2\pi]$ при помощи непрерывной функции $z(t)$, $z(0) = z(2\pi)$) назовем выпуклой типа k и запишем $\gamma \in (k; 0)$, если существует последовательность (γ_j) таких гладких ориентированных замкнутых кривых с уравнениями $z = z_j(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, что для любого j функция $\varphi_j(t)$ является монотонной и выполнены условия*

$$\varphi_j(2\pi) - \varphi_j(0) = 2\pi k \quad \text{\textit{и}} \quad \lim_{j\to\infty} \max_t |z(t) - z_j(t)| = 0.$$

Пусть k и μ — целые числа, μ отлично от нуля. *Гладкую ориентированную кривую назовем почти выпуклой типа* $(k;\mu)$ *и запишем* $\gamma \in (k;\mu)$, *если* $W(\gamma) = k$ *и среди любых* $|\mu|$ *интервалов* $\Delta_1, \ldots, \Delta_{|\mu|}$ *вида*

$$\Delta_j = (t_{2j-1}, t_{2j}), \quad t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_{2|\mu|}, \quad 0 < t_{2|\mu|} - t_1 \le 2\pi,$$

найдется хотя бы один интервал Δ_j, *такой, что*

$$\varphi(t_{2j}) - \varphi(t_{2j-1}) \ge -\pi \quad \textit{при} \quad \mu > 0, \tag{1.27}$$

$$\varphi(t_{2j}) - \varphi(t_{2j-1}) \le \pi \quad \textit{при} \quad \mu < 0. \tag{1.28}$$

Непрерывную ориентированную замкнутую кривую γ *с уравнением* $z = z(t)$ *назовем почти выпуклой типа* $(k;\mu)$ *и запишем* $\gamma \in (k;\mu)$, *если существует последовательность* (γ_j) *таких гладких кривых* $\gamma_j \in (k;\mu)$ *с уравнениями* $z = z_j(t)$, *что*

$$\lim_{j\to\infty} \max_t |z(t) - z_j(t)| = 0.$$

Замечание 1.3.1 *Достаточным условием справедливости соотношения (1.27) или (1.28) (точнее, принадлежности* $\gamma \in (k;\mu)$*) при* $\mu > 0$ *или* $\mu < 0$ *является неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\mu} [\varphi(t_{2j}) - \varphi(t_{2j-1})] \ge -\pi\mu, \quad \mu > 0, \tag{1.29}$$

или

$$\sum_{j=1}^{|\mu|} [\varphi(t_{2j}) - \varphi(t_{2j-1})] \le \pi|\mu|, \quad \mu < 0, \tag{1.30}$$

соответственно для любой системы взаимно непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{|\mu|}$, $0 < t_{2|\mu|} - t_1 \le 2\pi$. *Требование*

Т. Умедзавы (1.25) представляет собой неравенство вида (1.29) для $\gamma = f(\partial\Omega)$.

Пусть Ω — ν-связная область с положительно ориентированной границей $\partial\Omega = \cup_{j=1}^{\nu} L_j$, где L_j — замкнутая жорданова кривая в $\overline{C}$. Если $f : \partial\Omega \to C$ непрерывно, то через $\gamma_j = f(L_j)$ будем обозначать непрерывную ориентированную замкнутую кривую, определяемую отображением $w = f \circ z_j$, где $z_j(t)$ — уравнение кривой L_j.

Для кривой $\gamma \in (k;\mu)$ определим характеристики $q^+(\gamma)$ равенствами

$$q^+(\gamma) = k + \mu - 1, \quad \text{если } \mu > 0, \quad k \ \text{— любое целое;}$$

$$q^+(\gamma) = k, \qquad \text{если } \mu = 0, \quad k > 0;$$

$$q^+(\gamma) = |k| - 1, \quad \text{если } \mu = 0, \quad k < 0,$$

и характеристики $q^-(\gamma)$ равенствами

$$q^-(\gamma) = k + \mu + 1, \quad \text{если } \mu < 0, \quad k \ \text{— любое целое;}$$

$$q^-(\gamma) = k, \qquad \text{если } \mu = 0, \quad k < 0;$$

$$q^-(\gamma) = -k + 1, \quad \text{если } \mu = 0, \quad k > 0.$$

Теорема 1.3.1 *Пусть отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{C}}$ является внутренним в Ω, сохраняет ориентацию, непрерывно в $\overline{\Omega}$ в сферической метрике, $f(\partial\Omega) \subset \mathbb{C}$. Пусть для каждого $j = 1,\ldots,\nu$ имеем условие*

$$\gamma_j = f(L_j) \in (k_j;\mu_j)$$

с заданными априори числами k_j и μ_j, $j = 1,\ldots,\nu$.

а) Если все $\mu_j \geq 0$, то для любой точки $a \notin f(\partial\Omega)$ имеем

оценку
$$n(a,f,\Omega) \le n(\infty,f,\Omega) + \sum_{j=1}^{\nu} q^+(\gamma_j). \qquad (1.31)$$

б) Если все $\mu_j \le 0$, то для любой точки $a \notin f(\partial\Omega)$ имеем оценку
$$n(a,f,\Omega) \ge n(\infty,f,\Omega) + \sum_{j=1}^{\nu} q^-(\gamma_j). \qquad (1.32)$$

Доказательство. На основании принципа аргумента (см., например, [69], теорема 20.2, с.94) справедливо равенство
$$n(a,f,\Omega) = n(\infty,f,\Omega) + \sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{ind}_a\gamma_j.$$

Поскольку $\mathrm{ind}_a\gamma$ для фиксированной точки a не меняется при малых деформациях γ, то для доказательства теоремы достаточно обосновать неравенство $\mathrm{ind}_a\gamma_j \le q^+(\gamma_j)$ при $\mu_j \ge 0$ и неравенство $\mathrm{ind}_a\gamma_j \ge q^-(\gamma_j)$ при $\mu_j \le 0$ для гладких кривых.

Оценки индекса для гладкой кривой, имеющие и самостоятельный интерес, выделим в виде отдельных утверждений.

Лемма 1.3.1 *Пусть γ — гладкая ориентированная замкнутая кривая с уравнением $z = z(t)$, $z : [0, 2\pi] \to C$. Пусть a — точка вне γ,*
$$n = \mathrm{ind}_a\gamma, \quad k = W(\gamma).$$

Если $n - k > 0$, то существует система из $\mu = n - k$ взаимно непересекающихся интервалов (t_{2j-1}, t_{2j}), $1 \le j \le \mu$, где
$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{2\mu-1} < t_{2\mu}, \quad 0 < t_{2\mu} - t_1 \le 2\pi,$$

таких, что
$$\Delta\varphi_j = \varphi(t_{2j}) - \varphi(t_{2j-1}) < -\pi$$

для всех $j = 1, \ldots, \mu$.

Если же $n - k < 0$, *то аналогичное утверждение справедливо для* $\mu = |n - k|$ *интервалов с неравенствами* $\Delta\varphi_j > \pi$, $j = 1, \ldots, \mu$.

Доказательство леммы 1.3.1. Обозначим

$$r(t) = |z(t) - a| \quad \text{и} \quad \psi = \varphi - \omega,$$

где φ и ω — функции, введенные при определении k и n для гладкой кривой.

Продифференцировав по t тождество

$$z(t) = a + r(t)\exp[i\omega(t)],$$

получим

$$\exp[i\psi(t)] = \frac{r'(t)}{\varrho(t)} + i\frac{r(t)\omega'(t)}{\varrho(t)},\ \varrho(t) = |z'(t)| \neq 0,\ |t| < \infty. \quad (1.33)$$

Пусть $\mu = n - k > 0$. Тогда

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = 2\pi[W(\gamma) - \mathrm{ind}_a\gamma] = -2\pi\mu.$$

Кривая γ_ψ, определяемая отображением

$$w\,:\,\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}, \quad \partial\mathbb{D} = \{\zeta\,:\,|\zeta| = 1\},$$

переводящим точку e^{it} в точку $e^{i\psi(t)}$, обходит окружность $|w| = 1$ в точности $\mu = n - k$ раз в отрицательном направлении.

Геометрически очевидно и нетрудно обосновать существование $n-k$ различных дуг γ_ψ^j кривой γ_ψ, таких, что γ_ψ^j определяется отображением

$$e^{it} \mapsto \exp[i\psi(t)] \quad \text{при} \quad t \in \Delta_j,$$

причем γ_ψ^j лежит в нижней полуплоскости, имеет началом точку $w = 1$ и концом — точку $w = -1$, $j = 1, \ldots, \mu$.

Другими словами, существуют такие точки t_j, $1 \le j \le 2\mu$, что

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{2\mu}, \quad 0 < t_{2\mu} - t_1 \le 2\pi,$$

$$\psi(t_{2j}) - \psi(t_{2j-1}) = -\pi, \quad \sin\psi(t_{2j-1}) = \sin\psi(t_{2j}) = 0, \tag{1.34}$$

$$\sin\psi(t) \le 0, \qquad \forall t \in \Delta_j, \tag{1.35}$$

для всех $j = 1, \ldots, \mu$; $\Delta_j = [t_{2j-1}, t_{2j}]$.

Из (1.33) и (1.35) следует

$$\sin\psi(t) = r(t)\omega'(t)/\varrho(t) \le 0,$$

т. е. $\omega'(t) \le 0$ на Δ_j. Но $\omega'(t) \not\equiv 0$ на Δ_j, так как иначе равенства (1.34) и тождество $\sin\psi(t) \equiv 0$ на Δ_j противоречат непрерывности $\psi(t)$. Следовательно, $\Delta\omega_j = \omega(t_{2j}) - \omega(t_{2j-1}) < 0$ и поэтому

$$\Delta\varphi_j = \psi(t_{2j}) - \psi(t_{2j-1}) + \Delta\omega_j = -\pi + \Delta\omega_j < -\pi,$$

что и требовалось.

Второй случай леммы, когда $\mu = n - k < 0$, сводится к разобранному выше сменой ориентации γ на противоположную.

Замечание 1.3.2 *Лемма 1.3.1 представляет существенное усиление соответствующего результата Т. Умедзавы [165].*

Действительно, Т. Умедзава существенно использовал то, что γ определяется граничными значениями аналитической в односвязной области $\overline{\Omega}$ функции $f(z)$, т. е. $\gamma = f(\partial\Omega)$. Таким образом, на γ наложен ряд топологических ограничений, не требуемых в лемме 1.3.1. Например, если $\gamma = f(\partial\Omega)$ и $f(z)$ аналитична в $\overline{\Omega}$, то по принципу аргумента $n = \mathrm{ind}_a\gamma \ge 0$ для любой точки $a \notin |\gamma|$, а в лемме 1.3.1 нет таких априорных ограничений на $\mathrm{ind}_a\gamma$.

Следствие 1.3.1 *Если* $\gamma \in (k;\mu)$, *то для любой точки* $a \notin |\gamma|$

$$\mathrm{ind}_a\gamma \leq k + \mu - 1, \qquad \textit{если} \quad \mu > 0, \tag{1.36}$$

$$\mathrm{ind}_a\gamma \geq k + \mu + 1, \qquad \textit{если} \quad \mu < 0. \tag{1.37}$$

Действительно, в силу введенных определений мы можем ограничиться рассмотрением лишь гладкой кривой $\gamma \in (k;\mu)$, а тогда можно использовать лемму 1.3.1.

Если для гладкой кривой $\gamma \in (k;\mu)$ оценки (1.36) или (1.37) неверны, то с учетом целочисленности k, μ, $n = \mathrm{ind}_a\gamma$ получим

$$n - k \geq \mu \quad \text{при} \quad \mu > 0$$

или

$$n - k \leq \mu \quad \text{при} \quad \mu < 0.$$

По лемме 1.3.1 существуют тогда $|\mu|$ непересекающихся интервалов

$$\Delta_j = (t_{2j-1}, t_{2j}) \quad \text{с условием} \quad \Delta\varphi_j < -\pi \quad \text{при} \quad \mu > 0$$

(соответственно, с условием $\Delta\varphi_j > \pi$ при $\mu < 0$) для всех $j = 1, \ldots, |\mu|$. А это противоречит условию $\gamma \in (k;\mu)$ (см. требования (1.27) и (1.28) определения класса $(k;\mu)$).

Можно показать на примерах, что оценки (1.36) и (1.37) точны, т. е. не могут быть усилены без дополнительных ограничений на кривую γ.

Лемма 1.3.2 *Пусть* $\gamma \in (k;0)$, $k > 0$. *Тогда для любой точки* a, *не лежащей на* γ,

$$-k + 1 \leq \mathrm{ind}_a\gamma \leq k, \tag{1.38}$$

$$\max_a \mathrm{ind}_a\gamma - \min_a \mathrm{ind}_a\gamma \leq k. \tag{1.39}$$

Оценки (1.38) и (1.39) точны.

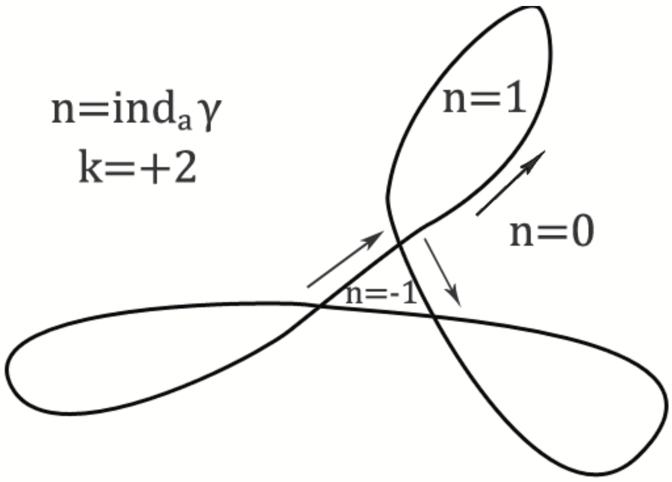

Рис. 1.6: Экстремальная кривая

Доказательство леммы 1.3.2. На основании наших определений выпуклых и почти выпуклых кривых имеем

$$\gamma \in (k;0) \Rightarrow \gamma \in (k;1), \qquad \gamma \in (k;-2k),$$

поэтому оценки (1.38) вытекают из (1.36) и (1.37) при $\mu = 1$ и $\mu = -2k$.

Докажем неравенства (1.39). Для этого достаточно рассмотреть лишь случай гладкой кривой $\gamma \in (k;0)$.

Пусть a и b — две различные точки вне γ, причем

$$n_1 = \mathrm{ind}_a\gamma = \max_w \mathrm{ind}_w\gamma, \quad n_2 = \mathrm{ind}_b\gamma = \min_w \mathrm{ind}_w\gamma.$$

Без ограничения общности можно считать, что a и b вещественны, $a < b$ (этого можно добиться аффинным преобразованием плоскости).

Изменение значения $\mathrm{ind}_w\gamma$, когда w пробегает некоторый путь, связано с пересечениями этого пути с γ (см., например, [69]). Так как $\mathrm{ind}_w\gamma = 0$ при $|w|$ достаточно большом, то $n_2 \le 0 \le n_1$, и кривая γ пересекает по меньшей мере

n_1 раз интервал $(-\infty, a)$,

$n_1 - n_2 = n_1 + |n_2|$ раз — интервал (a, b),

$|n_2|$ раз — интервал (b, ∞).

Итак, общее число точек пересечения γ с вещественной осью равно

$$N \ge 2(n_1 + |n_2|).$$

Оценим теперь число N сверху. Пусть $z = z(t)$, $0 \le t \le 2\pi$ — уравнение γ, $\varphi(t)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arg} z'(t)$. По условию, $\varphi(t)$ — монотонная возрастающая функция, такая, что

$$\varphi(2\pi + t_0) - \varphi(t_0) = 2\pi k > 0.$$

Выберем $t_0 \in [0, 2\pi]$ так, что

$$\varphi(t_0) = \arg(b - a) = 0 \pmod{2\pi}.$$

Поскольку $\varphi(t)$ непрерывна, то, очевидно, существуют точки

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{2k} = t_0 + 2\pi,$$

такие, что

$$\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \pi, \quad \varphi(t_j) = 0 \pmod{\pi}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, 2k$.

Каждая выпуклая дуга γ_j с уравнением

$$z = z(t), \quad t_{j-1} \le t \le t_j,$$

является выпуклой в направлении вещественной оси и, следовательно, может иметь не более одной общей точки с этой осью при $j = 1, 2. \dots, 2k$. Но тогда $N \le 2k$, поэтому

$$2(n_1 + |n_2|) \le N \le 2k,$$

т. е. $n_1 - n_2 \le k$, что равносильно доказываемому неравенству (1.39).

В точности оценок (1.38) и (1.39) можно убедиться на примерах функций

$$\exp(ikt), \quad \exp(ikt) - a\exp[-i(k-1)t], \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a \in (0, 1).$$

Завершим теперь доказательство теоремы 1.3.1.

Если $\gamma \in (k; \mu)$ для некоторого $\mu > 0$, то $\mathrm{ind}_a\gamma \le q^+(\gamma)$ в силу (1.36), если же $\mu < 0$, то $\mathrm{ind}_a\gamma \ge q^-(\gamma)$ в силу (1.37).

Если $\gamma \in (k; 0)$, то $\mathrm{ind}_a\gamma \le k$ при $k > 0$ на основании (1.38), если же $k < 0$, то $\mathrm{ind}_a\gamma \le |k| - 1$. Последнее следует из левого неравенства в (1.38), примененного при смене ориентации γ на противоположную. Аналогично получим оценки индекса снизу. Теорема 1.3.1 доказана.

Сформулируем некоторые утверждения для функций, мероморфных в круговых областях, непосредственно вытекающие из теоремы 1.3.1 и неравенства (1.39). Пусть $0 < r < R < \infty$, обозначим

$$\mathbb{D}^- = \{z : |z| > 1\}, \quad \mathbb{D}(r, R) = \{z : r < |z| < R\}$$

и

$$\Phi(z; f) = 1 + zf''(z)/f'(z).$$

Следствие 1.3.2 *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области $\mathbb{D}^-$, существует число $r_0 > 1$ такое, что $\mathbb{D}(1, r_0)$ не содержит полюсов $f(z)$ и нулей $f'(z)$.*

Если
$$\int_0^{2\pi} \Re\,\Phi(re^{i\theta}; f)\,d\theta = 2\pi k > 0$$
и
$$\Re\,\Phi(re^{i\theta}; f) \geq 0$$
при $1 < r < r_0$ *и любом* $\theta \in [0, 2\pi]$, *то для любой точки* $a \in \mathbb{C}$
$$-k \leq n(a, f, \mathbb{D}^-) - n(\infty, f, \mathbb{D}^-) \leq k - 1.$$

Если же
$$\int_0^{2\pi} \Re\,\Phi(re^{i\theta}; f)\,d\theta = 2\pi k < 0$$
и
$$\Re\,\Phi(re^{i\theta}; f) \leq 0$$
при $1 < r < r_0$ *и любом* $\theta \in [0, 2\pi]$, *то для любой точки* $a \in \mathbb{C}$
$$k - 1 \leq n(a, f, \mathbb{D}^-) - n(\infty, f, \mathbb{D}^-) \leq -k$$
В обоих случаях
$$\max_a n(a, f, \mathbb{D}^-) - \min_a n(a, f, \mathbb{D}^-) \leq |k|.$$
При выводе нужно учесть, что образ любой окружности
$$|z| = r \in (1, r_0)$$
при отображении f — кривая $\gamma_r \in (-k; 0)$, а теорема 1.3.1 применяется в области $\Omega = \{z : |z| > r\}$, $r \in (1, r_0)$.

Следствие 1.3.3 *Пусть функция* $f(z)$ *мероморфна в области* $\mathbb{D}(q, 1)$, *непрерывна в* $\overline{\mathbb{D}}(q, 1)$, *за исключением полюсов,* γ_r *— кривая с уравнением* $w = f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, r *— фиксированное число из* $[q, 1]$.

Если $\gamma_1 \in (k_1; \mu)$ *с некоторым* $\mu > 0$, $\gamma_q \in (k_q; 0)$ *с некото-*

рым $k_q > 0$, *то для числа листов* $f(z)$ *в* $\Omega = \mathbb{D}(q, 1)$ *справедлива оценка*

$$p(f, \Omega) \le n(\infty, f, \Omega) + k_1 + k_q + \mu - 2.$$

При выводе следствия 1.3.3 положим $\{\gamma_j\} = \{\gamma_1, \gamma_q^-\}$, т. е. в качестве кривой γ_2 примем кривую γ_q со сменой ориентации. Поэтому $k_2 = -k_q < 0$, и в оценках теоремы $q^+(\gamma_1) = k_1 + \mu - 1$, $q^+(\gamma_2) = k_q - 1$.

Следствие 1.3.4 *В условиях следствия 1.3.3 предположения относительно кривых* γ_1 *и* γ_q *заменим следующими:*

$$\gamma_r \in (k_r; \mu) \quad \textit{при} \quad r = 1 \quad \textit{и} \quad r = q.$$

Тогда справедливы утверждения:

если $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_q < 0$, *то*

$$p(f, \Omega) \le n(\infty, f, \Omega) + k_1 + k_q + \mu_1 - \mu_q - 2;$$

если же $\mu_1 < 0$ *и* $\mu_q > 0$, *то*

$$n(a, f, \Omega) \ge n(\infty, f, \Omega) + k_q - k_1 + \mu_q - \mu_1 + 2$$

для $a \in \mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{D}(q, 1)$.

Приводимые в следствиях 1.3.2 – 1.3.4 факты были известны ранее в некоторых частных случаях (см. [21], [47], [164], [165]).

Отметим один неожиданный случай. Если

$$n(\infty, f, \Omega) = 0, \quad k_1 = k_q = k > 0$$

(т. е. $f'(z) \ne 0$ *в* $\Omega = \mathbb{D}(q, 1)$*),* $\mu = 1$, *то следствие 1.3.3 дает оценку*

$$p(f, \Omega) \le 2k - 1$$

вместо ожидаемого $p(f,\Omega)\le k$.

Но полученная нами оценка $p(f,\Omega)\le 2k-1$ *точна даже при дополнительном предположении, что* $\gamma_1\in(k;0)$.

Действительно, функция

$$f(z)=z^k-\alpha^{2k-1}/z^k,\quad \alpha\in(0,1),$$

удовлетворяет перечисленным требованиям при

$$c\,\alpha<q<\alpha,\quad c^{2k-1}=1-1/k,$$

но принимает значение $w=0$ в точках $z_j\in\mathbb{D}(q,1)$, являющихся решениями уравнения $z_j^{2k-1}=\alpha^{2k-1}$, $j=1,\dots,2k-1$.

Предложение 1.3.1 *Пусть непрерывное отображение*

$$f\,:\,\overline{\Omega}\to\overline{C}$$

является внутренним по С. Стоилову в Ω *и*

$$\partial\Omega=\cup_{j=1}^{\nu}L_j.$$

Пусть для каждого $j=1,\dots,\nu$ *кривая* $\gamma_j=f(L_j)$ *является спрямляемой кривой Радона с полной вариацией угла касательной к* γ_j, *равной* $\varrho(\gamma_j)$.

Если n_j *— натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\varrho(\gamma_j)<2\pi(n_j+1)$$

для $j=1,\dots,\nu$, *то для любого значения* $a\notin f(\partial\Omega)$

$$|n(a,f,\Omega)-n(\infty,f,\Omega)|\le\sum_{j=1}^{\nu}n_j.$$

Доказательство. Непрерывную замкнутую кривую γ (см.

[76]) называют кривой Радона, если γ спрямляема и ее уравнение представимо в виде

$$w(s) = w(0) + \int_0^s \exp[i\varphi(\sigma)]d\sigma,$$

где s — дуговая абсцисса γ, $0 \le s \le l$, $\varphi(s)$ — вещественнозначная функция ограниченной вариации, причем для любой точки $s \in (0, l)$ левый и правый пределы $\varphi(s_-)$ и $\varphi(s_+)$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\varphi(s_+) - \varphi(s_-)| \le \pi, \quad [\varphi(s) - \varphi(s_-)][\varphi(s_+) - \varphi(s)] \ge 0.$$

Пусть $a \notin |\gamma|$, $\omega(s) = \omega(s; a)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arg}[w(s) - a]$, точка $z(l)$ не является угловой, т. е.

$$\varphi(0) = \varphi(0_+), \quad \varphi(l) = \varphi(l_-), \quad \varphi(0) = \varphi(l) \pmod{2\pi}.$$

Тогда, по определению,

$$\varrho(\gamma) = \int_0^l |d\varphi(s)|.$$

В теории потенциала известно неравенство Радона [76]

$$\int_0^l |d\omega(s)| \le \int_0^l |d\varphi(s)|,$$

откуда немедленно следует

$$2\pi|\operatorname{ind}_a \gamma| \le \varrho(\gamma).$$

Опять используем равенство

$$n(a, f, \Omega) = \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{ind}_a \gamma_j + n(\infty, f, \Omega).$$

Имеем: $|\mathrm{ind}_a \gamma_j| \leq \varrho(\gamma_j)/(2\pi) < n_j + 1$ для любого j. Отсюда в силу целочисленности индекса получим неравенство $\mathrm{ind}_a \gamma_j \leq n_j$, что и требовалось.

При $\nu = 2$ предложение 1.3.1 усиливает и обобщает результат С. Одзаки и Т. Умедзавы (см. [119], [164], теорема 3).

При $\nu = 1$ получаем следующий результат, который объединяет соответствующие утверждения В. Паатеро, С. Одзаки, Т. Умедзавы, В. П. Микки (см. [21], §5), установленные ими ранее другими методами.

Следствие 1.3.5 *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и имеет там конечное число полюсов и нулей производной. Если n — целое число и*

$$\overline{\lim}_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \left| \Re \left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right| d\theta < 2\pi(n+1), \quad z = re^{i\theta}, \quad (1.40)$$

то $f(z)$ не более чем p-листна в $\mathbb{D}$ при $p = n + n(\infty, f, \mathbb{D})$.

Доказательство. Пусть γ_r — кривая с уравнением

$$w = f(re^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \in (0, 1).$$

Тогда $\varrho(\gamma_r) < 2\pi(n+1)$ для всех $r \in (0, 1)$, достаточно близких к 1, в силу неравенства (1.40) и равенства

$$d\varphi = \Re[1 + zf''(z)/f'(z)]d\theta, \quad z = re^{i\theta},$$

где $\varphi = \mathrm{Arg}\, \partial w/\partial\theta$. По предложению 1.3.1 функция $f(z)$ будет не более, чем $n + n(\infty, f, \mathbb{D})$ - листной в $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$. Перейдя к пределу при $r \to 1$, получим утверждение следствия.

Замечание 1.3.3 *Если кривая Радона γ является локально про-*

стой, то можно показать, что

$$W(\gamma) = k \Longrightarrow \gamma \in (k; \mu_1),\ \mu_1 > 0; \qquad \gamma \in (k; \mu_2),\ \mu_2 < 0,$$

где

$$\mu_1 = \min\{\mu \,:\, \mu \text{ — \textit{целое}}, 2\pi\mu \geq \varrho(\gamma) - 2\pi k\},$$

$$\mu_2 = \max\{\mu \,:\, \mu \text{ — \textit{целое}}, 2\pi\mu \leq 2\pi k - \varrho(\gamma)\}.$$

Поэтому в этом случае предложение 1.3.1 можно вывести из теоремы 1.3.1.

Дальнейшие результаты по применениям кривых Радона можно найти в статье И. Р. Каюмова [54].

Определение. *Через Ω_∞ обозначим счетно-связную область из $\overline{C}$, положительно ориентированная граница которой представима в виде*

$$\partial\Omega_\infty = \cup_{j=1}^{\infty} L_j \cup A,$$

где L_j — ориентированные замкнутые жордановы кривые, множество

$$A = \{a_1, \ldots, a_q\}$$

представляет собой совокупность всех различных точек сгущения граничных кривых $\{L_j\}$, причем

$$A \cap (\cup_{j=1}^{\infty} L_j) = \emptyset.$$

Точнее, кривая L_j и точка $a \in A$ — компоненты $\partial\Omega_\infty$.

Точку a назовем точкой сгущения $\{L_j\}$, если любая окрестность точки a имеет общие точки с бесконечным подмножеством из $\{L_j\}$.

Теорема 1.3.2 *Пусть непрерывное непостоянное отображение*

$$f \,:\, \overline{\Omega}_\infty \to \overline{C}$$

является внутренним в Ω_∞, сохраняет ориентацию, и

$$f(\partial\Omega_\infty) \subset C.$$

Пусть γ_j — кривая, определяемая отображением

$$f \mid L_j \,:\, L_j \to C.$$

Пусть, далее,

либо $\gamma_j \in (k_j; \mu_j)$ с некоторым $\mu \geq 0$,

либо γ_j жорданова, и $f \mid L_j$ инъективно,

либо $\gamma_j = f(L_j)$ лежит на разрезе, т. е. на некоторой простой дуге.

Тогда для любой точки a, не лежащей на $f(\partial\Omega_\infty)$, имеет место оценка

$$n(a, f, \Omega_\infty) \leq n(\infty, f, \Omega_\infty) + \sum{}' q^+(\gamma_j) + p^*,$$

где $\sum{}'$ суммирует по кривым 1-го типа $\gamma_j \in (k_j; \mu_j)$, p^* — число жордановых кривых 2-го типа γ_j, для которых $W(\gamma_j) = 1$.

Доказательство. Если $\gamma_j \in (k_j; \mu_j)$, то $\mathrm{ind}_a\gamma_j \leq q^+(\gamma_j)$ в силу (1.36); $\mathrm{ind}_a\gamma_j \leq 1$, если γ_j жорданова и $W(\gamma_j) = 1$, и $\mathrm{ind}_a\gamma_j \leq 0$ в оставшихся случаях в силу хорошо известных свойств индекса Пуанкаре. Требуемая оценка следует теперь из следующей леммы.

Лемма 1.3.3 *Пусть непрерывное отображение $f : \overline{\Omega}_\infty \to \overline{C}$ является внутренним в области Ω_∞, сохраняет ориентацию, $f(\partial\Omega_\infty) \subset C$. Тогда для $a \notin f(\partial\Omega_\infty)$ имеем равенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{ind}_a\gamma_j = n(a, f, \Omega_\infty) - n(\infty, f, \Omega_\infty).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\overline{\Omega}_\infty \subset C$, т. е. точки $a_1, \ldots, a_q$ конечны. Пусть

$$\varepsilon > 0, \quad U_m(\varepsilon) = \{z \,:\, |z - a_m| < \varepsilon\}, \quad U_m^+(\varepsilon) = U_m(\varepsilon) \cap \Omega_\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon = \varepsilon_0$ настолько малым, чтобы выполнялись требования:

1^0) круги $U_m(\varepsilon)$, $m = 1, \ldots, q$, попарно не пересекаются;

2^0) для любого $m = 1, \ldots, q$ множество $f[U_m^+(\varepsilon)]$ лежит в некотором круге, не содержащем выбранной точки $a \notin f(\partial\Omega_\infty)$.

Поскольку множество кривых $\{L_j\}$ не имеет других точек сгущения, кроме точек $a_1, \ldots, a_q$, то все кривые L_j, за исключением конечного числа кривых, лежат внутри множества

$$\cup_{m=1}^q U_m^+(\varepsilon_0).$$

Множество исключительных граничных кривых L_j (их конечное число) обозначим через $\mathcal{L}'$. Пусть $L(\varepsilon, m)$ — ориентированная замкнутая жорданова кривая, лежащая внутри $U_m^+(\varepsilon)$ и окружающая все те L_j, которые лежат в $U_m^+(\varepsilon_0)$, причем

$$\mathrm{ind}_{a_m} L(\varepsilon_0, m) = -1, \quad m = 1, \ldots, q.$$

Рассмотрим конечносвязную область $\Omega' = \Omega'(\varepsilon_0) \subset \Omega_\infty$ с границей

$$\partial\Omega' = \cup_{m=1}^q L(\varepsilon_0, m) \cup_{L_j \in \mathcal{L}'} L_j.$$

Применив к функции $f(z)$ принцип аргумента в Ω' ([69], с.93), имеем

$$\sum{}' \mathrm{ind}_a \gamma_j + \sum_{m=1}^q \mathrm{ind}_a \gamma_m^0 = n(a, f, \Omega') - n(\infty, f, \Omega'),$$

где

$$\gamma_m^0 = f[L(\varepsilon_0, m)],$$

а $\sum'$ суммирует по $\gamma_j = f(L_j)$ для $L_j \in \mathcal{L}'$.

Отсюда следует требуемое в лемме равенство, так как в силу свойств 1^0 и 2^0 при выборе $\varepsilon_0 > 0$ имеем:

$$n(a, f, \Omega_\infty) = n(a, f, \Omega'), \quad n(\infty, f, \Omega_\infty) = n(\infty, f, \Omega')$$

и, кроме того, $\mathrm{ind}_a \gamma_m^0 = 0$ при $1 \le m \le q$, $\mathrm{ind}_a \gamma_j = 0$ для каждого $\gamma_j = f(L_j)$ при $L_j \in \mathcal{L}'$.

Доказательство леммы и теоремы 1.3.2 завершено.

Замечание 1.3.4 *Данные здесь оценки величины* $n(a, f, \Omega)$ *вытекают из оценок* $\mathrm{ind}_a \gamma_j$ *для каждого* j *в отдельности. Поэтому применяемые оценки индекса можно комбинировать с другими, что и проведено в теореме 1.3.2 с использованием хорошо известных оценок* $\mathrm{ind}_a \gamma_j$ *для жордановых кривых или разрезов.*

Замечание 1.3.5 *Для того, чтобы превратить оценки индекса* $n(a, f, \Omega)$ *при* $a \notin f(\partial\Omega)$ *в оценки листности* $p(f, \Omega)$, *нужна дополнительная информация о том, что* $f(\partial\Omega)$ *— нигде не плотное множество. Например, в случае конечносвязной области достаточно предположить, что* $f(\partial\Omega)$ *состоит из квази локально простых кривых.*

Глава 2

Достаточные условия глобальной однолистности

Проверка свойства однолистности аналитической функции $f(z)$ — трудная задача, даже если $f(z)$ задана явной формулой, но не содержится в справочниках по конформным отображениям. Действительно, необходимо убедиться, что уравнение $f(z) = a$ имеет не более одного корня в области Ω при любом $a \in \mathbb{C}$.

Часто оказываются полезными условия однолистности в виде неравенств на функцию и ее производные. Первое нетривиальное, т. е. не сводящееся к простым геометрическим доводам, условие однолистности получено З. Нехари [151] в 1949 году. Сформулируем его основной результат в форме, удобной для объяснения исследуемых задач.

Пусть $\Omega = \mathbb{D}$ — круг $|z| < 1$, $M(\mathbb{D})$ — множество мероморфных в круге $\mathbb{D}$ функций $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$,

$$I(f) = \left\|(1 - |z|^2)^2 \{f, z\}\right\|_{\mathbb{D}},$$

где

$$\{f, z\} := \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \equiv \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

— шварциан функции $f(z)$ и

$$\|\varphi(z)\|_\Omega := \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)|.$$

Теорема З. Нехари утверждает следующее:
если $f \in M(\mathbb{D})$, $I(f) \leq 2$, то функция $f(z)$ однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$.

Рассмотрим теперь тройку (Ω, M, I) в предположении, что Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $M = M(\Omega)$ — некоторое множество отображений $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$,

$$f \mapsto t = I(f)$$

— функционал со значениями из $[0, \infty)$.

Определение. *Функционал $I : M(\Omega) \to [0, \infty]$ будем называть допустимым, если существует такая постоянная $\kappa > 0$, что условия*

$$f \in M(\Omega), \qquad I(f) \leq \kappa$$

гарантируют однолистность $f(z)$ в области Ω. Иными словами, ядро функционала не содержит неоднолистных функций и, более того,

$$\kappa_1(I) = \inf\{I(f) \,:\, f \in M(\Omega),\ p(f, \Omega) \geq 2\} > 0.$$

Наиболее трудными оказываются следующие вопросы.

Задача 1. *Даны Ω и M. Как целенаправленно конструировать допустимые функционалы?*

Задача 2. *Геометрически описать множество областей $G(I)$, такое, что*

$$I \ \text{ допустим для } \ M \ \text{ в } \ \Omega \Longleftrightarrow \Omega \in G(I).$$

Здесь предполагается, что M и I корректно определены для любой области или широкого класса областей и заданы.

Задача 3. *Даны Ω, M и допустимый функционал I. Как построить допустимое продолжение I^* при переходе от M к более широкому классу отображений M^*?*

Не существует универсального ответа на вопрос, поставленный в задаче 1.

Задача 2 типична для теории функций: она выражает попытку распространения на выпуклые, а затем на более общие области Ω свойств, установленных сначала для круга или полуплоскости. Подобный процесс удается довести до конца лишь в редких случаях, обобщенный функционал З. Нехари

$$I_0(f) = \|\mathrm{dist}^2(z, \partial\Omega)\{f, z\}\|_\Omega$$

оказался в их числе:

если Ω конечносвязна, то $G(I_0)$ — множество однородных областей (т. е. $\mathrm{comp}\,\partial\Omega$ — либо точка, либо квазиконформная кривая).

Допустимость I_0 для $\Omega \in G(I_0)$ доказана для односвязных областей Л. Альфорсом и Л. Берсом, для многосвязных — О. Мартио и Й. Сарвасом, Ф. Герингом и Б. Осгудом, невозможность дальнейшего расширения класса областей установлена Ф. Герингом (см. [130], [133], [148], [154]).

Этот глубокий и красивый результат имеет весьма серьезные последствия для потребителей: условия $\Omega \in G(I_0)$ и $I_0(f) < \kappa_1(I_0)$ влекут принадлежность $f(\Omega) \in G(I_0)$, т. е. $\mathrm{comp}\, f(\partial\Omega)$ — либо точка, либо квазиконформная кривая. Следовательно, обобщенное условие З. Нехари, его аналоги и следствия становятся малосодержательными, если на границе Ω или $f(\Omega)$ имеются нулевые углы. Здесь и далее мы называем замкнутую жорданову кривую $L \subset \mathbb{C}$ *квазиконформной*, если она является образом окружности при некотором K-квазиконформном отображении всей плоскости на себя. В литературе такие кривые нередко называют квазиокружностями.

Нам удалось построить несколько простых допустимых функционалов, эффективных в приложениях, для которых $G(I)$ включает области с «дозированными» нулевыми углами. Этот поиск фактически привел к задаче 1, обобщенный подход к решению которой изложен в последнем пункте следующей главы. Мы рассматриваем p-допустимые функционалы, определяемые естественным условием

$$\kappa_p(I) = \inf\{I(f) \,:\, f \in M(\Omega),\ p(f,\Omega) \geq p+1\} > 0.$$

Обычно по задаче 3 исследуется конкретный вопрос: как распространить результаты о глобальной однолистности конформных отображений двумерных областей на случай дифференцируемых отображений областей из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Отметим, что по условиям глобальной однолистности отображений имеются обзоры М. Бернацки [119], автора и Л. А. Аксентьева [21], Т. Партасарати [156], автора, Л. А. Аксентьева и А. М. Елизарова [22], В. А. Зорича [168] и Л. А. Аксентьева и П. Л. Шабалина [95].

2.1 Простейшие функционалы

Нам потребуется следующее утверждение.

Теорема В. С. Рогожина ([79], 1958 г.). *Пусть*

$$\theta_0 \in [0, \pi],$$

Ω — *область в* $\mathbb{C}$, *обладающая свойством:*

любые две точки z_1 *и* z_2 *из* Ω *можно соединить такой глад-*

кой дугой $\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$, колебание угла касательной к которой не превосходит $\theta_0 < \pi$.

Если функция $f(z)$ аналитична в Ω, $f'(z) \neq 0$ и

$$|\arg f'(z)| < (\pi - \theta_0)/2$$

для любой точки $z \in \Omega$, то $f(z)$ однолистна в Ω.

Действительно, пусть $z = z(s)$ — уравнение дуги

$$\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$$

от натурального параметра $s \in [0, l]$, $z_1, z_2 \in \Omega$. По определению, существует вещественное число θ, такое, что $|\arg[e^{i\theta} z'(s)]| \leq \theta_0/2$. Тогда

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq \int_0^l \Re\left[e^{i\theta} f'(z(s)) z'(s)\right] ds \geq$$

$$\geq \int_0^l |f'(z(s))| \cos\left[\frac{\theta_0}{2} + \arg f'(z(s))\right] ds > 0.$$

Если Ω — выпуклая область, то $\theta_0 = 0$, и получается достаточное условие однолистности Носиро–Варшавского.

Функционал

$$I_1(f) = \|\arg f'(z)\|_{\Omega} = \sup_{z \in \Omega} |\arg f'(z)| \tag{2.1}$$

имеет смысл и для функций, мероморфных в неограниченных областях или в многосвязных областях, в предположении однозначности функции $\ln f'(z)$ в области Ω (в частности, если $\infty \in \Omega$, то $f(z)$ должна иметь простой полюс в этой точке). Но тогда теорема В. С. Рогожина неприменима уже для внешности круга, так как в этом случае $\theta_0 = \pi$. Создается впечатление, что функционал I_1 недопустим в Ω при $\theta_0 = \theta_0(\Omega) \geq \pi$. Но, как будет показано ниже, такое мнение неверно.

Аргумент производной характеризует вращение отображения. Естественен вопрос: гарантирует ли глобальную однолистность $f(z)$ в Ω ограниченность искажения, т. е. условие вида

$$m \le |f'(z)| \le M, \frac{M}{m} \le q(\Omega) \Leftrightarrow \|f'(z)\|_\Omega \, \|1/f'(z)\|_\Omega \le q(\Omega), \quad (2.2)$$

где

$$\|f'(z)\|_\Omega \, \|1/f'(z)\|_\Omega = \frac{\sup_{z\in\Omega} |f'(z)|}{\inf_{z\in\Omega} |f'(z)|}.$$

Допустимость функционала $\|f'(z)\|_\Omega \, \|1/f'(z)\|_\Omega$ была установлена Ф. Джоном [140] в 1969 г. для случая, когда $\Omega = \mathbb{D}$ — единичный круг, $f(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$, и автором [2], [3] в 1970 г., когда Ω — внешность единичного круга, $f(z)$ имеет простой полюс в точке $z = \infty$.

Ограниченность функционала из (2.1) или из (2.2) означает принадлежность значений $\ln f'(z)$ некоторой полосе. Это позволяет интерпретировать их единым образом как специальные случаи функционала Минковского общего вида, определяемого областью значений логарифма производной.

2.1.1 Развитие методов Л. Альфорса, Г. Вейля и Ф. Джона

Теорема 2.1.1 *Пусть* $\mathbb{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}$, *$n$ — целое число,* $n \ne 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, имеет нуль или полюс порядка $|n|$ в точке $z = 0$, точнее, вблизи нуля справедливы соотношения

$$\lim_{z\to 0} z^{-n} f(z) = 1, \qquad f(z) - z^n = O(|z|^{|n|}) + \text{const}. \quad (2.3)$$

Функция $f(z)$ будет $|n|$-листной в $\mathbb{D}$, если для любого $z \in \mathbb{D}$

$$m \le |f'(z) z^{1-n}| \le M, \tag{2.4}$$

где m и M — постоянные, причем

$$M/m \le e^{\pi/2} \quad \text{\textit{при}} \quad n \ge 1,$$

$$M/m \le e^{\pi/4} \quad \text{\textit{при}} \quad n \le -1.$$

Доказательство. В силу (2.3) и (2.4) существует однозначная ветвь $\ln[f'(z)/z^{n-1}]$, значения этой ветви $g(z) = \ln[f'(z)/z^{n-1}]$ лежат в некоторой вертикальной полосе ширины $2a = \ln M - \ln m$. Следовательно,

$$g(z) = \frac{2a}{\pi i} \ln \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} + \mathrm{const}, \quad g'(z) = \frac{4a}{\pi i} \frac{\varphi'(z)}{1-\varphi^2(z)}, \tag{2.5}$$

где $|\varphi(z)| < 1$ и $\varphi(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$, $\varphi(0) \in \mathbb{D}$ при $n \ge 1$,

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \cdots = \varphi^{(2|n|-1)}(0) = 0$$

при $n \le -1$. Так как

$$g'(z) = f''(z)/f'(z) - (n-1)/z,$$

то для любого $z \in \mathbb{D}$ по инвариантной форме леммы Шварца и неравенству Г. М. Голузина [47], гл. VIII, будем иметь

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - n + 1 \right| \le (4a/\pi) \frac{|z|}{1-|z|^2} \quad \text{при} \quad n \ge 1,$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - n + 1 \right| \le (8a/\pi) \frac{|n||z|^{2|n|}}{1-|z|^{4|n|}} \quad \text{при} \quad n \le -1. \tag{2.6}$$

Отсюда следует утверждение теоремы, так как справедлива

Лемма 2.1.1 *Пусть $f(z)$ аналитична при $0 < |z| < 1$, n — целое число, $n \neq 0$,*

$$\lim_{z \to 0}[z^{-n} f(z)] \neq 0.$$

Функция $f(z)$ будет $|n|$-листной в $\mathbb{D}$, если

$$I(f) = \left\| (1 - |z|^{2n}) \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} - n + 1 \right) \right\|_{\mathbb{D}} \leq |n|. \qquad (2.7)$$

Постоянная $|n|$ в правой части (2.7) точна: при любом $\varepsilon > 0$ существует $2|n|$-листная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ из указанного класса, для которой $I(f) < |n| + \varepsilon$.

Доказательство леммы. Пусть $r \in (0,1)$. Рассмотрим функцию $g(z) = f(rz)$ в круге $\overline{\mathbb{D}}$ и запишем в явном виде ее продолжение

$$\tilde{g}(z) = \{g(z), |z| \leq 1; \quad g(1/\overline{z}) + (z^n - 1/\overline{z}^n) g'(1/\overline{z})/(n\overline{z}^{1-n}),\ |z| \geq 1\}.$$

При $n = 1$ продолжения такого вида использовали Л. Альфорс и Г. Вейль [94].

Из аналитичности $g(z)$ при $|z| \leq 1$ и неравенств $I(g) < |n|$, $g'(z) \neq 0$ при $0 < |z| \leq 1$, следует, что $\tilde{g}(z)$ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, якобиан $\tilde{g}$ непрерывен и положителен при $0 < |z| \leq 1$ и при $1 \leq |z| < \infty$. Учитывая локальное поведение $f(z)$ вблизи точки $z = 0$, привлекая лемму 1.1.2 о склейке для плоского случая и теорему С. Стоилова [85], получим, что отображение $\tilde{g}$ топологически эквивалентно отображению с помощью функции z^n. Следовательно, функция $f(rz)$ будет $|n|$-листной в $\mathbb{D}$. А это дает $|n|$-листность $f(z)$ в $\mathbb{D}$ с учетом произвольности $r \in (0,1)$.

При $n = \pm 1$ достаточность условия $I(f) \leq 1$ для однолистности показана Й. Беккером [115], [116] с применением уравнения

Лёвнера-Куфарева. С меньшими, чем 1, постоянными аналогичные утверждения были получены ранее другими методами: при $n = +1$ — П. Л. Дюреном, Г. С. Шапиро и А. Л. Шилдсом [126], при $n = \pm 1$ — автором [2], [3].

Как показали Й. Беккер и Х. Поммеренке [117] с использованием одного примера Р. Мане, П. Сада и Д. Салливана [147] (см. также [162]), если $n = \pm 1$ и $\varepsilon > 0$, то существует функция $f_{\pm}(z;\varepsilon)$, для которой $I(f_{\pm}) < 1 + \varepsilon, \quad p(f_{\pm}, \mathbb{D}) \geq 2$. Точность $|n|$ в случае $|n| > 1$ показывает, очевидно, пример $f_{\pm}(z^{|n|};\varepsilon)$.

Следствие 2.1.1 (см. [2], [3], [19], [21], [132], [140], [141]) *Пусть Ω — одна из трех областей: круг конечного радиуса, внешность круга или полуплоскость. Функция $f(z)$ аналитична в $\Omega \setminus \{\infty\}$, имеет простой полюс в точке $z = \infty$, если $\infty \in \Omega$. Тогда $f(z)$ будет однолистной в Ω, если $\|f'(z)\|_{\Omega}\|1/f'(z)\|_{\Omega} \leq q(\Omega)$, где $q(\Omega) = e^{\pi/2}$ для круга и полуплоскости, $q(\Omega) = e^{\pi/4}$ для внешности круга.*

Для круга и внешности круга следствие получается при $n = 1$ или $n = -1$ преобразованием вида $w = az^{\pm 1} + b$. Неоднолистность функции $f(z)$ в полуплоскости Ω равносильна неоднолистности $f(z)$ в каком-либо круге из Ω, поэтому утверждение для полуплоскости следует из случая, когда Ω — круг.

Предложение 2.1.1 *Пусть $\mathbb{D}^- = \{\, z \,:\, |z| > 1 \,\}$, функция $f(z)$ аналитична и $f'(z) \neq 0$ в $\mathbb{D}^- \setminus \{\infty\}$, $f(z)$ имеет полюс порядка $p \geq 1$ в точке $z = \infty$, вблизи которой*

$$f(z) = az^p + O(|z|^{-p}) + \mathrm{const}, \qquad a \neq 0.$$

Если $\|\arg(f'(z)/z^{p-1})\|_{\mathbb{D}^-} \leq \pi/8$, то функция $f(z)$ p-листна в $\mathbb{D}^-$.

Действительно, для функции

$$g(z) = i\ln(f_1'(z)/z^{n-1}),$$

где

$$f_1(z) = f(1/z), \quad |z| < 1, \quad n = -p,$$

мы имеем (2.5) и (2.6) с постоянной $a = \pi/4$, что влечет p-листность $f_1(z)$ в $\mathbb{D}$ по лемме 2.1.1.

Предложение 2.1.1 при $p = 1$ показывает, что функционал I_1 из (2.1) может быть допустимым в областях, для которых характеристика В. С. Рогожина θ_0 больше или равна π. Поиск всех таких областей приводит к специальному классу G^* областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих некоторому условию с расходящимися лучами.

Опишем класс G^*.

Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная конечным числом кусочно-гладких в $\overline{\mathbb{C}}$ кривых, т. е. для каждой компоненты L_ν границы $\partial\Omega$ касательная к кривой L_ν является кусочно-непрерывной функцией точки, сохраняющей одностороннюю непрерывность в окрестностях точек разрыва.

Определение. *Будем писать $\Omega \in G^*$ или говорить, что область Ω удовлетворяет условию расходимости лучей, если Ω — конечносвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей и выполняются требования:*

а) либо каждая граничная компонента области Ω является замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой в $\mathbb{C}$, либо бесконечно удаленная точка лежит на границе области. Тогда

$$\infty \in L_\nu,$$

где L_ν — фиксированная компонента границы, такая, что каждая компонента $(\partial\Omega) \setminus L_\nu$ является замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой в $\mathbb{C}$, а множество $L_\nu \setminus \{\infty\}$ представляет собой конечное объединение взаимно непересекающихся кривых L_ν^j, таких, что $L_\nu^j \cup \{\infty\}$ — замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$;

б) область Ω не имеет на границе нулевых внешних углов, и, кроме того, либо на $(\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ нет точек возврата, либо

в) пусть $z_1, \ldots, z_\mu$ — все точки возврата на $(\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$,

$$\Gamma_j = \{\, z \,:\, z = z_j + w_j t,\ |w_j| = 1,\ 0 \le t < \infty \,\}$$

— луч, проведенный из z_j в направлении острия, причем Γ_j является односторонней касательной к обеим дугам $\partial\Omega$, подходящим к точке z_j, $j = 1, \ldots, \mu$.

Тогда

b_1) $\Gamma_j \cap \Gamma_{j'} = \emptyset, \qquad w_j \ne w_{j'}$ при $j \ne j'$,

b_2) $\Gamma_j \cap \overline{\Omega} = \{z_j\}, \qquad j = 1, \ldots, \mu$,

b_3) в случае, когда

$$\infty \in L_\nu \subset \partial\Omega, \quad z_j \in L_\nu^k \subset L_\nu,$$

луч Γ_j не является касательной к L_ν^k в точке $z = \infty$, т. е. оба предельных значения $(z - z_j)/(w_j|z - z_j|)$ при $z \in L_\nu^k$, $z \to \infty$, отличны от единицы.

Сложность определения множества G^* областей с кусочно-гладкими граничными компонентами компенсируется следующим критерием допустимости функционала $\sup_{z\in\Omega} |\arg f'(z)|$.

Теорема 2.1.2 *Пусть Ω — конечносвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная кусочно-гладкими в $\overline{\mathbb{C}}$ кривыми, $M_0(\Omega)$ — класс всех мероморфных в Ω функций $f(z)$, для которых можно определить (однозначную) ветвь $\ln f'(z)$ в Ω. Функционал*

$$I_1(f) = \|\arg f'(z)\|_{\,\Omega} := \sup_{z\in\Omega} |\arg f'(z)|$$

является допустимым для $M_0(\Omega)$ в области Ω тогда и только тогда, когда $\Omega \in G^*$, т. е. область Ω удовлетворяет условию расходимости лучей.

Доказательство теоремы 2.1.2 приведем после того, как сформулируем и докажем теорему 2.1.3. Для этой теоремы и дальнейшего изложения нам нужны некоторые новые определения.

Определение. *Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $\Omega \neq \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Будем говорить, что некоторое свойство (Υ) справедливо в области Ω вблизи ее границы $\partial\Omega$, если существует замкнутое множество $K \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, такое, что $K \subset \Omega$ и свойство (Υ) верно для каждой из компонент связности множества $\Omega \setminus K$.

В частности, справедливость свойства для любой пары точек x' и x'' из Ω вблизи $\partial\Omega$ означает, по определению, что существует $K = \overline{K} \subset \Omega$, причем (Υ) справедливо для любой пары точек x' и x'' из Ω, лежащих в одной и той же компоненте $\Omega \setminus K$.

Через $\gamma = \gamma(x', x'')$ будем обозначать простую спрямляемую дугу, соединяющую точки x' и x'', $l = l(x', x'')$ обозначает длину дуги $\gamma = \gamma(x', x'')$.

Определение. *Пусть $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированные постоянные. Область $\Omega \in G_\alpha(A)$, если $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и для любой пары точек x' и x'', взятых в Ω вблизи $\partial\Omega$, существует дуга $\gamma = \gamma(x', x'') \subset \Omega$ с длиной $l(x', x'') \leq A|x' - x''|^\alpha$.*

Через $d = d(\mathrm{comp}\ \partial\Omega)$ обозначим наименьшую постоянную, обладающую свойством: при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для любой пары точек x' и x'' из Ω вблизи $\partial\Omega$ справедливо неравенство $|x' - x''| \leq d + \varepsilon$.

Очевидно, $d(\mathrm{comp}\ \partial\Omega) \in (0, \infty)$ существует тогда и только тогда, когда бесконечно удаленная точка $\infty \notin \partial\Omega$.

Отметим также простые факты:

а) если $\infty \notin \Omega$, то $d(\mathrm{comp}\ \partial\Omega) = \mathrm{diam}\ \Omega$;

б) если $\Omega \in G_\alpha(A)$, причем $\alpha < 1$, то $\infty \notin \partial\Omega$;

в) $d = d(\mathrm{comp}\ \partial\Omega)$ равен точной верхней грани диаметров граничных компонент области Ω.

Определение. *Пусть $A > 0$, $B > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ — посто-*

янные. Запись $\Omega \in G_{\alpha,\beta}(A,B)$ *будет означать, что для области* $\Omega \in G_\alpha(A)$ *при любых* x' *и* x'' *из* Ω *вблизи* $\partial\Omega$ *существует дуга* $\gamma = \gamma(x', x'') \subset \Omega$*, для которой, кроме условия*

$$l(x', x'') \leq A|x' - x''|^\alpha,$$

справедливо еще и неравенство

$$l(x, x', x'') \leq B \operatorname{dist}^\beta(x, \partial\Omega),$$

где x *— любая точка* $\gamma = \gamma(x', x'')$*,* $l(x, x', x'')$ *— минимальная из длин двух дуг, на которые* γ *делится точкой* x*,*

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{t \in \partial\Omega} |t - x|.$$

Замечание 2.1.1 *Подобные определения встречаются в ряде работ по теории функций. Обратим внимание на некоторые особенности приведенных здесь определений, вызванные спецификой исследуемых задач. Для конкретной области* $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *проверку неравенства*

$$l(x', x'') \leq A|x' - x''|^\alpha \tag{2.8}$$

в случае $G_\alpha(A)$ *или неравенств*

$$l(x', x'') \leq A|x' - x''|^\alpha,\ l(x, x', x'') \leq B \operatorname{dist}^\alpha(x, \partial\Omega),\ \forall x \in \gamma, \tag{2.9}$$

в случае $G_{\alpha,\beta}(A,B)$ *нужно проводить лишь для точек* x' *и* x''*, принадлежащих одной и той же компоненте* $\Omega \setminus K$*, предварительно задав некоторое множество*

$$K = \overline{K} \subset \Omega.$$

Если определение классов связать с проверкой неравенств

(2.8) или (2.9) для всех пар точек, т. е. при $K = \emptyset$, то для $\alpha < 1$ все области $\Omega \ni \infty$ оказались бы вне определенных нами классов областей. Очевидно, если $\infty \in \Omega$ и

$$K = \{\, x \in \overline{\mathbb{R}^n} \,:\, |x| \geq r \,\} \subset \Omega, \quad \Omega' = \Omega \cap \{\, x \,:\, |x| < r \,\} = \Omega \setminus K,$$

то из наших определений следует: $\Omega \in G_\alpha(A)$ или $\Omega \in G_{\alpha,\beta}(A, B)$ при условии $\Omega' \in G_\alpha(A)$ или $\Omega' \in G_{\alpha,\beta}(A, B)$ соответственно.

Замечание 2.1.2 *Если*

$$\infty \notin \Omega \quad \text{и} \quad \Omega \in G_{1,1}(A, B),$$

то Ω является (a, b)-однородной областью в смысле О. Мартио и Й. Сарваса с некоторыми a и b (см. [131], [148]).

Обратное включение верно всегда: если Ω является (a, b)-однородной, то $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$, причем $A \leq 2b$, $B \leq b/a$.

Введем еще одно определение. Пусть область $\Omega \in G_\alpha(A)$ или $\Omega \in G_{\alpha,\beta}(A, B)$.

Определение. *Через*

$$\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma; \alpha, A) \quad \text{или} \quad \Omega(\gamma) = \Omega(\gamma; \alpha, \beta, A, B)$$

будем обозначать одну из таких подобластей Ω, что при определении принадлежности Ω классу

$$G_\alpha(A) \quad \text{или} \quad G_{\alpha,\beta}(A, B)$$

соответственно требование $\gamma(x', x'') \subset \Omega$ допускает замену требованием $\gamma(x', x'') \subset \Omega(\gamma)$, т. е. оказывается достаточным запас дуг, лежащих в $\Omega(\gamma)$.

Пример. Пусть $\Omega_0 = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 \,\}$. Принадлежность

$\Omega_0 \in G_1(1)$ влечет, очевидно, равенства

$$\Omega_0(\gamma) = \Omega_0(\gamma; 1, 1) = \Omega_0.$$

Если же рассмотреть случай $\Omega_0 \in G_1(\pi/2)$, то ясно, что в качестве

$$\Omega_0(\gamma) = \Omega(\gamma; 1, \pi/2)$$

можно взять кольцо $\{\, z \,:\, r < |z| < 1 \,\}$ с любым $r \in (0, 1)$.

Теорема 2.1.3 *Пусть область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ такова, что $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$, и пусть*

$$\overline{\Psi}(\delta, q) = \{\, w \,:\, |\Re\, w| \le q \,\} \cup \{\, w \,:\, |\Im\, w| \le \delta \,\}$$

— объединение двух полос, где $q \ge 0$ и $\delta \ge 0$ — постоянные.

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в Ω, причем в Ω определена ветвь $\ln f'(z)$.

Если $\ln f'(z) \in \overline{\Psi}(\delta, q)$ для всех $z \in \Omega$ и

$$\sqrt{\delta^2 + q^2} \le (\pi/4)\kappa(A, B),$$

то $f(z)$ однолистна в Ω.

Здесь

$$\kappa(A, B) = \frac{1}{B} \max\left\{\frac{\kappa_1}{A}, \frac{1}{1 + A}\right\},$$

где $\kappa_1 = 0,6\ldots$ — корень уравнения

$$(1 - \kappa)e^{\kappa} = \kappa \int_0^1 \exp\left[\kappa t^{1/(1-\kappa)}\right] dt.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 2.1.1. Покажем сначала, что из условий теоремы 2.1.3 следует

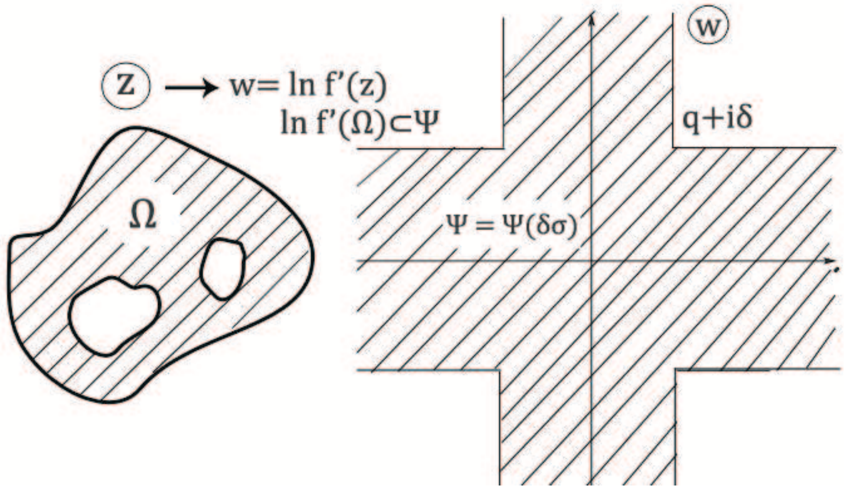

Рис. 2.1: Мажорантная область Ω

неравенство

$$\left\| \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\|_{\Omega} \le r_0 = \frac{4}{\pi}\sqrt{\delta^2 + q^2}. \tag{2.10}$$

Пусть z — заданная точка Ω, $z \neq \infty$. Обозначим через Ψ' внутренность множества $\overline{\Psi}(\delta, q)$ (т. е. Ψ' является полосой при $\delta = 0$ или $q = 0'$, тривиальный случай $\delta = q = 0$ исключаем, так как тогда $\ln f'(z) \equiv 0$ и $f(z) \equiv z + \mathrm{const}$), $\varrho_{\Psi'}(z)$ — плотность гиперболической метрики области Ψ'.

Значения функции

$$\zeta \mapsto g(\zeta) = \ln f' \left[z + \zeta \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \right]$$

в круге $|\zeta| < 1$ лежат в Ψ'. По принципу гиперболической метрики (см. [47], гл. VIII, или [110])

$$|g'(0)| \le 1/\varrho_{\Psi'}(g(0)).$$

Так как

$$g'(0) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) f''(z)/f'(z),$$

то нам достаточно показать, что

$$\|1/\varrho_{\Psi'}(w)\|_{\Psi'} = r_0 = (4/\pi)\sqrt{\delta^2 + q^2}.$$

Заметим, что область Ψ' имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии и не меняется при симметризации относительно этих осей. Для таких областей, как это доказано Д. Пойа и Г. Сегё ([73], с. 211), максимум конформного радиуса $r(\Psi', w) = 1/\varrho_{\Psi'}(w)$ достигается в точке пересечения осей симметрии, т. е. в нашем случае $r_0 = r(\Psi', 0)$. По формуле Кристоффеля-Шварца, конформное отображение $w = g_0(\zeta)$ круга $\mathbb{D} = \{\,\zeta \,:\, |\zeta| < 1\,\}$ на область Ψ' может быть записано в виде

$$g_0(\zeta) = r_0 \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{(1-\zeta_0^2 t^2)(1-\overline{\zeta}_0^2 t^2)}}{(1-t^4)} dt,$$

где $r_0 = g_0'(0) > 0$,

$$g_0(\pm 1) = g_0(\pm i) = \infty,\ g_0(\zeta_0) = q + i\delta,\ \zeta_0 = e^{ix},\ 0 \le x \le \pi/2.$$

Можно считать, что $0 < x < \pi/2$, крайние положения x соответствуют случаю, когда Ψ' — полоса, и получаются предельным переходом. При $0 < x < \pi/2$ имеем:

$$\lim_{\zeta \to 1}(1-\zeta)g_0'(\zeta) = \frac{r_0}{4}|1-\zeta_0^2| = c_1,$$

$$\lim_{\zeta \to i}(1+i\zeta)g_0'(\zeta) = \frac{r_0}{4}|1+\zeta_0^2| = c_2.$$

Функция $g_0'(\zeta)$ мероморфна в любой односвязной области, не содержащей точек $\pm\zeta_0$, $\pm\overline{\zeta}_0$, в частности, в точках ± 1 она имеет простые полюса. Тогда функция

$$g_0(\zeta) + c_1 \ln(1-\zeta) - ic_2 \ln(1+i\zeta)$$

непрерывна в малых окрестностях точек $\zeta = 1$ и $\zeta = i$. Определив величины скачков $\Re g_0(\zeta)$ в точке $\zeta = i$ и $\Im g_0(\zeta)$ в точке $\zeta = 1$, будем иметь $c_1 = 2\delta/\pi$, $c_2 = 2q/\pi$, т. е.

$$r_0|1-\zeta_0^2| = 8\delta/\pi, \quad r_0|1+\zeta_0^2| = 8q/\pi.$$

Но $|\zeta_0| = 1$, поэтому

$$|1+\zeta_0^2|^2 + |1-\zeta_0^2|^2 = 4,$$

следовательно,

$$r_0^2 = (16/\pi^2)(\delta^2 + q^2).$$

Неравенство (2.10) доказано, оно влечет утверждение теоремы на основании следующей леммы, усиливающей и обобщающей аналогичный результат О. Мартио и Й. Сарваса [148].

Лемма 2.1.2 *Мероморфная и локально однолистная в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$ и*

$$\left\| \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\|_{\Omega(\gamma)} < \kappa(A, B) = \frac{1}{B} \max\left\{ \frac{\kappa_1}{A}, \frac{1}{1+A} \right\},$$

число $\kappa_1 = 0,6...$ указано в теореме 2.1.3.

Для доказательства леммы 2.1.2 и в дальнейшем изложении нам нужна

Лемма 2.1.3 *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и однолистна вблизи $\partial\Omega$. Если известна локальная однолистность $f(z)$ в Ω, за исключением разве лишь одной точки, то $f(z)$ однолистна в Ω.*

Доказательство леммы 2.1.3. Пусть z_0 — точка, в которой локальная однолистность $f(z)$ заранее неизвестна. Обозначим

$$T = \{\, z \in \Omega \,:\, f(z) = f(z_0) \,\}$$

и рассмотрим функцию

$$f_1(z) = f(z),$$

если $f(z_0) = \infty$, и функцию

$$f_1(z) = 1/\left[f(z) - f(z_0)\right],$$

если $f(z_0) \neq \infty$.

В силу дискретности T и известного утверждения об аппроксимации произвольной области (см., например, [86], с. 103) существует последовательность (Ω_j) конечносвязных областей, ограниченных жордановыми кривыми, причем

$$\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega, \quad \cup_{j=1}^{\infty}\Omega_j = \Omega, \quad T \cap \partial\Omega_j = \emptyset.$$

По условию леммы существует $K = \overline{K} \subset \Omega$, такое, что $f_1(z)$ однолистна в каждой из компонент множества $\Omega \setminus K$. Для достаточно больших j отображение f_1 инъективно на каждой из компонент $\partial\Omega_j$, следовательно, однолистно в Ω_j по теореме 1.1.1, что и требовалось.

Доказательство леммы 2.1.2.

Если $f(z)$ неоднолистна в Ω, то в силу условия $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$ и леммы 2.1.3 существуют точки z_1 и z_2 и дуга $\gamma = \gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$, такие, что $f(z_1) = f(z_2)$ и выполняются неравенства (2.9).

Пусть $z = z(s)$ — уравнение γ, где s — дуговая абсцисса γ, $0 \leq s \leq l = l(z_1, z_2)$. Итак, $l \leq A|z_1 - z_2|$ и

$$\min\{s, l - s\} \leq B \operatorname{dist}(z(s), \partial\Omega)$$

при любом $s \in [0, l]$ в силу (2.9), но тогда

$$P(s) = \left|\frac{f''(z(s))}{f'(z(s))}\right| < \max\left\{\frac{\kappa_1}{A}, \frac{1}{1+A}\right\}(\min\{s, l-s\})^{-1}, 0 \le s \le l.$$

Предположим, что $P(s) < (\kappa_1/A)/\min\{s, l-s\}$. Запишем тождество

$$f(z_2) - f(z_1) - (z_2 - z_1)f'(w) = \int_{z_1}^{z_2}\left(\int_w^\zeta f''(z)dz\right)d\zeta,$$

где интегрирование ведется вдоль дуги γ. С учетом равенства $f(z_1) = f(z_2)$ получим

$$|z_1 - z_2|u(s) \le \int_0^l \left|\int_\sigma^s P(\xi)u(\xi)d\xi\right| d\sigma =$$

$$= \int_0^s \xi u(\xi)P(\xi)d\xi + \int_s^l (l-\xi)u(\xi)P(\xi)d\xi, \qquad 0 \le s \le l,$$

где $u(s) = |f'(z(s))|$. Ввиду произвольности $s \in [0, l]$ для любой непрерывной функции $y(\xi)$, $0 \le \xi \le l$, положительной на $(0, l)$, будем иметь

$$|z_1 - z_2|\int_0^l u(s)y(s)ds \le \int_0^l y(s)\left[\int_0^s \xi u(\xi)P(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_s^l (l-\xi)u(\xi)P(\xi)d\xi\right] ds = \int_0^l b(\xi; y)P(\xi)u(\xi)y(\xi)d\xi, \qquad (2.11)$$

где

$$b(x; y) = \frac{1}{y(x)}\left[x\int_x^l y(\xi)d\xi + (l-x)\int_0^x y(\xi)d\xi\right]. \qquad (2.12)$$

Так как $u(s)y(s) > 0$ на $(0, l)$, то из (2.11) следует неравенство

$$|z_1 - z_2| \leq \sup_{\xi \in (0,l)} [b(\xi, y)P(\xi)]. \tag{2.13}$$

Функцию $y = y(\xi)$ будем подбирать из условия

$$b(\xi; y)P_0(\xi) \equiv \text{const},$$

где $P_0(\xi)$ — мажоранта $P(\xi)$. Вычисления проще проводить в фиксированном промежутке $(-1, 1)$. Положим

$$\xi - l/2 = tl/2, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad y(\xi) = \eta'(t).$$

Пусть $\eta(t)$ — непрерывно дифференцируемая нечетная возрастающая функция. Имеем в (2.12) и (2.13)

$$b(\xi; y) = \frac{l^2}{2} \left[\eta(1) - t\eta(t)\right] / \eta'(t), \qquad P(\xi) < P_0(\xi) = \frac{2\kappa_1}{Al}(1 - |t|)^{-1},$$

следовательно,

$$|z_1 - z_2| < \frac{l\kappa_1}{A} \sup_{t \in (-1,1)} \frac{\eta(1) - t\eta(t)}{(1 - |t|)\eta'(t)}. \tag{2.14}$$

Положим $\eta(t) = -\eta(-t)$ при $-1 \leq t \leq 0$, а при $0 \leq t \leq 1$

$$x = \kappa_1, \quad \eta(t) = xe^{xt}(1 - t)^x \int_0^t (1 - \tau)^{-x-1} e^{-x\tau} d\tau =$$

$$= 1 + xe^{xt}(1 - t)^x \left[\int_0^t (1 - \tau)^{-x} e^{-x\tau} d\tau - 1/x\right].$$

Выражение в квадратных скобках неположительно при $x = \kappa_1$,

$t \in (0,1)$, так как уравнение

$$\int_0^1 (1-t)^{-x} e^{-xt} dt = 1/x$$

равносильно уравнению

$$\int_0^1 \exp\left[xt^{1/(1-x)}\right] dt = (1-x)e^x/x,$$

определяющему κ_1. Таким образом, $|\eta(t)| \le 1$ при $|t| \le 1$. Кроме того, $\eta(1) = 1$ и функция $\eta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-|t|)\eta' = \kappa_1(1-t\eta),$$

поэтому $\eta'(t) > 0$ при $-1 < t < 1$.

Следовательно, $|z_1 - z_2| < l/A$ в силу (2.14), что противоречит неравенству $l \le A|z_1 - z_2|$.

Пусть теперь

$$P(s)\min\{\, s, l-s \,\} < 1/(1+A).$$

Обозначим $w = z(l/2) \in |\gamma|$ и используем известные приемы (см. [21], §4, а также [148]). Так как $f(z_1) = f(z_2)$, $f'(z) \ne 0$ на γ,

$$|\exp z - 1| \le \exp|z| - 1$$

при любом $z \in \mathbb{C}$, то на основании тождества

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1) + \int_{z_1}^{z_2} [f'(z) - f'(w)]\, dz$$

получим

$$|z_1 - z_2| \le \int_\gamma (\exp|\ln f'(z) - \ln f'(w)| - 1)\, |dz|.$$

Но

$$|\ln[f'(z)/f'(w)]| \leq \left|\int_{l/2}^{s} P(\xi)d\xi\right|,$$

следовательно,

$$|z_1 - z_2| < -l + \int_0^l \exp\left|\int_{l/2}^{s}[(A+1)\min\{\xi, l-\xi\}]^{-1}d\xi\right| ds.$$

Последний интеграл вычисляется в явном виде и равен $l + l/A$, поэтому

$$|z_1 - z_2| < l/A \leq |z_1 - z_2|$$

— противоречие, завершающее доказательство леммы 2.1.2 и теоремы 2.1.3.

Приведем два следствия теоремы 2.1.3.

Следствие 2.1.2 *Пусть* $\Omega \in G_{1,1}(A,B)$, $\kappa(A,B)$ *— величина из теоремы 2.1.3. Мероморфная в* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *функция* $f(z)$ *будет однолистной в* Ω, *если выполнено одно из условий:*

1^0 *существует ветвь* $\ln f'(z)$ *в* Ω,

$$I_1(f) = \|\arg f'(z)\|_\Omega \leq (\pi/4)\kappa(A,B);$$

2^0 $\|f'(z)\|_\Omega \; \|1/f'(z)\|_\Omega \leq \exp[(\pi/2)\kappa(A,B)]$.

В случае 2^0 требование о существовании ветви $\ln f'(z)$ пропущено, так как этот факт не используется ни при формировании функционала, ни при доказательстве теоремы для случая, соответствующего 2^0.

Замечание 2.1.3 *На основании условий Й. Беккера, автора и Р. Кюнау требование*

$$\sqrt{\delta^2 + q^2} < (\pi/4)\kappa(A,B)$$

можно уточнить: для круга и полуплоскости можно взять

$$\sqrt{\delta^2 + q^2} \le \pi/4,$$

для внешности круга и функции с простым полюсом на бесконечности —

$$\sqrt{\delta^2 + q^2} \le \pi/8.$$

Кроме того, очевидно, что аналог теоремы 2.1.3 для $\mathbb{D}$ можно записать для функций, рассмотренных в теореме 2.1.1, при условии

$$\ln \left[f'(z)/z^{n-1} \right] \in \overline{\Psi}(\delta, q),$$

используя при доказательстве лемму 2.1.1 вместо леммы 2.1.2.

2.1.2 Функционал Минковского

Приведем еще два предложения, которые обосновываются по схемам доказательств теорем 2.1.1, 2.1.3 и характеризуют в некоторой степени границы применимости такого подхода.

Пусть Ψ — односвязная область из $\mathbb{C}$, имеющая не менее двух граничных точек,

$$t\Psi = \{\, tz \,:\, z \in \Psi \,\}, \quad t \ge 0.$$

Образуем функционал

$$I(f; \Psi) = \inf\{\, t \ge 0 \,:\, \ln f'(z) \in t\Psi \quad \text{при любом} \quad z \in \Omega \,\}.$$

При такой записи теорема 2.1.3 означает допустимость функционала $I(.; \Psi)$ с фиксированными $\Psi = \Psi(\delta, q)$, δ, q, $\delta^2 + q^2 > 0$.

Имеет место

Предложение 2.1.2 *Справедливы два следующих утверждения.*

а) Пусть Ω — конечносвязная область с невырожденными граничными компонентами, $M_0(\Omega)$ — класс мероморфных в Ω функций $f(z)$ с однозначным $\ln f'(z)$, $\Omega \in G_{1,1}(A,B)$.

Функционал $I(.;\Psi)$ допустим для $M_0(\Omega)$ в Ω тогда и только тогда, когда конформный радиус $r(\Psi, w)$ равномерно ограничен.

б) Если $\Omega \in G_{1,1}(A,B)$, $r_0(\Psi) = \|r(\Psi,w)\|_\Psi < \infty$, то однолистность $f(z)$ в Ω гарантируется условием $I(f;\Psi) < \kappa/r_0(\Psi)$, где постоянная $\kappa = \kappa(A,B)$ указана в теореме 2.1.3.

Доказательство. Если $r_0(\Psi) < \infty$ и $I(f;\Psi) < \kappa/r_0(\Psi)$, то $\ln f'(z) \in t\Psi$ при некотором $t \in (0, \kappa/r_0(\Psi))$, и однолистность $f(z)$ по-существу следует из доказательства теоремы 2.1.3 с учетом того, что

$$r(t\Psi, tw) = tr(\Psi, w) \le tr_0(\Psi)$$

(см. неравенство (2.10)).

Нам остается обосновать лишь обратное утверждение. Пусть $r_0(\Psi) = \infty$. Покажем, что при любом $t > 0$ найдется неоднолистная в Ω функция $f(z,t)$, для которой $\ln f'(z,t) \in t\Psi$ при фиксированном t и любом $z \in \Omega$.

Пусть Ω_1 — некоторая односвязная область со свойствами:

$$\Omega \subset \Omega_1, \quad \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 = \partial\Omega_1,$$

т. е. Ω_1 ограничена одной из компонент $\partial\Omega$, $\Omega \subset \Omega_1$. Через $w = \varphi(z)$ обозначим однолистную функцию, конформно отображающую Ω_1 на Ψ, и воспользуемся известным результатом: вблизи границы Ω_1 функции $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega_1)$ и $1/\varrho_{\Omega_1}(z)$ — величины одного и того же порядка малости.

Пусть сначала $\infty \notin \Omega_1$. Рассмотрим при $t \ge 0$ функцию

$$\Omega_1 \ni z \mapsto f(z,t) = \int \exp[t\varphi(z)]dz.$$

Если $f(z,t)$ однолистна, то, как известно (см., например, [148]),

$$a(z,t) = |\mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega_1) f''(z,t)/f'(z,t)| \le 4.$$

Но для $f(z,t)$ получаем, что величина

$$a(z,t) = t\,\mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega_1)|\varphi'(z)| = t\,\mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega_1)\varrho_{\Omega_1}(z) r[\Psi, \varphi(z)]$$

неограничена по z при $t > 0$, т. е. $f(z,t)$ неоднолистна в Ω_1, а значит, и в области Ω.

Если же $\infty \in \Omega_1$, то можно взять

$$a_1 = \lim_{z\to\infty} z[\varphi(z) - \varphi(\infty)], \quad f'(z,t) = \exp\{t[\varphi(z) - a_1/(z - z_0)]\},$$

где $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_1$, и предыдущие рассуждения сохранятся.

Предложение 2.1.2 доказано.

Из теоремы 3.3.2, которая будет доказана ниже, и принципа гиперболической метрики непосредственно следует

Предложение 2.1.3 *Пусть Ω — конечносвязная область. Предположим, что $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$, каждая граничная компонента области Ω является квазиконформной кривой, Ψ — односвязная область, $r_0(\Psi) < \infty$, $R(z)$ — непостоянная рациональная функция. Тогда функционал*

$$I(f; \Psi, R) = \inf\{\, t \ge 0 \,:\, \ln \frac{f'(z)}{R'(z)} \in t\Psi \quad \textit{при любом} \quad z \in \Omega \,\}$$

является p-допустимым в Ω, причем

$$p = p\,(R, \Omega + 0) := \inf_{\Omega'} p\,(R, \Omega'),$$

где точная нижняя грань берется по всем таким областям Ω', что $\overline{\Omega} \subset \Omega'$.

Следующее утверждение представляет собой аналог пункта б) предложения 2.1.2 для специального случая, когда Ω — круг.

Пусть функция $f_0(z)$ однолистна в $\mathbb{D} = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\}$ (или в области $\mathbb{D}^- = \{\, z \,:\, |z| > 1 \,\}$) и

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D} \qquad \left(f_0(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad z \in \mathbb{D}^- \right).$$

Функция $f(z)$ имеет в $\mathbb{D}$ (или $\mathbb{D}^-$) разложения в ряд такого же вида, что и $f_0(z)$, $f'(z) \neq 0$.

Предложение 2.1.4 *Функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$ (или в $\mathbb{D}^-$), если для фиксированной комплексной постоянной*

$$\lambda, \quad |\lambda| \le 1/6,$$

и любых $z \in \mathbb{D}$ (или $z \in \mathbb{D}^-$)

$$\left| f'(z)/f_0'^{\lambda}(z) - 1 \right| \le 1 - 6|\lambda|.$$

Ветвь $f'^{\lambda}(z)$ при $z \in \mathbb{D}^-$ фиксируется условием $f_0'^{\lambda}(\infty) = 1$, в случае области $\mathbb{D}$ выбор ветви произволен.

Требования предложений 2.1.3 или 2.1.4 относятся к функции $\psi(z)$, определяемой из представления $f'(z) = R'(z)\psi(z)$ или $f'(z) = f_0'^{\lambda}(z)\psi(z)$. В обоих случаях можно считать, что $\ln f'(z)$ разложен на сумму «функции особенностей» и «хорошей» функции $\ln \psi(z)$. Трудности исследования обусловлены тем, что не возникает простого аддитивного разложения самой функции $f(z)$, так как задача восстановления $f(z)$ по $\ln f'(z)$ нелинейна.

Если особенности функции выделены в виде слагаемого, то часто гарантировать однолистность по поведению производной оказывается проще, чем в предыдущих утверждениях. В качестве примера приведем

Предложение 2.1.5 *Аналитическая в полукруге*

$$\Omega = \{ \, z \, : \, |z| < 1, \Im \, z > 0 \, \}$$

функция $f(z)$*, имеющая представление*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \alpha \ln z + \varphi(z), \qquad z \in \Omega, \qquad \ln 1 = 0,$$

будет однолистна в $\overline{\Omega}$*, если* $\varphi(z)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}$*, аналитична в* Ω*,* $\varphi'(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *и, кроме того,*

$$\|\varphi'(z)\|_{\Omega} \le 1 - (\pi/2)|\alpha|, \quad \alpha \in [0, 2/\pi) \, .$$

Действительно, если z_1 и $z_2 \in (\partial\Omega) \setminus \{0\}$, $z_1 \ne z_2$,

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1,$$

то $\varphi(z(t))$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \ge \left| \frac{1}{z_1 z_2} - \frac{\alpha \ln(z_2/z_1)}{z_2 - z_1} \right| - \int_0^1 |\varphi'(z(t))| \, dt > 0,$$

так как

$$\int_0^1 |\varphi'(z(t))| \, dt < 1 - (\pi/2)|\alpha|$$

в силу наложенных требований, и

$$|1/(z_1 z_2) - \alpha \ln(z_2/z_1)/(z_2 - z_1)| \ge 1 - (\pi/2)|\alpha|, \qquad \forall z_1, z_2 \in \partial\Omega,$$

в чем могут убедить несложные, но громоздкие вычисления.

Функция $f(z)$ будет однолистной в $\overline{\Omega}$ по предложению 1.1.3, так как $n(\infty, f, \Omega) = 0$, для особой точки $t = 0$ характеристики $\mu_0^+ = \mu_0^- = 1/2$, следовательно, $p(f, \overline{\Omega}) = 1$ в силу оценки (1.9).

2.1.3 Доказательство критерия допустимости $\|\arg f'(z)\|_\Omega$

Следующее утверждение отражает логическую структуру доказательства допустимости функционала, рассматриваемого в основной теореме 2.1.2.

Лемма 2.1.4 *(о буферной зоне) Пусть Ω — непустое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, Ω_0 — некоторое непустое подмножество Ω,*

$$f\ :\ \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$$

— заданное отображение.

Пусть, далее, $K_1, \ldots, K_\mu$ — конечная система взаимно непересекающихся множеств в $\overline{\mathbb{C}}$,

$$\Omega \setminus \Omega_0 \subset K_1 \cup \cdots \cup K_\mu,$$

K_j^*— некоторое подмножество K_j, $j = 1, \ldots, \mu$, такое, что $V_j^* \subset K_j^*$, где

$$V_j^* = V_j \setminus \Omega_0, \quad V_j = \Omega \cap K_j, \quad j = 1, \ldots, \mu.$$

Отображение f будет инъективным в Ω, если выполняются требования:

I) f инъективно в Ω_0 и в каждом из V_j, $j = 1, \ldots, \mu$;

II) $f(\Omega \setminus \cup_{j=1}^{\mu} V_j) \cap K_j^* = \emptyset, \qquad j = 1, \ldots, \mu$;

III) $f(V_j^*) \subset K_j^*, \qquad j = 1, \ldots, \mu$;

IV) $f(\Omega_0 \cap V_j) \cap K_{j'} = \emptyset \quad$ при $\quad j \neq j'$.

Доказательство. Уместно процитировать Е. М. Чирку [93], с. 21: «Доказывать, по существу, нечего. Всё упрятано в определения».

Действительно, если z_1 и $z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = f(z_2)$, то z_1 и z_2 не могут лежать одновременно в Ω_0 или в одном и том же V_j. Следовательно, возможны лишь ситуации двух типов:

а) $z_1 \in \Omega \setminus \cup_{j=1}^{\mu} V_j$, $\qquad z_2 \in V_j^*$, что противоречит II) и III);

б) $z_1 \in V_j$, $\quad z_2 \in V_{j'}^*$, $\quad j \neq j'$, а это в силу III) влечет $z_1 \in V_j \setminus V_j^* = V_j \cap \Omega_0$, $z_2 \in V_{j'}^*$, что противоречит IV).

Лемма 2.1.4 доказана. Перейдем к доказательству основной теоремы 2.1.2.

Пусть $\Omega \in G^*$, докажем допустимость функционала

$$I_1(f) = \|\arg f'(z)\|_{\Omega}.$$

Рассмотрим четыре случая.

1. $\infty \in \Omega$. По определению G^*, в этом случае любая компонента $\partial\Omega$ является жордановой кусочно гладкой кривой без точек возврата, т. е. Ω ограничена конечным числом квазиконформных кривых. Но тогда (см. [39], [48], [131], [148]) $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$ с некоторыми постоянными A и B, поэтому требуемое утверждение получается из следствия 2.1.2 теоремы 2.1.3.

2. Полностью аналогичен предыдущему случай, когда любая граничная компонента является жордановой в $\mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, а на $\partial\Omega$ нет точек возврата.

3. Пусть $\infty \notin \overline{\Omega}$, на компоненте L границы $\partial\Omega$ имеются μ точек возврата $z_1, \ldots, z_\mu$. Это возможно лишь тогда, когда L является одновременно границей $\operatorname{comp}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \ni \infty$. Из расходимости лучей (определение G^*, требования б), в)) следует также, что на других компонентах $\partial\Omega$ точек возврата нет, а в точках z_j область Ω имеет внутренние нулевые углы, так как соответствующие лучи

$$\Gamma_j = \{\, z \,:\, z = z_j + w_j t, \quad |w_j| = 1, \quad 0 \le t < \infty \,\}, \quad j = 1, \ldots, \mu,$$

не должны иметь общих точек с Ω.

Проведем построения, позволяющие применить лемму 2.1.4 о буферной зоне.

Из требования расходимости лучей следует, что существуют конусы

$$K_j = K_j(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{z:\ z = z_j - \varepsilon_1 w_j + w_j t e^{i\tau},\ 0 \le t < \infty,\ |\tau| \le \varepsilon_2\},$$

где

$$j = 1, \ldots, \mu, \quad \varepsilon_1 \in (0,1), \quad \varepsilon_2 \in (0,1),$$

такие, что $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$ при $j \ne j'$, $z_j \in K_j \setminus \partial K_j$, $V_j = \Omega \cap K_j$ — односвязная область.

Кроме того, числа ε_1 и ε_2 будем считать настолько малыми, что при любом $j = 1, \ldots, \mu$ любые две точки z' и $z'' \in V_j$ можно соединить гладкой дугой $\gamma = \gamma(z', z'') \subset V_j$ с параметрическим представлением $z = z(s)$, $0 \le s \le l$, причем

$$dz/ds = \exp[i\theta(s)], \quad \max\theta(s) - \min\theta(s) \le \theta_0 < \pi.$$

Тогда условие

$$I_1(f) \le (\pi - \theta_0)/2$$

гарантирует однолистность $f(z)$ в каждом из V_j согласно теореме В. С. Рогожина.

Обозначим $z_j^* = z_j - (\varepsilon_1/2)w_j$ и

$$K_j^* = K_j(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2) = \{\, z\ :\ z = z_j^* + w_j t e^{i\tau}, 0 \le t < \infty, |\tau| < \varepsilon_2 \,\}.$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что

$$V_j^* = \Omega \cap \{\, z\ :\ |z - z_j| \le \varepsilon_0 \,\}$$

лежит строго внутри K_j^*, $j = 1, \ldots, \mu$, и, кроме того,

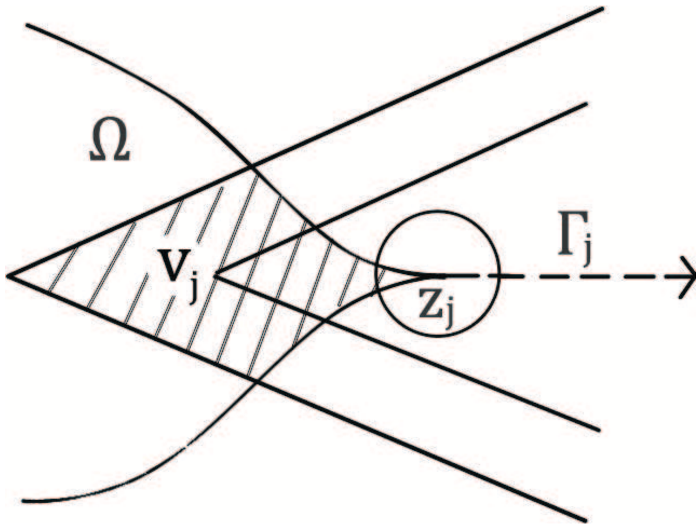

Рис. 2.2: К пункту 3 доказательства

а) $0 < \varepsilon_0 < (\varepsilon_1/2)\sin\varepsilon_2$, и

$$|\arg[\overline{w}_j(z'' - z_j)]| < \varepsilon_2/2$$

для любой точки $z'' \in \overline{V}_j^* \setminus \{z_j\}$,

б) для любой точки $z' \in V_j^*$ существует точка $z'' \in \Omega \cap \partial V_j^*$, такая, что

$$\left|\arg[\overline{w}_j \int_{z''}^{z'} f'(\zeta)d\zeta]\right| < I_1(f) + \varepsilon_2/2.$$

Последнее неравенство можно удовлетворить в предположении, что $I_1(f) + \varepsilon_2/2 < \pi/2$.

Далее, введем в рассмотрение множество

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{\mu} \overline{V}_j^*.$$

Уменьшая, если это необходимо, число $\varepsilon_0 > 0$, будем считать, что область Ω_0 ограничена простыми кусочно-гладкими кривыми. Тогда имеем

$$\Omega_0 \in G_{1,1}(A_0, B_0)$$

с некоторыми положительными постоянными A_0 и B_0.

Пусть

$$z_0 \in \Omega_0, \quad F(z) = z_0 + [f(z) - f(z_0)] \,/\, |f'(z_0)|\,,$$

тогда

$$F(z_0) = z_0, \quad |F'(z_0)| = 1, \quad I_1(f) = I(F).$$

Покажем существование постоянной $\kappa = \kappa(\Omega) > 0$, такой, что при $I_1(F) \leq \kappa$ выполняются требования леммы 2.1.4 для отображения F и построенных выше множеств

$$\Omega_0, \quad K_j, \quad K_j^*, \quad V_j, \quad V_j^*.$$

Тогда $F(z)$, значит, и $f(z)$, будут однолистными в области Ω.

По построению V_j, функция $F(z)$ будет однолистной в V_j при условии

$$0 < \kappa \leq \kappa_1 = (\pi - \theta_0)/2.$$

Далее, по теореме 2.1.3 функция $F(z)$ будет однолистной в Ω_0 при условии

$$0 < \kappa \leq \kappa_2 = \pi/(8A_0B_0).$$

Кроме того, как показано при доказательстве теоремы 2.1.3, имеет место неравенство (см. (2.10))

$$\|\mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega) F''(z)/F'(z)\|_{\Omega_0} \leq (4/\pi) I_1(F).$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon_3 > 0$ существует постоянная $\kappa_3 > 0$, такая, что неравенство $I_1(F) \leq \kappa_3$ влечет непрерывность $F(z)$ в $\overline{\Omega}_0$ и оценку

$$\|F(z) - z\|_{\Omega_0} < \varepsilon_3.$$

Это оценка и непрерывность функции $F(z)$ в $\overline{\Omega}_0$ являются следствиями леммы 3.3.4, доказываемой ниже, при $R(z) \equiv z$.

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$, где $\varepsilon_4 = (1/\pi)\varepsilon_2(\varepsilon_1/2 - \varepsilon_0) > 0$,

$$\varepsilon_5 = (\varepsilon_1/2)\sin\varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_6 = \inf_{z\in V_j, j\neq j'} \operatorname{dist}(z, K_{j'}).$$

Пусть $0 < \kappa < \kappa_3$. Тогда в силу выбора постоянной ε_6 выполняется требование IV) леммы 2.1.4. Далее, если

$$z \in \Omega \setminus \cup_{j=1}^{\mu} V_j, \quad w \in K_j^*$$

для некоторого j, то справедливо неравенство $|z - w| \geq \varepsilon_5$, следовательно, справедливо условие II) леммы 2.1.4. Остается подтвердить свойство III). Пусть $z' \in V_j^*$. Уменьшив в случае необходимости κ_3, будем считать, что

$$0 < \kappa_3 < \varepsilon_3/2.$$

По построению V_j^*, существует точка

$$z'' \in \Omega \cap \partial V_j^* \subset \partial\Omega_0,$$

для которой

$$|\arg\{\overline{w}_j[F(z') - F(z'')]\}| \leq I_1(F) + \varepsilon_2/2 < \varepsilon_2,$$

кроме того,

$$|\arg[\overline{w}_j(z'' - z_j^*)]| < \varepsilon_2/2.$$

Пользуясь соотношениями

$$|F(z'') - z''| < \varepsilon_4, \qquad F(z') = F(z'') + [F(z') - F(z'')],$$

$$|z'' - z_j^*| \geq \varepsilon_1/2 - \varepsilon_0,$$

оценим $\theta^* = \arg(\overline{w}_j[F(z') - z_j^*])$. Имеем

$$F(z') - z_j^* = (z'' - z_j^*)\left[1 + \frac{F(z'') - z''}{z'' - z_j^*}\right] + [F(z') - F(z'')]\,.$$

Поэтому

$$|\theta^*| \le \max\{\,\varepsilon_2, \varepsilon_2/2 + (\pi/2)\varepsilon_4/(\varepsilon_1/2 - \varepsilon_0)\,\} = \varepsilon_2,$$

т. е. $F(z') \in K_j^*$, что и требовалось. Таким образом, функция $F(z)$ однолистна в Ω, если только $I_1(F) \le \kappa = \min\{\,\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\,\}$. Следовательно, функционал I_1 допустим в Ω в случае 3.

4. Пусть $\infty \in L \subset \partial\Omega$, L — граничная компонента Ω. По определению класса G^*, на границе Ω точки возврата

$$z_1, \ldots, z_\mu \in \mathbb{C}$$

возможны лишь на L. Для них построим множества K_j, K_j^*, V_j, V_j^*, $j = 1, \ldots, \mu$, как и в предыдущем случае.

Далее, если $\varepsilon_7 > 0$ достаточно мало, то в силу кусочной гладкости L множество

$$\Omega \cap \{\,z\,:\,|z| > 1/\varepsilon_7\,\}$$

состоит из конечного числа односвязных областей

$$V_{\mu+1}(\varepsilon_7), \ldots, V_{\mu+\nu}(\varepsilon_7), \quad \nu \ge 1,$$

каждая из которых ограничена жордановой в $\overline{\mathbb{C}}$ кривой, проходящей через точку $z = \infty$. Учитывая кусочную гладкость границы и отсутствие у области внешних нулевых углов, можно провести следующие построения.

Во-первых, подобрать $\varepsilon_7 > 0$ настолько малым, чтобы, как и в пункте 3, существовало число $\theta_0 \in (0, \pi)$ и условие

$$I_1(f) < (\pi - \theta_0)/2$$

гарантировало однолистность $f(z)$ в $V_j(\varepsilon_7)$, $j = \mu+1, \ldots, \mu+\nu$.

Во-вторых, построить множества K_j, K_j^*, V_j, V_j^* для всех $j = \mu+1, \ldots, \mu+\nu$ следующим образом:

$$V_{\mu+j} = V_{\mu+j}(\varepsilon_7) = \Omega \cap K_{\mu+j}, \quad j = 1, \ldots, \nu,$$

$$K_{\mu+j} = \{\, z \,:\, 1/\varepsilon_7 < |z| < \infty,\ |\arg[\overline{w}_{\mu+j}(z - z^*_{\mu+j})]| < \varphi_{\mu+j}\},$$

$$K^*_{\mu+j} = \{\, z \,:\, 2/\varepsilon_7 < |z| < \infty,\ |\arg[\overline{w}_{\mu+j}(z - z^*_{\mu+j})]| < \varphi_{\mu+j} - \varepsilon_8\},$$

с некоторыми

$$z^*_{\mu+j} \in \mathbb{C}, \quad \varphi_{\mu+j} \in (0, \pi), \quad \varepsilon_8 \in (0, 1),$$

причем

$$\Omega \cap K^*_{\mu+j} = V_{\mu+j}(\varepsilon_7/2),$$

$K_{\mu+j} \cap K_{\mu+j'} = \emptyset$ при $j \neq j'$, линии

$$\arg\left[\overline{w}_{\mu+j}(z - z^*_{\mu+j})\right] = \pm(\varphi_{\mu+j} - \varepsilon_8)$$

не являются касательными к L в точке $z = \infty$. Кроме того, положим

$$V^*_{\mu+j} = \{\, z \,:\, |z| > 1/\varepsilon_9 \,\} \cap V_{\mu+j}, \quad \Omega_0 = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{\mu+\nu} V_j^*,$$

причем выбор $\varepsilon_9 > 0$ подчиняется требованиям, аналогичным условиям на ε_0 в пункте 3. Дальнейшее доказательство проводится точно так же, как и в предыдущем пункте, с привлечением множеств K_j, K_j^*, V_j, V_j^*, $j = 1, \ldots, \mu+\nu$, и леммы 2.1.4. Мы ограничимся этими указаниями.

Итак, если $\Omega \in G^*$, то функционал I_1 допустим. Построением ряда контрпримеров докажем обратное утверждение. А именно, если Ω — конечносвязная область, ограниченная кусочно-гладкими кривыми, и $\Omega \notin G^*$, то I_1 не является допустимым, т. е. существует последовательность (f_ν) неоднолистных в $\Omega \setminus \{\infty\}$ аналитических функций $f_\nu(z)$, $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$, с однозначными $\ln f'_\nu(z)$, для которых

$$\lim_{\nu\to\infty} I_1(f_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \|\arg f'_\nu(z)\|_\Omega = 0.$$

Нарушения требований а) или б) определения G^* отсекаются проще всего. Действительно, пусть z_1 и z_2 — несовпадающие точки, Ω_0 — область, получаемая из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением некоторой простой разомкнутой кусочно-гладкой дуги $\gamma(z_1, z_2)$ с концами в точках z_1 и z_2. При $\nu = 1, 2, \ldots$ рассмотрим неоднолистные в Ω_0 функции

$$\zeta = f_\nu(z; z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{-1}\left(w^{1+1/\nu} + 1\right) / \left(w^{1+1/\nu} - 1\right),$$

где $w = (z - z_1)/(z - z_2)$, ветвь выделена условием $w^{1+1/\nu} = 1$ при $z = \infty \in \Omega_0$;

$$\zeta = f_\nu(z; z_1, \infty) = (z - z_1)^{1+1/\nu}.$$

Имеем

$$\|\arg f'_\nu(z; z_1, z_2)\|_{\Omega_0} \leq (1/\nu)\,\mathrm{const} \to 0$$

при $\nu \to \infty$.

С другой стороны, очевидно, если Ω не удовлетворяет условиям а) или б) определения G^*, то, взяв точки z_1 и z_2 в одной и той же компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Omega \cup \{\infty\})$, мы получим $\Omega_0 \supset \Omega$. При этом функции $f_\nu(z; z_1, z_2)$ окажутся неоднолистными не только в Ω_0, но и в Ω, если z_1 и z_2 выбраны так, чтобы точка z_1 (или z_2) совпала с вершиной нулевого внешнего угла при нарушении требования б) определения G^*. А при нарушении простоты $\operatorname{comp}(\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ точки z_1 и z_2 выбраны так, чтобы точка самопересечения компоненты $(\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ лежала на $\gamma(z_1, z_2)$.

Для области Ω, удовлетворяющей условиям а) и б) определения G^*, остается обосновать требования b_1), b_2), b_3).

Доказательства свойств b_j) проводятся по единой схеме. А именно, предположив противное, построим некоторую область $\Omega_0 \supset \Omega$, неоднолистные отображения

$$f_\nu \,:\, \Omega_0 \to \overline{\mathbb{C}} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

с однозначными $\ln f'_\nu(z)$. Покажем, что $f_\nu(z)$ неоднолистны в Ω, $\Omega_\nu = f_\nu(\Omega_0)$ сходятся к Ω_0 как к ядру (в смысле К. Каратеодори), причем $\|\arg f'_\nu(z)\|_{\Omega_0} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Рассмотрим подробнее один из случаев и поясним другие.

Пусть, например, существует конечная точка возврата $z_1 \in \partial\Omega$, где Ω имеет нулевой внутренний угол, причем луч Γ_1 имеет общую с Ω точку z'_1. Пусть Ω_0 — односвязная область со свойствами: при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\Omega \cap U_\varepsilon = \Omega_0 \cap U_\varepsilon, \quad U_\varepsilon = \{\, z \,:\, |z - z_1| < \varepsilon \,\},$$

$$\infty, z'_1 \in \Omega_0, \quad \Omega \subset \Omega_0 \subset \overline{\mathbb{C}},$$

$\partial\Omega_0 = L_0$ — замкнутая жорданова кривая, гладкая, за исключением точки $z = z_1$. Далее мы построим неоднолистные области Ω_ν, исходя из Ω_0, «вытягиванием острия». Без ограничения общности можно считать, что $z_1 = 0$, $z'_1 = 1$, Γ_1 — положительная полуось абсцисс, вблизи $z = 0$ дуги $L'(\varepsilon)$, $L''(\varepsilon)$ кривой L_0 параметризуются непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y = h_1(x), \quad x' \le x \le 0, \qquad y = h_2(x), \quad x'' \le x \le 0,$$

причем $h_1(x) \geq h_2(x)$, $h_j(0) = h'_j(0) = 0$, $j = 1, 2$.

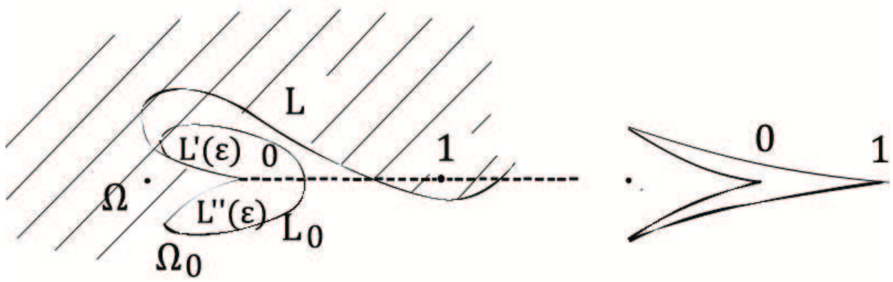

Рис. 2.3: Острие до и после удлинения

Пусть $x_\nu < 0$ таково, что $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$,

$$\|h_j(x)\|_{[x_\nu,0]} < 1/\nu, \quad \|h'_\nu(x)\|_{[x_\nu,0]} < 1/\nu, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Построим замкнутую и гладкую, кроме одной точки, кривую

$$L_\nu = L'_0 \cup L'_\nu \cup L''_\nu, \quad L'_0 = L_0 \setminus \left[L'(\varepsilon) \cup L''(\varepsilon)\right],$$

где L'_ν и L''_ν определяются соответственно непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y = h_{1\nu}(x), \quad x' \leq x \leq 1, \qquad y = h_{2\nu}(x), \quad x'' \leq x \leq 1,$$

обладающими следующими свойствами:

ν_1) $h_{1\nu}(x) = h_1(x)$ и $h_{2\nu}(x) = h_2(x)$ при $x \leq x_\nu$;

ν_2) $h_{1\nu}(1) = h_{2\nu}(1) = 0$, $h'_{1\nu}(1) = h'_{2\nu}(1) = 0$;

ν_3) $h_{1\nu}(x) > h_1(x) > h_2(x) > h_{2\nu}(x)$ при $x_\nu < x < 0$;

ν_4) $h_{1\nu}(x) > 0 > h_{2\nu}(x)$ при $0 \leq x < 1$;

ν_5) $\|h_{j\nu}(x)\|_{[x_\nu,1]} \leq 2/\nu$, $\|h'_{j\nu}(x)\|_{[x_\nu,1]} \leq 2/\nu$,, где $j = 1, 2$, а индекс $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть Ω'_ν — ограниченная однолистная область («клин»), граница которой образована графиками функций

$$y = h_j(x), \quad x_\nu \le x \le 0, \quad y = h_{j\nu}(x), \quad x_\nu \le x \le 1.$$

Так как $1 \in \Omega_0$ и $1 \in \partial\Omega'_\nu$, то прикрепив Ω'_ν к Ω_0 вдоль $L'(\varepsilon)$ и $L''(\varepsilon)$, получим неоднолистную область Ω_ν без точек ветвления. По построению, $\Omega_0 \subset \Omega_\nu$ при любом ν, (Ω'_ν) и (Ω_ν) — последовательности убывающих областей, причем

$$\cap_{\nu=1}^{\infty} \overline{\Omega}'_\nu = [0, 1].$$

Следовательно, последовательность областей (Ω_ν) сходится к области Ω_0 как к ядру.

Рассмотрим конформные отображения

$$f_\nu \,:\, \Omega_0 \to \Omega_\nu, \quad f_\nu(\infty) = \infty, \quad f_\nu(0) = 1.$$

Пусть $g_\nu(w) = f_\nu^{-1}(w)$ — обратное отображение, однозначно определенное при $w \in \Omega_0$. По теореме Фарреля (см. точную формулировку и обобщения в [65]), $g_\nu(w) \to w$ при $\nu \to \infty$ равномерно в $\overline{\Omega}_0$, что дает $\| \arg f'_\nu(z)\|_{\Omega_0} \to 0$ при $\nu \to \infty$ с учетом

равномерного на $[0, 1]$ стремления $h_{j\nu}(x)$, $h'_{j\nu}(x)$ к нулю при $\nu \to \infty$,

гладкости $(\partial\Omega_0) \setminus \{0\}$, $(\partial\Omega_\nu) \setminus \{1\}$,

нормировки $f_\nu(0) = 1$,

непрерывности $\arg f'_\nu(z)$ в $\overline{\Omega}_0$ и его геометрического смысла.

Так как

$$0 \in \partial\Omega, \quad 1 \in \Omega, \quad f_\nu(0) = 1, \quad \lim_{\nu\to\infty} \|g_\nu(w) - w\|_{\mathbb{D}(r)} = 0$$

для круга $\mathbb{D}(r) = \{\, w \,:\, |w - 1| < r = \operatorname{dist}(1, \partial\Omega)/2 \,\}$, то при достаточно больших ν для всех $f_\nu(z)$ имеем $f_\nu(0) = 1$, $f_\nu(z_\nu) = 1$

с некоторым $z_\nu \in \mathbb{D}(r)$, т. е. $f_\nu(z)$ будет неоднолистной в Ω. Но

$$\lim_{\nu\to\infty} I_1(f_\nu) = 0,$$

следовательно, в этом случае функционал I_1 не является допустимым в Ω, что и требовалось доказать.

Если будут нарушены другие свойства из требования в), то Ω_0 и неоднолистные области Ω_ν строятся аналогично разобранному случаю.

Если, например, нарушено условие $\Gamma_j \cap \Gamma_{j'} = \emptyset$ при $j \neq j'$, то нужно «вытягивать» вдоль Γ_j и $\Gamma_{j'}$ два острия в точках z_j и $z_{j'}$ и нормировать $f_\nu(z)$ так, чтобы угловые точки Ω_0 перешли в угловые точки Ω_ν. Сама область Ω_0 в этом случае берется совпадающей с Ω в малых окрестностях точек z_j и $z_{j'}$, $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\partial\Omega_0$ имеет две угловые точки. Сходимость к нулю нормы $\|\arg f'_\nu(z)\|_{\Omega_0}$ при этом геометрически очевидна и следует из известных теорем о сходимости конформных отображений при условии, что последовательность Ω_ν, монотонно убывая, сходится к Ω как к ядру.

Итак, теорема доказана.

2.2 Шварциан и близкие ему инварианты

Если функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в области $\Omega \subset \overline{C}$ и связаны со шварцианом

$$\{f, z\} := (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2 \equiv f'''/f' - (3/2)(f''/f')^2$$

мероморфной в Ω функции $f(z)$ соотношением

$$2Q(z) - P'(z) - (1/2)P^2(z) \equiv \{f, z\}, \qquad z \in \Omega, \tag{2.15}$$

то однолистность $f(z)$ в Ω оказывается равносильной неколеблемости решения дифференциального уравнения

$$w'' + Pw' + Qw = 0. \tag{2.16}$$

В случае

$$P(z) \equiv 0, \quad Q(z) \equiv \{f, z\}/2$$

этот факт был замечен и использован З. Нехари [151].

Ясно, что можно исследовать однолистность функции $f(z)$ в терминах коэффициентов уравнения (2.16), что позволит единым образом рассмотреть как условия по шварциану, так и условия по отношению к предшварциану f''/f'. Такой подход нетрудно осуществить для функций, заданных в канонических областях. При переходе к произвольным областям единый подход применим не всегда: существует, например, область Ω, для которой функционал $\|\{f, z\}\|_\Omega$ допустим, а функционал $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega$ не является таковым (см. ниже теорему 2.2.3 при $1/3 \le \alpha < 1/2$).

Мы по-прежнему пользуемся супремум нормой, т. е. обозначением

$$||\psi(z)||_\Omega := \sup_{z\in\Omega} |\psi(z)|.$$

Каждое $(\,P, Q\,)$-условие представляет собой серию достаточных условий однолистности, так как (2.15) выполнено при произвольном выборе мероморфной функции $\varphi(z)$ в равенствах

$$P(z) = 2\varphi(z) - \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Q(z) = \varphi'(z) + \varphi^2(z) - \varphi(z)\frac{f''(z)}{f'(z)},$$

или функции $g(z)$ в равенствах

$$P(z) = -\frac{g''(z)}{g'(z)}, \qquad 2Q(z) = \{f, z\} - \{g, z\}.$$

Наиболее простыми являются три частных случая:

1) $P(z) = 0, \qquad Q(z) = \{f, z\}/2;$

2) $P(z) = -f''(z)/f'(z), \qquad Q(z) = 0;$

3) $P(z) = -q(z, z_0) \equiv -f''(z)/f'(z) - 2(z - z_0)^{-1}$, $Q(z) = q(z, z_0)/(z - z_0)$.

Отметим, что $q(z_0, z_0) = 0$, если $z_0 \in \Omega$.

2.2.1 Обобщения теорем З. Нехари и Й. Беккера

Естественно рассмотреть сначала случаи, когда областью определения функций является круг или внешность круга.

Теорема 2.2.1 *Пусть $\Omega = \Omega(a, r)$ — круг с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ радиуса $r \in (0, \infty)$ или же внешность этого круга.*

Пусть функция $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в Ω, функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в Ω и удовлетворяют для всех $z \in \Omega$ уравнению связи (2.15), $\rho_\Omega(z)$ — коэффициент гиперболической метрики области Ω, т. е. $\rho_\Omega(z) = r/\left|r^2 - |z - a|^2\right|$.

Если для любой точки $z \in \Omega$

$$\frac{|z - a|}{r} |P(z)| + |Q(z)| / \rho_\Omega(z) \leq \rho_\Omega(z), \tag{2.17}$$

то $f(z)$ однолистна в Ω.

Доказательство. Из аналитической теории дифференциальных уравнений известно, что существуют аналитические линейно независимые решения w_1 и w_2 уравнения

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0,$$

такие, что

$$f(z) = w_1(z)/w_2(z).$$

Из дифференциального уравнения для w следует, что

$$P(z) = \frac{w_1''w_2 - w_1w_2''}{w_1'w_2 - w_1w_2'}, \qquad Q(z) = \frac{w_1''w_2' - w_1'w_2''}{w_1'w_2 - w_1w_2'}.$$

Подставив в эти тождества локальные разложения в ряд $w_1(z)$ и $w_2(z)$ в Ω и учитывая аналитичность функций $P(z)$ и $Q(z)$ в Ω, получим, что функции $w_1(z)$, $w_2(z)$ могут иметь лишь несовпадающие нули и $w_1'w_2 - w_1w_2' \neq 0$ в Ω.

Без ограничения общности будем считать, что $a = 0$, $r = 1$, т. е. Ω — единичный круг или его внешность. Пусть параметр t — фиксированное число, $t \in (0,1)$ для случая круга, $t \in (1,\infty)$ для внешности круга. Введем функции

$$g(z) = f(tz), \quad P_1(z) = tP(tz), \quad Q_1(z) = t^2Q(tz), \quad v(z) = w(tz),$$

для которых справедливы все те соотношения, что и для функций $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $w(z)$ в Ω. Аналог основного требования (с учетом предположения $a = 0$, $r = 1$) имеет вид

$$(|zP_1(z)| + |(z\overline{z} - 1)Q_1(z)|)\ |z\overline{z} - 1| < 1, \quad \forall z \in \overline{\Omega},$$

и получается с учетом неравенств

$$\left||z|^2t^2 - 1\right| > \left||z|^2 - 1\right|, \quad \left||z|^2 - t^{-2}\right| > \left||z|^2 - 1\right|,$$

справедливых при любом $z \in \overline{\Omega}$ с учетом выбора параметра t.

Далее, воспользуемся продолжением Л. Альфорса и Г. Вейля [94], положив

$$\tilde{f}(z) = \{f(z),\ z \in \Omega; \quad F(z),\ z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega\},$$

где

$$F(1/\overline{z}) = \frac{v_1(z) + (1/\overline{z} - z)v_1'(z)}{v_2(z) + (1/\overline{z} - z)v_2'(z)}, \quad z \in \Omega.$$

Функция $F(z)$ непрерывна в сферической метрике в силу соотношения $v_1'v_2 - v_1v_2' \neq 0$. Вычисления дают

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \frac{v_1'v_2 - v_1v_2'}{[v_2 + (z - 1/\overline{z})v_2']^2},$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z}} = -\frac{\partial F(z)}{\partial z}[z^2\overline{z}^2(1 - z\overline{z})P_1(1/\overline{z}) - z^2\overline{z}^{-2}(1 - z\overline{z})^2 Q_1(1/\overline{z})].$$

Следовательно, в окрестности любой точки $z \in \overline{C} \setminus \Omega$ якобиан отображения F (если $F(z) \neq \infty$) или $1/F$ (если $F(z) = \infty$) непрерывен и положителен, т. е. функция $F(z)$ локально однолистна и сохраняет ориентацию.

Привлекая снова лемму 1.1.2 о склейке при $n = 2$, получим локально гомеоморфное, следовательно, и глобально гомеоморфное отображение $\tilde{f} : \overline{C} \to \overline{C}$, что влечет однолистность $f(z)$ в Ω в силу произвольности t.

В частных случаях при $P(z) = 0$ либо $Q(z) = 0$ теорема 2.2.1 дает указанные выше результаты З. Нехари и Й. Беккера.

Предложение 2.2.1 *Мероморфная в полуплоскости $H = \{ z : y = \Im z > 0 \}$ функция $f(z)$ будет однолистной в H, если аналитические в H функции $P(z)$ и $Q(z)$ в любой точке $z \in H$ удовлетворяют соотношениям ($z = x + iy \in H$)*

$$2Q - P' - P^2/2 = \{f, z\}, \quad |P(z)| + 2y\,|Q(z)| \leq (2y)^{-1}. \quad (2.18)$$

Предложение 2.2.1 можно обосновать дословным перенесением на случай полуплоскости предыдущего доказательства с заменой $z' = (z - i)/(z + i)$.

Можно также заметить, что (2.18) влечет (2.17) в любом круге $\Omega(a, r) \subset H$, следовательно, по теореме 2.2.1 функция $f(z)$ однолистна в $\Omega(a, r)$ и в полуплоскости

$$H = \cup_{\nu=1}^{\infty}\{\, z \,:\, |z - i\nu| < \nu \,\},$$

т. е. предложение 2.2.1 — следствие теоремы 2.2.1.

Если функция $f(z)$ аналитична и однолистна в H, то из неравенства Л. Бибербаха [47], с. 52, заменой переменных получается соотношение

$$\|yf''(z)/f'(z)\|_H \le 3, \qquad y = \Im z > 0.$$

Из предложения 2.2.1 при $P(z) = -f''(z)/f'(z)$ или

$$P(z) = -f''(z)/f'(z) - 2/(z - z_0)$$

получим

Следствие 2.2.1 *(см. [6], [117], [143]) а) Если $f(z)$ аналитична в $H = \{\, z \,:\, y = \Im z > 0 \,\}$, $f'(z) \ne 0$ и*

$$\|yf''(z)/f'(z)\|_H \le 1/2, \qquad y = \Im z > 0,$$

то $f(z)$ однолистна в H.

б) Пусть функция $f(z)$ аналитична в $H \setminus \{z_0\}$, имеет простой полюс в точке $z_0 \in H$, и для любой точки $z \in H$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{2}{z - z_0}\right| \le \frac{1}{2y + 4y^2|z - z_0|^{-1}}, \quad y = \Im z > 0.$$

Тогда функция $f(z)$ будет однолистной в H.

В лемме 2.1.1 было установлено достаточное условие $|n|$-листности в виде неравенства

$$|zf''(z)/f'(z) - n + 1| \leq |n|/|1 - |z|^{2n}|, \quad |z| < 1.$$

Получим его аналог в терминах шварциана.

Напомним сначала, что для единичного круга $\mathbb{D}$ и локально однолистной функции $f(z)$ известное условие З. Нехари запишется в виде неравенства (получаемого из (2.17) при $P(z) = 0$)

$$|\{f, z\}| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \qquad |z| < 1. \tag{2.19}$$

Е. Хиллом [138] доказана точность постоянной 2 в достаточном условии однолистности (2.19).

Пусть $f(z)$ мероморфна в $\mathbb{D}$ и $|n|$-листна вблизи начала координат, т. е.

$$\lim_{z \to 0} z^{-n}[f(z) - c] = a \neq 0.$$

Тогда

$$\{f, z\} = -\frac{n^2 - 1}{2z^2} + O(1), \qquad z \to 0.$$

Таким образом, вблизи начала координат ограничена сумма

$$\{f, z\} + (n^2 - 1)/(2z^2).$$

Справедлив следующий аналог леммы 2.1.1, обобщающий условие (2.19) на $|n|$-листный случай.

Предложение 2.2.2 *Пусть $f(z)$ аналитична при $0 < |z| < 1$, n — целое число,*

$$n \neq 0, \quad \lim_{z \to 0} [z^{-n} f(z)] = 1.$$

Функция $f(z)$ будет $|n|$-листной в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

если

$$I(f)=\left\|\left(1-|z|^{2|n|}\right)^2 z^{-2|n|+2}\left(\{f,z\}+\frac{n^2-1}{2z^2}\right)\right\|_{\mathbb{D}}\le 2n^2. \quad (2.20)$$

Постоянная $2n^2$ в правой части (2.20) точна: при любом $\varepsilon>0$ существует p-листная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ из указанного класса, для которой

$$I(f)<2n^2+\varepsilon, \quad p=p(f,\mathbb{D})\ge 2|n|.$$

Доказательство отличается от доказательства леммы 2.1.1 и теоремы 2.2.1 только тем, что при построении продолжения мы пользуемся формулами

$$\tilde{f}(z)=\{f(tz),|z|\le 1;F(z),|z|\ge 1\}, \quad t\in(0,1),$$

$$F(1/\overline{z})=\frac{v_1(z)+(1/\overline{z}-z)v_1'(z)/(nz^{n-1})}{v_2(z)+(1/\overline{z}-z)v_2'(z)/(nz^{n-1})},$$

где $v_j(z)=w_j^*(tz)$, w_1 и w_2 — линейно независимые решения уравнения

$$w''+(1/2)\{f,z\}w=0,$$

и

$$w_j^*=\sqrt{z^{n-1}}w_j.$$

Как и в лемме 2.1.1, точность проверяется сведением к проверке точности постоянной в однолистном случае: если $g(z)$ удовлетворяет (2.19) с постоянной $(2+\varepsilon)$ и неоднолистна, то функция $f(z)=g(z^{|n|})$ удовлетворяет (2.20) с постоянной $(2+\varepsilon)n^2$ и p-листна, $p\ge 2|n|$.

Отметим, что обратный переход от (2.20) к (2.19) заменой переменных, вообще говоря, невозможен, так как для функции $f(z)$ из предложения 2.2.2 функция $g(z)=f(z^{1/|n|})$ не обязана быть однозначной.

2.2.2 Условия однолистности в невыпуклых областях

Определим классы невыпуклых областей с числовыми характеристиками. Естественно, эти классы включают в себя и выпуклые области как частный случай.

Определение. *Пусть θ и d — фиксированные постоянные,*

$$(\theta, d) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty).$$

Через $R_0(\theta, d)$ обозначим класс областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, таких, что любые две точки $z_1, z_2 \in \Omega$ можно соединить лежащей в области Ω дугой окружности $\gamma(z_1, z_2)$ с длиной дуги

$$l(z_1, z_2) \leq d$$

и радианной мерой

$$\alpha(z_1, z_2) \leq \theta.$$

Определение. *Семейство $R(\theta, d)$ означает следующий класс областей Ω:*

$\Omega \subset \mathbb{C}$, любые две точки z_1 и z_2 из Ω можно соединить гладкой дугой $\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$ с длиной $l(z_1, z_2) \leq d$ и максимальным колебанием угла касательной $\leq \theta$.

Класс $R(\theta, d)$ включает, очевидно, класс $R_0(\theta, d)$, но оказывается эффективным, как убедимся ниже, лишь при $\theta \in [0, \pi)$.

Очевидно, если область Ω выпукла и ограничена, то

$$\Omega \in R(0, \operatorname{diam} \Omega).$$

Определение. *Для односвязной области $\Omega \subset \overline{C}$ с кусочно-гладкой границей L через $A = A(L)$ обозначим такую постоянную, что любые две точки z_1 и z_2 из L можно соединить лежащей в $\overline{\Omega}$ дугой $\gamma(z_1, z_2)$ длины*

$$l(z_1, z_2) \leq A(L)|z_1 - z_2|.$$

Очевидно, $\Omega \in G_1(A(L))$.

Приведенные здесь классы областей встречаются в ряде работ (см., например, [78], [79]).

Напомним обозначение: $\|\psi(z)\|_\Omega = \sup_{z\in\Omega} |\psi(z)|$.

Теорема 2.2.2 *Пусть функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в Ω и связаны соотношениями (2.15) с мероморфной в Ω функцией $f(z)$. Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если выполнено одно из трёх следующих условий:*

1^0. $\Omega \in R(\theta, d), \quad (\theta, d) \in [0, \pi) \times (0, \infty),$

$$\|P(z)\|_\Omega + d\pi^{-1} \|Q(z)\|_\Omega \leq \pi d^{-1} \cos(\theta/2);$$

2^0. $\Omega \in R_0(\theta, d), \quad (\theta, d) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty),$

$$2d \|P(z)\|_\Omega + 4d^2(2\pi + \theta)^{-1} \|Q(z)\|_\Omega \leq 2\pi - \theta;$$

3^0. *$P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в $\overline{\Omega}$, Ω односвязна и ограничена кусочно гладкой кривой L, для которой $A = A(L) < \infty$, и*

$$\int_L |P(z)dz| + A \operatorname{diam} L \int_L |Q(z)dz| \leq 2/A.$$

Нам потребуется следующее замечательное утверждение (ср. с [21], § 6).

Лемма 2.2.1 *Пусть функция $f(z)$ мероморфна на некоторой простой дуге $\gamma(z_1, z_2)$, причем*

$$f(z) \not\equiv \text{const}, \quad f(z_1) = f(z_2) \neq \infty.$$

Тогда для любых аналитических на $\gamma(z_1, z_2)$ функций $P(z)$, $Q(z)$, удовлетворяющих (2.15), найдется аналитическая на $\gamma(z_1, z_2)$ функция $w(z)$, являющаяся решением уравнения (2.16), причем

$$w(z_1) = w(z_2) = 0, \quad w(z) \not\equiv 0.$$

Лемма доказывается предъявлением функции

$$w(z) = [f(z) - f(z_1)] \left(1/\sqrt{f'(z)}\right) \exp\left[(-1/2)\int P(z)dz\right].$$

В силу (2.15) такая функция удовлетворяет условию (2.16), кроме того, $w(z_1) = w(z_2) = 0$.

Возможность выделения однозначной ветви $w(z)$ вдоль кривой $\gamma(z_1, z_2)$ следует из того, что $f'(z)$ не имеет нулей и может иметь полюсы лишь второго порядка, так как ввиду связи (2.15) шварциан аналитичен, что, как известно, влечет локальную однолистность $f(z)$.

Доказательство теоремы 2.2.2.

1^0. Если $f(z)$ неоднолистна, т. е. $f(z_1) = f(z_2)$ для несовпадающих точек z_1 и z_2 из Ω, то по лемме существует функция $w(z)$, $w(z) \not\equiv 0$, $w(z_1) = w(z_2) = 0$ и

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0, \qquad z \in \gamma(z_1, z_2).$$

Умножим обе части этого тождества на $\overline{w}\,dz$ и проинтегрируем от z_1 до z_2. После несложных преобразований получим

$$\int_{z_1}^{z_2} |w'|^2 d\overline{z} = \int_{z_1}^{z_2} P(z) w' \overline{w} dz + \int_{z_1}^{z_2} Q(z)|w|^2 dz.$$

В качестве пути интегрирования возьмем ту гладкую кривую, о которой идет речь в определении $\Omega \in R(\theta, d)$, т. е. $z = z(s)$, где s — дуговая абсцисса, $0 \le s \le l$,

$$dz/ds = \exp[i\alpha(s)], \quad l \le d, \quad \max \alpha(s) - \min \alpha(s) \le \theta.$$

После подстановки $z = z(s)$ получим

$$\Delta = \int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 e^{-i\alpha(s)} ds = \int_0^l P \frac{dw}{ds} \overline{w}\, ds + \int_0^l Q |w|^2 e^{i\alpha(s)} ds. \quad (2.21)$$

Покажем, что (2.21) противоречит предположениям. Действительно, по теореме Вейерштрасса о среднем

$$|\Delta| = |\zeta^*| \int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds \ge \cos\frac{\theta}{2} \int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds,$$

где ζ^* — некоторая точка, лежащая в выпуклой оболочке множества значений функции

$$\zeta(s) = e^{-i\alpha(s)}, \quad 0 \le s \le l,$$

следовательно,

$$\alpha_1 \le \arg \zeta^* \le \alpha_2, \quad \alpha_2 - \alpha_1 \le \theta < \pi,$$

и, поэтому $|\zeta^*| \ge \cos(\theta/2)$. С другой стороны, в силу (2.21)

$$|\Delta| = \|Q(z)\|_\Omega \int_0^l |w|^2 ds +$$

$$+\|P(z)\|_\Omega \left(\int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^l |w|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Далее, используя неравенство ([90], с. 222 или [151])

$$\int_0^l |w|^2 ds \le \frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds, \quad w(z_1)=w(z_2)=0, \tag{2.22}$$

а также требование 1^0 теоремы, получим

$$|\Delta| = \left(\|P\|_\Omega \frac{l}{\pi} + \|Q\|_\Omega \frac{l^2}{\pi^2}\right)\int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds < \cos(\theta/2)\int_0^l \left|\frac{dw}{ds}\right|^2 ds,$$

чем и завершается доказательство.

2^0. Предположив, что $f(z_1)=f(z_2)$ для двух несовпадающих точек $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \{\infty\}$, придем к уравнению

$$w'' + P_1(z)w' + Q_1(z)w = 0, \qquad z \in \gamma(z_1, z_2), \tag{2.23}$$

которое по лемме имеет решение $w(z) \not\equiv 0$, обращающееся в нуль в точках z_1 и z_2, если

$$2Q_1(z) - P_1'(z) - P_1^2(z)/2 = \{f, z\}.$$

Удовлетворим это соотношение, положив

$$P_1 = (z-a)^{-1} + P, \quad Q_1 = -4^{-1}(z-a)^{-2} + 2^{-1}(z-a)^{-1}P + Q,$$

где a — константа, отличная от z_1 и z_2. Положим $w = w(z)$ в соотношении (2.23), умножим обе части полученного тождества на $(z-a)\overline{w}(z)\,dz$ и проинтегрируем вдоль $\gamma(z_1, z_2)$. Получим

$$\int_{z_1}^{z_2} (z-a)|w'|^2 d\overline{z} = \int_{z_1}^{z_2} \{w'\overline{w}[(z-a)P_1 - 1] + |w|^2(z-a)Q_1\} dz.$$

За путь интегрирования возьмем ту дугу окружности, существование которой предполагается в определении $\Omega \in R_0(\theta, d)$.

Пусть a — центр этой окружности. Тогда

$$z - a = z(t) = re^{i(t+\varepsilon)} \, (z_1 = z(0), z_2 = z(\tau)), \, 0 < \tau \le \theta < 2\pi,$$

где $l = r\tau \le d$. Обозначив $y(t) = w(z(t))$, $y(0) = y(\tau) = 0$, получим

$$\Delta = \int_0^\tau |y'|^2 dt = \int_0^\tau [ire^{it} P\overline{y}y' - \left(r^2 e^{2it} Q + re^{it} P/2 - 1/4\right) |y|^2] dt.$$

Последнее соотношение несовместимо с условиями 2^0 теоремы. Действительно, привлекая неравенства вида (2.22), имеем

$$\Delta = r \left\| P \right\|_\Omega \left(\int_0^\tau |y'|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau |y|^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(r^2 \left\| Q \right\|_\Omega + r \left\| P \right\|_\Omega /2 + 1/4\right) \int_0^\tau |y'|^2 dt \le$$

$$\le \left[r\tau\pi^{-1} \left\| P \right\|_\Omega + \left(r^2 \left\| Q \right\|_\Omega + r \left\| P \right\|_\Omega /2 + 1/4\right) \tau^2 \pi^{-2} \right] \Delta.$$

Выражение в скобках перед последним интегралом меньше 1 по условию, что невозможно.

3^0. Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \ne z_2$, z_1 и $z_2 \in L$. Возьмем (2.16) при $w = w(z)$, $w(z) \not\equiv 0$, $w(z_1) = w(z_2) = 0$, причем уравнение (2.16) и $w(z)$ можно считать заданными всюду в $\overline{\Omega}$. Имеем для некоторой точки $z_0 \in L$,

$$\left\| w'(z) \right\|_\Omega = \left| w'(z_0) \right|, \qquad z_0 \in L,$$

$$\left\| w(z) \right\|_\Omega = \max_{z \in L} \left| \int_{z_1}^z w'(\zeta) d\zeta \right| < A \left| w'(z_0) \right| \operatorname{diam} L.$$

Следовательно,

$$\int_L |w''(z)dz| <$$

$$< |w'(z_0)| \left(\int_L |P(z)dz| + A \operatorname{diam} L \int_L |Q(z)dz| \right). \qquad (2.24)$$

Знак равенства исключен, так как равенство возможно лишь тогда, когда $w'(z) \equiv \mathrm{const}$ или $P(z) \equiv 0$, $Q(z) \equiv 0$, т. е. $\{f, z\} \equiv 0$. Оба случая невозможны из-за предположений $w(z_1) = w(z_2) = 0$, $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$.

Далее, имеем

$$(1/2) \int_L |w''(z)dz| \geq \max_{z \in \overline{\Omega}} |w'(z_0) - w'(z)| \geq$$

$$\geq \frac{\left| \int_{\gamma(z_1,z_2)} [w'(z_0) - w'(z)] dz \right|}{\int_{\gamma(z_1,z_2)} |dz|} = \frac{|z_1 - z_2| \, |w'(z_0)|}{l(z_1, z_2)} \geq \frac{|w'(z_0)|}{A}.$$

Последнее соотношение и (2.24) противоречат требованию 3^0 теоремы. Поэтому отображение f инъективно на L. Так как шварциан $\{f, z\}$ аналитичен в $\overline{\Omega}$ и, следовательно, функция $f(z)$ локально однолистна в $\overline{\Omega} \backslash \{\infty\}$, по лемме 2.1.3 мы получим утверждение теоремы в случае 3^0.

Отметим, что неравенство (2.24) получено по схеме работы З. Нехари [152], где исследован вопрос о неколебимости решения линейного дифференциального уравнения порядка n в выпуклой области (без обсуждения связей с однолистными функциями).

Для выпуклых областей ($\theta = 0, \quad d = \operatorname{diam} \Omega$) пункт 1^0 теоремы при

$$P(z) = 0, \quad 2Q(z) = \{f, z\}$$

дает результат К. Рыль-Нардзевского [159].

Пункты 1^0 и 2^0 дают значительное усиление условия В. С. Рогожина [78]:

$$\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega \le (\pi-\theta)/2,$$

полученного им в предположении $\Omega \in R_0(\theta, d)$.

Выделим еще некоторые частные случаи в виде следствия.

Следствие 2.2.2 *Функция $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, мероморфная в области Ω, будет однолистной в Ω, если выполнено одно из условий*

а) $\Omega \in R(\theta,\, d)$, $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega \le (\pi/d)\cos(\theta/2)$;

б) $\Omega \in R_0(\theta,\, d)$, $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega \le (\pi-\theta/2)/d$;

в) $\Omega \in R(\theta,\, d)$, $\|[f''(z)/f'(z)+2(z-z_0)^{-1}](z-z_0)^{-1}\|_\Omega \le$
$\le \pi^2\cos(\theta/2)/[(\pi+1)d^2]$.

Отметим, что условия вида $\|\{f,z\}\|_\Omega \le \kappa$ и условие 3^0 теоремы 2.2.2 пригодны как для аналитических функций, так и для функций, имеющих простой полюс в произвольной точке области Ω.

Условия а) или б) следствия 2.2.2, а также в) при $z_0 \notin \Omega$ влекут аналитичность функции $f(z)$ в Ω.

Если $z_0 \in \Omega$, то условие в) предполагает, что $f(z)$ имеет простой полюс в точке z_0, так как тогда

$$f(z) = a(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots, \quad a \ne 0,$$

вблизи z_0, поэтому

$$f''(z)/f'(z) + 2(z-z_0)^{-1} = -(a_1/a)(z-z_0) + \ldots,$$

т. е. условие в) является содержательным.

Замечание 2.2.1 *Ограничения $\theta < \pi$ и $\theta < 2\pi$ для классов $R(\theta,\, d)$, $R_0(\theta,\, d)$ соответственно являются естественными.*

Действительно, случай $\theta > 2\pi$ для $R_0(\theta,\, d)$ лишен смысла для областей.

Если же $\theta > \pi$, то можно указать область $\Omega \in R(\theta, d)$, в которой функционалы $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega$, $\|\{f,z\}\|_\Omega$ не являются допустимыми.

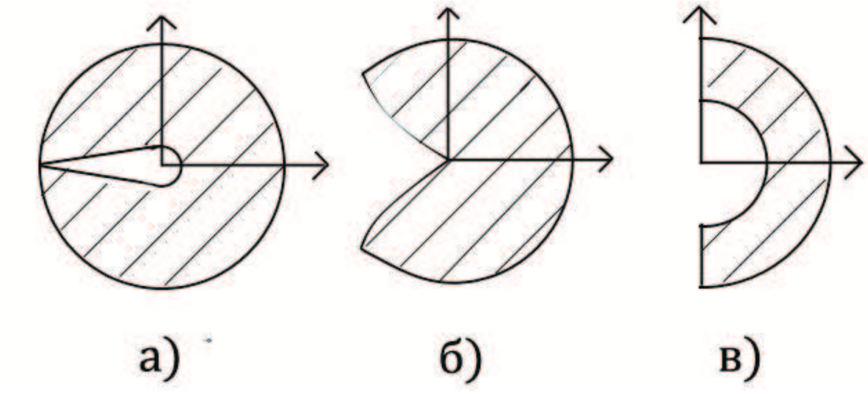

Рис. 2.4: Три примера

Пусть, например, Ω — невыпуклая односвязная область, граница которой состоит из дуг с уравнениями (рис. 2.4, а):

$$z_1(t) = e^{it}, \qquad -\pi \le t \le \pi;$$

$$z_2(t) = \delta e^{it}, \quad |t| \le \pi/2 + \alpha, \quad \alpha = \arccos\delta, \quad 0 < \delta < 1;$$

$$z_{3,4}(t) = -1 + te^{\pm i\alpha}, \qquad 0 \le t \le \cos\alpha.$$

Для этой области $\theta = \pi + 2\arcsin\delta$. Функция $f_0(z) = z^{1+\varepsilon}$, ветвь которой фиксирована условием $f_0(1) = 1$, аналитична и неоднолистна в Ω при $\varepsilon > 0$. С другой стороны,

$$|f_0''(z)/f_0'(z)| = |\varepsilon/z| \le \varepsilon/\delta, \quad |\{f_0, z\}| \le (2\varepsilon + \varepsilon^2)/(2\delta^2), \quad z \in \Omega.$$

При любом фиксированном $\theta \in (\pi, 2\pi)$ мажоранта ε/δ и мажоранты $(2\varepsilon+\varepsilon^2)/(2\delta^2)$, $\delta = \sin[(\theta-\pi)/2]$, могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора $\varepsilon > 0$.

Замечание 2.2.2 *О. Мартио и Й. Сарвас [148], не зная, по-видимому, статьи автора [5], обосновали в своей работе признаки однолистности вида* $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega \le \kappa$ *и* $\|\{f, z\}\|_\Omega \le \kappa$, *которые в усиленном виде вытекают из пункта* 3^0 *теоремы 2.2.2.*

В статье [5] пункт 3^0 теоремы 2.2.2 распространен на случай конечносвязных областей.

2.2.3 Линейно инвариантные функционалы в областях со сложной геометрией

Будем использовать без пояснений определения классов областей $G_\alpha(A)$, $G_{\alpha,\beta}(A, B)$ и числовых характеристик областей $d = d(\operatorname{comp}\partial\Omega)$, $\Omega(\gamma)$, данные в предыдущем параграфе перед теоремой 2.1.3.

Обозначим

$$G_\alpha = \cup_{A>0} G_\alpha(A), \qquad G_{\alpha,\beta} = \cup_{A>0,B>0} G_{\alpha,\beta}(A, B).$$

Требования теоремы 2.2.2 в терминах P и Q дают ограничения одного и того же вида для шварциана и для линейно инвариантного функционала f''/f'. Оказалось, что существуют такие области Ω, в которых функционал $\|\{f, z\}\|_\Omega$ допустим, а $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega$ не является таковым. Более точно, имеет место

Теорема 2.2.3 *Пусть область* $\Omega \subset \overline{C}$, $d = d(\operatorname{comp}\partial\Omega) < \infty$, $\Omega \in G_\alpha(A)$. *Функция* $f(z)$, *мероморфная и локально однолистная в* Ω, *будет однолистной в* Ω, *если выполнено одно из требований:*

$$1^0) \quad \alpha \in [1/2, 1], \qquad I_2(f) = \left\| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\|_\Omega < \frac{4\kappa_0}{A^2 d^{2\alpha-1}},$$

где постоянная $\kappa_0 = 0.854...$ — *корень уравнения* $2\kappa \int_0^1 e^{\kappa t^2} dt = e^{\kappa}$;

$$2^0) \quad \alpha \in [1/3, 1], \qquad I_3(f) = \|\{f, z\}\|_\Omega < \frac{16}{A^3 d^{3\alpha - 1}}.$$

Если $d = d(\operatorname{comp} \partial\Omega) = \infty$, *то функционалы* I_2 *и* I_3 *не являются допустимыми в* Ω. *Нижняя граница* $\alpha = 1/2$ *в требовании* 1^0 ($\alpha = 1/3$ *в требовании* 2^0) *точна в том смысле, что существует область* $\Omega_\alpha \in G_\alpha$ *с произвольно заданным* $\alpha < 1/2$ ($\alpha < 1/3$), *для которой* $I_2\,(I_3)$ *не является допустимым. Постоянную* κ_0 *нельзя заменить на большую, чем* $\pi^2/8$, *а постоянную* 16 — *на* $2\pi^2$, *с сохранением утверждения.*

Доказательство. 1^0) Для заданной функции $f(z)$ выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что

$$I_2(f) < 4\kappa_0 A^{-2}(d + \varepsilon)^{1-2\alpha}, \quad \alpha \in [1/2, 1].$$

Если $\Omega \in G_\alpha(A)$, то непосредственно из определений следует

$$\Omega \in G_{1/2}\left(A d_1^{\alpha - 1/2}\right)$$

при любом $\alpha \geq 1/2$, $d_1 = d + \varepsilon$. Поэтому при обосновании однолистности $f(z)$ в Ω нам достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1/2$. Итак, докажем однолистность функции $f(z)$ при требованиях:

$$\Omega \in G_{1/2}(A), \quad I_2(f) \leq 4\kappa_0 A^{-2}.$$

Предположим сначала, что $f''(z)/f'(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Если $f(z)$ неоднолистна в Ω, то она неоднолистна вблизи границы в силу леммы 2.1.3. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2.1.2, мы получим соотношения (2.11) – (2.13), причем

$$P(\xi) < 4\kappa_0 A^{-2}, \qquad \forall \xi \in [0, l],$$

ввиду предположения $f''(z)/f'(z) \not\equiv \mathrm{const}$ и принципа максимума. Так же, как и в лемме 2.1.2, из (2.13) получим соотношение

$$|z_1 - z_2| < \frac{\kappa_0 l^2}{A^2} \sup_{t \in (-1,1)} \frac{2\eta(1) - 2t\eta(t)}{\eta'(t)}, \tag{2.25}$$

где z_1 и z_2 — несовпадающие точки Ω,

$$l = l(z_1, z_2) \leq A|z_1 - z_2|^{1/2},$$

$\eta(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\eta'(t) > 0$ при $t \in (-1, 1)$. Функция

$$\eta(t) = \exp(-\kappa_0 t^2) \int_0^t \exp(\kappa_0 \tau^2) d\tau$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$1/\kappa_0 - 2t\eta = \eta'/\kappa_0,$$

причем

$$|\eta(t)| \leq \eta(1) = 1/(2\kappa_0),$$

кроме того, $\eta'(t) > 0$ при $t \in (-1, 1)$.

Следовательно, (2.25) приводит к неравенству

$$|z_1 - z_2| < A^{-2} l^2 \leq |z_1 - z_2|,$$

что невозможно. Таким образом, функция $f(z)$ должна быть однолистной в Ω.

Если же $f''(z)/f'(z) \equiv c = \mathrm{const}$, то

$$f(z) = af_0(z) + b, \quad a = \mathrm{const} \neq 0, b = \mathrm{const}, \quad f_0(z) = \exp(cz)$$

и, ввиду мероморфности $f(z)$ в Ω, это может случиться лишь в том случае, когда $\infty \notin \Omega$. Но тогда из требований

$$\Omega \in G_{1/2}(A), \quad I_2(f) \le 4\kappa_0 A^{-2}$$

следует, что

$$\operatorname{diam}\Omega \le A^2, \quad |c| \le 4\kappa_0 A^{-2},$$

т. е. $|c| \operatorname{diam}\Omega < 2\pi$, поэтому $f_0(z)$ будет однолистной в Ω.

2^0. Аналогично предыдущему случаю нам достаточно обосновать однолистность функции $f(z)$ в Ω при требованиях:

$$\Omega \in G_{1/3}(A), \quad I_3(f) \le 16A^{-3}.$$

Случай $\{f, z\} \equiv \mathrm{const}$ опять приводит к изучению однолистности функции

$$f_0(z) = \exp(cz)$$

при $|c| \le 4\sqrt{2}A^{-3/2}$ в области Ω при условиях

$$\Omega \in G_{1/3}(A), \quad \infty \notin \Omega.$$

Для такой области $\operatorname{diam}\Omega \le A^{3/2}$, тогда

$$|c| \operatorname{diam}\Omega < 2\pi,$$

и $f(z)$ однолистна в Ω.

Для рассмотрения общего случая $\{f, z\} \not\equiv \mathrm{const}$ и в дальнейшем изложении нам потребуется

Лемма 2.2.2 *Пусть функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны, функция $f(z)$ мероморфна на простой спрямляемой дуге $\gamma = \gamma(z_1, z_2)$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ и*

$$2Q - P' - P^2/2 = \{f, z\}$$

на γ. Пусть $z = z(s; \gamma)$ $(0 \le s \le l)$ — уравнение γ от натураль-

ного параметра.

Если $f(z_1) = f(z_2) \neq \infty$, то существует аналитическая на γ функция $g(z)$, такая, что

$$g(z_1) = g(z_2) = 0, \quad g(z) \not\equiv 0,$$

и для любого $s \in [0, l]$ справедливо неравенство

$$|z_1 - z_2||u'(s)| \leq \int_0^s \xi a(\xi; u) d\xi + \int_s^l (l - \xi) a(\xi; u) d\xi, \tag{2.26}$$

где $u(s) = g(z(s; \gamma))$,

$$a(s; u) = |P(z(s; \gamma))u'(s)| + |Q(z(s; \gamma))u(s)|\,. \tag{2.27}$$

Доказательство леммы. По лемме 2.2.1, существует функция $g(z) \not\equiv 0$, $g(z_1) = g(z_2) = 0$, удовлетворяющая уравнению

$$g'' + P(z)g' + Q(z)g = 0, \qquad z \in \gamma. \tag{2.28}$$

Пусть t, ζ — переменные, w — фиксированная точка на γ. Проинтегрировав тождество (2.28) дважды вдоль кривой γ с учетом равенств $g(z_1) = g(z_2) = 0$, получим

$$g'(w)(z_2 - z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \int_w^\zeta [P(t)g'(t) + Q(t)g(t)]dt \right\} d\zeta. \tag{2.29}$$

Положим $w = z(s; \gamma)$ для некоторого $s \in (0, l)$, а также

$$u(\xi) = g(z(\xi; \gamma)), \quad 0 \leq \xi \leq l.$$

Тогда $|u'(\xi)| = |g'(z(\xi; \gamma))|$, и (2.29) влечет неравенство

$$|z_1 - z_2||u'(s)| \leq \int_0^l d\sigma \left| \int_\sigma^s \{|P(z(\xi; \gamma))u'(\xi)| + |Q(z(\xi; \gamma))u(\xi)|\} d\xi \right|,$$

что приводит к (2.26), (2.27) после изменения порядка интегрирования.

Из (2.26) следует неравенство

$$|z_1 - z_2| \leq \max\left\{\int_0^l sb(s)ds, \quad \int_0^l (l-s)b(s)ds\right\}, \tag{2.30}$$

где

$$b(s) = |P(z(s;\gamma))| + l(s)\,|Q(z(s;\gamma))|\,, \quad l(s) = \min\{s, l-s\},$$

а также следующее основное неравенство: $|z_1 - z_2| \leq$

$$\leq \sup_{0<\xi<l} \frac{x^*(\xi)\,|P(z(\xi;\gamma))| + \left|\int_{l/2}^{\xi} |Q(z(s;\gamma))|\, x^*(s)ds\right|}{x(\xi)}, \tag{2.31}$$

где $x(\xi)$ — произвольная функция, непрерывная на $(0, l)$, положительная почти всюду и интегрируемая на $[0, l]$,

$$x^*(\xi) = \xi \int_\xi^l x(s)ds + (l-\xi)\int_0^\xi x(s)ds.$$

Обоснуем (2.30). Пусть $|u'(\sigma)|$ — максимальное значение $|u'(s)|$ при $0 \leq s \leq l$. Так как

$$0 < |u'(\sigma)| < \infty, \quad u(s) \leq |u'(\sigma)| \min\{s, l-s\}$$

для любого $s \in [0, l]$ в силу равенств

$$|u'(\sigma)| = |g'(z(\sigma;\gamma))|, \quad u(0) = u(l) = 0,$$

то из (2.26) следует оценка

$$|z_1 - z_2| \leq v(\sigma) = \int_0^\sigma \xi b(\xi)d\xi + \int_\sigma^l (l-\xi)b(\xi)d\xi.$$

Но $v'(\sigma) = (2\sigma - l)\, b(\sigma)$, поэтому

$$|z_1 - z_2| \le \max_{0\le\sigma\le l} v(\sigma) = \max\{v(0), v(l)\},$$

что равносильно (2.30).

Для обоснования (2.31) проинтегрируем обе части (2.26) по $s \in [0, l]$, предварительно умножив их на функцию $x(s) > 0$. Изменив в правой части неравенства порядок интегрирования, получим

$$|z_1 - z_2| \int_0^l x(s)|u'(s)|ds \le \int_0^l a(\xi; u)x^*(\xi)d\xi.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$|u(\xi)| \le \left\{\int_0^\xi |u'(s)|ds,\ 0 \le \xi \le l/2; \quad \int_\xi^l |u'(s)|ds,\ l/2 \le \xi \le l\right\}$$

найдем оценку

$$|z_1 - z_2| \int_0^l x(s)|u'(s)|ds \le \int_0^l |u'(\xi)| \left(|P|\, x^* + \left|\int_{l/2}^\xi |Q|\, x^* ds\right|\right) d\xi.$$

Последнее влечет (2.31) ввиду положительности $x(\xi)$ и условия $u(\xi) \not\equiv \mathrm{const}$.

Завершим теперь доказательство пункта 2 теоремы 2.2.3.

Если $\{f, z\} \not\equiv \mathrm{const}$ и $f(z)$ неоднолистна в Ω, то в силу леммы 2.1.3 и определения класса $G_{1/3}(A)$ существуют несовпадающие точки z_1, z_2 из Ω, такие, что $f(z_1) = f(z_2) \ne \infty$, и соединяющая z_1 и z_2 дуга $\gamma = \gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$ имеет длину $l \le A|z_1 - z_2|^{1/3}$. По лемме 2.2.2 имеем (2.26), следовательно, выполняется условие (2.30), что с учетом соотношений

$$P(z) = 0, \quad Q(z) = \{f, z\}/2, \quad \max_{z\in\gamma} |\{f, z\}| < 16/A^3$$

приводит к оценке

$$|z_1 - z_2| < 8A^{-3} \int_0^l \xi l(\xi) d\xi = l^3/A^3.$$

Получили противоречие, завершающее доказательство пункта 2^0 теоремы.

Остается обосновать дополнительные утверждения о точности условий теоремы 2.2.3.

Если $d = d(\operatorname{comp} \partial\Omega) = \infty$, т. е. $\infty \in \partial\Omega$, то существуют последовательности $z_{1\nu}$ и $z_{2\nu}$ точек в Ω, таких, что $|z_{1\nu} - z_{2\nu}| \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Тогда функции

$$f_\nu(z) = \exp(c_\nu z), \qquad c_\nu = 2\pi i/(z_{1\nu} - z_{2\nu}),$$

будут неоднолистными в Ω. Но $I_2(f_\nu) = |c_\nu| \to 0$ и $I_3(f_\nu) = |c_\nu|^2/2 \to 0$ при $\nu \to \infty$. Следовательно, функционалы I_2 и I_3 не являются допустимыми в области Ω, что и требовалось доказать.

Для обоснования точности показателей $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 1/3$ введем область $\Omega_\alpha \in G_\alpha$ следующего вида:

$$\Omega_\alpha = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\} \setminus \Big\{\, z \,:\, \Re z \le 0, \Big|\Im z \le |\Re z|^{1/\alpha}\Big| \,\Big\}$$

(рис. 2.4, б).

Пусть $0 < \alpha < 1/2$, тогда в Ω_α рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(z) = z - \varepsilon z^{2+a}, \quad f_\varepsilon(1) = 1 - \varepsilon,$$

где a — фиксированное число из промежутка

$$(0, 1/\alpha - 2) \cap (0, 1),$$

число ε — малый положительный параметр. Для достаточно малых $x = \Re z < 0$ на границе Ω_α имеем: $x \pm i|x|^{1/\alpha} \in \partial\Omega_\alpha$, а также

$$\Im f_\varepsilon(x + i|x|^{1/\alpha}) = -\varepsilon \sin(\pi a)|x|^{2+a} + O(|x|^{2+a}) < 0,$$

$$\Im f_\varepsilon(x - i|x|^{1/\alpha}) = \varepsilon \sin(\pi a)|x|^{2+a} + O(|x|^{2+a}) > 0,$$

$$\Re f_\varepsilon(x \pm i|x|^{1/\alpha}) = x - \varepsilon \cos(\pi a)|x|^{2+a} + O(|x|^{2+a}).$$

Поэтому $f_\varepsilon(\Omega_\alpha)$ дважды покрывает некоторую часть окрестности нуля, т. е. $f_\varepsilon(z)$ неоднолистна в Ω_α при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, $I_2(f) \leq 6|\varepsilon|/(1 - 3|\varepsilon|) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, следовательно, требование

$$\|f''(z)/f'(z)\|_{\Omega_\alpha} \leq \kappa$$

ни при каком $\kappa > 0$ не гарантирует однолистности $f(z)$ в Ω_α, $\alpha < 1/2$.

Точность $1/3$ получается аналогично из рассмотрения функции

$$z - \varepsilon z^{3+a}$$

в области Ω_α при любом $\alpha \in (0, 1/3)$ и фиксированном значении параметра

$$a \in (0, 1/\alpha - 3) \cap (0, 1).$$

Покажем, наконец, что постоянную κ_0 нельзя заменить на $(1 + \varepsilon)\pi^2/8$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(z) = z^{2+\varepsilon}$$

в области

$$\Omega = \{\, z \,:\, \Re z > 0,\ 1 < |z| < 1 + \varepsilon \,\}$$

(см. рис. 2.4, в).

Две любые точки z_1 и z_2 области Ω можно соединить дугой окружности с центральным углом, не превосходящим π. Поэтому $\Omega \in G_1(A)$, $A = \pi/2$. Кроме того, $\operatorname{diam}\Omega = 2(1+\varepsilon)$. При любом $\varepsilon > 0$ функция $g_\varepsilon(z)$ неоднолистна в Ω. С другой стороны,

$$I_2(g_\varepsilon)A^2 d/4 = (1+\varepsilon)\pi^2/8,$$

что и нужно было показать.

Пример функции $f(z) = \exp(\pi z/r)$ в $\mathbb{D}_r = \{\, z \,:\, |z| < r \,\}$ показывает, что множитель 16 в оценке функционала I_3 нельзя заменить на $2\pi^2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, так как

$$d = \operatorname{diam}\mathbb{D}_r = 2r, \quad \mathbb{D}_r \in G_{1/3}(A), \quad A = (4r^2)^{1/3}, \quad A^3\{f, z\} = 2\pi^2.$$

Теорема 2.2.3 доказана полностью.

Из ее доказательства получаем

Следствие 2.2.3 *Мероморфная в области Ω функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ и выполняется одно из двух следующих условий:*

1^0*)* $\Omega \in G_{1/2}(A)$ *и* $\|f''(z)/f'(z)\|_\Omega \le 4\kappa_0/A^2$,

2^0*)* $\Omega \in G_{1/3}(A)$ *и* $\|\{f, z\}\|_\Omega \le 16/A^3$.

Замечание 2.2.3 *На основании теоремы 2.2.3 для класса всех мероморфных в области Ω функций получим*

$$\Omega \in G_{1/2} \Rightarrow I_2 \qquad \textit{допустим в } \Omega; \tag{2.32}$$

$$\Omega \in G_{1/3} \Rightarrow I_3 \qquad \textit{допустим в } \Omega. \tag{2.33}$$

Примеры, приведенные при обосновании теоремы, и некоторые другие примеры позволяют выдвинуть гипотезу о том, что импликации в (2.32) и (2.33) можно заменить эквивалентностями.

Подчеркнем, что наши примеры дают обратные импликации в (2.32) и (2.33) лишь при дополнительных предположениях: $\partial\Omega$ состоит из кусочно-гладких кривых и имеет специальное поведение в угловых точках.

Теорема 2.2.4 *Пусть $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в области $\Omega \subset \overline{C}$, $\Omega \in G_{\alpha,\beta}(A,B)$. Существуют положительные постоянные $\kappa_2 = \kappa_2(\alpha)$ и $\kappa_3 = \kappa_3(\alpha)$, зависящие лишь от α, такие, что функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если выполнено одно из следующих требований:*

1^0. $\delta = \beta(2 - 1/\alpha) \in [0,1]$,

$$I_2(f,\delta) = \left\| \operatorname{dist}^{\delta}(z,\partial\Omega) f''(z)/f'(z) \right\|_{\Omega(\gamma)} \le \frac{\kappa_2(\alpha)}{B^2} \left(\frac{B}{A}\right)^{1/\alpha};$$

2^0. $\delta = \beta(3 - 1/\alpha) \in [0,2]$,

$$I_3(f,\delta) = \left\| \operatorname{dist}^{\delta}(z,\partial\Omega) \{f,z\} \right\|_{\Omega(\gamma)} \le \frac{\kappa_3(\alpha)}{B^3} \left(\frac{B}{A}\right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Для пары точек z_1 и z_2 вблизи $\partial\Omega$ через $\gamma = \gamma(z_1, z_2)$ будем обозначать ту дугу из $\Omega(\gamma)$, о которой идет речь в определении $\Omega \in G_{\alpha,\beta}(A,B)$. Пусть $z = z(s;\gamma)$, $0 \le s \le l$, — уравнение этой дуги от натурального параметра, $l(s) = \min\{s, l - s\}$. Тогда, по определению, $l \le A|z_1 - z_2|^{\alpha}$ и $l(s) \le B \operatorname{dist}^{\beta}(z,\partial\Omega)$ для любой точки $z = z(s;\gamma)$, т. е.

$$l \le A|z_1 - z_2|^{\alpha}, \qquad 1/\operatorname{dist}^{\beta}(z,\partial\Omega) \le B^{\delta/\beta} l^{-\delta/\beta}(s). \tag{2.34}$$

В силу леммы 2.1.3 и определения класса $G_{\alpha,\beta}(A,B)$, как и при доказательствах леммы 2.1.2 и теоремы 2.2.3, для обоснования однолистности $f(z)$ при условиях 1^0 или 2^0 теоремы 2.2.4 нам достаточно ограничиться проверкой неравенства $f(z_1) \ne f(z_2)$ для точек z_1 и z_2 указанного выше типа, т. е. при наличии дуги

$\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega(\gamma)$ со свойствами (2.34).

Можно также считать (это относится к случаю 2^0), что

$$f(z_1) = f(z_2) \neq \infty,$$

так как если $f(z_1') = f(z_2') = \infty$, то существуют близкие к z_1' и z_2' точки z_1 и z_2 с совпадающими образами.

Итак, пусть

$$z_1 \neq z_2, \quad z_1, z_2 \in \Omega, \quad \gamma = \gamma(z_1, z_2) \subset \Omega(\gamma)$$

и величины

$$l = l(z_1, z_2), \quad l(s) = \min\{s, l - s\}$$

удовлетворяют условиям (2.34), выполняется требование 1^0 или требование 2^0, но $f(z_1) = f(z_2) \neq \infty$. Покажем, что для некоторого $\kappa_2(\alpha) > 0$ или $\kappa_3(\alpha) > 0$ это невозможно.

1^0. Так как $\delta/\beta = 2 - 1/\alpha \geq 0$, на дуге γ имеем оценку

$$\left|\frac{f''(z(s;\gamma))}{f'(z(s;\gamma))}\right| \leq \frac{\kappa_2(\alpha)}{A^{1/\alpha}} l^{1/\alpha - 2}(s), \qquad 0 \leq s \leq l. \tag{2.35}$$

По лемме 2.2.2 получим оценки (2.26) и (2.31). Из (2.31) при

$$x(s) \equiv c = \text{const} > 0, \quad x^*(s) = 2cs(l - s),$$

$$P(z) = -f''(z)/f'(z), \quad Q(z) = 0,$$

будем иметь с учетом (2.35): $|z_1 - z_2| \leq$

$$\leq \sup_{0<\xi<l} \frac{2\xi(l-\xi)\kappa_2(\alpha)}{A^{1/\alpha} l^{2-1/\alpha}(\xi)} \leq 2\kappa_2(\alpha) \frac{l^{1/\alpha}}{A^{1/\alpha}} \alpha(1-\alpha)^{1/\alpha - 1}, \ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1;$$

$$|z_1 - z_2| \le 2\kappa_2(\alpha)\frac{l}{A}, \quad \alpha = 1.$$

Полученные неравенства противоречат первому соотношению в (2.34) при

$$0 < \kappa_2(\alpha) < [2\alpha(1-\alpha)^{1/\alpha-1}]^{-1}, \quad 1/2 \le \alpha \le 1 \tag{2.36}$$

(для $\alpha = 1$ значение мажоранты для $\kappa_2(1)$ получается как предельное значение).

Неравенство (2.36) дает явную оценку для $\kappa_2(\alpha)$, для второго утверждения теоремы мы ограничимся лишь обоснованием существования $\kappa_3(\alpha) > 0$, избегая сложных вычислений.

2^0. В этом случае $\delta/\beta = 3 - 1/\alpha \ge 0$. Положив

$$P(z) = 0, \quad 2Q(z) = \{f, z\},$$

на γ имеем

$$A^{-1/\alpha}\kappa_3(\alpha)l^{1/\alpha-3}(s) \ge 2\left|Q(z(s;\gamma))\right|,$$

и согласно (2.31)

$$|z_1 - z_2| \le \frac{\kappa_3(\alpha)}{2A^{1/\alpha}} \sup_{0<\xi<l} \frac{\left|\int_{l/2}^{\xi} x^*(s)l^{1/\alpha-3}(s)ds\right|}{x(\xi)},$$

где

$$x^*(\xi) = \xi\int_{\xi}^{l} x(s)ds + (l-\xi)\int_0^{\xi} x(s)ds.$$

Замена функции и переменных

$$x(\xi) = \eta'(t), \quad \xi = l(1+t)/2, \qquad t \in [-1, 1],$$

приводит к соотношению

$$|z_1 - z_2| \le \frac{\kappa_3(\alpha)(l/2)^{1/\alpha}}{A^{1/\alpha}} \sup_{-1<t<1} \left| \frac{1}{\eta'(t)} \int_0^t \frac{\eta(1) - \tau\eta(\tau)}{(1-|\tau|)^{3-1/\alpha}} d\tau \right| \quad (2.37)$$

(предполагаем, что $\eta(t)$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция). Из сравнения (2.34) и (2.37) получим допустимые пределы для $\kappa_3(\alpha)$:

$$0 < \kappa_3(\alpha) < \frac{2^{1/\alpha}}{\kappa}, \ \kappa = \inf_{\eta} \sup_{-1<t<1} \left| \frac{1}{\eta'(t)} \int_0^t \frac{\eta(1) - \tau\eta(\tau)}{(1-|\tau|)^{3-1/\alpha}} d\tau \right|. \quad (2.38)$$

В ограниченности величины κ в (2.38) легко убедиться, положив

$$\eta'(t) \equiv 1 \quad \text{при} \quad 1/3 \le \alpha < 1,$$

и

$$\eta'(t) \equiv (1-|t|)^{-1/2} \quad \text{при} \quad \alpha = 1.$$

Отметим, что нам достаточно наличия свойств: $x(\xi) = \eta'(t)$ непрерывна при $t \in (-1, 1)$, $\eta'(t)$ положительна почти всюду и интегрируема на $[-1, 1]$.

Теорема доказана.

При $\alpha = \beta = 1$, т. е. для однородных областей, теорема 2.2.4 пересекается с результатами Б. Осгуда [154], О. Мартио и Й. Сарваса [148], Ф. Геринга и Б. Осгуда [131].

Определение. *Пусть* Ω *— область в* $\overline{\mathbb{C}}$, $\omega(z, \Omega)$ *— непрерывная и положительная в* Ω *функция. Пусть, далее,*

$$A > 0, \quad B > 0, \quad \alpha, \beta \in [0, 1]$$

— постоянные.

Будем писать $\Omega \in G^{\omega}_{\alpha,\beta}(A, B)$, *если для любых точек* z_1 *и* z_2 *из* Ω, *взятых вблизи* $\partial\Omega$, *существует дуга* $\gamma = \gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$, *причем*

$$l(z_1,z_2)\le A|z_1-z_2|^\alpha,\ l(z,z_1,z_2)\le B\omega^\beta(z,\Omega),\quad \forall z\in\gamma. \quad (2.39)$$

Запись $\Omega\in G^\omega_{\alpha,\beta}(A,B)$, очевидно, при условии

$$\omega(z,\Omega)\equiv \mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$$

означает, что $\Omega\in G_{\alpha,\beta}(A,B)$.

Доказательства леммы 2.1.2, теорем 2.2.3 и 2.2.4 непосредственно показывают справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.2.3 *Если $f(z)$ мероморфна, локально однолистна в области $\Omega\in G^\omega_{\alpha,\beta}(A,B)$, то $f(z)$ будет однолистной в Ω при выполнении условия:*

$$\delta=\beta(2-1/\alpha)\in[0,1],\ \left\|\omega^\delta(z,\Omega)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\|_{\Omega(\gamma)}\le\frac{\kappa_2(\alpha)}{B^2}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/\alpha},$$

где $\kappa_2(\alpha)$ — та же постоянная, что и в теореме 2.2.4.

Замечание 2.2.4 *Из доказательства теоремы 2.2.4 ясно, что можно получить содержательные утверждения при условиях $0\le\delta<\beta(2-1/\alpha)$ и $0\le\delta<\beta(3-1/\alpha)$ соответственно для функционалов $I_2(.,\delta)$ и $I_3(.,\delta)$. Но тогда мажоранты для функционалов усложнятся и будут зависеть также от $d(\mathrm{comp}\,\partial\Omega)$ (см. теорему 2.2.3).*

Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{C}}$, Ω_ν — стандартная аппроксимирующая последовательность:

$$\Omega=\cup_{\nu=1}^\infty\Omega_\nu,\quad \overline{\Omega}_\nu\subset\Omega_{\nu+1};$$

при любом ν область Ω_ν конечносвязна и ограничена спрямляемыми жордановыми кривыми. В такой ситуации можно обосновать признаки однолистности, характеризуемые принадлежностью f''/f' или $\{f,z\}$ классам Харди, на основе леммы 2.1.3 и следующего утверждения.

Предложение 2.2.4 *Пусть $f(z)$ аналитична и локально однолистна на простой замкнутой спрямляемой кривой $\Gamma \subset C$, причем $\Gamma \in G'_\alpha(A)$, что по определению означает следующее:*

для любой пары точек z_1 и z_2 из Γ существует соединяющая их дуга $\gamma(z_1,z_2) \subset \Gamma$, длина которой не превосходит $A|z_1-z_2|^\alpha$ с фиксированными постоянными $A>0$ и $\alpha \in (0,1]$.

Функция $f(z)$ будет инъективной на Γ, если выполняется одно из условий:

1^0 $\alpha \in [1/2,1]$, $\|f''(z)/f'(z)\|_{L_q(\Gamma)} \le m_2(\alpha)/A^{1/\alpha}$, *где*

$$q=\alpha/(2\alpha-1), \quad m_2(\alpha)=[(1-\alpha)/(2\alpha-1)]^{1/\alpha-1} \in [1,2];$$

2^0 $\alpha \in [1/3,1/2]$, $\|\{f,z\}\|_{L_q(\Gamma)} \le 2m_3(\alpha)/A^{1/\alpha}$,
где $q=\alpha/(3\alpha-1)$ и

$$m_3(\alpha)=\{(1-2\alpha)2^{1/(1-2\alpha)}+\int_0^{1/2}[x(1-x)]^{\alpha/(1-2\alpha)}dx\}^{1/\alpha-2}.$$

Для заданного α указанное в 1^0 (или 2^0) значение q является точным: для $\alpha \in (1/2,1]$ ($\alpha \in (1/3,1/2]$) и сколь угодно малого $\varepsilon>0$ функционал $\|f''/f'\|_{L_q(\Gamma_\alpha)}$ при $q=\alpha/(2\alpha-1)-\varepsilon$ (функционал $\|\{f,z\}\|_{L_q(\Gamma_\alpha)}$ при $q=\alpha/(3\alpha-1)-\varepsilon$) не является допустимым, $\Gamma_\alpha=\partial\Omega_\alpha \in G'_\alpha(A)$, $A>0$.

Через $\|.\|_{L_q(\Gamma)}$ обозначена стандартная норма в классе функций, интегрируемых на Γ со степенью q:

$$\left(\int_\Gamma |\varphi(z)|^q|dz|\right)^{1/q}.$$

Доказательство. 1^0. Обозначим $P(z) = -f''(z)/f'(z)$. Пусть $z_1, z_2 \in \Gamma$, причем $z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$. Тогда на дуге $\gamma(z_1, z_2) \subset \Gamma$ с длиной $l \leq A|z_1 - z_2|^\alpha$ справедливо неравенство (2.30) с указанным $P(z)$ и $Q(z) \equiv 0$. Применив неравенство Гельдера к любому из двух выражений в правой части (2.30), будем иметь

$$|z_1 - z_2| \leq \frac{l^{1+1/p}}{(p+1)^{1/p}} \left(\int_0^l |P(z)|^q \, ds \right)^{1/q} < \frac{l^{1+1/p}}{(p+1)^{1/p}} \|P(z)\|_{L_q(\Gamma)} .$$

Это соотношение при

$$1/p + 1/q = 1, \quad q = \alpha/(2\alpha - 1), \quad 1/p = 1/\alpha - 1$$

противоречит требованию 1^0 и условию $\Gamma \in G'_\alpha(A)$. Остается отметить, что $m_2(\alpha) = (p+1)^{1/p} \in [1, 2]$, поскольку $\alpha \in [1/2, 1]$.

2^0. Предположив снова $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \Gamma$, получим также из неравенства (2.30) при $P(z) = 0, 2Q(z) = \{f, z\}$ оценку

$$|z_1 - z_2| \leq \left(\int_0^l s^p c^p(s) ds \right)^{1/p} \left(\int_0^l |Q(z)|^q \, ds \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (1/2) \|\{f, z\}\|_{L_q(\Gamma)} \, l^{2+1/p} [2^{2p+1}/(2p+1) + \int_0^{1/2} x^p (1-x)^p dx]^{1/p},$$

что противоречит условию 2^0 в силу того, что $l \leq A|z_1 - z_2|^\alpha$.

Точность q в обоих случаях получается из того же примера, что и в теореме 2.2.3. А именно, функция

$$f_0(z) = z - \delta z^{1/\alpha - \varepsilon_0}, \quad f_0(1) := 1 - \delta, \quad 0 < 1/\alpha - \varepsilon_0 < 1/\alpha,$$

является неоднолистной в области

$$\Omega_\alpha = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\} \setminus \{\, z \,:\, \Re z \le 0, |\Im z| \le |\Re z|^{1/\alpha} \}$$

и на $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ при любом $\delta > 0$, $\delta \to 0$.

Вблизи $z = 0$ на Γ_α имеем $|dz| = dx = d|z|$, и, кроме того,

$$|f_0''(z)/f_0'(z)| = |z|^{1/\alpha - \varepsilon_0 - 2} O(\delta),$$

$$|\{f_0, z\}| = \delta |z|^{1/\alpha - \varepsilon_0 - 3} O(\delta).$$

Для

$$q_1 = \alpha/(2\alpha - 1) - \varepsilon \quad \text{или} \quad q_2 = \alpha/(3\alpha - 1) - \varepsilon$$

можно подобрать $\varepsilon_0 \in (0, 1/\alpha)$ так, чтобы

$$(2 - 1/\alpha + \varepsilon_0) q_1 < 1 \quad \text{при} \quad (3 - 1/\alpha + \varepsilon_0) q_2 < 1,$$

соответственно, тогда оба функционала будут определены и стремятся к нулю для функции

$$g(z;\, \delta,\, \delta_1) = f_0(z + \delta_1)$$

при $0 < \delta_1 \to 0$, $0 < \delta \to 0$.

С другой стороны, $g(z;\, \delta,\, \delta_1)$ аналитична и локально однолистна, но не инъективна на Γ при достаточно малых δ и δ_1. Подробные вычисления мы не приводим.

Глава 3

Обобщения допустимых функционалов

Теоремы предыдущей главы показывают, что функциональные условия однолистности тесно связаны с областями значений производной $f'(z)$ аналитической функций $f(z)$, её шварциана $\{f,\, z\}$ или предшварциана $f''(z)/f'(z)$. Тот факт, что допустимые функционалы содержат $f'(z)$, объясняется просто:

если функциональное условие вида $I(f) \leq \kappa$ гарантирует глобальную однолистность аналитической функции $f(z)$ в некоторой области, то условие $I(f) \leq \kappa$ должно обеспечить автоматически неравенство $f'(z) \neq 0$, т. е. необходимое условие локальной однолистности отображения.

При исследовании глобальной однолистности дифференцируемых отображений областей на плоскости прямым аналогом условия $f'(z) \neq 0$ является требование $|f_z| - |f_{\overline{z}}| > 0$, что равносильно положительности якобиана $J(f) := |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ дифференцируемого отображения f.

Мы рассматриваем также обобщения некоторых результатов предыдущей главы на случай дифференцируемых отображений пространственных областей из $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$.

Пункт 3.2 посвящен теоремам комбинирования функциональных и геометрических требований на отображения. Требования геометрического характера на отображения можно интерпретировать как некие условия, которые формируют класс отображений и заменяют собой точечные нормировки типа

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0,$$

обычно применяемые для выделения классов аналитических функций в круге.

В последнем пункте 3.3 изложена теория p-допустимых функционалов. Эта теория является одним из возможных вариантов решения задачи 1, сформулированной в начале главы 2. Для удобства читателя напомним эту задачу.

Задача 1. *Даны Ω и M. Как целенаправленно конструировать допустимые функционалы?*

3.1 Условия однолистности дифференцируемых отображений

Достаточные условия однолистности дифференцируемых отображений в терминах первых и вторых частных производных обобщают соответствующие условия для аналитической функции в терминах f' и f''/f'. В плоском случае переход к квазиконформным отображениям предоставляет и новые возможности для изучения конформных отображений.

3.1.1 Задачи на плоскости

В этом пункте отображения f плоских областей предполагаются непрерывными вместе с частными производными $f_z = \partial f/\partial z$ и $f_{\overline{z}} = \partial f/\partial \overline{z}$ в любой конечной точке z области определения Ω.

В точке $z = \infty$, если $\infty \in \Omega$, считается непрерывно дифференцируемой разность

$$f(z) - (az + b\overline{z})$$

с какими-либо комплексными постоянными a и b, $|a| > |b|$.

Через $C^k(\Omega)$ будем обозначать класс функций, непрерывных в Ω вместе с частными производными до k-го порядка включительно, $C(\Omega) = C^0(\Omega)$.

Приводимая ниже теорема 3.1.1 и ее следствие содержат решение задачи, возникшей в достаточных условиях однолистности для конформных отображений. А именно, пусть функция $F(z)$ аналитична в $\mathbb{D}^- \setminus \{\infty\}$, $\mathbb{D}^- = \{\, z \ : \ |z| > 1\,\}$, имеет простой полюс в бесконечности и $F'(\infty) = 1$.

Если $|F'(z) - c| \le \kappa(c)$ в $\mathbb{D}^-$, то $F(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}^-$ при условии $\kappa(c) \le (2/\pi)|c|$ (следствие теоремы В. С. Рогожина [79]).

Но, с другой стороны, при $c = 1$ достаточно взять $\kappa(1) = 1$ в силу теоремы Л. А. Аксентьева [21]. Имеются более общие результаты указанного вида, полученные позже М. А. Севодиным [82].

Покажем, что разрыв в оценке $\kappa(c)$ может быть устранен с использованием новой числовой характеристики, определяемой для области при помощи метрики с непостоянной плотностью.

Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $\varrho(z)$ — непрерывная в Ω функция, (Ω_j) — стандартная последовательность: Ω_j — конечносвязная область,

$$\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}, \quad \Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j,$$

каждая компонента L_j^{ν} границы Ω_j при любом j является жордановой кривой.

Определение. *Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{C}}$ с указанной выше аппроксимацией, $\varrho(z)$ — непрерывная функция, определенная в* *области* Ω.

Будем говорить, что $\varrho(z)$ *удовлетворяет* λ*-условию в* Ω, *если* $0 < \varrho(z) < \lambda$ *и для каждой* L_j^ν *и любой пары несовпадающих точек* $z_1, z_2 \in L_j^\nu$ *существует спрямляемая дуга*

$$\gamma(z_1, z_2) = \gamma \subset \Omega,$$

соединяющая точки z_1 *и* z_2, *для которой*

$$\int_{\gamma(z_1,z_2)} \varrho(z)|dz| < \lambda|z_1 - z_2|, \tag{3.1}$$

где λ — *заданная положительная постоянная.*

При этих предположениях справедлива

Теорема 3.1.1 *Пусть* f_z, $f_{\overline{z}} \in C(\Omega)$, $\varrho(z)$ *удовлетворяет* λ*-условию. Функция* $f(z)$ *будет однолистной в* Ω, *если*

$$|f_z - c| + |f_{\overline{z}} - d| \le \frac{|c| - |d|}{\lambda}\varrho(z), \qquad \forall z \in \Omega, \tag{3.2}$$

где c *и* d — *некоторые комплексные постоянные,* $|c| > |d|$.

Доказательство. Так как $0 < \varrho(z) < \lambda$, то $|f_z| - |f_{\overline{z}}| > 0$ в силу (3.2), следовательно, отображение $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ локально однолистно. Пусть $z_1, z_2 \in L_j^\nu$, $z_1 \ne z_2$. В силу (3.1) и (3.2) имеем

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_\gamma f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} \right| \ge$$

$$\ge |c(z_1 - z_2) + d(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)| - \frac{|c| - |d|}{\lambda} \int_\gamma \varrho(z)|dz| > 0.$$

По теореме 1.1.1 функция $f(z)$ будет однолистной в области Ω_j, $j = 1, 2, \ldots$, а значит и в Ω.

Примером использования $\varrho(z) \not\equiv \mathrm{const}$ является такое

Следствие 3.1.1 *Аналитическая в области* $\mathbb{D}^- \setminus \{\infty\}$ *функция вида*

$$F(z) = z + a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu / z^\nu, \qquad |z| > 1,$$

будет однолистной в $\mathbb{D}^-$, *если для некоторой комплексной постоянной* $c \neq 0$

$$|F'(z) - c| \leq \kappa(c), \qquad \forall z \in \mathbb{D}^-,$$

где

$$2\kappa(c) \leq 2\kappa_0(c) = |c|t_0 + |c-1| + \left[(|c|t_0 + |c-1|)^2 + 4|c-1|^2\right]^{1/2},$$

причем $t_0 \in [0, 1]$ *и является корнем уравнения*

$$\sqrt{1 - t^2} = \pi|1 - c^{-1}| + t \arccos t.$$

Условия следствия с применением леммы Шварца дают неравенство

$$|F'(z) - c| \leq |c|\varrho(z), \quad z \in \mathbb{D}^-,$$

где

$$\varrho(z) = \kappa_0(c)|c|^{-1}|\beta + (1 - \beta^2)|z|^{-2}|, \quad \beta = |c-1|/\kappa_0(c),$$

а λ-условие для $\varrho(z)$ в области $\mathbb{D}^-$ проверяется несложными вычислениями, если положить

$$\lambda = 1, \quad \Omega = \mathbb{D}^-, \quad \Omega_j = \{\, z \,:\, |z| > r_j = 1 + 1/j \,\}, \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Например, для $z_1 = r_j e^{-i\varphi}$, $z_2 = r_j e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi \leq \pi/2)$ полагаем, что гладкая дуга $\gamma(z_1, z_2)$ есть дуга окружности, лежащая в области и Ω_j и имеющая центральный угол, равный 2δ, где

$$\delta = 2\varphi \left(1 - \pi^{-1} \arccos t_0\right).$$

Другое применение теоремы 3.1.1 при $\varrho(z) \not\equiv \mathrm{const}$ будет дано в главе 4.

Предложение 3.1.1 *Пусть $\theta_0 = \theta_0(\Omega) \in [0, \pi)$, α — вещественная постоянная, f_z, $f_{\overline{z}} \in C(\Omega)$. Пусть, далее,*

$$|f_{\overline{z}}| \le |\mu(z) f_z|,$$

где функция $\mu(z)$ непрерывна в Ω и $|\mu(z)| < 1$ для любой точки $z \in \Omega$. Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если

$$f_z \ne 0, \quad \left|\arg\left(e^{i\alpha} f_z\right)\right| < \frac{\pi - \theta_0}{2} - \arcsin|\mu(z)|, \quad \forall z \in \Omega \in R(\theta_0, \infty).$$

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 — несовпадающие точки Ω. Существует такая гладкая дуга $\gamma = \gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$ с уравнением $z = z(t)$, $0 \le t \le 1$, что $z'(t) \in C[0,1]$, $\quad z'(t) \ne 0$,

$$\delta = \delta(t) = \arg z'(t) - \arg z'(t_0) \in [-\theta_0/2, \theta_0/2]$$

для некоторого числа $t_0 \in [0,1]$. Тогда, положив в формуле

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f_z dz - f_{\overline{z}} d\overline{z}$$

$z = z(t)$, $\varepsilon = \overline{z'}(t)/z'(t)$, $|\varepsilon| = 1$, получим неравенство

$$|f(z_2) - f(z_1)| \ge \int_0^1 |z'(t)| \Re\left[e^{i(\alpha+\delta)}\left(f_z + \varepsilon f_{\overline{z}}\right)\right] dt > 0.$$

Действительно, $|f_z+\varepsilon f_{\overline{z}}|\geq|f_z|-|\mu f_{\overline{z}}|>0$ и

$$\left|\arg\left[e^{i(\alpha+\delta)}\left(f_z+\varepsilon f_{\overline{z}}\right)\right]\right|\leq|\delta|+\left|\arg(e^{i\alpha}f_z)\right|+\arcsin|\mu|<\frac{\pi}{2},$$

т. е. $\Re\left[e^{i(\alpha+\delta)}\left(f_z+\varepsilon f_{\overline{z}}\right)\right]>0$ на $\gamma=\gamma(z_1,z_2)$. Доказательство завершено.

Если область Ω выпукла, т. е. $\theta_0(\Omega)=0$, то условие однолистности имеет вид

$$f_z\neq 0,\quad \left|\arg\left(e^{i\alpha}f_z\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\arcsin|\mu(z)|,\quad \forall z\in\Omega.$$

Следующая теорема содержит два однотипных утверждения. Основная формулировка относится к случаю круга $\mathbb{D}$, уточнения на случай области $\mathbb{D}^-=\{z\,:\,|z|>1\}$ даны в скобках.

Напомним, что в окрестности точки $z=\infty$, если $\infty\in\Omega$, мы предполагаем непрерывно дифференцируемой разность

$$f(z)-(az+b\overline{z})$$

с какими-либо комплексными постоянными a и b, $|a|>|b|$.

Теорема 3.1.2 *Пусть f_z и $f_{\overline{z}}\in C(\mathbb{D})$ (или $C(\mathbb{D}^-)$). Функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$ (или в $\mathbb{D}^-$), если найдутся две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)\in C^1(\mathbb{D})$ (или $\varphi(z)$, $\psi(z)\in C^1(\mathbb{D}^-)$, причем*

$$\varphi(\infty)=f_z(\infty)\neq 0,\quad \psi(\infty)=f_{\overline{z}}(\infty)),$$

такие, что для всех $z\in\mathbb{D}$ $(z\in\mathbb{D}^-)$ справедливы неравенства

$$|\varphi(z)|>|\psi(z)|$$

и

$$\Phi(z;\varphi,\psi)+\frac{|f_z-\varphi|+|f_{\overline{z}}-\psi|}{|1-|z|^2|}|z|^{2\alpha}\leq\frac{|\varphi|-|\psi|}{|1-|z|^2|},\qquad(3.3)$$

где

$$\Phi(z;\varphi,\psi) = |z\varphi_z + \overline{z}\psi_z| + |z\varphi_{\overline{z}} + \overline{z}\psi_{\overline{z}}|, \tag{3.4}$$

α — постоянная, зависящая от области: $\alpha(\mathbb{D}) = 0$, $\alpha(\mathbb{D}^-) = 1$.

Доказательство проведем для случая области $\mathbb{D}^-$, случай круга $\mathbb{D}$ обосновывается точно так же. Наши рассуждения опираются на результаты главы 1 и на обобщение метода Л. Альфорса и Г. Вейля [94].

Итак, пусть $f(z)$ удовлетворяет неравенству (3.3) в $\mathbb{D}^-$ с постоянной $\alpha = 1$. В силу (3.3) и (3.4) имеем

$$|f_z| - |f_{\overline{z}}| \geq (1 - |z|^2)(|\varphi| - |\psi|) > 0,$$

так как $|\varphi| - |\psi| > 0$. Следовательно, $f(z)$ является локально однолистной в $\mathbb{D}^-$.

Зафиксируем произвольно $r \in (1, \infty)$ и рассмотрим продолжение

$$\tilde{g}(z) = \{\, g(z),\ z \in \overline{\mathbb{D}^-};\ F(z),\ z \in \mathbb{D}^-\}$$

, где $g(z) = f(rz)$, а функция $F(z)$ определяется соотношениями

$$F(z) = g(1/\overline{z}) + (z - 1/\overline{z})\varphi_1(1/\overline{z}) + (\overline{z} - 1/z)\psi_1(1/\overline{z}), \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\varphi_1(z) = r\varphi(rz), \qquad \psi_1(z) = r\psi(rz).$$

Очевидно, производные $\tilde{g}_z$ и $\tilde{g}_{\overline{z}}$ непрерывны в $\overline{\mathbb{D}}$, $\tilde{g}(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$. Кроме того, функция $\tilde{g}(z)$ локально однолистна в $\overline{\mathbb{D}^-}$ и на основании (3.3) и (3.4) удовлетворяет неравенству

$$\Phi(z;\varphi_1,\psi_1) + \frac{|g_z - \varphi_1| + |g_{\overline{z}} - \psi_1|}{1 - |z|^{-2}} < \frac{|\varphi_1| - |\psi_1|}{|z|^2 - 1}, \quad z \in \mathbb{D}^-. \tag{3.5}$$

Можно убедиться в том, что $F(z)$ является локально однолистной в замкнутом круге. Пусть $\zeta \in \overline{\mathbb{D}^-}$ и $\zeta = 1/\overline{z}$, тогда

$$F_z = -\overline{\zeta}^2 F_{\overline{\zeta}}, \qquad F_{\overline{z}} = -\zeta^2 F_{\zeta},$$

$$F_{\overline{\zeta}} = g_{\overline{\zeta}} - \psi_1 + (|\zeta|^{-2} - 1)(\zeta\varphi_{1\overline{\zeta}} + \overline{\zeta}\psi_{1\overline{\zeta}}) - \overline{\zeta}^{-2}\varphi_1,$$

$$F_{\zeta} = g_{\zeta} - \varphi_1 + (|\zeta|^{-2} - 1)(\zeta\varphi_{1\zeta} + \overline{\zeta}\psi_{1\zeta}) - \zeta^{-2}\psi_1.$$

Из (3.5) следует, что

$$|F_z| > |\varphi_1| - |\zeta|^2|g_{\overline{\zeta}} - \psi_1| - (|\zeta|^2 - 1)|\zeta\varphi_{1\overline{z}} + \overline{\zeta}\psi_{1\overline{\zeta}}| > 0,$$

$$\left|\frac{F_{\overline{z}}}{F_z}\right| \leq \frac{|\psi_1| + |\zeta|^2|g_{\zeta} - \varphi_1| + (|\zeta|^2 - 1)|\zeta\varphi_{1\zeta} + \zeta\psi_{1\zeta}|}{|\varphi_1| - |\zeta|^2|g_{\overline{\zeta}} - \psi_1| - (|\zeta|^2 - 1)|\zeta\varphi_{1\overline{\zeta}} + \zeta\psi_{1\overline{\zeta}}|} < 1$$

при любом $z = 1/\overline{\zeta} \in \mathbb{D}^-$, т. е. отображение F локально гомеоморфно в $\overline{\mathbb{D}}$.

По лемме о склейке (лемма 1.1.2 при $n = 2$) функция $\tilde{g}(z)$ локально однолистна в $\overline{\mathbb{C}}$. Но $\tilde{g}(\infty) = \infty$, поэтому $\tilde{g}(z)$ однолистна в $\overline{\mathbb{C}}$ по теореме Ж. Адамара ([85], с. 164). В силу произвольности $r \in (1, \infty)$ отсюда следует однолистность $f(z)$ в $\mathbb{D}^-$, что и требовалось.

Если $\varphi(z) \equiv f_z$, $\psi(z) \equiv f_{\overline{z}}$, то (3.3) приводит к достаточному условию однолистности в форме: для всех $z \in \mathbb{D}$ ($\mathbb{D}^-$)

$$|zf_{zz} + \overline{z}f_{\overline{z}z}| + |zf_{z\overline{z}} + \overline{z}f_{\overline{z}\overline{z}}| \leq \frac{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}{|1 - |z|^2|}. \qquad (3.6)$$

Заменив (3.6) более жестким требованием, можем сформулировать такое следствие теоремы 3.1.2.

Следствие 3.1.2 *Пусть f_z и $f_{\overline{z}} \in C^1(\Omega)$, $|f_z| - |f_{\overline{z}}| > 0$ в Ω, где Ω — одна из трех плоских областей:*

$$\mathbb{D} = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\}, \quad \mathbb{D}^- = \{\, z \,:\, |z| > 1 \,\}, \quad H = \{\, z \,:\, \Re\, z > 0 \,\}.$$

Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если для функции

$$P(z) = (|f_{zz}| + 2|f_{z\overline{z}}| + |f_{\overline{z}\overline{z}}|)/(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)$$

выполняется соответствующее неравенство

а) $|zP(z)| \le (1-|z|^2)^{-1}, \qquad \forall z \in \Omega = \mathbb{D}$;

б) $|zP(z)| \le (|z|^2-1)^{-1}, \qquad \forall z \in \Omega = \mathbb{D}^-$;

в) $|2\,xP(z)| \le 1, \qquad \forall z = x+iy \in \Omega = H$.

Если в (3.3) функция $\varphi(z)$ аналитична и отлична от нуля, $\psi(z) \equiv 0$, то для аналитической функции $f(z)$, $f'(z) \neq 0$, $(\partial f/\partial \overline{z} \equiv 0)$ приходим к достаточному условию однолистности в форме: для всех $z \in \mathbb{D}$ $(\mathbb{D}^-)$

$$\left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\left(1-|z|^2\right)\right| + \left|\frac{f'(z)}{\varphi(z)} - 1\right| |z|^{2\alpha} \le 1. \tag{3.7}$$

Отсюда при $\varphi(z) = f_0'(z)$ получим

Следствие 3.1.3 *Пусть функции $f(z)$ и $f_0(z)$ локально однолистны, аналитичны в круге $\mathbb{D}$ (в области $\mathbb{D}^-$, за исключением простого полюса в точке $z=\infty$, причем $f'(\infty) = f_0'(\infty)$). Если для некоторого фиксированного числа $\lambda \in [0,1]$*

$$\left\| z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}(1-|z|^2)\right\|_\Omega \le \lambda, \qquad \left\|\frac{f'(z)}{f_0'(z)} - 1\right\|_\Omega \le 1-\lambda, \tag{3.8}$$

где $\Omega = \mathbb{D}$ $(\Omega = \mathbb{D}^-)$, то $f(z)$ однолистна в $\Omega = \mathbb{D}$ $(\Omega = \mathbb{D}^-)$.

Мы можем теперь обосновать предложение 2.1.4. Действительно, если $f_0'(z) = [g'(z)]^\delta$, где $g(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$ (в $\mathbb{D}^-$), то первое требование в (3.8) будет выполнено при $\lambda = 6|\delta|$, так как для однолистной в $\mathbb{D}$ (в $\mathbb{D}^-$) функции $g(z)$ справедливы неравенства

$$\left\|\frac{g''(z)}{g'(z)}(1-|z|^2)\right\|_{\mathbb{D}} \le 6 \qquad \left(\left\|z\frac{g''(z)}{g'(z)}(|z|^2-1)\right\|_{\mathbb{D}^-} \le 6\right). \tag{3.9}$$

Оценка для $g(z)$ в $\mathbb{D}^-$ получается (см. [2], [3]) как следствие неравенства Г. М. Голузина ([47], с. 139). Оценка для $g(z)$ в случае $\mathbb{D}$ — очевидное следствие известного неравенства (см. [47], с. 52) для аналитической и однолистной в $\mathbb{D}$ функции $g(z)$:

$$\left|\frac{g''(z)}{g'(z)} - \frac{2\overline{z}}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4}{1-|z|^2}, \qquad |z| < 1. \tag{3.10}$$

Теорема 3.1.2 может быть применена к конформным отображениям следующим образом. Если f — конформное отображение односвязной области Ω, g_1 — какой-либо известный диффеоморфизм $\mathbb{D}$ (или $\mathbb{D}^-$) на Ω, то применение (3.3) к отображению $g = f \circ g_1$ дает признак однолистности $f(z)$ в Ω. Случаю, когда g_1 — аффинное преобразование, соответствует

Следствие 3.1.4 *Пусть Ω^+ — внутренность (Ω^- — внешность) эллипса с уравнением*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad a > 0,\, b > 0,$$

и пусть функция $f(z)$ аналитична в Ω^+ (аналитична в $\Omega^- \setminus \{\infty\}$ и в точке $z = \infty$ имеет простой полюс),

$$q = \min\{a/b, b/a\}, \quad r_*^2(z) = x^2/a^2 + y^2/b^2, \qquad z = x + iy.$$

Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω^+ (Ω^-), если

$$\left\|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1 - r_*^2(z)\right)\right\|_{\Omega^\pm} \le q.$$

Действительно, считая, что

$$a \geq b, \quad q = b/a, \quad c = (a+b)/2, \quad d = (a-b)/2,$$

$h(z)$ — произвольная аналитическая в Ω^+ (Ω^-) функция, вводим следующие функции в $\mathbb{D}$ $(\mathbb{D}^-)$:

$$g(\zeta) = f(c\zeta + d\overline{\zeta}),$$

$$\varphi(\zeta) = ch(c\zeta + d\overline{\zeta}), \qquad \psi(\zeta) = dh(c\zeta + d\overline{\zeta}).$$

Для этих функций требование (3.3) запишется с виде (после обратной замены независимой переменной)

$$|zh'(z)|\cdot|1-r_*^2(z)|+|f'(z)-h(z)|r_*^{2\alpha}(z) \leq q|h(z)|, \quad z \in \Omega^{\pm}. \quad (3.11)$$

Отсюда при $h(z) = f'(z)$ получим то, что нужно.

Приведем еще одно утверждение, связанное с заменой переменных. Будем пользоваться следующим свойством преобразования Мебиуса

$$\zeta \mapsto \varphi(\zeta, z) = \frac{\zeta - z}{1 - \overline{z}\zeta}$$

относительно параметра $z \in \mathbb{D}$:

при фиксированном $\zeta \in \mathbb{D}$ преобразование $z \mapsto \varphi(\zeta, z)$ задает квазиконформный автоморфизм круга $\mathbb{D}$, в частности, при ζ и $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\varphi(\mathbb{D}, z) = \varphi(\zeta, \mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

Предложение 3.1.2 *Предположим, что ζ — фиксированная постоянная, причем $|\zeta| < 1$, функция $F(z)$ — непрерывно дифференцируемое решение уравнения Бельтрами*

$$F_{\overline{z}} = \mu(z)F_z, \quad \mu(z) = -\zeta\frac{\zeta - z}{1 - \overline{z}\zeta}, \quad z \in \mathbb{D}. \qquad (3.12)$$

Если
$$m \leq |(1-\zeta\overline{z})F_z| \leq M, \qquad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{3.13}$$
причем постоянные m и M удовлетворяют неравенству
$$M/m \leq \exp(\pi/2),$$
то $F(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$.

Действительно, $\varphi(\zeta, z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами (3.12) как функция от z при фиксированном ζ. Используя известное представление решения уравнения Бельтрами, можем записать $F(z) = f(\varphi(\zeta, z))$, $z \in \mathbb{D}$, где $f(w)$ — функция, аналитическая в области $\mathbb{D} = \varphi(\zeta, \mathbb{D})$. Следовательно,
$$f'(\varphi(\zeta, z))(1-\zeta\overline{z})^{-1} = -F_z,$$
т. е. условия относительно F равносильны аналитичности $f(w)$ и требованию
$$m \leq |f'(w)| \leq M, \qquad M/m \leq \exp(\pi/2), \qquad \forall w \in \mathbb{D}.$$
Однолистность $f(w)$ при таких условиях — следствие теоремы 2.1.1.

3.1.2 Отображения областей пространства $\mathbb{R}^n$

Рассматриваются отображения $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ некоторой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$,
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad f = (f_1, \ldots, f_n)$$
— точки $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Запись $f \in C^k[X]$ означает, как обычно, что компоненты вектора $f(x)$ k раз непрерывно дифференцируемы в $X \subset \Omega$.

Далее, $f'(x) = (\partial f_k/\partial x_j)$ — матрица Якоби, $f'^{-1}(x)$ — обратная матрица, определенные в тех точках, где $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ невырождена.

Знак $\|.\|$ будет означать стандартную операторную норму в евклидовой метрике $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

Обозначим также

$$P(x) = \left\|f'^{-1}(x)\right\| \sum_{\nu,j,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_\nu(x)}{\partial x_j\, \partial x_k}\right|, \quad n \geq 2, \tag{3.14}$$

$$I(f;\delta) = \left\|\operatorname{dist}^\delta(x,\partial\Omega)P(x)\right\|_{\Omega(\gamma)}, \quad n \geq 2, \tag{3.15}$$

и для функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$

$$\|\varphi\|_X = \sup_{x\in X} |\varphi(x)|.$$

Если $n = 2$, то в приведенных в этом пункте утверждениях функция $P(x)$ в (3.15) может быть заменена функцией

$$P(x) = \frac{|f_{xx}| + 2|f_{x\overline{x}}| + |f_{\overline{x}\overline{x}}|}{|f_x| - |f_{\overline{x}}|}, \tag{3.16}$$

где индексы x и $\overline{x}$ означают, как и в предыдущем пункте, комплексное дифференцирование по $x = x_1 + ix_2$ и $\overline{x} = x_1 - ix_2$ соответственно.

Выше в терминах (3.16) сформулировано следствие 3.1.2.

Нам потребуются определения классов областей $G_{\alpha,\beta}(A,B)$, $G_\alpha(A)$, множества $\Omega(\gamma)$, данные в пункте 2.1.

Теорема 3.1.3 *Пусть*

$$\overline{\mathbb{R}^n} \supset \Omega \in G_{\alpha,\beta}(A,B), \quad \alpha \in [1/2,1], \quad \beta \in [0,1].$$

Локально гомеоморфное отображение $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *из класса*

$C^2[\Omega(\gamma)]$ будет инъективным в Ω, если

$$\delta = \beta(2 - 1/\alpha), \quad I(f;\delta) < 2^{1/\alpha}\lambda_\alpha / \left(A^{1/\alpha}B^{2-1/\alpha}\right), \tag{3.17}$$

где λ_α является собственным значением для некоторого интегрального оператора и определяется как корень уравнения

$$2\lambda \int_0^1 (1-\xi)^{1/\alpha-1} \exp\left[2\lambda \int_0^\xi \tau(1-\tau)^{1/\alpha-2} d\tau\right] d\xi = 1, \tag{3.18}$$

причем $\lambda_1 \le \lambda_\alpha \le \lambda_{1/2}$, $\lambda_1 = 0,3\ldots$, $\lambda_{1/2} = 0,85\ldots$.

Доказательство. Шаг 1. В силу теоремы 1.1.3 отображение f будет инъективным в Ω, если оно инъективно на каждой из компонент связности множества $\Omega \setminus K$, где $K = \overline{K}$ — некоторое множество, лежащее в Ω. Поэтому достаточно обосновать неравенство $f(x') \ne f(x'')$ для несовпадающих точек x' и x'', для которых существует соединяющая их в $\Omega(\gamma)$ дуга γ со свойствами

$$l \le A|x' - x''|, \quad l_{x(s)} \le B \operatorname{dist}^\beta(x(s), \partial\Omega), \quad \forall x(s) \in \gamma, \tag{3.19}$$

где $x = x(s)$, $0 \le s \le l$, представляет собой уравнение дуги γ от натурального параметра. В силу (3.19) имеем на γ

$$P(x(s)) \le I(f;\delta)/\operatorname{dist}^\delta(x(s), \partial\Omega) < 2^{1/\alpha}\lambda_\alpha A^{-1/\alpha} l_{x(s)}^{1/\alpha-2}, \tag{3.20}$$

где $0 \le s \le l$. Здесь учтены равенства

$$\delta/\beta = 2 - 1/\alpha; \qquad l_{x(s)} = \min\{s, l-s\}.$$

Шаг 2. Пусть x, y, t — переменные точки дуги γ. Проинтегрировав вдоль γ, для любой точки $y \in \gamma$ получим соотношение

$$f_\nu(x'') - f_\nu(x') = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\nu(y)}{\partial y_k}(x''_k - x'_k) + F_\nu(x', x'', y), \tag{3.21}$$

где $\nu = 1, \ldots, n$,

$$F_\nu(x', x'', y) = \int_{x'}^{x''} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_x^y \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu(t)}{\partial t_k \, \partial t_j} dt_j \right) dx_k. \qquad (3.22)$$

Предположим теперь, что $f(x') = f(x'')$. Через s, σ, τ обозначим дуговые абсциссы γ, соответствующие точкам x, y, t. Пользуясь известным неравенством $|Ax| \geq |x|/\|A^{-1}\|$ для невырожденной матрицы A, из (3.21) и (3.22) получим

$$u(\sigma)|x' - x''| \leq \int_0^l \left| \int_\sigma^\tau P(x(s))u(s)ds \right| d\tau =$$

$$= \int_0^\sigma sP(x(s))u(s)ds + \int_\sigma^l (l-s)P(x(s))u(s)ds, \qquad (3.23)$$

где σ — любое число из промежутка $[0, l]$, $u(s) = \|f'^{-1}(x(s))\|^{-1}$, $P(x)$ имеет вид (3.14).

При $n = 2$ соотношение (3.23) оказывается справедливым и в том случае, когда $P(x)$ берется в форме (3.16), так как вместо (3.21) и (3.22) можно пользоваться равенством

$$f(x'') - f(x') = f_y(y)(x'' - x') + f_{\overline{y}}(y)(\overline{x}'' - \overline{x}')+$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \int_y^x [f_{\zeta\zeta}(\zeta)d\zeta + f_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)d\overline{\zeta}]dx + [f_{\overline{\zeta}\zeta}(\zeta)d\zeta + f_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}(\zeta)d\overline{\zeta}]d\overline{x}.$$

где $f = f_1 + if_2$, $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$. Заменой переменных $s = (1+\xi)l/2$, $v(\xi) = u(s(\xi))$, с учетом оценки (3.20) и равенства $\min\{s, l-s\} = (1 - |\xi|)l/2$, на основании (3.23) приходим к неравенству

$$v(\xi) \leq \lambda(\Phi v)(\xi), \qquad -1 \leq \xi \leq 1, \qquad (3.24)$$

где

$$\lambda < 2^{1/\alpha}\lambda_\alpha A^{-1/\alpha}(l/2)^{1/\alpha}|x' - x''| \le \lambda_\alpha,$$

Φ — линейный оператор, зависящий от функции

$$p_\alpha(\xi) = (1 - |\xi|)^{1/\alpha - 2}$$

и

$$(\Phi v)(\xi) = \int_{-1}^{\xi}(1+\tau)p_\alpha(\tau)v(\tau)d\tau + \int_{\xi}^{1}(1-\tau)p_\alpha(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Шаг 3. Пользуясь тем, что функция $v(t)$ неотрицательна, ограничена и не равна нулю тождественно, покажем противоречивость в (3.24) при $\lambda < \lambda_\alpha$, чем и завершится доказательство.

Пусть $y(\xi)$ — неотрицательная интегрируемая функция в интервале $(-1, 1)$, $v(\xi)y(\xi) \not\equiv 0$. Тогда из (3.24) следует

$$\langle v, y\rangle = \int_{-1}^{1} vy\, d\xi \le \lambda\int_{-1}^{1}(\Phi v)y\, d\xi = \lambda\int_{-1}^{1}(\Phi^* y)v\, d\xi, \qquad (3.25)$$

где

$$(\Phi^* y)(\xi) = p_\alpha(\xi)\left[(1+\xi)\int_{\xi}^{1} y(t)dt + (1-\xi)\int_{-1}^{\xi} y(t)dt\right].$$

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$, то соотношение (3.25) влечет противоречивое неравенство $\langle v, y\rangle \le (\lambda/\lambda_\alpha)\langle v, y\rangle$, если неравенство

$$\lambda_\alpha(\Phi^* y)(\xi) \le y(\xi), \qquad -1 \le \xi \le 1, \qquad (3.26)$$

имеет интегрируемое неотрицательное решение $y(\xi)$. Мы предъявим функцию $y(\xi) > 0$, которая получается интегрированием уравнения

$$\lambda_\alpha(\Phi^* y)(\xi) = y(\xi)$$

после замены $\eta(\xi) = \int_0^\xi y(t)dt$ в предположении четности $y(\xi)$. А именно, рассмотрим функцию $\eta_\alpha(\xi;\lambda)$, заданную и нечетную в $(-1,1)$, определяемую при $0 \le \xi < 1$ формулой

$$\eta_\alpha(\xi;\lambda) = [2\lambda/v_\alpha(\xi;\lambda)] \int_0^\xi p_\alpha(t) v_\alpha(t;\lambda)dt =$$

$$= 1 - \left[1 - 2\lambda \int_0^\xi (1-t) p_\alpha(t) v_\alpha(t;\lambda) dt\right] / v_\alpha(\xi;\lambda),$$

где

$$p_\alpha(\xi) = (1-|\xi|)^{1/\alpha - 2}, \quad v_\alpha(\xi;\lambda) = \exp\left[2\lambda \int_0^\xi t p_\alpha(t)dt\right].$$

Второе выражение для η_α получено из первого интегрированием по частям.

Обозначим $\eta(\xi) = \eta_\alpha(\xi;\lambda_\alpha)$. Поскольку число λ_α есть корень уравнения (3.18), т. е.

$$1 = 2\lambda_\alpha \int_0^1 (1-\xi) p_\alpha(\xi) v_\alpha(\xi;\lambda_\alpha) d\xi,$$

то, очевидно, $0 < \eta(\xi) < 1$ при $0 < \xi < 1$, $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$. Кроме того, функция $\eta(\xi)$ является решением задачи

$$\eta' = 2\lambda_\alpha p_\alpha(\xi)(1 - \xi\eta), \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(1) = 1, \tag{3.27}$$

равносильной уравнению $y = \lambda_\alpha(\Phi^* y)$ в предположении четности $y(\xi)$ и связи $\eta'(\xi) = y(\xi)$. Из (3.27) следует, что $\eta'(\xi) = y(\xi) > 0$ при $0 \le \xi < 1$. Таким образом, неравенство (3.26) имеет четное положительное решение $y(\xi) = \eta'(\xi)$, что и требовалось.

Теорема 3.1.3 доказана.

В следующей теореме 3.1.4 рассматривается такая ситуация: граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из конечного числа компонент (связности), причем

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset, \quad \Gamma_1 = \cup_k \Gamma_1^k, \quad \Gamma_2 = \cup_k \Gamma_2^k,$$

где Γ_j^k — компоненты $\partial\Omega$. Здесь не исключается возможность того, что одно из множеств (Γ_1 или Γ_2) пусто. Пусть Ω' — подмножество Ω, такое, что

$$\partial\Omega \cap \partial\Omega' = \Gamma_2.$$

Теорема 3.1.4 *Пусть $f : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локально гомеоморфное отображение, $f \in C^2(\Omega')$, $\det f'(x) \neq 0$ в Ω'. Отображение f будет инъективным в $\overline{\Omega}$, если*

1) f инъективно на каждой из компонент Γ_1;

2) для любого k две любые точки x' и $x'' \in \Gamma_2^k$, $x' \neq x''$, можно соединить спрямляемой дугой γ, причем $\gamma \setminus \{x', x''\} \subset \Omega'$ и

$$2 \sup_{0<s<l} [s(l-s)P(x(s))] < |x' - x''|, \tag{3.28}$$

где l — длина γ, $x = x(s)$, $0 \leq s \leq l$, — уравнение γ от натурального параметра.

Доказательство. В силу теоремы 1.1.3 достаточно показать, что справедливо неравенство $f(x') \neq f(x'')$ для несовпадающих точек x' и x'' из Γ_2^k при произвольно фиксированном k. Повторив шаг 2 предыдущего доказательства, получим неравенство (3.23) при $0 < \sigma < l$, а из него с учетом (3.28) — неравенство (3.24) для

$$\lambda < 1/2, \quad p_\alpha(\xi) = p(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1}.$$

Но для функции

$$p_\alpha(\xi) = p(\xi)$$

задача (3.27) имеет решение $\eta(\xi) = \xi$. Поэтому в этом случае неравенство (3.25) дает противоречие, если в качестве $y(\xi)$ взять $\eta'(\xi) \equiv 1$.

Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 3.1.3 и ее доказательства.

Следствие 3.1.5 *Функционал $I(.;\delta)$ для указанного в теореме 3.1.3 класса отображений в области $\Omega \in G_{\alpha,\beta}$ является допустимым, если*

$$\alpha \geq 1/2, \quad 0 \leq \delta \leq \beta(2-1/\alpha), \quad \mathrm{diam}(\partial\Omega) < \infty.$$

Здесь

$$G_{\alpha,\beta} = \cup_{A>0,B>0} G_{\alpha,\beta}(A,B).$$

Примеры пункта 3.2 показывают, что утверждение следствия, вообще говоря, будет нарушено, если

$$\alpha < 1/2, \quad \text{либо} \quad \mathrm{diam}(\partial\Omega) = \infty, \quad \text{либо} \quad \delta > 2-1/\alpha.$$

Доказательство. Теорема 3.1.3 остается справедливой, если (3.17) заменить требованием

$$0 \leq \delta \leq \beta(2-1/\alpha), \quad I(f;\delta) < 2^{1/\alpha'}\lambda_{\alpha'}(B/A)^{1/\alpha'}B^{-2}d^{1-\alpha/\alpha'}, \quad (3.29)$$

где $\alpha' = 1-(2-\delta/\beta)$ при $\beta > 0$, $\alpha' = \alpha$ при $\beta = 0$, $d = d(\mathrm{comp}\,\partial\Omega)$ — верхняя грань диаметров граничных компонент области Ω.

Действительно, поскольку

$$1/2 \leq \alpha' \leq \alpha \leq 1, \quad \Omega \in G_{\alpha,\beta}(A,B),$$

то

$$\Omega \in G_{\alpha',\beta}(A',B),$$

где $A' = Ad_\varepsilon^{\alpha-\alpha'}$, $d_\varepsilon = d+\varepsilon$, ε — произвольно взятое положительное число.

Пусть теперь f — фиксированное отображение, удовлетворяющее (3.29). Тогда число d в (3.29) можно заменить на d_ε для достаточно малого $\varepsilon > 0$, поэтому (3.29) влечет условие вида (3.17) с заменой α на α', A на A'.

Следовательно, отображение f будет инъективным в Ω по теореме 3.1.3 с учетом того, что $\Omega \in G_{\alpha',\beta}(A', B)$.

Очевидно, следствие 3.1.5 вытекает из формального обобщения условий теоремы 3.1.3 в виде (3.29).

Из (3.29) при $\delta = 0$, $\alpha' = 1/2$ следует ограничение

$$I(f;0) < 4\lambda_{1/2} A^{-2} d^{1-2\alpha}, \tag{3.30}$$

поэтому справедливо

Следствие 3.1.6 *Локально гомеоморфное отображение*

$$f\,:\,\Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$$

класса $C^2[\Omega(\gamma)]$ будет инъективным в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, если

$$\Omega \in G_\alpha(A), \quad \alpha \in [1/2, 1], \quad d < \infty$$

и выполняется (3.30).

Для выпуклой области

$$\operatorname{diam} \Omega = d(\operatorname{comp} \partial\Omega), \quad \Omega \in G_1(1).$$

Поэтому при $\Omega(\gamma) = \Omega$ с учетом того, что $4\lambda_{1/2} > 3,4 > \pi + 1/4$, получим

Следствие 3.1.7 *Локально гомеоморфное отображение*

$$f\,:\,\Omega \to \mathbb{R}^n$$

класса $C^2(\Omega)$ выпуклой области Ω будет инъективныи в Ω, если

$$\|P(x)\|_\Omega \le \frac{\pi + 1/4}{\operatorname{diam}\Omega}, \tag{3.31}$$

где $P(x)$ имеет вид (3.14) при $n \ge 2$ или (3.16) при $n = 2$, $\operatorname{diam}\Omega$ — диаметр области Ω.

Отметим несколько неожиданный факт:

в частном случае при $n = 2$, $f_{\overline{x}} \equiv 0$ из (3.16), (3.31) получается следующее условие глобальной однолистности аналитической функции в ограниченной выпуклой области

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{\pi + 1/4}{\operatorname{diam}\Omega}, \qquad \forall z \in \Omega,$$

что усиливает известный результат В. С. Рогожина ([22], с. 44).

Следующая цель — указать новое разложение множества однородных областей $G_{1,1}$ в виде

$$G_{1,1} = \cup_{A>0} G_1^1(A)$$

с тем, чтобы классы $G_1^1(A)$ зависели лишь от одного числового параметра, но могли бы быть применимы для описания условий инъективности вида (3.17).

Заметим, что для числовых параметров

$$\delta = \beta(2 - 1/\alpha), \quad C = A^{1/\alpha} B^{2-1/\alpha}$$

из (3.19) вытекает неравенство

$$\frac{l^{1/\alpha} l_{x(s)}^{2-1/\alpha}}{\operatorname{dist}^\delta(x(s), \partial\Omega)} \le C|x' - x''|, \quad \forall x = x(s) \in \gamma(x', x''), \tag{3.32}$$

которое положим в основу следующего определения.

Определение. *Для области* $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *запись*

$$\Omega \in G^\delta_\alpha(C)$$

будет означать существование множеств

$$K = \overline{K} \subset \Omega, \qquad \Omega(\gamma) \subset \Omega,$$

таких, что для любых двух точек x' *и* x''*, лежащих в одной и той же компоненте* $\Omega \setminus K$*, можно указать дугу*

$$\gamma(x', x'') \subset \Omega(\gamma)$$

со свойством (3.32).

Очевидно,

$$G^0_{1/2}(A) = G_{1/2}\left(\sqrt{A}\right).$$

Имеет место также

Предложение 3.1.3 *Обозначим*

$$G^\delta_\alpha = \cup_{C>0} G^\delta_\alpha(C).$$

Тогда $G_{1,1} = G^1_1$*.*

Доказательство. Как было отмечено, из (3.19) следует (3.32) при

$$\delta = \beta(2 - 1/\alpha), \quad C = A^{1/\alpha} B^{2-1/\alpha},$$

т. е.

$$G^{\beta(2-1/\alpha)}_\alpha (A^{1/\alpha} B^{2-1/\alpha}) \supset G_{\alpha,\beta}(A, B),$$

в частности, $G_{1,1}(A, B) \subset G^1_1(AB)$.

Обратно, пусть $\Omega \in G^1_1(C)$, $\gamma = \gamma(x', x'')$ — дуга со свойством (3.32). Поскольку $l = l(x', x'') \geq |x' - x''|$, то из условия (3.32) при

$\alpha = \delta = 1$ следует неравенство

$$l_{x(s)} \leq C \operatorname{dist}(x(s), \partial\Omega).$$

Кроме того, $l \leq C|x' - x''|$, если $l_x \geq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ по крайней мере для одной точки $x \in \gamma$. Если же $l_x < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ для всех $x \in \gamma$, то γ лежит в некотором шаре, содержащемся в Ω. Но в этом шаре точки x', x'' можно соединить новой дугой $\gamma_1(x', x'')$ со свойствами (3.19) для $A = B = \sqrt{2}$, что легко проверяется, если γ_1 есть объединение двух отрезков $[x', x^0]$, $[x^0, x'']$ с подходяще выбранной точкой x^0. Таким образом, $G_1^1(C) \subset G_{1,1}(A, A)$, где $A = \max(C, \sqrt{2})$, что и требовалось.

Аналогом теоремы 3.1.3 является

Предложение 3.1.4 *Пусть*

$$\Omega \in G_\alpha^\delta(C), \quad \alpha \in [1/2, 1] \quad \delta \in [0, 2 - 1/\alpha].$$

Локально гомеоморфное отображение

$$f \,:\, \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$$

класса $C^2[\Omega(\gamma)]$ будет инъективным в Ω, если

$$I(f; \delta) < 2^{1/\alpha} \lambda_\alpha / C,$$

где λ_α определяется из уравнения (3.18).

Доказательство предложения 3.1.4 отличается от доказательства теоремы 3.1.3 только тем, что вместо (3.20) мы пользуемся неравенством

$$P(x(s)) < 2^{1/\alpha} \lambda_\alpha |x' - x''| l^{-1/\alpha} \left[\min\{s, l - s\}\right]^{1/\alpha - 2}, \tag{3.33}$$

и, далее, соотношения (3.33) и (3.23) влекут неравенство (3.24) для $\lambda < \lambda_\alpha$.

В заключение приведем простой факт об отображениях в $\mathbb{R}^n$ отрезка прямой. Доказательство этого факта показывает «в чистом виде» идею одного из этапов в доказательствах теорем 3.1.3 и 3.1.4.

Предложение 3.1.5 *Пусть* $f : (-1,1) \to \mathbb{R}^n$ *– отображение класса* $C^2(-1,1)$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$,

$$|f'(t)| = \left(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu'^2(t)\right)^{1/2} \neq 0, \quad |f''(t)| = \left(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu''^2(t)\right)^{1/2}.$$

Отображение f *непрерывно продолжимо на промежуток* $[-1,1]$ *и инъективно там, если*

$$\frac{|f''(t)|}{|f'(t)|} < \frac{1}{1-t^2}, \qquad \forall t \in (-1,1). \tag{3.34}$$

Доказательство. Продифференцировав функцию $u(t) = |f'(t)|$ и применив неравенство Коши-Буняковского, получим оценку

$$|u'(t)| \le |f''(t)|.$$

Отсюда $|u'(t)|/u(t) < (1-t^2)^{-1}$ при $t \in (-1,1)$ ввиду (3.34), поэтому

$$u(t) \le u(0)(1+|t|)^{1/2}(1-|t|)^{-1/2}, \quad 1 < t < 1.$$

Следовательно, вектор $f(t)$ непрерывно продолжим на концы интервала $(-1,1)$.

Пусть

$$-1 \le a < b \le 1, \quad f(a) = f(b),$$

тогда для любой точки $\tau \in (a, b)$

$$u(\tau)(b-a) < \int_a^\tau \frac{t-a}{1-t^2}u(t)dt + \int_\tau^b \frac{b-t}{1-t^2}u(t)dt \tag{3.35}$$

ввиду (3.34) и следующего тождества по τ

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b-a) + \int_a^\tau (a-t)f''(t)dt + \int_\tau^b (b-t)f''(t)dt.$$

Проинтегрировав (3.35) по $\tau \in (a, b)$, будем иметь

$$\int_a^b u(\tau)d\tau < \int_a^b \frac{2(\tau-a)(b-\tau)}{(b-a)(1-\tau^2)}u(\tau)d\tau,$$

что невозможно, так как $u(t) \neq 0$ и $2(\tau-a)(b-\tau) \leq (b-a)(1-\tau^2)$ при любом $\tau \in (a, b) \subset (-1, 1)$.

3.2 Теоремы комбинирования

При решении ряда плоских задач механики сплошных сред возникает такая ситуация. Конформное отображение $f : \Omega \to \Omega^*$ известной области Ω на искомую Ω^* обладает свойствами:

на некоторой части $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ известны граничные значения $|f'(z)|$, а образ $f(\Gamma_2)$ остальной части $\Gamma_2 = (\partial\Omega) \setminus \Gamma_1$ при отображении f либо задан, либо лежит на некоторой простой кривой, либо имеет простые геометрические характеристики (выпуклость, ограниченность вращения и т. п.).

Таким образом, необходимы признаки однолистности $f(z)$ в Ω, включающие геометрические требования на $f(\Gamma_2)$ и требования метрического характера на Γ_1 или вблизи Γ_1.

3.2.1 Влияние нормировок

Пусть $\mathbb{D} = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\}$. Рассмотрим функционал

$$I_B(f) = \left\| z\frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - |z|^2) \right\|_{\mathbb{D}} \tag{3.36}$$

в трех следующих классах функций $f(z) \not\equiv 0$. А именно, пусть

$M_0(\mathbb{D}) \,:\, f(z) = \ln z + \varphi(z)$, $\varphi(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$;

$M_1(\mathbb{D}) \,:\, f(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$;

$M_2(\mathbb{D}) \,:\, f(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$, $f'(0) = 0$.

В классе $M_1(\mathbb{D})$ ядро функционала I_B из (3.36) состоит из функций вида $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, a и b — постоянные.

Очевидно, множество $\operatorname{Ker} I_B$ пусто в классах $M_0(\mathbb{D})$ и $M_2(\mathbb{D})$, но в этих классах содержательными являются подмножества, определяемые неравенством $I_B(f) \leq \kappa$ при заданном $\kappa \geq 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.2.1 *Пусть $f(z)$ принадлежит одному из классов $M_j(\mathbb{D})$ и, кроме того, $I_B(f) \leq 1$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда*

а) если $f(z) \in M_0(\mathbb{D})$, то любая (однозначная) ветвь $f(z)$ однолистна в области $\mathbb{D} \setminus [0, 1]$ или в любой односвязной области $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \gamma$, где γ — множество точек жордановой дуги, соединяющей начало координат с некоторой точкой $t \in \partial\mathbb{D}$;

б) если $f(z) \in M_1(\mathbb{D})$, то $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$;

в) если $f(z) \in M_2(\mathbb{D})$, то $f(z)$ двулистна в $\mathbb{D}$, и $f(\mathbb{D})$ лежит в круге

$$\{\, w \,:\, |w - f(0)| < |f''(0)| \,\}.$$

Как мы уже указывали ранее, утверждение б) принадлежит Й. Беккеру.

Если $f(z) \in M_0(\mathbb{D})$ и $I_B(f) \leq 1$, то функция

$$g(z) = \exp f(z) = z \exp \varphi(z)$$

аналитична и однолистна в $\mathbb{D}$ по теореме 3.3.3, которая будет доказана ниже. Поэтому любая ветвь $f(z) = \ln g(z)$ однолистна в области $\mathbb{D} \setminus \gamma$.

Пусть $f(z) \in M_2(\mathbb{D})$ и $I_B(f) \leq 1$, a — фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Вблизи начала координат

$$f(z) = a_0 + a_2 z^2 + o(|z|^2),$$

причем $a_2 \neq 0$, так как иначе

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) \neq 0, \quad n \geq 3,$$

следовательно, $\lim_{z\to 0} zf''(z)/f'(z) = n - 1 \geq 2$, т. е. $I_B(f) \geq 2$.

Итак, $a_2 \neq 0$. Рассмотрим функцию $(0 < a < 1)$

$$F(z) = \{g(z) = f(az),\ |z| \leq 1; \quad g(1/\overline{z}) + (z - 1/\overline{z})g'(1/\overline{z}),\ |z| \geq 1\}.$$

При $0 < |z| < 1$ производная $g'(z) = af'(az)$ непрерывна и не равна нулю в силу ограниченности $zf''(z)/f'(z)$ для $|z| \leq a$. При $1 \leq |z| < \infty$ $(\zeta = 1/\overline{z} \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$ якобиан $F(z)$

$$a^2|f'(a\zeta)|^2\{1 - \left| a\zeta \frac{f''(a\zeta)}{f'(a\zeta)} \right|^2 (1 - |\zeta|^2)^2\} > 0$$

и непрерывен. Кроме того, $F(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}$ и по лемме 1.1.2 локально однолистна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

При $|z|e^{i\theta} = z \to \infty$ имеем

$$F(z) = a_0 + 2a_2 a^2 e^{2i\theta} + O(1/|z|).$$

Применение к $F(z)$ (см. [69], с.93) принципа аргумента в кругах достаточно большого радиуса показывает, что $F(\mathbb{C})$ заполняет круг $\{\, w \,:\, |w - a_0| < 2|a_2|a^2 \,\}$ и функция $F(z)$ двулистна в $\mathbb{C}$.

Ввиду произвольности $a \in (0,1)$ и равенства $f'(0) = 0$, получим, что $f(z)$ двулистна в $\mathbb{D}$, и $f(\mathbb{D})$ лежит в круге

$$\{\, w \,:\, |w - a_0| \le 2|a_2| = |f''(0)| \,\}.$$

Примеры. а) $f(z) = \ln z + z^2/4 \in M_0(\mathbb{D}),\ \ I_B(f) = 1.$

б) Если

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \in M_1(\mathbb{D}) \quad \text{и} \quad I_B(f) \le 1,$$

то $\|f(z)\|_{\mathbb{D}} < 7$.

Если вместо $I_B(f) \le 1$ предположить, что

$$\|(1 - |z|^2) f''(z)/f'(z)\|_{\mathbb{D}} \le 1, \qquad f(0) = f'(0) - 1 = 0,$$

то интегрирование сразу дает неравенства

$$|\ln f'(z)| \le \ln \sqrt{\frac{1 + |z|}{1 - |z|}}, \qquad \|f(z)\|_{\mathbb{D}} \le \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} dx = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Эти оценки точны и достигаются для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}} d\zeta = \arcsin z + 1 - \sqrt{1 - z^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

в) Если

$$f(z) = z^2 + a_3 z^3 + \cdots \in M_2(\mathbb{D}), \quad I_B(f) \le 1,$$

то по-доказанному $\|f(z)\|_{\mathbb{D}} \le 2$.

Эта оценка точна, так как $I_B(f_0) = 1$ и $f_0(i) = -2$ для функции

$$f_0(z) = 2\sqrt{1+z^2} - 2.$$

3.2.2 Отображения кольца или полосы

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце

$$\mathbb{D}(q,1) = \{\, z \,:\, q < |z| < 1 \,\}, \quad 0 < q < 1,$$

и удовлетворяет неравенству

$$\left\| z\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) \right\|_{\mathbb{D}(q,1)} \le 1. \tag{3.37}$$

Пусть, далее,

$$\Phi(z) = 1 + zf''(z)/f'(z),$$

функция $\Re\,\Phi(z)$ непрерывно продолжима на окружность

$$\{\, z \,:\, |z| = q \,\}$$

и выполняются условия

$$\int_0^{2\pi} \Re\,\Phi(qe^{i\theta})d\theta = 2\pi k, \quad \Re\,\Phi(qe^{i\theta}) > 0, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]. \tag{3.38}$$

Через γ обозначим ориентированную кривую с уравнением

$$\gamma(\theta) = f(qe^{i\theta}), \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad |\gamma| = \gamma([0,2\pi]),$$

возрастанию θ соответствует заданная ориентация γ; пусть

$$K(q; f) = \max_\theta |f(qe^{i\theta})| + (q^{-1} + q)\max_\theta |f'(qe^{i\theta})|.$$

Отметим, что условия (3.38) обозначают обобщенную выпуклость кривой γ (касательная к γ вращается монотонно и делает k оборотов) и представляют собой своеобразную нормировку, приводящую к ранее рассмотренным точечным нормировкам при $q \to 0$. При этих обозначениях и предположениях справедлива

Теорема 3.2.1 *При условиях (3.37) и (3.38) функция $f(z)$ не более, чем p-листна в $\mathbb{D}(q,1)$, причем*

$$\|f(z)\|_{\mathbb{D}(q,1)} \leq K(q;f), \quad p = \sup_w [k - \mathrm{ind}_w \gamma] \leq 2k-1.$$

Оценка $p \leq 2k-1$ — точная.

Доказательство. Так как

$$\Re\,\Phi(re^{i\theta}) - 1 = (\arg f'(re^{i\theta}))'_\theta$$

и функция $\Re\,\Phi(z)$ непрерывна при $q \leq |z| < 1$, то неравенство (3.37) и теорема И. И. Привалова [75] влекут непрерывность $\ln f'(z)$ при $q \leq |z| < 1$.

Пусть $q < a < 1$. Построим непрерывное продолжение $f(z)$ с кольца $\{\, z \,:\, q < |z| < a \,\}$ на область $\Omega_q = \{\, z \,:\, q < |z| < \infty \,\}$ по формулам:

$$F(x) = f(z), \quad q < |z| \leq a,$$

$$F(x) = F_1(z), \quad a \leq |z| \leq a^2/q,$$

$$F(x) = F_2(z), \quad a^2/q \leq |z| < \infty,$$

где

$$F_1(z) = f(a^2/\overline{z}) + (z - a^2/\overline{z}) f'(a^2/\overline{z}),$$

$$F_2(z) = f(qe^{i\theta}) + (1 - q^2/a^2) re^{i\theta} f'(qe^{i\theta}).$$

Функция $F(z)$ осуществляет локально гомеоморфное отображение области Ω_q. Действительно, $F'(z) = f'(z) \neq 0$ при условии $q < |z| \leq a$. Кроме того, якобиан $|F_{1z}|^2 - |F_{1\overline{z}}|^2 > 0$ при $a \leq |z| \leq a^2/q$, так как

$$F_{1z} = f'(a^2/\overline{z}) \neq 0$$

и в силу неравенства (3.37) имеем

$$|F_{1\overline{z}}/F_{1z}| = |\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2/a^2) < 1, \quad \zeta = a^2/\overline{z}.$$

При $a^2/q \leq |z| < \infty$, положив $z = re^{i\theta}$, $r \geq a^2/q$, получим

$$2\overline{z}F_{2\overline{z}} = rF_{2r} + iF_{2\theta} = -qzr^{-1}f'(qe^{i\theta})(1 + rx + rxy),$$

$$2zF_{2z} = rF_{2r} - iF_{2\theta} = qzr^{-1}f'(qe^{i\theta})(1 - rx - rxy),$$

где

$$x = (1 - q^2/a^2)/q, \quad y = y(\theta) = \Phi(qe^{i\theta})$$

Так как $x > 0$, $f'(qe^{i\theta}) \neq 0$ и $\Re y \geq 0$ ввиду (3.38), то $F_{2z} \neq 0$ и $|F_{2\overline{z}}/F_{2z}| < 1$, поэтому якобиан $F_2(z)$ положителен при условии $a^2/q \leq |z| < \infty$. Остается применить лемму 1.1.2 о склейке при $n = 2$. Далее, так как

$$\lim_{z\to\infty} F_2(z) = \infty,$$

а для изменения аргумента функции $F_2(re^{i\theta})$

$$Var\{\operatorname{Arg} F_2(re^{i\theta}),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} =$$

$$= Var\left\{[\operatorname{Arg} e^{i\theta} f'(re^{i\theta})],\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\} = 2\pi k$$

при $|z| = r \to \infty$, то можно утверждать, что $F(z)$ осуществляет внутреннее по С. Стоилову, локально гомеоморфное в Ω_q отображение области $\{\, z \ : \ |z| > q \,\}$ и имеет полюс порядка k в бесконечности. Очевидно,

$$\max\{\,|f(z)|\,:\,q\le|z|\le a\,\}\le\max\{\,|F(z)|\,:\,q\le|z|\le a^2/q\,\},$$

и требуемая оценка $|f(z)|$ в $\mathbb{D}(q,1)$ следует из принципа максимума с учетом произвольности $a\in(q,1)$ на основании неравенств

$$\max_{|z|=q}|F(z)|=\max_{\theta}|f(qe^{i\theta})|\le K(q;f),$$

$$\max_{|z|=a^2/q}|F(z)|=\max_{\theta}|f(qe^{i\theta})+(a^2/q-q)e^{i\theta}f'(qe^{i\theta})|\le K(q;f).$$

По принципу аргумента, примененному к $F(z)$ в области $\{\,z\,:\,|z|>q\,\}$, число w-точек функции $F(z)$ равно

$$k-\mathrm{ind}_w\gamma.$$

Поэтому $f(z)$ не более, чем $\sup_w(k-\mathrm{ind}_w\gamma)$-листна в кольце $\mathbb{D}(q,1)$.

Завершающая оценка $p\le 2k-1$ вытекает из неравенства $\mathrm{ind}_w\gamma\ge 1-k$, доказанного ранее (см. (1.38) в лемме 1.3.2).

Чтобы убедиться в точности оценки $p\le 2k-1$, рассмотрим пример. Пусть $k\ge 2$ и пусть

$$f_\alpha(z)=z^k-\alpha^{2k-1}z^{-k+1},$$

где $0<\alpha<1$, k — целое число.

Имеем

$$\Phi_\alpha(z)=1+z\frac{f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)}=k\frac{z^{2k-1}-c^{2(2k-1)}\alpha^{2k-1}}{z^{2k-1}+c^{2k-1}\alpha^{2k-1}},$$

где

$$c^{2k-1}=1-1/k\in(0,1).$$

Пусть q — фиксированное число, $c\alpha<q<\alpha$. При $|z|>q$

функция $\Phi_\alpha(z)$ аналитична и $\Re\,\Phi_\alpha(z) > 0$, причем выполняется (3.38), $k = \Phi_\alpha(\infty) \geq 2$.

Определим кривую γ_α уравнением

$$\gamma(\theta;\alpha) = f_\alpha(qe^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

По принципу аргумента, примененному к функции $f_\alpha(z)$ в области $\{\, z\,:\,|z| > q\,\}$, получим, что

$$\mathrm{ind}_0\gamma_\alpha = -k+1,$$

так как в этой области функция $f(z)$ имеет $2k-1$ нуль на окружности

$$\{\, z\,:\,|z| = \alpha > q\,\}$$

и единственный полюс порядка k в бесконечности.

При α и q ($c\alpha < q < \alpha$) достаточно близких к 1, функция $f_\alpha(z)$, принимающая значение 0 в $2k-1$ точке кольца $\mathbb{D}(q,1)$, удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1. Действительно, неравенство (3.37) при q, близком к 1, верно, так как при $q \to 1$ ($q < \alpha < 1$) максимум величины $1 - |z|^2$ при $z \in \mathbb{D}(q,1)$ стремится к нулю, а функция

$$|zf''_\alpha(z)/f'_\alpha(z)|$$

допускает равномерную оценку в $\mathbb{D}(q,1)$:

$$\lim_{q\to 1}\|\Phi_\alpha(z) - 1\|_{\mathbb{D}(q,1)} \leq \lim_{q\to 1}\left(1 + \frac{2k}{q^{2k-1} - c^{2k-1}}\right) = 1 + 2k^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.2.1 *Если в условиях теоремы 3.2.1 дополнительно предположить, что $f(z)$ аналитична в круге $\mathbb{D}$, то по принципу аргумента $\mathrm{ind}_w\gamma \geq 0$, поэтому получаем оценку $p \leq k$. При $k = 1$ мы имеем, таким образом, усиление результата Й. Бек-*

кера.

Следующее утверждение является близким по доказательству, но описывает иную, чем в теореме 3.2.1, топологическую ситуацию.

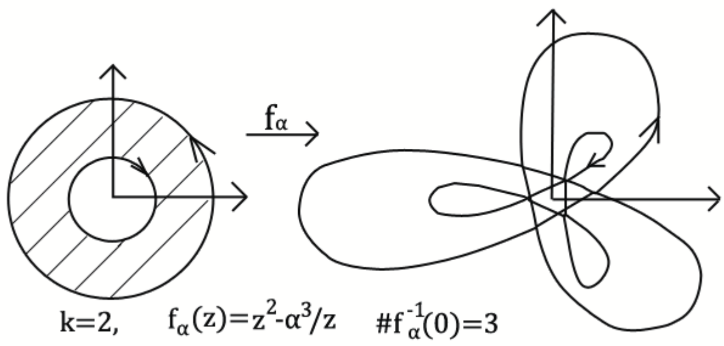

Рис. 3.1: К теореме 3.2.1

Предложение 3.2.2 *Пусть* $0 < q < 1$, *функция* $f(z)$ *аналитична в кольце*

$$\mathbb{D}(1, 1/q) = \{\, z\,:\, 1 < |z| < 1/q \,\}.$$

Если

$$\|(|z|^2 - 1)zf''(z)/f'(z)\|_{\mathbb{D}(1,1/q)} \le 1, \tag{3.39}$$

функция $\Re\,\Phi(z) = \Re[1 + zf''(z)/f'(z)]$ *непрерывно продолжима на окружность* $\{\, z\,:\, |z| = 1/q \,\}$ *и*

$$\int_0^{2\pi} \Re\,\Phi(e^{i\theta}/q)d\theta = 2\pi k > 0,\ \Re\,\Phi(e^{i\theta}/q) > 0,\ \forall\theta \in [0, 2\pi], \tag{3.40}$$

то $f(z)$ *не более, чем* p*-листна в* $\mathbb{D}(1, 1/q)$, *причем*

$$p \le \sup_w (k - \mathrm{ind}_w \delta),$$

где δ и γ — кривые, определяемые уравнениями

$$\gamma(\theta) = f(e^{i\theta}/q), \quad \delta(\theta) = \gamma(\theta) - i(q^2-1)\gamma'(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

В частном случае, когда $\gamma([0,2\pi])$ — окружность, справедлива оценка $p \le k$.

Доказательство. Пусть $1 < a < 1/q$. Рассмотрим локально гомеоморфное отображение кольца $\{\, z \ :\ a^2 q \le |z| \le 1/q \,\}$, определяемое функцией $F(z)$, причем

$$F(z) = f(a^2/\overline{z}) + (z - a^2/\overline{z}) f'(a^2/\overline{z}),\ a^2 q \le |z| \le a,$$

$$F(z) = f(z),\ a \le |z| \le 1/q.$$

По лемме 1.3.2

$$\mathrm{ind}_w \gamma \le k.$$

Если оценка

$$p \le \sup(-\mathrm{ind}_w \delta) + k$$

неверна, то найдется такая точка w_0, не лежащая на γ и δ, что

$$n(w_0, f, \Omega_a) > k - \mathrm{ind}_{w_0}\delta,$$

где $n(w, f, \Omega)$ — число w-точек функции $f(z)$ в области Ω, a — произвольное число, лежащее в интервале $(1, a_0)$ с некоторым $a_0 \in (1, 1/q)$, и

$$\Omega_a = \mathbb{D}(a, 1/q).$$

Так как

$$F(a^2 q e^{i\theta}) = \delta(\theta) + (a^2-1) q e^{i\theta} f'(e^{i\theta}/q)$$

и $f'(e^{i\theta}/q)$ непрерывна, то при a, достаточно близком к 1,

$$n(w_0, f, \Omega_a) \le n(w_0, F, \mathbb{D}(a^2 q, 1/q)) = \mathrm{ind}_w \gamma - \mathrm{ind}_w \delta \le k - \mathrm{ind}_w \delta.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемую оценку.

В частном случае, когда $\gamma([0,2\pi])$ — окружность, в силу непрерывности $\Re\,\Phi(e^{i\theta}/q)$ и условий (3.40) имеет место представление

$$\gamma(\theta) = w^* + R\exp[i\alpha(\theta)],$$

где w^* и $R > 0$ — некоторые постоянные, $\alpha(\theta)$ непрерывно дифференцируема, $\alpha'(\theta) > 0$ и $\alpha(\theta + 2\pi) - \alpha(\theta) = 2\pi k$ для любого θ. Но тогда функция

$$\delta(\theta) = w^* + R\exp[i\alpha(\theta)][1 + (q^2 - 1)\alpha'(\theta)], \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

задает кривую, звездную относительно точки w^*. Следовательно, $k \ge \mathrm{ind}_w\delta \ge 0$, и мы получаем требуемую оценку $p \le k$.

Доказательство завершено.

Замечание 3.2.2 *Таким же образом можно обосновать более общие утверждения, заменив (3.37) и (3.39) аналогом неравенства (2.7).*

Схема доказательства следующего утверждения такая же, как и теоремы 3.2.1 и предложения 3.2.2. Но рассматривается односвязная область (полоса), и геометрическая нормировка предполагается на одной из двух частей границы.

Предложение 3.2.3 *Пусть $z = x + iy$, функция $f(z)$ аналитична в полосе*

$$\Omega^c = \{\, z \,:\, 0 < y < c,\ -\infty < x < \infty \,\},$$

производные $f'(z)$, $f''(z)$ непрерывны и $f'(z)$ не равна нулю при $0 < y \le c$, $-\infty < x < \infty$. Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω^c, если выполнены условия:

а)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x+iy)=\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left|2y\frac{f'(x+iy)}{f(x+iy)}\right|\le 1;$$

б) для фиксированных постоянных α *и* β, $\alpha\in\mathrm{R}$, $\beta\in[0,1]$,

$$|\arg f'(t)+\alpha|\le \pi\beta/2$$

и

$$|2cf''(t)/f'(t)|\le \sin[\pi(1-\beta)/2]$$

при любом $t=x+ic$, $-\infty<x<\infty$;

в)

$$\left\|2y\frac{f''(x+iy)}{f'(x+iy)}\right\|_{\Omega^c}\le 1.$$

Доказательство. Пусть

$$0<\varepsilon<c, \quad g(z)=f[(1-\varepsilon/c)z+i\varepsilon], \quad z\in\Omega^c.$$

Нетрудно проверить, что функция $g(z)$ удовлетворяет в Ω^c всем тем условиям, что и $f(z)$, кроме того, $g(z)$ аналитична на вещественной оси, а в оценках для $|g'/g|$, $|g''/g'|$ знаки равенства исключаются. Поэтому продолжение

$$F(z)=\{g(z),\ 0\le y\le c; \quad g(\overline{z})+(z-\overline{z})g'(\overline{z}),\ -c\le y\le 0\}$$

оказывается локально однолистным в области, определяемой неравенствами $-c\le y\le c$, $-\infty<x<\infty$.

Далее, из условий а) следует

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(z)=\infty.$$

Условия б) обеспечивают монотонное возрастание функций

$$\Re[e^{i\alpha}\varphi(x)], \quad \Re[e^{i\alpha}\psi(x)]$$

с ростом переменной x, где

$$\varphi(x) = g(x+ic), \quad \psi(x) = g(x+ic) - 2icg'(x+ic), \quad -\infty < x < \infty,$$

т. е. инъективность F на кривых L^+ и L^-, определенных равенствами

$$L^{\pm} = \{\, z \,:\, y = \pm c,\ -\infty < x < \infty \,\}.$$

Поэтому $F(z)$ однолистна по следствию 1.1.3, следовательно, $f(z)$ однолистна при $\varepsilon \le y \le c$, значит, и в области Ω^c в силу произвольности $\varepsilon \in (0, c)$.

Предложение 3.2.3 доказано.

Замечание 3.2.3 *Условие б) в предложении 3.2.3 можно заменить требованием: отображения*

$$x \mapsto g(x + ic)$$

и

$$x \mapsto g(x + ic) - 2icg'(x + ic)$$

вещественной оси в $\mathbb{C}$ *инъективны.*

Предложение 3.2.4 *Пусть функция* $f(z)$ *мероморфна в круге* $\mathbb{D} = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\}$, *и* n*-симметрична, а именно,*

$$f(z) = z^{\pm} g(z),$$

где функция $g(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$ и представима рядом

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{nk}, \quad |z|<1.$$

Пусть

$$n \geq 3, \quad 0<q<tg[(1-2/n)\pi/4].$$

Если $f(z)$ локально однолистна в $\mathbb{D}$ и

$$\|\{f,z\}(1-|z|^2)^2\|_{\mathbb{D}(q,1)} \leq 2,$$

то $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть δ — дуга окружности $\{\, z\,:\, |z|=1\,\}$, γ — дуга ортогональной к δ окружности, лежащая в $\mathbb{D}$ и имеющая те же концы, что и δ.

В силу выбора q, дуга γ лежит в $\mathbb{D}(q,1)$, если радианная мера δ не превосходит $2\pi/n+\varepsilon$, где $\varepsilon=\varepsilon(q)\in(0,1-q)$.

Если $\gamma\subset\mathbb{D}(q,1)$, то условие на шварциан, как это следует из рассуждений З. Нехари (см. в [21] технику доказательства теоремы 19), влечет инъективность $f(z)$ на γ. Поэтому функция $f(z)$ будет инъективна на дуге

$$l_{r,\theta}=\{\, z=re^{i\theta}\,:\, |t-\theta|\leq\pi/n\,\}$$

при любом θ, если r достаточно близко к 1.

В силу теоремы 38 из [21] функция $f(z)$ будет однолистной вблизи $\partial\mathbb{D}$, следовательно, однолистной в $\mathbb{D}$ по лемме 2.1.3.

Предложение 3.2.4 доказано.

3.2.3 Функционально-геометрические условия однолистности в многосвязных областях

В этом пункте мы приведем несколько типичных примеров комбинирования.

Пусть Ω — конечносвязная область, $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, каждая граничная компонента области Ω является замкнутой жордановой в $\overline{\mathbb{C}}$ кривой. Пусть L — одна из компонент $\partial\Omega$.

Определение. *Будем писать*

$$L \in \overline{G}_\alpha(A),$$

если для фиксированных постоянных A и $\alpha \in (0,1]$ справедливо следующее:

любые две различные точки z_1 и z_2 кривой L можно соединить простой спрямляемой дугой

$$\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega \cup \{z_1, z_2\},$$

длина которой не превосходит $A|z_1 - z_2|^\alpha$.

Отображение $\{z_1, z_2\} \mapsto \gamma(z_1, z_2)$ будем считать определенным однозначно. Тогда внутренние точки дуг $\gamma(z_1, z_2)$ для всевозможных пар точек из кривой L заметают некоторое подмножество области Ω, которое обозначим через $L(\gamma)$, т. е. $L(\gamma) = \{\, z \in \Omega \ :\ z$ лежит на $\gamma(z_1, z_2)$ хотя бы для одной пары точек z_1 и z_2 из $L\,\}$.

Определение. *Пусть A и B — положительные постоянные, $\alpha, \beta \in (0,1]$. Запись*

$$L \in \overline{G}_{\alpha,\beta}(A, B)$$

будет означать, что любые две различные точки z_1 и z_2 из L

можно соединить простой спрямляемой дугой

$$\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega \cup \{z_1, z_2\},$$

причем

а) длина $\gamma(z_1, z_2) \le A|z_1 - z_2|^\alpha$*;*

б) для любой точки $z \in \gamma(z_1, z_2)$ *минимальная из длин дуг, на которые* $\gamma(z_1, z_2)$ *делится точкой* z*, не превосходит величины* $B\,\mathrm{dist}^\beta(z, \partial\Omega)$*.*

Считаем, что каждой паре z_1*,* z_2 *соответствует вполне определенная дуга* $\gamma(z_1, z_2)$*. Тогда задано множество* $L(\gamma)$*.*

Имеет место

Теорема 3.2.2 *Пусть функция* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *мероморфна (в частности, аналитична) в конечносвязной области* Ω*, непрерывна в* $\overline{\Omega}$ *в сферической метрике, любая компонента* $\partial\Omega$ *является замкнутой жордановой в* $\overline{\mathbb{C}}$ *кривой.*

Функция $f(z)$ *будет однолистной в* $\overline{\Omega}$*, если выполнены требования:*

1) $f(z)$ *локально однолистна в* $\overline{\Omega}$*, за исключением разве лишь одной точки;*

2) для каждой граничной компоненты L *области* Ω*:*

а) либо $f(L)$ *является простой кривой, точнее,* f *инъективно на* L*,*

б) либо $L \in \overline{G}_{1/2}(A)$ *с постоянной* $A = A(L, \Omega) > 0$*,*

$$|f''(z)/f'(z)| \le 4\kappa_0/A \quad \forall z \in L(\gamma), \tag{3.41}$$

в) либо $L \in \overline{G}_{1,1}(A, B)$ *с некоторыми постоянными* $A = A(L, \Omega) > 0$*,* $B = B(L, \Omega) > 0$ *и*

$$|\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) f''(z)/f'(z)| < \kappa(A, B) \quad \forall z \in L(\gamma). \tag{3.42}$$

Постоянные $\kappa_0 = 0,85...$ и $\kappa_1 = 0,6...$ указаны в теореме 2.2.3 и лемме 2.1.2 соответственно, кроме того,

$$\kappa(A, B) = B^{-1} \max\{\kappa_1/A, 1/(1+A)\}.$$

Доказательство. Из условий (3.41) или (3.42), как и при доказательстве теоремы 2.2.3 или леммы 2.1.2, следует инъективность $f(z)$ на L. Таким образом, отображение f будет инъективным на каждой из компонент $\partial\Omega$.

Пусть z_0 — точка $\overline{\Omega}$, в которой неизвестна локальная однолистность $f(z)$. Положим $f_1(z) \equiv f(z)$, если $f(z_0) = \infty$, и

$$f_1(z) \equiv 1/[f(z) - f(z_0)],$$

если $f(z_0) \neq \infty$.

В силу мероморфности $f(z)$ в Ω, локальной однолистности $f(z)$ в $\overline{\Omega} \setminus \{z_0\}$ и инъективности $f(z)$ на каждой из компонент границы области множество

$$T = \{\, z \in \overline{\Omega} \,:\, f_1(z) = \infty \,\}$$

состоит из конечного числа точек. По теореме 1.1.1

$$p(f, \overline{\Omega} \setminus T), \leq 1$$

так как

$$V(f, \overline{\Omega} \setminus T) = 0, \quad m + \alpha_T \geq 1$$

в формуле (1.2).

Докажем, что $p(f, \overline{\Omega}) = 1$.

Из теоремы 1.1.1 следует, что $m + \alpha_T \leq 1$, т. е. либо $\alpha_T = 0$, либо $\alpha_T = 1$.

Если $\alpha_T = 0$, то $m \leq 1$, т. е. множество T состоит из единственной точки z_0.

Если же $\alpha_T = 1$, то $m = 0$, и, в силу инъективности $f_1(z)$ на компонентах $\partial\Omega$, множество T также состоит из единственной точки z_0. Тогда

$$p(f, \overline{\Omega}) = p(f, \overline{\Omega} \setminus T) = 1.$$

Теорема доказана.

Определение. *Пусть Ω — конечносвязная область в $\mathbb{C}$, каждая компонента $\partial\Omega$ является жордановой в $\overline{\mathbb{C}}$ кривой. Будем говорить, что разбиение $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ является зацепленным, если любая компонента γ множества Γ_j $(j = 1, 2)$ есть либо компонента $\partial\Omega$, либо открытая дуга из $\partial\Omega$ (под открытой дугой, как обычно, подразумевается подмножество $\partial\Omega$, гомеоморфное интервалу $(0, 1)$).*

Если разбиение $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ зацеплено, то, очевидно, любая точка $t \in \partial\Omega$ является внутренней точкой некоторой дуги γ из Γ_j, где $j = 1$ или $j = 2$.

Предложение 3.2.5 *Пусть Ω — конечносвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с невырожденными граничными компонентами, $\Omega \in G_{1,1}(A, B)$, разбиение $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ является зацепленным. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в Ω, существует и задана ветвь $\ln f'(z)$ в Ω.*

Функция $f(z)$ будет однолистной в Ω, если выполнены следующие граничные требования:

а) $\arg f'(t)$ *непрерывен в $\Omega \cup \Gamma_1$, $|f'(t)|$ непрерывен в $\Omega \cup \Gamma_2$,*

$$\|\arg f'(t)\|_{\Gamma_1} = \delta < \infty, \quad \|f'(t)\|_{\Gamma_2} \cdot \|1/f'(t)\|_{\Gamma_2} = e^{2q} < \infty; \quad (3.43)$$

б)

$$\sqrt{\delta^2 + q^2} \leq (\pi/4)\kappa(A, B). \quad (3.44)$$

Доказательство. Имеем

$$m = \|1/f'(t)\|_{\Gamma_2} > 0.$$

Тогда
$$e^{-q} \le e^{-q} m^{-1} |f'(t)| \le e^{q} \quad \text{на} \quad \Gamma_2.$$

В силу теоремы 2.1.3 и условий (3.43), (3.44) нам достаточно показать, что значения функции $g(z) = \ln f'(z) - q - \ln m$, принимаемые в Ω, лежат в множестве

$$\overline{\Psi}(\delta, q) = \{\, w \,:\, |\Im\, w| \le \delta \,\} \cup \{\, w \,:\, |\Re\, w| \le q \,\}.$$

Предположим обратное: пусть

$$z_0 \in \Omega, \quad g(z_0) = w_0 \notin \overline{\Psi}(\delta, q).$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $w_0 \notin \overline{\Psi}(\delta + \varepsilon, q + \varepsilon)$. Ввиду зацепленности разбиения $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и требования а) для любой точки $t \in \partial\Omega$ существует ее окрестность $U(t)$, такая, что значения $g(z)$, принимаемые в $v(t) = U(t) \cap \Omega$, лежат в $\Psi(\delta + \varepsilon, q + \varepsilon)$. Очевидно, множество

$$K = \Omega \setminus \cup_{t \in \partial\Omega} v(t)$$

компактно вложено в Ω.

Рассмотрим стандартную аппроксимацию:

$$\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega, \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1},$$

область Ω_j конечносвязна и ограничена жордановыми кривыми при любом j.

Если j достаточно велико, то $K \subset \Omega_j$, поэтому

$$g(\partial\Omega_j) \subset \overline{\Psi}(\delta + \varepsilon, q + \varepsilon),$$

и по принципу аргумента, примененному к $g(z)$ в области Ω_j, $w_0 \notin g(\partial\Omega_j)$.

Здесь мы воспользовались тем, что для j достаточно больших образ L_j^k любой компоненты $\partial\Omega_j$ лежит в некоторой односвязной ограниченной области $\Psi' \subset \Psi(\delta+\varepsilon, q+\varepsilon)$, а точка w_0 лежит вне $\overline{\Psi}(\delta+\varepsilon, q+\varepsilon)$. Поэтому $\mathrm{ind}_{w_0} L_j^k = 0$ в силу хорошо известных свойств индекса. С другой стороны, для достаточно больших j имеем: $z_0 \in \Omega_j$ и $w_0 \in g(\Omega_j)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Предложение 3.2.6 *Пусть функция $g(z)$ непрерывна и локально однолистна в кольце*

$$\mathbb{D}(r_1, r_2) = \{\, z \,:\, r_1 < |z| < r_2 \,\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty.$$

Пусть, далее, функция $g(z)$ дважды непрерывно дифференцируема и $|g_z| - |g_{\overline{z}}| > 0$ при $r_1 < |z| < a$, $b < |z| < r_2$, где постоянные $a, b \in (r_1, r_2)$. Обозначим

$$P(z) = \frac{|g_{zz}| + 2|g_{z\overline{z}}| + |g_{\overline{z}\overline{z}}|}{|g_z| - |g_{\overline{z}}|}.$$

Функция $g(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}(r_1, r_2)$, если

$$\|(|z| - r_1)P(z)\|_{\mathbb{D}(r_1,a)} \le \kappa\, c_1,\ \|(r_2 - |z|)P(z)\|_{\mathbb{D}(b,r_2)} \le \kappa\, c_2, \quad (3.45)$$

где $\kappa = 3/5$,

$$1/c_1 = \min_{\alpha} \left[(1+\alpha^{-2})(e^{\alpha\pi/2} - 1)\right] \quad \text{при} \quad \alpha \in \left(0, \frac{2}{\pi}\ln\frac{a}{r_1}\right),$$

$$1/c_2 = \min_{\alpha} \left[(1+\alpha^{-2}) \max_{\varphi\in[0,\pi/2]} \frac{1 - e^{-\alpha\varphi}}{\sin\varphi}\right] \quad \text{при} \quad \alpha \in \left(0, \frac{2}{\pi}\ln\frac{r_2}{b}\right).$$

Доказательство. Ввиду леммы 2.1.3 нам достаточно показать однолистность $g(z)$ вблизи границы кольца, т. е. вблизи каждой из граничных окружностей. А для этого, как это следует из доказательства теоремы 2.2.4, достаточно обосновать, что

$$L_1 = \{\, z \,:\, |z| = r_1 \,\} \in \overline{G}_{1,1}(A_1, B_1), \quad L_1(\gamma) \subset \mathbb{D}(r_1, a)$$

и

$$L_2 = \{\, z \,:\, |z| = r_2 \,\} \in \overline{G}_{1,1}(A_2, B_2), \quad L_2(\gamma) \subset \mathbb{D}(b, r_2),$$

причем $1/c_j = A_j B_j$, $j = 1, 2$. Здесь мы пользуемся тем, что в (3.45)

$$\kappa < \kappa_1 = 0,6..., \qquad \operatorname{dist}(z, L_j) = |r_j - |z||\,.$$

Пусть

$$z_1 = z_0 e^{i\varphi}, \quad z_2 = z_0 e^{-i\varphi}, \quad |z_0| = r_1, \quad 0 < \varphi \le \pi/2.$$

В качестве $\gamma(z_1, z_2)$ возьмем дугу с уравнением:

$$z = z(\theta) = z_0 \exp[(\alpha\varphi - |\theta|) + i\theta], \quad -\varphi \le \theta \le \varphi, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0.$$

Длина $\gamma(z_1, z_2)$ равна

$$l = \sqrt{1 + \alpha^{-2}}\ (e^{\alpha\varphi} - 1) r_1.$$

Соотношение

$$l \le A_1 |z_1 - z_2| = 2 r_1 A_1 \sin\varphi$$

будет выполнено при любом $\varphi \in [0, \pi/2]$, если

$$A_1 = \sqrt{1 + \alpha^{-2}}\ (e^{\alpha\pi/2} - 1).$$

При этом

$$\gamma(z_1, z_2) \subset \overline{\mathbb{D}}\left(r_1, r_1 e^{\alpha\pi/2}\right).$$

Кроме того,

$$\operatorname{dist}(z(\theta), L_1) = r_1 \left[e^{\alpha(\varphi - |\theta|)} - 1\right],$$

а минимальная из длин дуг $\gamma(z_1, z(\theta))$, $\gamma(z(\theta), z_2)$ равна

$$\left[e^{\alpha(\varphi-|\theta|)} - 1\right] r_1\sqrt{1+\alpha^{-2}}.$$

Следовательно,

$$B_1 = \sqrt{1+\alpha^{-2}}$$

и

$$A_1 B_1 = (1+\alpha^{-2})\left(e^{\alpha\pi/2} - 1\right),$$

что и требовалось.

Если

$$z_1 = z_0 e^{i\varphi}, \quad z_2 = z_0 e^{-i\varphi}, \quad |z_0| = r_2, \quad 0 < \varphi \le \pi/2,$$

то $\gamma(z_1, z_2)$ определим с помощью уравнения

$$z = z(\theta) = z_0 e^{\alpha(|\theta|-\varphi)+i\theta}, \quad -\varphi \le \theta \le \varphi.$$

Вычисления дают: $B_2 = \sqrt{1+\alpha^{-2}}$,

$$A_2 = \sqrt{1+\alpha^{-2}}\ \max_{\varphi} \frac{1-e^{-\alpha\varphi}}{\sin\varphi} \quad \text{при} \quad \varphi \in [0, \pi/2],$$

$$A_2 B_2 = (1+\alpha^{-2}) \max_{\varphi\in[0,\pi/2]} \frac{1-e^{-\alpha\varphi}}{\sin\varphi}, \quad L_2(\gamma) \subset \overline{\mathbb{D}}(r_2 e^{-\alpha\pi/2}, r_2).$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ получим

$$A_2 = \sqrt{2}, \quad B_2 = \sqrt{2}, \quad L_2(\gamma) \subset \overline{\mathbb{D}}(r_2 e^{-\pi/2}, r_2).$$

Предложение 3.2.7 *а) Пусть функция $g(z)$ дважды непрерывно дифференцируема в полуплоскости $H = \{\, z\ :\ y = \Im z > 0 \,\}$.*

Если

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty, \quad \overline{\lim_{z\to\infty}} \left| y \frac{\partial g/\partial y}{g} \right| < 1, \quad y = \Im z > 0, \tag{3.46}$$

для любого $z = x + iy$ *разность* $|g_z| - |g_{\overline{z}}| > 0$ *и*

$$|g_{zz} - g_{z\overline{z}}| + |g_{z\overline{z}} - g_{\overline{z}\overline{z}}| \le (|g_z| - |g_{\overline{z}}|)/(2y), \tag{3.47}$$

то $g(z)$ *однолистна в* H.

б) Пусть функция $g(z)$ *дважды непрерывно дифференцируема в полосе*

$$\Omega^c = \{\, z \, : \, 0 < \Im z < c \,\}, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Пусть, далее, для любой точки $z = x + iy \in \Omega^c$ *справедливо (3.47) и якобиан* $g(z)$ *положителен, кроме того,*

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty, \qquad \left\| |\Im g(z)| + \left| \frac{\partial g(z)}{\partial y} \right| \right\|_{\Omega^c} < \infty.$$

Если $\partial g/\partial y$ *непрерывна при* $0 < y \le c$, $|x| < \infty$,

$$\partial g(z)/\partial y \equiv ai, \quad a = \mathrm{const} > 0$$

для $y = c$, $|x| < \infty$, *то* $g(z)$ *однолистна в* Ω^c.

Укажем лишь схему доказательства.

Для произвольного $\varepsilon \in (0, c)$ в обоих случаях а) и б) мы рассмотрим функцию $g_1(x + iy) = g[x + i(y + \varepsilon)]$ при $y > 0$ и

$$c - \varepsilon > y > 0$$

соответственно. Функция $g_1(z)$ удовлетворяет всем тем условиям, что и $g(z)$ в H и $\Omega^{c-\varepsilon}$ соответственно, причем для $g_1(z)$ аналог неравенства (3.47) будет справедлив без знака равенства.

Условие положительности якобиана для отображения

$$F(z) = g_1(z) - y\,\partial g_1(z)/\partial y$$

равносильно неравенству

$$|g_{1\overline{z}} - 2iy(g_{1zz} - g_{1z\overline{z}})| < |g_{1z} - 2iy(g_{1z\overline{z}} - g_{1\overline{z}\overline{z}})|,$$

справедливому в силу (3.47).

Дальнейшие рассуждения связаны с нетрудной проверкой условий теоремы Адамара ([85], с. 164) в случае а) и условий предложения 1.1.5 в случае б) для продолжения

$$F_1(z) = \{g_1(z),\ y \geq 0; \quad F(\overline{z}),\ y \leq 0\},$$

определенного во всей плоскости или в полосе $\{|\Im z| < c - \varepsilon\}$ соответственно.

3.3 Теория допустимых функционалов

Напомним определение допустимых функционалов [10] с заменой области Ω на произвольное множество.

Пусть U — произвольное непустое подмножество $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$,

$M(U)$ — некоторое множество отображений $f : U \to \overline{\mathbb{R}^n}$,

$t = I(f)$ — заданный на $M(U)$ функционал с неотрицательными значениями, точнее, определено отображение

$$I : M(U) \to [0, \infty].$$

Определение. *Функционал I назовем p-допустимым для $M(U)$ в U, если существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что* *требования $f \in M(U)$, $I(f) \le \kappa$ гарантируют не более, чем p-листность отображения f в U, т. е. оценку $p(f,U) \le p$, где*

$$p(f,U) = \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}^n}} \sharp\{x \in U \,:\, f(x) = y\}. \tag{3.48}$$

Обозначим

$$p(f,X) = \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}^n}} \sharp\{x \in X \,:\, f(x) = y\},\ X \subset U. \tag{3.49}$$

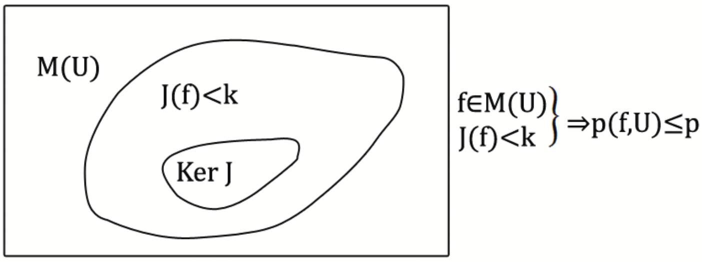

Рис. 3.2: p-допустимый функционал

Определение. *Пусть $\overline{U}$ — замыкание U в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Для произвольного отображения $f\,:\,U \to \overline{\mathbb{R}^n}$ через $p(x_0,f,U)$, как и раньше, будем обозначать локальную листность f в точке $x_0 \in \overline{U}$. По определению,*

$$p(x_0,f,U) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}^n}} \sharp\{\, x \in U \,:\, f(x) = y,\ S[x,x_0] < \varepsilon \,\}, \tag{3.50}$$

$$p_0(f,X) = \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}^n}} \sum_{f(x)=y} p(x,f,U). \tag{3.51}$$

Здесь $X \subset U$, сумма берется по всем $x \in f^{-1}(y) \cap X$, где

$$f^{-1}(y) = \{\, x \,:\, f(x) = y \,\},$$

$$S[x,x_0] \sim \{\, |x-x_0|, x_0 \neq \infty; 1/|x|, x_0 = \infty \,\}.$$

Из определений (3.49), (3.50) и (3.51) непосредственно следует неравенство

$$p(f,X) \leq p_0(f,X). \tag{3.52}$$

На рис. 3.3 приведены простые примеры, иллюстрирующие определения. Функции

$$f_0(z), \quad f_1(z), \quad f_2(z)$$

предполагаются аналитическими в жордановой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и непрерывными в ее замыкании $\overline{\Omega}$.

Для отображения f_2 прообраз точки 0 состоит из двух точек z_1 и $z_2 \in \partial\Omega$, причем

$$p(z_1, f_2, \overline{\Omega}) = 1, \quad p(z_2, f_2, \overline{\Omega}) = 2,$$

поэтому

$$p_0(f_2, \overline{\Omega}) = 3; \quad f_0(\Omega) = \Omega \setminus [0,1], \quad f_2(\Omega) = f_1(\Omega) \setminus [0,1].$$

3.3.1 Функционалы с устойчивыми ядрами

Определение. *Будем говорить, что функционал I имеет устойчивое ядро в классе $M(U)$, если выполнены требования:*

1) Множество $\operatorname{Ker} I = \{f \in M(U) : I(f) = 0\}$ *не пусто, любое отображение $f \in \operatorname{Ker} I$ определено, конечнолистно и непрерывно в сферической метрике на $\overline{U}$, причем*

$$p_0 = p_0(I) = \sup\{\, p_0(f, \overline{U}) \,:\, f \in \operatorname{Ker} I \,\} < \infty; \tag{3.53}$$

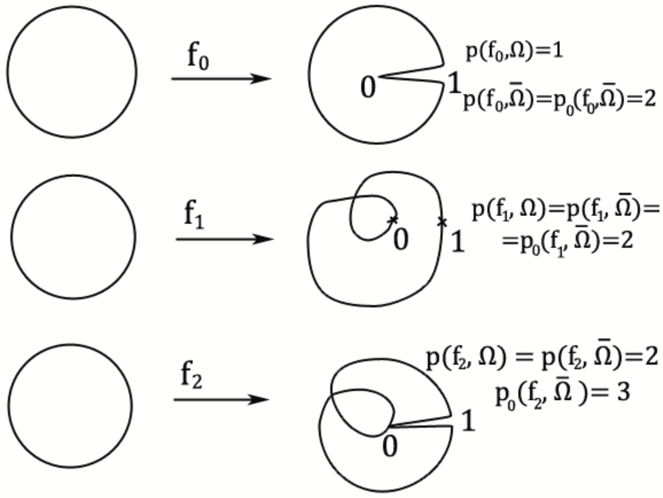

Рис. 3.3: Примеры к определениям

2) для любой последовательности $(f_\nu) \subset M(U)$, *для которой*

$$\lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu) = 0,$$

существуют подпоследовательность (f_{ν_j}) *и отображение*

$$f_0 \in \operatorname{Ker} I,$$

такие, что

а)

$$\lim_{j\to\infty} \left\| S[f_0(x), f_{\nu_j}(x)] \right\|_U = 0, \tag{3.54}$$

б) для любой точки $x \in \overline{U}$ *можно указать номер* $N = N(x)$ *и такую окрестность*

$$U(x,\varepsilon) = \{\, y \in U \;:\; S[y,x] < \varepsilon,\ \varepsilon = \varepsilon(x) > 0 \,\}$$

точки x, *что выполняется оценка*

$$p(f_{\nu_j}, U(x,\varepsilon)) \le p(x, f_0, \overline{U}) \tag{3.55}$$

для всех $j \ge N(x)$.

Справедлива следующая

Теорема 3.3.1 *Если функционал I имеет устойчивое ядро в классе $M(U)$, то функционал I является p_0-допустимым для $M(U)$ в U, где число p_0 определено формулой (3.53).*

Доказательство. Допустим противное:

I не является p_0-допустимым для $M(U)$ в U. Тогда в силу (3.52) и (3.53) существует последовательность $(f_\nu) \subset M(U)$, такая, что

$$I(f_\nu) = t_\nu > 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} t_\nu = 0$$

и $p(f_\nu, U) \geq p_0 + 1$, т. е. для несовпадающих между собой при одном и том же ν точек

$$x^{1\nu}, x^{2\nu}, \dots, x^{(p_0+1)\nu}$$

из множества U при любом $\nu = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$y^\nu = f_\nu(x^{j\nu}), \qquad j = 1, \dots, p_0 + 1,$$

с некоторыми $y^\nu \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Перейдя к подпоследовательностям, но сохранив при этом для простоты записи старые индексы, будем считать, что последовательности

$$(y_\nu)_{\nu=1}^\infty, \quad (x^{j\nu})_{\nu=1}^\infty$$

сходятся соответственно к точкам y^0, x^j, $j = 1, 2, \dots, p_0 + 1$ и, кроме того, для некоторого $f_0 \in \operatorname{Ker} I$

$$\lim_{\nu\to\infty} \|S[f_0(x), f_\nu(x)]\|_U = 0, \tag{3.56}$$

$$p(f_\nu, U(x^j, \varepsilon)) \leq p(x^j, f_0, \overline{U}), \quad j = 1, \dots, p_0 + 1, \tag{3.57}$$

для всякого

$$\nu \geq N = \max\{N(x^1), \ldots, N(x^{p_0+1})\},\ \varepsilon = \min\{\varepsilon(x^1), \ldots, \varepsilon(x^{p_0+1})\}.$$

Из (3.56) и непрерывности $f_0(x)$ в $\overline{U}$ непосредственно следуют равенства $f_0(x^j) = y^0$ при $j = 1, \ldots, p_0 + 1$.

Пусть уравнение $f_0(\xi) = y^0$ имеет в $\overline{U}$ ровно k различных корней, т. е.

$$f_0^{-1}(y^0) = \{\xi^1, \ldots, \xi^k\},$$

причем $\xi^j \neq \xi^\nu$ при $j \neq \nu$.

Поскольку $x^j \in f_0^{-1}(y^0)$ и $f_0 \in \operatorname{Ker} I$, то справедливы неравенства

$$1 \leq k \leq p_0(f_0, \overline{U}) \leq p_0.$$

Далее, в силу условия (3.55) число $p(\xi^\mu, f_0, \overline{U})$ не меньше числа последовательностей $(x^{j\nu})_{\nu=1}^{\infty}$, сходящихся к ξ^μ, следовательно,

$$p_0 \geq \sum_{j=1}^{k} p(\xi^j, f_0, \overline{U}) \geq p_0 + 1.$$

Теорема доказана.

Многие функционалы, используемые при построении признаков конечнолистности, имеют устойчивые ядра. Исключения редки, одно из них — функционал $I_1(f) = \|\arg f'(z)\|_\Omega$.

Действительно, этот функционал допустим для области $\Omega \in G^*$, но не имеет устойчивого ядра в случае, когда, например, $\partial\Omega$ содержит точку возврата с острием, направленным во внутрь области (см. теорему 2.1.2 и определение семейства G^*).

Применение теоремы 3.3.1 для конкретных функционалов предполагает исследование свойств отображений из ядра, а также равномерной сходимости (3.54) и равностепенной оценки локальной листности (3.55) при условии $I(f_\nu) \to 0$. На этом пути, кроме иного обоснования ряда известных результатов, можно получить теоремы существования новых признаков инъективности и p-листности. Приведем сначала пример и описание одного класса функционалов, имеющих устойчивые ядра.

Пример 8.1. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в плоскости,

$$M = M(\Omega, z_0, A, \alpha)$$

— класс аналитических в Ω функций $f(z)$, удовлетворяющих требованиям:

а) $f'(z) \neq 0$ в Ω, $f(z_0) = z_0$, $f'(z_0) = 1$ для фиксированной точки $z_0 \in \Omega$;

б) $\arg f'(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в Ω с коэффициентом $A > 0$ и показателем $\alpha \in (0, 1]$.

Тогда функционал

$$I(f) = \sup_{r,\theta} \int_0^r \left[\exp|\ln f'(z_0 + te^{i\theta})| - 1\right] dt, \quad z_0 + re^{i\theta} \in \Omega,$$

является допустимым для $M(\Omega, z_0, A, \alpha)$ в Ω.

Действительно, $\operatorname{Ker} I$ состоит из тождественного отображения. Далее, любая функция $f(z)$ из указанного класса однолистна в области

$$U(z_1) = \Omega \cap \{\, z \,:\, |z - z_1| < \varepsilon, A\varepsilon^\alpha = \pi/2 \,\}$$

для любой точки $z_1 \in \overline{\Omega}$ по теореме Носиро–Варшавского, так как

$$|\arg f'(z) - \arg f'(z_1)| < A\varepsilon^\alpha = \pi/2$$

для всех $z \in U(z_1)$. Следовательно, выполняется требование (3.55) при $p(x, f, \overline{U}) = 1$. Требование (3.54) является следствием соотношений

$$f_0(z) \equiv z, \quad |f(z) - z| \leq I(f)$$

для указанного функционала.

Пусть Ω — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $M'(\Omega)$ — класс всех мероморфных в Ω функций $f(z)$ с нормировками:

$$f(z_0) = z_0, \quad f'(z_0) = 1,$$

где z_0 — фиксированная точка $\Omega \setminus \{\infty\}$.

Пусть $t = I(f) \geq 0$ — функционал, ядро которого состоит из тождественного отображения. При таких условиях справедливо

Предложение 3.3.1 *Пусть функционал I допустим для $M'(\Omega)$ в Ω, причем существует такая постоянная $\kappa_1 > 0$, что условия*

$$I(f) \leq \kappa, \quad \kappa \in (0, \kappa_1), \quad f(z) \in M'$$

влекут за собой однолистность $f(z)$ в Ω и существование K-квазиконформного $(K \geq 1)$ отображения $\tilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ со свойствами

$$\tilde{f} \mid \Omega = f, \quad \tilde{f}(\infty) = \infty, \quad K = K(\kappa) \to 1 \quad \textit{при} \quad \kappa \to 0.$$

Тогда I является функционалом с устойчивым ядром.

Действительно, в этом случае требования 1, 2, б) определения устойчивости ядра выполнены очевидным образом. Требование 2, а) — следствие известных фактов из теории квазиконформных отображений (см. [41]).

3.3.2 Окрестность рациональной функции

В этом пункте, пользуясь теоремой 3.3.1, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3.3.2 *Пусть* Ω *— конечносвязная однородная область,* $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$*,* $R(z) \not\equiv (\text{const})$ *— рациональная функция. Тогда функционал*

$$a_R(f,\Omega) = \left\| \frac{1}{\varrho_\Omega(z)} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{R''(z)}{R'(z)} \right) \right\|_\Omega \qquad (3.58)$$

будет $p(R,\Omega+0)$*-допустимым для класса мероморфных в области* Ω *функций* $f(z) \not\equiv \text{const}$.

Здесь $\varrho_\Omega(z)$ *— плотность гиперболической метрики области* Ω*,* $p(R,\Omega+0) = \inf p(R,\Omega')$*, где нижняя грань берется по всем областям* $\Omega' \supset \overline{\Omega}$.

Другими словами, теорема 3.3.2 утверждает следующее:

существует постоянная $\kappa > 0$*, такая, что для любой мероморфной в* Ω *функции* $f(z)$ *неравенство* $a_R(f,\Omega) \le \kappa$ *влечет оценку* $p(f,\Omega) \le p(R,\Omega+0)$.

Допустимость функционала

$$\left\| \varrho_\Omega^{-1}(z) f''(z)/f'(z) \right\|_\Omega$$

для аналитических функций в многосвязных однородных областях доказана в работах Ф. Геринга и Б. Осгуда [131], О. Мартио и Й. Сарваса [148].

Таким образом, в случае $R(z) = az+b$, $a \ne 0$, непосредственно, а в случае $p(R,\Omega+0) = 1$ заменой независимой переменной теорема 3.3.2 может быть получена из известных результатов. Принципиальным моментом является то, что известные подходы [131], [148] не применимы к случаю $p(R,\Omega+0) \ge 2$.

Для обоснования теоремы 3.3.2 нам потребуется несколько лемм. Приведем сначала формулировки лемм и на их основе докажем теорему, а затем дадим доказательства использованных вспомогательных утверждений.

Наиболее существенные моменты всего доказательства — использование теоремы 3.3.1 и доказательство леммы 3.3.4.

Леммы 3.3.1 и 3.3.2 являются следствиями теоремы Руше и принципа Линделёфа соответственно и известны в той или иной степени общности (см., например, [47], [66], [119]). Для полноты изложения дадим их с доказательствами.

Лемма 3.3.1 *(обобщенная теорема Гурвица). Пусть функции*

$$g_\nu(z), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

осуществляют внутренние в смысле С. Стоилова отображения произвольной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть функция $g_0(z) \not\equiv \mathrm{const}$, причем $g_0(z)$ является локально равномерным в Ω пределом последовательности $(g_\nu(z))$ в сферической метрике.

Тогда для любой точки $\zeta \in \Omega$ существуют число

$$N = N(\zeta) \geq 1$$

и окрестность

$$U(\zeta, \varepsilon) = \{\, z \in \Omega \,:\, S[z, \zeta] < \varepsilon, \varepsilon > 0 \,\},$$

такие, что

$$p(g_\nu, U(\zeta, \varepsilon)) \leq p(\zeta, g_0, \Omega)$$

при любом $\nu \geq N(\zeta)$.

Лемма 3.3.2 *Пусть функция $g(z)$ аналитична в произвольной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, за исключением разве лишь бесконечно удаленной точки (если $\infty \in \Omega$), в которой $g(z)$ может иметь простой полюс.*

Если для любой точки $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$ и любых двух точек z_1 и z_2 из круга

$$\{\, w \,:\, |z - w| < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \,\}$$

выполняется неравенство

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^{\delta},$$

где $C > 0$ *и* $\delta \in (0, 1]$ *— фиксированные постоянные, то всюду в* Ω *справедлива оценка*

$$|g'(z)| \le C[\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)]^{\delta - 1}.$$

В следующих леммах 3.3.3 и 3.3.4 предполагаем, что область Ω является конечносвязной и ограничена квазиконформными кривыми, $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $R(z)$ — заданная рациональная функция, $R(z) \not\equiv \mathrm{const}$, X_0 — множество нулей, а X_∞ — множество полюсов функции $R'(z)$.

Лемма 3.3.3 *Существует такая постоянная* $m_1 > 0$*, что если мероморфная в* Ω *функция удовлетворяет неравенству* $a_R(f, \Omega) \le m_1$*, то* $f(z)$ *непрерывно продолжима на* $\overline{\Omega} \setminus X_\infty$*, локально однолистна в* $\overline{\Omega} \setminus (X_0 \cup X_\infty)$*,*

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} [\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)\ f'(z)/R'(z)] = 0$$

для любой точки $\zeta \in \partial\Omega$*.*

Пусть z_0 — фиксированная точка из $\Omega \setminus (X_0 \cup X_\infty)$.

Лемма 3.3.4 *Существует такая постоянная* $m_2 > 0$*, что если функция* $f(z)$ *мероморфна в* Ω *и удовлетворяет неравенству*

$$a_R(f, \Omega) \le m_2,$$

то существует продолжение $\tilde{f}(z)$ *функции* $f(z)$ *на некоторую область*

$$\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}, \quad \overline{\Omega} \cap (X_0 \cup X_\infty) = \tilde{\Omega} \cap (X_0 \cup X_\infty),$$

причем

а) $\tilde{f}(z)$ *осуществляет внутреннее в смысле С. Стоилова отображение* $\tilde{\Omega}$;

б) для любой последовательности мероморфных функций $(f_\nu(z))$, *для которой справедливы соотношения*

$$f_\nu(z_0) = R(z_0), \quad f'_\nu(z_0) = R'(z_0), \quad \lim_{\nu\to\infty} a_R(f_\nu, \Omega) = 0,$$

будем иметь $\tilde{f}_\nu(z) \to R(z)$ *при* $\nu \to \infty$ *локально равномерно в* $\tilde{\Omega}$ *в сферической метрике.*

Доказательство теоремы 3.3.2.

В силу целочисленности $p(R, \Omega + 0)$ существует область

$$\Omega^0 \supset \overline{\Omega},$$

для которой $p(R, \Omega + 0) = p(R, \overline{\Omega}^0)$. Уменьшив, если это необходимо, область Ω^0, будем считать, что $\overline{\Omega}^0 \subset \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ определена в лемме 3.3.4.

Без ограничения общности можно рассматривать лишь те мероморфные в Ω функции $f(z)$, для которых

$$a_R(f, \Omega) \leq m_2, \quad f(z_0) = R(z_0), \quad f'(z_0) = R'(z_0).$$

Таким образом, применив лемму 3.3.4, можно ввести в рассмотрение новый класс $\tilde{M}(\Omega_0)$ продолжений $\tilde{f}(z)$ функций $f(z)$, причем естественным образом определен функционал $I(\tilde{F}) = a_R(f, \Omega)$. Так как $\tilde{f} \mid \Omega = f$ и $f(z_0) = R(z_0)$, $f'(z_0) = R'(z_0)$, то ядро функционала состоит из единственной функции $R(z)$, рассматриваемой в Ω^0.

По построению $\partial\Omega^0 \subset \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, т. е. $\partial\Omega^0 \cap (X_0 \cup X_\infty) = \emptyset$, следовательно, $R(z)$ локально однолистна на $\partial\Omega^0$, поэтому

$$p_0(R, \overline{\Omega}^0) = p(R, \overline{\Omega}^0).$$

Устойчивость ядра для функционала $I(\tilde{f})$ непосредственно следует из лемм 3.3.1 и 3.3.4.

Таким образом, доказано, что функционал $I(\tilde{f}) = a_R(f, \Omega)$ является $p(R, \Omega + 0)$-допустимым для $\tilde{M}(\Omega^0)$ в Ω^0. Так как

$$p(f, \Omega) \le p(\tilde{f}, \Omega^0),$$

то отсюда следует утверждение теоремы 3.3.2.

Остается привести доказательства лемм 3.3.1 – 3.3.4.

Доказательство леммы 3.3.1.

Пусть $\zeta \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $\zeta = 0$, $g_0(0) = 0$, так как этого всегда можно добиться подходящими дробно-линейными преобразованиями, не меняющими условий и утверждения леммы.

Пусть U — односвязная жорданова область, такая, что

$$0 \in U, \quad \overline{U} \subset \Omega,$$

$|g_0(z)| = r_0 = \text{const} > 0$ при любом $z \in \partial U$,

$g_0(z)$ ровно $p(0, g_0, \Omega)$-листна в U,

$g_0(z)$ непрерывна в $\overline{U}$,

$\|g_\nu(z) - g_0(z)\|_{\overline{U}} \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Такое построение выполнимо в силу известного локального поведения внутренних отображений для достаточно малого числа $r_0 > 0$ (см. [85]).

Если утверждение леммы неверно для точки $\zeta = 0$, то существуют последовательности

$$(g_{\nu_j}(z))_j, \quad (z_{j\mu})_j, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p+1, \quad z_{j\mu} \neq z_{j\nu} \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu,$$

такие, что

$$p(0, g_0, \Omega) = p, \quad \lim_{j\to\infty} z_{j\mu} = 0, \quad g_{\nu_j}(z_{j\mu}) = w_j, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p+1,$$

и

$$\lim_{j\to\infty} w_j = 0.$$

Применив принцип аргумента к функции

$$g_0(z) - w_j = [g_{\nu_j}(z) - w_j] + [g_0(z) - g_{\nu_j}(z)]$$

(т. е. теорему Руше к функциям $g_{\nu_j}(z) - w_j$ и $g_0(z) - g_{\nu_j}(z)$ в области U) при достаточно больших j, получим противоречие: *уравнение* $g_0(z) = w_j$ *имеет* $p+1$ *корень в* U *вопреки выбору* U.

При применении теоремы Руше мы пользовались тем, что

$$\lim_{j\to\infty} \|g_0(z) - g_{\nu_j}(z)\|_{\partial U} \cdot \|1/|g_{\nu_j}(z) - w_j|\|_{\partial U} = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.3.2.

Произвольно зафиксируем точку $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$, обозначим

$$r = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega).$$

Тогда функция

$$\varphi(\zeta) = g(z + r\zeta) - g(z)$$

определена в единичном круге $\mathbb{D} = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| < 1 \,\}$, и, по условию леммы,

$$|\varphi(\zeta)| \le C|\zeta r|^{\delta} \le Cr^{\delta}$$

при $|\zeta| < 1$; $\varphi(0) = 0$.

По принципу Линделёфа ([47], с.33)

$$|\varphi'(0)| \le Cr^{\delta},$$

но $\varphi'(0) = rg'(z)$. Следовательно, $|g'(z)| \le Cr^{\delta-1}$, что и требовалось.

Доказательство леммы 3.3.3.

Очевидно, при условии $a_R(f,\Omega) < \infty$ функции

$$\varphi'(z;f) = f'(z)/R'(z), \quad 1/\varphi'(z;f)$$

будут аналитическими в Ω. Пусть

$$z_0 \in \Omega \setminus (X_0 \cup X_\infty),$$

тогда, не умаляя общности, можно считать, что все рассматриваемые функции f нормированы условиями $f(z_0) = R(z_0)$, $f'(z_0) = R'(z_0)$. Следовательно,

$$\varphi'(z_0;f) = 1.$$

В дальнейших построениях будем использовать известные факты из монографии Л. Альфорса [39].

Пусть Ω_j, $j = 1,\ldots,k$, — односвязные жордановы области, такие, что

$$\Omega = \cup_{j=1}^{k}\Omega_j,$$

$\partial\Omega_j$ — квазиконформная кривая, причем $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega$ — простая дуга либо пустое множество.

Через $\varphi(z;f)$ будем обозначать одну из ветвей функции

$$\int_{z_0}^{z} \varphi'(\zeta;f)d\zeta,$$

выделенную в области Ω_j, $j=1,\dots,k$.

Пусть $m>0$, $a_R(f,\Omega)\le m$. При любом $j=1,\dots,k$ имеем

$$\|\varrho_{\Omega_j}^{-1}(z)\varphi''/\varphi'\|_{\Omega_j}\le a_R(f,\Omega)\le m.$$

По теореме Л. Альфорса ([39], см. также [131], [148]) существует $c_j>0$, такое, что при $m\le c_j$ функция $\varphi(z;f)$ будет однолистной в Ω_j и K-квазиконформно продолжимой на всю плоскость, причем $K=K(\Omega_j,c_j)\to 1$ при $c_j\to 0$.

Поскольку продолжение $\tilde{\varphi}$ функции $\varphi(z;f)$ из Ω_j в $\mathbb{C}$ гёльдерово, то $|\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)\varphi'|\to 0$ при $z\to\zeta\in\partial\Omega_j$ по лемме 3.3.2.

Отсюда при $m=m_1=\min\{c_1,\dots,c_k\}$ следуют утверждения леммы 3.3.3, кроме утверждения о локальной однолистности $f(z)$ в $\overline{\Omega}\setminus(X_0\cup X_\infty)$ в силу того, что $\varphi'=f'/R'$ и

$$f(z)=R(z_0)+\int_{z_0}^{z} R'(\zeta)\varphi'(\zeta;f)d\zeta,$$

а область Ω является объединением конечного числа областей Ω_j.

Далее, при $a_R(f,\Omega)\le m_1$ область $\Omega_j^{\zeta}=\varphi(\Omega_j;f)$ является конечной односвязной областью, ограниченной квазиконформной кривой.

Если ввести обозначения

$$w=(f\circ\varphi^{-1})(\zeta),\quad \zeta=\varphi(z;f),\quad \psi(\zeta)=(R'\circ\varphi^{-1})(\zeta),$$

то $dw/d\zeta = \psi(\zeta)$, причем $\psi(\zeta)$, очевидно, непрерывна и отлична от нуля в множестве

$$\overline{\Omega}_j^\zeta \setminus \varphi(X_0 \cup X_\infty; f),$$

поэтому $w = w(\zeta)$ локально однолистна на этом множестве в силу признака В. С. Рогожина [79] (см. также теорему 2.3.1) с учетом того, что область Ω_j^ζ является однородной областью (см. [131], [148]). Тогда функция $f(z) = w(\varphi(z; f))$ локально однолистна в $\overline{\Omega}_j \setminus (X_0 \cup X_\infty)$, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 3.3.4.

Пусть Γ_j — граничная компонента области Ω,

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_{j_0}.$$

Через $\lambda_j = \lambda_j(z)$ обозначим квазиотражение относительно Γ_j, обладающее свойствами (см. [39]):

λ_j — меняющее ориентацию квазиконформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя,

$z = \lambda_j(z)$ при любом $z \in \Gamma_j$,

$|\lambda_{jz}| \le c|\lambda_{j\overline{z}}|$, $c = \mathrm{const} < 1$,

$1/M \le |\lambda_{j\overline{z}}| \le M$,

$1/M \le |\lambda_j(z_1) - \lambda_j(z_2)| \cdot |z_1 - z_2|^{-1} \le M$,

$M = \mathrm{const} > 0$, для всех z, z_1, z_2, $j = 1, \ldots, j_0$.

Через $\Omega(\Gamma_j)$ обозначим двусвязную область, выделенную следующими свойствами:

$$\Omega(\Gamma_j) \cap \Omega = \emptyset, \quad \partial\Omega(\Gamma_j) = \Gamma_j \cup \Gamma_j^*,$$

Γ_j^* — жорданова аналитическая кривая,

$\lambda_j[\Omega(\Gamma_j)] \cap \lambda_\mu[\Omega(\Gamma_\mu)] = \emptyset$ при $j \neq \mu$,

$\Omega(\Gamma_j) \cup \lambda[\Omega(\Gamma_j)]$ не содержит нулей и полюсов $R'(z)$ для всех $j = 1, \ldots, j_0$.

Введем область

$$\tilde{\Omega} = \overline{\Omega} \cup \Omega(\Gamma_1) \cup \cdots \cup \Omega(\Gamma_{j_0})$$

и введем функцию λ, определяя ее равенствами $\lambda = \lambda(z) = \lambda_j(z)$ при $z \in \Omega(\Gamma_j) \cup \Gamma_j$, $j = 1, \ldots, j_0$, определенную таким образом для всех точек $z \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Пусть число $m_1 > 0$ такое, что при $a_R(f, \Omega) \leq m_1$ справедливо заключение леммы 3.3.3. Для любой функции $f(z)$, для которой $a_R(f, \Omega) \leq m_1$, образуем продолжение $f(z)$ на $\tilde{\Omega}$ по формуле

$$\tilde{f}(z) = \{f(z), z \in \Omega, \ \psi(z), z \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega\},$$

где

$$\psi(z) = f(\lambda(z)) + R(z)\varphi'(\lambda(z); f) - R(\lambda(z))\varphi'(\lambda(z); f),$$

$\varphi'(z; f)$ — функция, введенная при доказательстве леммы 3.3.3. Вычисления дают, что $\psi_{\overline{z}} = \mu(z)\psi_z$, где

$$\psi_{\overline{z}} = [R(z) - R(\lambda(z))] \cdot \varphi''(\lambda(z); f)\lambda_{\overline{z}},$$

$$\psi_z = R'(z)\varphi'(\lambda(z); f) + [R(z) - R(\lambda(z))]\varphi''(\lambda(z); f)\lambda_z,$$

следовательно,

$$|\mu(z)| \leq \frac{b|\lambda_{\overline{z}}|a_R(f, \Omega)}{1 - |\lambda_z|a_R(f, \Omega)}, \quad b = \left\| \frac{R(z) - R(\lambda(z))}{R'(z)\varrho_\Omega(\lambda(z))} \right\|_{\tilde{\Omega} \setminus \Omega}.$$

В силу лемм Альфорса ([39], с. 74) функции

$$|\lambda(z) - z|, \quad \mathrm{dist}(z, \partial\Omega), \quad 1/\varrho_\Omega(\lambda(z))$$

представляют собой величины одного и того же порядка вблизи Γ_j, поэтому $b < \infty$. Так как $|\lambda_{\overline{z}}| \le M$ и $|\lambda_z| \le cM$, то $\|\mu(z)\|_{\tilde{\Omega}} < 1$ при условии

$$a_R(f, \Omega) < 1/(bM + cM) = m_1'.$$

Из этих построений следует первое утверждение леммы 3.3.4. Действительно, если

$$a_R(f, \Omega) \le m_2 \quad \text{для некоторого} \quad m_2 \in (0, \min\{m_1, m_1'\}),$$

то $\psi(z)$ локально однолистна в $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, $\tilde{f}(z)$ непрерывна и локально однолистна в $\overline{\Omega} \setminus (X_0 \cup X_\infty)$ по лемме 3.3.3, а функция $\tilde{f}(z)$ непрерывна в $\tilde{\Omega} \setminus X_\infty$, так как

$$\lim_{z \to \zeta} \varphi'(\lambda(z); f) \operatorname{dist}(\lambda(z), \partial\Omega) = 0, \quad \zeta \in (\partial\Omega) \setminus X_\infty$$

в силу леммы 3.3.3.

По теореме Ю. Ю. Трохимчука ([87], с. 84) $\tilde{f}(z)$ осуществляет внутреннее по Стоилову отображение $\tilde{\Omega} \setminus X_\infty$.

Докажем теперь утверждение б) леммы 3.3.4.

Для любой точки $\zeta_0 \in \tilde{\Omega} \setminus X_\infty$ в ее окрестности

$$U_0 = \{\, z \,:\, |z - \zeta_0| < r \,\} \subset \tilde{\Omega} \setminus X_\infty, \quad r = r_0(\zeta_0) > 0,$$

запишем представление С. Стоилова:

$$\tilde{f}(z) = F_0(\omega_0(z)),$$

где $F_0(w)$ — аналитическая функция в $\omega_0(U_0)$, $\omega_0(z)$ — некоторый гомеоморфизм.

Но, по построению $\tilde{f}(z)$, гомеоморфизм $\omega_0(z)$ является квазиконформным в U_0, за исключением разве лишь совокупности дуг $\cup(\Gamma_j \cap U_0)$, следовательно, является квазиконформным всюду в U_0 ([41], с. 38). Но тогда мы можем записать: $\tilde{f}(z) = F(\omega(z))$ всюду в $\tilde{\Omega} \setminus X_\infty$, где $\omega(z)$ — определенный в $\overline{\mathbb{C}}$ основной гомеоморфизм уравнения

$$\omega_{\overline{z}} = \mu(z)\omega_z,$$

с нормировками

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 1, \quad \omega(\infty) = \infty$$

(см. [39], [41]). Далее,

$$\mu(z) = \tilde{f}_{\overline{z}}/\tilde{f}_z, \quad z \in \tilde{\Omega} \setminus X_\infty, \quad \mu(z) = 0, \quad z \notin \tilde{\Omega} \setminus \Omega,$$

а функция $F(\omega)$ аналитична в $\omega(\tilde{\Omega} \setminus X_\infty)$.

Из представления для $\varphi(z)$ и соотношения

$$f(z) = R(z_0) + \varphi(z; f)R'(z) - R'(z_0) - \int_{z_0}^{z} R''(\zeta)\varphi(\zeta; f)d\zeta$$

получим, что $\tilde{f}(z)$ имеет не более, чем степенной порядок роста в любой точке $\zeta \in \partial\Omega \cap X_\infty$. Поэтому с учетом гёльдеровости функции, обратной к $\omega(z)$, можно заключить, что функция $F(\omega)$ мероморфна в $\omega(\tilde{\Omega})$.

Через X_∞^ω обозначим множество полюсов $F(\omega)$ в $\omega(\tilde{\Omega})$.

Пусть последовательность $(f_\nu(z))$ мероморфных в Ω функций такова, что

$$f_\nu(z_0) = R(z_0), \quad f'_\nu(z_0) = R'(z_0),$$

$$a(\nu) = a_R(f_\nu, \Omega) \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty.$$

Будем считать ν настолько большим, чтобы $a(\nu) \leq m_2$. При таких ν для $f_\nu(z)$ проведем предыдущие построения, соответствующие функции обозначим так:

$$\varphi'_\nu(z) = \varphi'(z; f_\nu), \quad \tilde{f}_\nu, \quad F_\nu, \quad \omega_\nu,$$

т. е.

$$\tilde{f}_\nu \mid \Omega = f_\nu, \quad \tilde{f}_\nu(z) = F_\nu(\omega_\nu(z)),$$

причем $F_\nu(\omega)$ мероморфна в $\omega_\nu(\tilde{\Omega})$.

Пусть, далее, Ω_j — области, введенные при доказательстве леммы 3.3.3. Так как $\varphi'_\nu(z_0) = 1$ и

$$\|\varrho_\Omega^{-1}(z)\varphi''_\nu(z)/\varphi'_\nu(z)\|_\Omega \leq a(\nu) \to 0, \quad \text{при} \quad \nu \to \infty$$

$$\|\omega_{\nu\bar{z}}/\omega_{\nu z}\|_{\tilde{\Omega}} \leq \mu_\nu \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty,$$

то (см. [41])

$$\lim_{\nu\to\infty} \|\omega_\nu(z) - z\|_{\tilde{\Omega}} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \|\varphi_\nu(z) - (a_j z + b_j)\|_{\Omega_j} = 0,$$

где a_j и b_j — постоянные.

Напомним, что ω_ν и продолжение φ_ν представляют собой последовательность K-квазиконформных отображений с

$$K = K(\nu) \to 1$$

при $\nu \to \infty$. Тогда, очевидно, $\tilde{f}_\nu(z) \to R(z)$ при $\nu \to \infty$ локально равномерно в $\tilde{\Omega} \setminus (X_\infty \cup \partial\Omega)$ и, следовательно, $F_\nu(z) \to R(z)$ и $\tilde{f}_\nu(z) \to R(z)$ при $\nu \to \infty$ локально равномерно в $\tilde{\Omega} \setminus X_\infty$.

Остается исследовать характер сходимости вблизи точек X_∞. В области Ω в силу ограниченности $a(\nu)$, полюсы и их порядки у функций $\tilde{f}_\nu(z)$ и $R(z)$ совпадают, в $\tilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$ обе функции непрерывны по построению $\tilde{\Omega}$.

Рассмотрим предварительно случай, когда $X_\infty \cap \partial\Omega$ не пусто. Пусть

$$\zeta_0 \in \Gamma_j \cap X_\infty,$$

где Γ_j — граничная компонента области Ω. Поскольку Γ_j — квазиконформная кривая, то существуют (см. [48], [77], [131]) постоянная B и простая спрямляемая дуга $\gamma(z_1, z_2) \subset \Omega$ с параметрическим представлением $z = z(s)$, $0 \le s \le l$,

$$|dz/ds| = 1, \quad z(0) = \zeta_0, \quad z(l) = z_0,$$

такие, что

$$s \le B \operatorname{dist}(z(s), \partial\Omega).$$

Тогда

$$1 \le |z(s) - \zeta_0| / \operatorname{dist}(z(s), \partial\Omega) \le B.$$

Пусть $s_0 \in (0, l)$ такова, что $z(s) \notin X_\infty$ при $0 < s \le s_0$. Оценим сверху порядок полюса $F_\nu(\omega)$ в точке $\omega_\nu(\zeta_0)$ с учетом того, что $\omega_\nu(z)$ и продолжение $\varphi_\nu(z)$ K-квазиконформны, следовательно, гёльдеровы с показателем $1/K$, $K = K(\nu) \to 1$ при $\nu \to \infty$.

Пусть n — порядок полюса $R(z)$ в точке $z = \zeta_0$. При обозначениях

$$z = z(s) \in \Omega, \quad \omega = \omega_\nu(z(s)), \quad 0 < s \le s_0,$$

имеем оценку

$$|f_\nu(z)| = |\tilde{f}_\nu(z)| \le |f_\nu(z(s_0))| + \left| \int_{z(s_0)}^{z(s)} R'(\zeta)\varphi'_\nu(\zeta) d\zeta \right| \le$$

$$\le |f_\nu(z(s_0))| + \alpha_1 \int_s^{s_0} |z(s) - \zeta_0|^{-n-1} \operatorname{dist}^{1/K-1}(z(s), \partial\Omega) ds \le$$

$$\le |f_\nu(z(s_0))| + \alpha_1 \int_s^{s_0} \operatorname{dist}^{1/K-n-2}(z(s), \partial\Omega) ds \le \alpha_2 +$$

$$+\alpha_3 s^{1/K-n-1} \le \alpha_2 + \alpha_4 |z-\zeta_0|^{1/K-n-1} \le \alpha_2 + \alpha_5 |\omega - \omega_\nu(\zeta_0)|^{1-(n+1)K},$$

где α_1 – α_5 — положительные постоянные.

Здесь для оценки $|\varphi'_\nu(\zeta)|$ использовалась лемма 3.3.2.

При ν достаточно больших

$$(n+1)K(\nu) - 1 < n+1,$$

следовательно, порядок полюса n_ν функции $F_\nu(\omega)$ в точке $\omega_\nu(\zeta_0)$ не превосходит числа n.

Порядком полюса функции $\tilde{f}_\nu(z) = F_\nu(\omega_\nu(z))$ в точке $z = \zeta_0$ будем называть далее порядок полюса $F_\nu(\omega)$ в точке $\omega_\nu(\zeta_0)$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\zeta_0 \in X_\infty \cap \tilde{\Omega}$, через n и n_ν обозначим порядки полюсов $R(z)$ и $\tilde{f}_\nu(z)$ соответственно в точке $z = \zeta_0$, причем $n \ge 1$, $n_\nu \ge 0$ (т. е. пока не исключена возможность, что ζ_0 — точка непрерывности для $\tilde{f}_\nu(z)$). Имеем: $n = n_\nu$ в случае $\zeta_0 \in \Omega$ и $n_\nu \le n$ в случае $\zeta_0 \in \partial\Omega$, т. е.

$$0 \le n_\nu \le n$$

в произвольном случае.

Пусть U — односвязная жорданова область, такая, что

$$\overline{U} \subset \tilde{\Omega}, \quad \zeta_0 \in U, \quad \{\zeta_0\} = \overline{U} \cap (X_\infty \cup X_0),$$

причем $|R(z)| = r = \mathrm{const} > 0$ при любом $z \in \partial U$.

По доказанному выше

$$\lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu(z) - R(z)\|_{\partial U} = 0,$$

но тогда для ν достаточно больших по принципу аргумента функции $\tilde{f}_\nu(z)$ и $R(z)$ имеют одинаковую разность числа нулей и полюсов в U. Поскольку $R(z) \ne 0$ в U, $n_\nu \le n$ при ν достаточно больших, то $\tilde{f}_\nu(z) \neq 0$ и $n_\nu = n$ при ν достаточно больших.

Но тогда $1/\tilde{f}_\nu(z)$ и, следовательно, $1/F_\nu(z)$ сходится к $1/R(z)$ всюду в U. По теореме Витали ([47], с. 22) последовательность $1/F_\nu(z)$, и, следовательно, последовательность $1/\tilde{f}_\nu(z)$ сходится к $1/R(z)$ равномерно в U.

Таким образом, для каждой точки $\zeta \in \tilde{\Omega}$ существует ее окрестность U_ζ, где $\tilde{f}_\nu(z)$ либо $1/\tilde{f}_\nu(z)$ равномерно в U_ζ сходится к $R(z)$ либо к $1/R(z)$ соответственно. Значит (см., например, [91], с. 236), $\tilde{f}_\nu(z)$ сходится к $R(z)$ в сферической метрике равномерно внутри $\tilde{\Omega}$. Лемма 3.3.4 доказана.

Замечание 3.3.1 *Анализ доказательства показывает, что теорема 3.3.2 остается верной, если $R(z)$ заменить любой другой функцией $g(z)$, мероморфной в некоторой области $\Omega' \supset \overline{\Omega}$.*

3.3.3 Допустимые функционалы с различными ядрами

Ядро функционала $a_R(.;\Omega)$ состоит, очевидно, из семейства функций вида $aR(z)+b$, зависящего от двух комплексных параметров $a \neq 0$ и b. Если же

$$I(f) = \|\omega(z,\Omega)\{f,z\}\|_\Omega,$$

где $\omega(z,\Omega)$ — некоторая положительная в Ω весовая функция, а

$$\{f,z\} = (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2$$

— шварциан функции $f(z)$, то $\operatorname{Ker} I$ состоит из всех тех функций, для которых $\{f,z\} \equiv 0$, т. е. $\operatorname{Ker} I$ совпадает с множеством дробно-линейных отображений в силу хорошо известных свойств шварциана. Эти два примера характеризуют типичную ситуацию: ядра порождены линейными или дробно-линейными преобразованиями заданной мероморфной функции $f_0(z)$. Ситуации иного типа представлены в приводимых ниже утверждениях.

Определение. *Пусть* $\mathbb{D} = \{\, z \,:\, |z| < 1 \,\}$ *и пусть* n *и* δ *— фиксированные числа,* n *— целое число,* $n \neq 0$*,* $\delta \in [0,1]$*,* $M(\mathbb{D}, n)$ *— класс функций* $f(z)$*, аналитических в* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *и нормированных условием*

$$\lim_{z\to 0}\left[z^{-n} f(z)\right] = 1. \tag{3.59}$$

Рассмотрим на $M(\mathbb{D}, n)$ функционал

$$I(f;\delta) = -1 + \left\| \left(z\frac{f''(z)}{f'(z)} - z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \left(1 - |z|^2\right)^{\delta} \right\|_{\mathbb{D}}, \tag{3.60}$$

зависящий от параметра δ.

Теорема 3.3.3 *Ядро функционала* $I(.;\delta)$ *в классе* $M(\mathbb{D}, n)$ *состоит лишь из* $|n|$*-листных в* $\mathbb{D}$ *функций.*

Если $\delta \in [0, 1)$*, то любая функция* $f(z) \in \operatorname{Ker} I(.;\delta)$ *непрерывно продолжима на* $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ *и локально однолистна там, а функционал* $I(.;\delta)$ $|n|$*-допустим для* $M(\mathbb{D}, n)$ *в* $\mathbb{D}$*.*

Доказательство. Если $I(f;\delta) < \infty$ и $z \neq 0$, то с привлечением (3.60) и локальных разложений $f(z)$ в ряд легко получим, что $f'(z)f(z) \neq 0$ при любом $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$. Далее, в силу нормировки (3.59), функция $f(z)$ класса $M(\mathbb{D}, n)$ имеет в точке $z = 0$ нуль порядка n при $n > 0$ и полюс порядка $|n|$ при $n < 0$. В обоих случаях

$$\lim_{z\to 0}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)} - z\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = -1, \tag{3.61}$$

поэтому $I(f;\delta) \geq 0$ для $f(z) \in M(\mathbb{D}, n)$ при любом $\delta \in [0, 1]$. Ядро $I(.;\delta)$ нетривиально и состоит из тех функций $f(z) \in M(\mathbb{D}, n)$, для которых при любом $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^{\delta}}. \tag{3.62}$$

Поскольку нам достаточно знать свойства тех функций из $M(\mathbb{D}, n)$, для которых $I(f;\delta)$ мал, то ограничимся рассмотрением функций класса

$$M' = \{f(z) \in M(\mathbb{D}, n) \,:\, I(f;\delta) \leq 1\}.$$

Введем функции $\varphi(z) = \varphi(z;f)$ и $\psi(z) = \psi(z;f)$ следующим образом

$$z\varphi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} - z\frac{f''(z)}{f'(z)} - 1, \quad \psi(z) = \int_0^z \varphi(\zeta)d\zeta, \tag{3.63}$$

где $\varphi(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$ в силу (3.61). Проинтегрировав с учетом нормировки (3.59), будем иметь $f'(z)/f(z) = nz^{-1}\exp\psi(z)$,

$$f'(z) = nz^{n-1}\exp\{\psi(z) + n\int_0^z [\exp\psi(\zeta) - 1]\frac{d\zeta}{\zeta}\}. \tag{3.64}$$

По теореме Харди–Литтлвуда ([47], с. 397) функция $\psi(z) = \psi(z;f)$ будет непрерывной в $\mathbb{D}$, если $f(z) \in M'$ и $\delta < 1$. Поэтому при $\delta < 1$ функция $f(z)$ будет непрерывной и локально однолистной в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$, так как $f'(z)$ оказывается непрерывной и не равной нулю в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ в силу формул (3.63), (3.64).

Для изучения свойств ядра $I(.;\delta)$ в классе M', следуя подходу Л. Альфорса и Г. Вейля [94], построим в явном виде продолжения функций на всю плоскость. А именно, положим

$$\tilde{g}(z) = \{g(z), |z| \leq 1;\ g(1/\overline{z})\exp[(z - 1/\overline{z})g'(1/\overline{z})/g(1/\overline{z})], |z| \geq 1\}$$

в двух следующих случаях:

либо $g(z) = r^{-n}f(rz)$, где $f(z) \in \operatorname{Ker} I(.;1)$, r — фиксированное число из интервала $(0,1)$,

либо $g(z)=f(z)$, где $f(z)\in \operatorname{Ker} I(.;\delta)$ и $\delta\in[0,1)$.

В обоих случаях

$$\tilde{g}(z)=z^n+O(|z|^n) \quad \text{при} \quad z\to 0,$$

$$\tilde{g}(z)=z^n|z|^{-2n}\exp[(-1+|z|^2)n(1+O(|z|^{-1}))]\cdot[1+O(|z|^{-1})]$$

при $z\to\infty$. Поскольку $g(z)$, $g'(z)$ непрерывны и $g'(z)\neq 0$ в $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$, то $\tilde{g}(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и локально однолистна в $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$. Простые вычисления с учетом неравенства (3.62) показывают, что якобиан отображения $\tilde{g}(z)$ непрерывен и положителен во всех точках $z\in\{\,z\,:\,1\le|z|<\infty\,\}$.

Привлекая лемму 1.1.2 о склейке и теорему С. Стоилова [85], получим, что отображение $\tilde{g}$ топологически эквивалентно отображению с помощью степенной функции z^n. Таким образом, в обоих случаях функция $g(z)=z^n+\ldots$ является $|n|$-листной в $\overline{\mathbb{D}}$ и локально однолистной в $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$, следовательно, такими свойствами обладает $f(z)\in\operatorname{Ker} I(.;\delta)$ при $\delta\in[0,1)$, а $f(z)\in\operatorname{Ker} I(.;1)$ $|n|$-листна в $\mathbb{D}$ с учетом произвольности $r\in(0,1)$.

Остается доказать $|n|$-допустимость функционала $I(.;\delta)$ при фиксированном $\delta\in[0,1)$. По теореме 3.3.1 для этого достаточно проверить устойчивость ядра. Требование 1) определения устойчивости выполнено, проверим 2 а) и б).

Пусть

$$(f_j(z))\subset M', \quad 0\le\delta<1, \quad \lim_{j\to\infty} I(f_j;\delta)=0.$$

Функции $\psi_j(z)=\psi(z;f_j)$ будут равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными по теореме Харди–Литтлвуда ([47], с. 397). Таковыми являются и последовательности

$$(z^{-n}f_j(z)), \quad (z^{-n+1}f_j'(z)),$$

в силу представлений (3.64). По теореме Арцела-Асколи отсюда следует требование 2 а) определения устойчивости ядра. В силу леммы 3.3.1 достаточно проверить требование 2 б) для всех точек $z \in \partial\mathbb{D}$. Пусть $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$,

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1/2\le|z|\le1} |f'_{jk}(z) - f'_0(z)| = 0, \quad f_0(z) \in \operatorname{Ker} I(.;\delta), \quad \delta \in [0,1).$$

Из представления $f_j(z)$ через $\psi_j(z)$ следует, что $\ln f'_0(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$, т. е.

$$\varepsilon_0 := \min_{|z|=1} |f'_0(z)| > 0.$$

Очевидно, мы можем указать $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $N > 0$, такие, что

$$|f'_{jk}(z) - f'_0(\zeta_0)| < \varepsilon_0$$

при любом

$$z \in U_\varepsilon = \{\, z \,:\, |z| \le 1, |z - \zeta_0| < \varepsilon \,\}$$

и при любом $k \ge N$.

Следовательно, имеем неравенство $\Re[cf'_{jk}(z)] > 0$ в U_ε при $k \ge N$ (здесь $\overline{c} = f'_0(\zeta_0) \ne 0$) Тогда функции $f_{jk}(z)$ однолистны при $k \ge N$ в U_ε по теореме Носиро–Варшавского, что и требовалось показать.

Отметим, что при $n = \delta = 1$ однолистность $f(z) \in \operatorname{Ker} I(.;\delta)$ обоснована по-другому М. Нунокавой [153].

Следующее утверждение показывает, что многие признаки однолистности аналитико-геометрического характера могут быть также интерпретированы как функциональные условия.

Обозначим: $K(z) = z(1 - zz_0)^{-2}$ — функция Кёбе, где z_0 — фиксированное число, $|z_0| = 1$.

Определение. $M(K)$ — *класс локально однолистных и ана-*

литических в $\mathbb{D} = \{ z : |z| < 1 \}$ функций $f(z)$, таких, что $zf''(z)/f'(z)$ подчинена функции $tzK''(z)/K'(z)$ для некоторого $t > 0$, т. е. для $f(z) \in M(K)$ существуют постоянная $t > 0$ и аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $\varphi(z)$, причем $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$, и

$$zf''(z)/f'(z) \equiv t\varphi(z)K''(\varphi(z))/K'(\varphi(z)).$$

Подчиненность, как это принято, будем обозначать символом $\prec$. В классе $M(K)$ рассмотрим функционал

$$I_K(f) = \inf\{t > 0 \,:\, zf''(z)/f'(z) \prec tzK''(z)/K'(z)\}.$$

Предложение 3.3.2 *Функции класса $M(K)$ однолистны в $\mathbb{D}$ при условии $I_K(f) \leq 1$. Постоянная 1 является точной.*

Доказательство. Из принципа компактности ([47], с.23) непосредственно следует, что

$$zf''(z)/f'(z) \prec I_K(f)zK''(z)/K'(z).$$

Для обоснования точности единицы рассмотрим функцию

$$K_t(z) = \int_0^z K'^t(\zeta)d\zeta, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Ввиду того, что функция Кёбе является экстремальной во многих задачах теории однолистных функций, легко увидеть, что $K_t(z)$ неоднолистна в $\mathbb{D}$ при любом $t > 1$. Действительно, $K_t(z)$ при $t > 1$ не удовлетворяет, например, точным оценкам для модуля производной однолистной в $\mathbb{D}$ функции (см. [47]).

С другой стороны, геометрически очевидно и подтверждается вычислениями следующее свойство $K(z)$:

$$\int_0^{2\pi} \left|1 + \Re\, re^{i\theta}\frac{K''(re^{i\theta})}{K'(re^{i\theta})}\right| d\theta < 4\pi, \quad 0 \le r < 1.$$

Однолистность $f(z)$ при $I_K(f) \le 1$ вытекает при $\alpha - 1 = \beta = 0$ из следующего утверждения, обоснованного автором в ([21], с. 31) и связанного с функциями класса И. Е. Базилевича.

Лемма 3.3.5 *Пусть функции $f(z)$ и $f_0(z)$ аналитичны в $\mathbb{D}$. Предположим, что $f(0) = f_0(0) = 0$,*

$$f(z)f'(z)/z \ne 0, \quad f_0(z)f_0'(z)/z \ne 0$$

при любом $z \in \mathbb{D}$; обозначим

$$\Phi(z; \alpha, \beta, f) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} + (\alpha - 1 + i\beta)z\frac{f'(z)}{f(z)},$$

где α и β — фиксированные вещественные числа, $\alpha \ge -1/2$, $|\beta| < \infty$.

Функция $f_0(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, и $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$ (принадлежит классу И. Е. Базилевича $B_{\alpha,\beta}$), если

$$\Phi(z; \alpha, \beta, f) \prec \Phi(z; \alpha, \beta, f_0),$$

причем

$$\int_0^{2\pi} \left|\Re\, \Phi(re^{i\theta}; \alpha, \beta, f_0)\right| d\theta \le 2\pi(1 + \alpha).$$

Доказательство приведено в [19] – [21].

Определение. *Пусть $M^n(\mathbb{D})$ — класс аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$ с разложением вида $(n \ge 1)$*

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \qquad |z| < 1, \tag{3.65}$$

т. е. $f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ *при* $n \geq 2$.

Если ядро функционала I состоит из тождественного преобразования

$$f_0(z) = z$$

и $n \geq 1$, то «порядок касания» $f(z) \in M^n(\mathbb{D})$ и $f_0(z) \in \operatorname{Ker} I$ в точке $z = 0$ существенно влияет на постоянные κ в признаках однолистности вида:

$$f(z) \in M^n(\mathbb{D}), \quad I(f) \leq \kappa,$$

т. е. наблюдается тот же эффект, который хорошо известен в теории приближения функций.

Ряд утверждений в классе $M^n(\mathbb{D})$ даны нами в [4], приведем одно из них.

Как показал Т. Умедзава [164], если $f(z) \in M^1(\mathbb{D})$ и

$$a = 2 \geq |\Re(zf''(z)/f'(z))|,$$

то $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$. Пример функции $f(z) = (e^{az} - 1)/a$ показывает, что при $a > \pi$ теорема Т. Умедзавы не сохранится (фактически наилучшее возможное значение a должно быть меньше 3). Но справедливо

Предложение 3.3.3 *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в круге* $\mathbb{D}_r = \{\, z \;:\; |z| < r \,\}$, $r > 0$, *и представима там в виде (3.65). Если*

$$I(f) = \left\| \Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\|_{\mathbb{D}_r} \leq n + 1, \tag{3.66}$$

то $f(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}_r$.

Постоянная $n+1$ *в (3.66) является точной в смысле порядка по* n, *а именно, при любом* $n \geq 1$ *существует неоднолистная в* $\mathbb{D}$ *функция* $f_n(z) \in M^n(\mathbb{D})$, *для которой* $I(f_n) = \pi(n+1)/2$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$, $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}$. Покажем, что при условиях (3.65) и (3.66) функция $f(z)$ принадлежит хорошо известному классу однолистных и почти выпуклых в круге функций. Для этого определим функции $g(z)$ и $\varphi(z)$ условиями: $g'(0) = \varphi'(0) = 1$, $\ln 1 = 0$,

$$\ln g'(z) = \frac{n}{n+1} \ln f'(z), \quad \ln \varphi'(z) = \frac{1}{n+1} \ln f'(z).$$

Очевидно, $f'(z) = g'(z)\varphi'(z)$. Имеем

$$\left|\Re \frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\Re \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \quad |z| < 1,$$

т. е. $\varphi(z)$ однолистна и выпукла, и остается обосновать неравенство $\Re\, g'(z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Поскольку $|\Re(zg''/g')| \leq n$ при $|z| < 1$, то

$$zg''(z)/g'(z) \prec h(z) = n\frac{2}{\pi i} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

По лемме Шварца, примененной к функции

$$h^{-1}(zg''/g')$$

с учетом порядка ее нуля в точке $z = 0$, получим неравенство $|z|^n \geq |h^{-1}(zg''/g')|$, отсюда

$$\left|z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq \frac{2n}{\pi} \ln \frac{1+|z|^n}{1-|z|^n}, \qquad |z| < 1,$$

и, после интегрирования,

$$|\arg g'(z)| \leq |\ln g'(z)| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось.

Пример неоднолистной в $\mathbb{D}$ функции из $M^n(\mathbb{D})$ построим следующим образом. Положим при $|z| < 1$

$$\frac{zf_n''(z)}{f_n'(z)} = c\frac{2}{\pi i}\frac{1+z^n}{1-z^n}, \quad f_n(0) = f_n'(0) - 1 = 0, \ c > 0. \tag{3.67}$$

Известно, что функция $f_n(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда однолистна в $\mathbb{D}$ функция $f_1(z)$, определяемая из равенства $f_1(z^n) = f_n^n(z)$ (см., например, [21], с. 36).

Вычисления показывают, что

$$a_2 = f_1''(0)/2 = -4ci/[\pi(n+1)].$$

Так как $f_1(z)$ отлична от функции Кёбе, то, как известно [47], $f_1(z)$, а, значит, и $f_n(z)$, неоднолистны в $\mathbb{D}$ при $|a_2| = 2$, т. е. при $c = (\pi/2)(n+1)$. Остается заметить, что $I(f_n) = c$ в силу (3.67).

3.3.4 Нерегулярные допустимые функционалы: усиления теорем Гудмана, Беккера и Поммеренке

Пусть Ω — область на плоскости $\mathbb{C}$ и $M(\Omega)$ — множество конформных отображений $f : \Omega \to \mathbb{C}$, т. е. аналитических функций, удовлетворяющих условию: $f'(z) \neq 0$ в любой точке $z \in \Omega$. Рассмотрим допустимый функционал $I : M(\Omega) \to [0, \infty]$ и определим множество

$$M_t := M_t(\Omega) = \{f : f \in M(\Omega), I(f) \leq t\}.$$

Функционал предполагаем допустимым, т. е. существует такое положительное число t_1, что

$$f \in M_{t_1}(\Omega) \Rightarrow f \text{ однолистна в } \Omega.$$

Мы также дополнительно предполагаем, что t_1 — наибольшая из таких констант, т. е. если $t > t_1$, то существует неоднолистная функция $f \in M_t(\Omega)$.

Нам потребуются два следующих определения.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$, аналитическая в области Ω, является $p = p(f, \Omega)$-листной в Ω, если для любого w_0 уравнение $f(z) = w_0$ имеет не более p корней в Ω и существует такое w_1, что уравнение $f(z) = w_1$ имеет в точности p корней в Ω.

Очевидно

$$t_1 < t_2 \Rightarrow M_{t_1}(\Omega) \subset M_{t_2}(\Omega).$$

Поэтому существует неубывающая последовательность $t_n = t_n(\Omega)$, такая, что для любого $t \in (t_n, t_{n+1})$ имеем:

1) $p(f, \Omega) \leq n + 1$ для любой функции $f \in M_t(\Omega)$,

2) существует функция $f_0 \in M_t(\mathbb{D})$, для которой

$$p(f_0, \Omega) = n + 1.$$

Второе определение является ключевым в формулировках последующих утверждений.

Определение. Будем говорить, что допустимый функционал I является регулярным, если

$$t_1(I, \Omega) < \lim_{n\to\infty} t_n(I, \Omega),$$

в противном случае, т. е. в случае

$$t_1(I,\Omega)=\lim_{n\to\infty} t_n(I,\Omega),$$

функционал I будем называть катастрофичным.

Приведем три известных результата, сформулированных в наших терминах.

Имеется много регулярных функционалов. Приведем лишь один пример. Из результатов Умедзавы [165], подробно обсужденных в конце главы 1 настоящей книги, следует, что *функционал*

$$I_3(f,\mathbb{D})=-1+\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\left|1+Re\left\{re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\}\right|d\theta$$

является допустимым и регулярным в единичном круге

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$$

с константами $t_n(I_3,\mathbb{D})=n$.

Из результатов З. Нехари и Е. Хилла, ставших уже классическими, немедленно получаем следующее утверждение: *функционал*

$$I_1(f,\mathbb{D})=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2\left|\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right|$$

является допустимым и катастрофичным в $\mathbb{D}$ *с константой* $t_1(I_1,\mathbb{D})=2$.

И наконец, в статье [136] А. У. Гудман доказал, что *функционал Носиро–Варшавского*

$$I_2(f,\mathbb{D})=\sup_{z\in\mathbb{D}}|\arg f'(z)|$$

является допустимым и катастрофичным в единичном круге $\mathbb{D}$

с константой $t_1(I_2, \mathbb{D}) = \pi/2$.

Кроме того, в дополнение к этому утверждению А. У. Гудман [136] доказал, что $t_n(I_2, \Omega) \leq 3\pi/2$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Следующие две теоремы доказаны в статье автора и И. Р. Каюмова [103].

Теорема 3.3.4 *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой выпуклой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, *существует функция* $f \in M(\Omega)$, *такая, что*

$$I_2(f, \Omega) = \sup_{z \in \Omega} |\arg f'(z)| < \pi/2 + \varepsilon, \quad p(f, \Omega) = +\infty.$$

Следовательно, $t_n(I_2, \Omega) = \pi/2$ *для любого натурального числа* n *и для любой выпуклой области* $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Нам потребуется

Лемма 3.3.6 *Пусть* $\Omega \neq \mathbb{C}$ *— выпуклая область на плоскости. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют число* $N = N(\varepsilon)$, *выпуклый многоугольник* Ω_N *и такое однолистное конформное отображение* $f_N : \Omega \to \Omega_N = f(\Omega)$, *что* $|\arg f_N'(z)| < \varepsilon$, $z \in \Omega$.

Доказательство леммы. Пусть f — однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω, и пусть

$$p(\theta) = \pi/2 + \theta + \arg f'(e^{i\theta}).$$

Не теряя общности можем считать, что $p(0) = 0$, $p(2\pi) = 2\pi$. В силу выпуклости области Ω эта функция $p(\theta)$ будет неубывающей. Тогда существует неубывающая функция $p_N(\theta)$, такая, что

$$|p(\theta) - p_N(\theta)| < \varepsilon, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

и множество $\{p_N(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ является ограниченным.

В силу формулы Кристоффеля–Шварца существуют выпуклый многоугольник Ω_N и однолистное конформное отображение $g : \mathbb{D} \to \Omega_N = g(\mathbb{D})$, такое, что $p_N(\theta) = \pi/2 + \theta + \arg g'(e^{i\theta})$.

Очевидно, многоугольник Ω_N имеет следующие свойства. Если определить

$$f_N(w) := g(f^{-1}(w)), \quad w \in \Omega,$$

то

$$\arg f_N'(w) = \arg g'(z) - \arg f'(z), \quad w = f(z),$$

и получаем $|\arg f_N'(w)| < \varepsilon$, $w \in \Omega$ с учетом неравенства

$$|\arg f_N'(w)| < \varepsilon, \quad w \in \partial\Omega.$$

Итак, лемма доказана. Теперь завершим доказательство теоремы.

Рассмотрим сначала частный случай, когда

$$\Omega = H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}.$$

Положим

$$\Omega_N = H \cup_{n=N}^{\infty} T_{2n},$$

где T_m — треугольник $\{A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}\}$ с вершинами

$$A_{1m} = \frac{1}{m}, \quad A_{2m} = \frac{1}{m+1}, \quad A_{3m} = 2\,i - \frac{2m+1}{2(m+1)m} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

С учетом неравенств

$$\frac{1}{m+1} < \frac{2m+1}{2m(m+1)} < \frac{1}{m}$$

нетрудно убедиться в том, что точка

$$i \in \bigcap_{n=N}^{\infty} T_{2n}.$$

По теореме Римана о конформных отображениях существует однолистное конформное отображение $F_N : H \to \Omega_N = F_N(H)$, такое, что

$$F_N(-1) = -1, \quad F_N(1) = 1, \quad F_N(\infty) = \infty.$$

Легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$, такое, что $|\arg F_N'(z)| < \varepsilon$, $w \in H$, и последовательность

$$a_n \to a \in [-1, 1], \quad n \to \infty$$

со свойством $F_N(a_1) = F_N(a_2) = ... = F_N(a_n) = ...$ $(n \in \mathbb{N})$.

Таким образом, теорема доказана для случая полуплоскости.

Перейдем к рассмотрению случаев, когда область — выпуклый многоугольник и далее, когда берется случай произвольной выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{C}$. Мы будем при этом применять дополнительные преобразования области и следующее свойство:

если $\Omega_0 = a\,\Omega + b$, $f_0(z) = f(az+b)/a$, *то* $I_2(f_0, \Omega_0) = I_2(f, \Omega)$.

Предположим сначала, что Ω — выпуклый многоугольник. Тогда мы можем считать, что $\Omega \subset H$ и $[-1, 1] \subset \partial\Omega$. В этом случае построенная выше функция F_N является бесконечнолистной в Ω, и утверждение теоремы доказано.

Пусть выпуклая область Ω не является многоугольником. Тогда из леммы 3.3.6 следует существование функции

$$f_N : \Omega \to \Omega_N = F(\Omega),$$

обладающей свойством:

$$|\arg f_N'(z)| < \varepsilon/2, \quad z \in \Omega.$$

Полагаем $g(z) = F_N(f_N(z))$, где F_N является бесконечнолистной в области Ω_N и имеет место неравенство

$$|\arg F_N'(z)| < \pi/2 + \varepsilon/2, \quad z \in \Omega_N.$$

Следовательно, имеем $|\arg g'(z)| < \pi/2 + \varepsilon, \quad z \in \Omega \quad$ и

$$p(g, \Omega) = +\infty.$$

Этим и завершается доказательство

Обозначим

$$B_1(f, \mathbb{D}) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|.$$

Й. Беккер и Х. Поммеренке доказали в [117], что $t_1(B_1, \mathbb{D}) = 1$. Существенным усилением этого результата является

Теорема 3.3.5 *Функционал B_1 является катастрофичным в единичном круге $\mathbb{D}$, т. е. $t_n(B_1, \mathbb{D}) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Схема доказательства теоремы. Следуя Й. Беккеру и Х. Поммеренке [117], рассмотрим функцию f_0, удовлетворяющую следующему уравнению

$$z = f_0(z) + \ln\left(f_0(z) - 1\right), \quad z \in H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}.$$

Далее полагаем

$$f_\varepsilon'(z) := \left(1 - \frac{1}{f_0(z)}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Нам потребуются две леммы.

Лемма 3.3.7 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R > 0$, что*

$$|f'_\varepsilon(z) - 1| \le 8/|z|, \quad |z| > R.$$

Доказательство леммы. Действительно, как показано в [117], имеют место соотношения $|\arg(f_0(z) - 1)| < \pi$ и $f_0(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. Поэтому

$$|z - f_0(z)| \le A \ln |f_0(z) - 1| + C.$$

Докажем от противного существование такого числа $R > 0$, что $|f_0(z)| > |z|/2$ при $|z| > R$.

Предположим противное: существует последовательность точек $z_n \to \infty$, такая, что $|f_0(z_n)| < |z_n|/2$. Тогда для достаточно большого n будем иметь

$$|z_n|/2 \le |z_n - f_0(z_n)| \le A \ln |f_0(z_n) - 1| + C \le A \ln(|z_n|/2 + 1) + C.$$

Предположим теперь, что

$$|z| > R, \quad t = 1/f(z), \quad |t| < 1.$$

Но тогда

$$|f'_\varepsilon(z) - 1| = |(1-t)^{1+\varepsilon} - 1| \le |t(1+\varepsilon)| \sup_{|t|<1} |1-t| \le 4|t| \le 8/|z|.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Далее, нам нужна функция

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{1-\rho^2}{2\rho} \left[f_\varepsilon \left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} + \frac{2\rho z}{1-\rho^2} \right) - f_\varepsilon \left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right) \right]$$

введенная в [117]. В этой формуле $\rho = \rho(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Й. Беккер и Х. Поммеренке [117] показали, что функция

$\Phi_\varepsilon(z)$ не является однолистной в единичном круге $\mathbb{D}$ и, кроме того,
$$\left|\frac{\Phi''_\varepsilon}{\Phi'_\varepsilon}(z)\right| \le \frac{1+\varepsilon}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Лемма 3.3.8 *Имеем:* $\Phi_\varepsilon(z) \rightrightarrows z$ *в* $\overline{\mathbb{D}}$ *при* $\varepsilon \to 0$, *т. е. для любого* $\delta > 0$ *существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что* $|\Phi_\varepsilon(z) - z| < \delta$ *для всех точек* $z \in \overline{E}$ *и для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Доказательство леммы. Имеем
$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{1-\rho^2}{2\rho}\int_a^{a+b} f'_\varepsilon(z)dz = z + \frac{1-\rho^2}{2\rho}\int_a^{a+b}(f'_\varepsilon(z)-1)dz,$$
где $a = (1+\rho^2)/(1-\rho^2), \quad b = 2\rho z/(1-\rho^2)$.

Отсюда получаем
$$|\Phi_\varepsilon(z) - z| \le \frac{1-\rho^2}{2\rho}\int_a^{a+b}|f'_\varepsilon(z)-1||dz| =$$
$$= \int_0^1 |f'_\varepsilon(a+bt)-1|dt \rightrightarrows 0 \text{ при } \quad \varepsilon \to 0.$$
Действительно, если $t \le 1-\sqrt{1-\rho}$, то
$$|a+b\,t| \ge \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} - \frac{2\rho}{1-\rho^2}\left(1-\sqrt{1-\rho}\right) \ge \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho}}.$$

Из предыдущей леммы следует, что
$$\int_0^{1-\sqrt{1-\rho}} |f'_\varepsilon(a+bt)-1|dt \le 8\sqrt{1-\rho}/\rho.$$

Одновременно с этим функция f'_ε является ограниченной. Поэтому
$$\int_{1-\sqrt{1-\rho}}^1 |f'_\varepsilon(a+bt)-1|dt \le C\sqrt{1-\rho},$$

с некоторой положительной постоянной C. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы проведем с использованием индукции по n. Гипотеза индукции такова:

для любого $n \in \mathbb{N}$ существует семейство p_ε-листных функций $\Phi_\varepsilon(z) : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ таких, что

$$\left|\frac{\Phi_\varepsilon''}{\Phi_\varepsilon'}(z)\right| \le \frac{1+\varepsilon}{1-|z|^2}, \quad \Phi_\varepsilon \rightrightarrows z \quad \text{в} \quad \overline{\mathbb{D}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

и

$$p_\varepsilon \ge n, \quad |\Phi_\varepsilon(z)| \le 1, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Из второй леммы следует, что эта гипотеза верна при n=2.

Как обычно, предположим, что это утверждение справедливо для некоторого n и докажем его для $n+1$.

Из второй леммы следует, что существует такая функция g, что

$$\left|\frac{g''}{g'}(z)\right| \le \frac{1+\varepsilon/2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\left|\frac{g''}{g'}(z)\right| \le \frac{\varepsilon/2}{1-|z|^2}, \quad |z| > r_0 < 1,$$

$$g \text{ непрерывна в } \overline{\mathbb{D}} \text{ и } g(w_0) = g(1), \quad |w_0| < 1.$$

Пусть $f_t(z)$ — функции, удовлетворяющие утверждение индукции для n.

Тогда легко установить, что существует число $t_0 < \varepsilon/2$, такое, что

$$\left|\frac{f_t''}{f_t'}(z)\right| \le \frac{1+\varepsilon/2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$|f_t(z)| < r_0 \Rightarrow \left|\frac{f_t''}{f_t'}(z)\right| \le \frac{\varepsilon/2}{1-|z|^2}, \quad t < t_0.$$

Далее, по определению существуют точки $z_1^t, z_2^t, ..., z_n^t$, для которых

$$f(z_1^t) = f(z_2^t) = \cdots = f(z_n^t) = p_t > 0, \quad t < t_0.$$

Без ограничения общности, мы можем предположить, что $p_t \to 1$ при $t \to 0$. Полагаем

$$\Phi_\varepsilon(z) = g(f_t(z)).$$

Пусть $|f_t(z)| > r_0$. Тогда

$$\left|\frac{\Phi_\varepsilon''}{\Phi_\varepsilon'}(z)\right| \leq \frac{1-|f_t(z)|^2}{1-|z|^2}\left|\frac{g''}{g'}(f_t(z))\right| + \left|\frac{f_t''}{f_t'}(z)\right| \leq \frac{\varepsilon/2}{1-|z|^2} + \frac{1+\varepsilon/2}{1-|z|^2}.$$

Проведя аналогичные оценки для случая $|f_t(z)| < r_0$, в итоге получаем: для любой точки $z \in \mathbb{D}$

$$\left|\frac{\Phi_\varepsilon''}{\Phi_\varepsilon'}(z)\right| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-|z|^2}, \quad t \leq t_0.$$

Поскольку функция g непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, существует такая точка w_t, что $g(w_t) = p_t$ и, кроме того, $w_t \to w_0$ при $t \to 0$.

Возьмем точку z_t, удовлетворяющую равенству $f_t(z_t) = w_t$. Очевидно, $z_t \to w_0$ при $t \to 0$. Следовательно, имеем

$$\Phi(z_1^t) = \Phi(z_2^t) = \cdots = \Phi(z_n^t) = \Phi(z_t).$$

Для достаточно малых t точка z_t не совпадает с точками множества $z_1^t, z_2^t, .., z_n^t$, поскольку $|z_i^t| \to 1$ при $t \to 0$.

Таким образом, функция Φ является p-листной для некоторого $p \geq n+1$, что и требовалось доказать.

Отметим, что ключевое уравнение

$$z = f_0(z) + \ln\left(f_0(z) - 1\right), \quad z \in H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\},$$

рассмотрено впервые в статье Р. Мане, П. Сада и Д. Салливана [147] (см. также [162]). Л. А. Аксентьев [35] дал гидромеханическое истолкование некоторых функций, рассмотренных выше.

Глава 4

Обратные краевые задачи

Эта глава иллюстрирует некоторые приложения методов и результатов предыдущих глав. Рассмотрены вопросы разрешимости обратных краевых задач в общей постановке и условия однолистности решения ряда таких задач, в том числе и прикладных.

Основная цель — изложение доказательства существования решения обратной краевой задачи в общей постановке, близкой к постановке Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова [46]. Речь идет об обратной краевой задаче для многозначной аналитической функции, имеющей в искомой области конечное число логарифмических и полярных особенностей.

Статья [46] посвящена обобщению теории М. Морса и применению обобщенной теории к краевым задачам.

Как приложения обобщенной теории к обратным краевым задачам в работе [46] получен ряд соотношений, являющихся необходимым условием существования решения, а также обсуждаются дополнительные параметры, фиксация которых могла бы гарантировать единственность решения. В частности, предлагается считать заданной главную часть разложения искомой функции в окрестности особой точки.

Новизна нашего подхода заключается в следующем наблюдении: обратная краевая задача «устроена» так, что в особой точке естественно считать заранее заданными лишь локальные конформные инварианты искомой функции. Точнее, если, например, главная часть разложения искомой функции в окрестности особой точки z_0 имеет вид

$$\frac{A_n}{(z-z_0)^n}+...+\frac{A_1}{z-z_0}+\Gamma\ln(z-z_0), \quad A_n\neq 0,$$

то при произвольной конформной замене независимой переменной z инвариантными являются лишь две числовых характеристики: порядок полюса n и коэффициент Γ при логарифме.

Другая особенность нашего подхода состоит в интерпретации кусочно гладких кривых как квази локально простых, что позволяет применить теорему из главы 1 о рациональной параметризации замкнутых квази локально простых кривых. Эту теорему приходится распространять на случай разомкнутых кривых при наличии логарифмических особенностей у искомой функции.

Изложенные ниже результаты сохраняют значение и при отсутствии логарифмических особенностей у искомой функции. А именно, оказываются преодоленными две принципиальные трудности, стоявшие на пути развития теории обратных краевых задач на римановых поверхностях.

Одна из них связана с построением конечнолистной области (римановой поверхности рода нуль), проекция границы которой на плоскость совпадает с заданной кривой.

Другая — с возможностью распространения известного результата Ф. Д. Гахова о разрешимости внешней обратной краевой задачи на случай конечнолистных решений.

4.1 Теоремы существования решений

При решении обратных краевых задач определяются область Ω_z и функция $F(z)$, причем пара $(\Omega_z, F(z))$ ищется в заданной паре множеств $(\mathcal{M}_\Omega, \mathcal{M}_\mathcal{F})$.

В пункте 4.1.1 описаны различные подходы к решению одной известной задачи Г. Г. Тумашева, имеющей прикладное значение. Речь идет об отыскании односвязной области, содержащей бесконечно удаленную точку, и аналитической в этой области функции, имеющей в бесконечно удаленной точке простой полюс и логарифмическую особенность, т. е. особенность вида

$$F(z) \sim A_1 z + A_2 \ln z, \quad z \to \infty.$$

В пункте 4.1.2 рассматривается более широкий класс $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ искомых функций.

В пункте 4.1.3 фактически рассматривается обратная краевая задача на римановых поверхностях. А именно, класс $\mathcal{M}_\Omega$ представляет собой конечнолистные римановы поверхности с краем рода нуль, имеющие точки ветвления и кусочно гладкие границы.

4.1.1 Задача Тумашева

Определение. *Будем писать $\Omega \in \mathcal{M}^0$, если Ω — односвязная, вообще говоря, многолистная область, являющаяся аналитическим образом единичного круга $\mathbb{D} = \{\,\zeta : |\zeta| < 1\,\}$ при отображении функцией $z = z(\zeta)$, причем $z'(\zeta) \neq 0$ и $z(\zeta)$ аналитична всюду в $\mathbb{D}$, за исключением, разве лишь, одного простого полюса.*

Задача 1. *Определить область $\Omega_z \in \mathcal{M}^0$, $\infty \in \Omega_z$, ограниченную кривой Ляпунова L_z с неизвестным уравнением $t = t(s)$,*

$0 \le s \le l$, и аналитическую (однозначную) в Ω_z функцию $f(z)$, если $f(z)$ непрерывна и отлична от нуля в $\overline{\Omega}$ и выполнено условие

$$f(t(s))t'(s) = w'(s), \qquad 0 \le s \le l, \tag{4.1}$$

где $w = w(s) \in C^1$ — заданная комплекснозначная функция, причем $w'(s) \neq 0$, $w'(s)$ гёльдерова на $[0, l]$, $w'(0) = w'(l)$,

$$a_1 = \frac{w(0) - w(l)}{2\pi i} \neq 0, \tag{4.2}$$

l — заданная длина L_z; s — дуговая абсцисса L_z, причем возрастанию s соответствует обход L_z, при котором Ω_z остается слева.

Замечание 4.1.1 *Функция $w = w(s)$ представляет собой граничное значение многозначной (ввиду (4.2) и дополнительного требования $f(z) \neq 0$) аналитической функции $F(z) = \int f(z)dz$, имеющей простой полюс и логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке.*

Замечание 4.1.2 *Запись (4.1), будучи вполне корректной в случае однолистной области Ω_z, очевидно, является несколько условной в том случае, когда искомая область Ω_z окажется конечнолистной. В общем случае, как обычно, под краевыми значениями $f(t(s))$ мы понимаем значения $f(\tilde{t}(s))$, где $\tilde{t}(s)$ описывает $\partial\Omega_z$, и естественная проекция $\tilde{t}(s)$ на плоскость $\mathbb{C}$ есть $t(s)$.*

Решение задачи 1 дано Г. Г. Тумашевым ([89], §11) в следующем предположении: кривая $L_w(0, l)$, определяемая уравнением

$$w = w(s), \quad 0 \le s \le l,$$

есть простая дуга и лежит в полуполосе, построенной на отрезке $[w(0), w(l)]$ как на основании. Некоторое ослабление этих ограничений на $L_w(0,l)$ предложено Р. Б. Салимовым и М. Л. Славутиным [81].

Случаю $\Im w(s) \equiv \mathrm{const}$ посвящено большое количество работ прикладного характера, обзор которых можно найти в [22], [45], [68], [89].

Рассмотрим задачу 1 без дополнительных геометрических ограничений на вид кривой $L_w(0,l)$. Нам потребуется вспомогательное утверждение о локальном поведении многозначной аналитической функции $F(z)$ в точке, где $F(z)$ имеет одновременно полюс и логарифмическую особенность.

Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в области

$$\mathbb{D}_\varrho^- = \{\, z \,:\, |z| > \varrho \,\}.$$

В $\mathbb{D}_\varrho^-$ проведем разрез Γ, совпадающий с линией уровня

$$\Re\left[e^{i\beta}(a_0 z + a_1 \ln z + g(z))\right] \equiv \mathrm{const}, \quad a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0,$$

для некоторых фиксированных постоянных a_0, a_1, β, $\Im\beta = 0$. При $|z| = \varrho \to \infty$ разрез Γ имеет асимптотой прямую с уравнением

$$\Re(e^{i\beta} a_0 z) = \mathrm{const}.$$

Аргумент $\theta(\varrho)$ точки пересечения разреза Γ и окружности

$$\{\, z \,:\, |z| = \varrho \,\}$$

для ϱ достаточно больших можно выбрать так, что существует

$$\lim_{\varrho\to\infty} \theta(\varrho) = \theta_\Gamma, \qquad |\theta_\Gamma + \beta + \arg a_0| = \pi/2.$$

Для функции

$$F(z) = a_0 z + a_1 \ln z + g(z),$$

однозначно определенной в области $\mathbb{D}_\varrho^* = \mathbb{D}_\varrho^- \setminus \Gamma$, справедлива

Лемма 4.1.1 *При достаточно больших ϱ функция $F(z)$ не более, чем двулистна в $\mathbb{D}_\varrho^*$. Если*

$$\cos[\theta_\Gamma + \arg(a_0/a_1)] < 0,$$

то $F(z)$ однолистна в $\mathbb{D}_\varrho^*$; если же

$$\cos[\theta_\Gamma + \arg(a_0/a_1)] > 0,$$

то $F(\mathbb{D}_\varrho^*)$ содержит двулистный участок. Для всех достаточно больших ϱ область $F(\mathbb{D}_\varrho^*)$ будет близка к области $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ в первом и к области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ — во втором случаях. Здесь Ω_1 — внешность круга радиуса $|a_0|\varrho$ с радиальным разрезом, Ω_2 — некоторая полуполоса ширины, меньшей или равной $2\pi|a_1|$.

Доказательство. Вместо $w = F(z)$ достаточно рассмотреть функцию вида $F_0(z) = z + \ln z + g_0(z)$, получающуюся после линейных замен $w_1 = w/a_1$, $z_1 = (a_0/a_1)z$ и опускания индексов у w_1 и z_1. Очевидно,

$$\theta_0(\rho) = \theta(\rho) + \arg(a_0/a_1), \quad \theta_\Gamma^0 = \theta_\Gamma + \arg(a_0/a_1), \quad \beta_0 = \beta + \arg a_1.$$

При $z \to \infty$ имеем

$$\Re\frac{zF_0'(z)}{F_0(z)} = 1 + O\left(\frac{\ln|z|}{z}\right), \Re\left(1 + \frac{zF_0''(z)}{F_0'(z)}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad (4.3)$$

поэтому образом окружности

$$\{\, z \,:\, z = \rho e^{i\theta},\ \theta_0(\rho) \le \theta \le \theta_0(\rho) + 2\pi\}$$

является кривая $L(\rho)$, звездная относительно $w = 0$, и касательная к $L(\rho)$ вращается монотонно. Кроме того, нетрудно вычислить вариации (изменения)

$$\Delta_1 = Var_{\theta_0(\rho)\le\theta\le\theta_0(\rho)+2\pi} F_0(\rho e^{i\theta}) = 2\pi i, \tag{4.4}$$

$$\Delta_2 = (2\pi)^{-1} Var_{\theta_0(\rho)\le\theta\le\theta_0(\rho)+2\pi} \operatorname{Arg} F_0(\rho e^{i\theta}) =$$

$$= 1 + \frac{\cos\theta_0(\rho) + o(1)}{\rho}, \tag{4.5}$$

так как

$$\Delta_2 = 2\pi + \arg\{1 + 2\pi i/[A_\rho e^{i\theta_0(\rho)}]\},$$

где

$$A_\rho = 1 + [\ln\rho + g_0(\rho e^{\theta_0(\rho)}) + i\theta_0(\rho)]/[\rho e^{i\theta_0(\rho)}] = 1 + o(\rho).$$

Граница $F_0(\mathbb{D}_\rho^*)$ состоит из разомкнутой дуги $L(\rho)$ и двух параллельных лучей, исходящих из концов $L(\rho)$. Простой анализ с применением принципа аргумента к функции $1/F_0(z)$ и соотношений (4.3) – (4.5) показывает, что для достаточно больших ρ область $F_0(\mathbb{D}_\rho^*)$ может быть двулистна разве лишь в точках полуполосы, заключенной между лучами. В окрестности $w = \infty$ эта полуполоса не содержит точек области или же покрыта дважды. Пусть $\cos\theta_\Gamma^0 < 0$. Тогда для достаточно больших ρ из (4.5) следует

$$0 < \Delta_2 < 2\pi,$$

а в силу (4.3) непрерывная ветвь

$$\operatorname{Arg} F_0(\rho e^{i\theta})$$

монотонно растет при

$$\theta_0(\rho) \le \theta \le \theta_0(\rho) + 2\pi.$$

Следовательно, $L(\rho)$ — простая дуга, лежащая в секторе

$$\{\, w \,:\, \arg w_0(\rho) \le \arg w \le \arg w_0(\rho) + \Delta_2 \,\},$$

и

$$w_0(\rho) = F_0(\rho e^{i\theta_0(\rho)}).$$

Считая для определенности $\pi/2 < \theta_\Gamma^0 < \pi$, из (4.3) получим, что сектор

$$\{\, w \,:\, \pi/2 \le \arg[w - w_0(\rho)] \le \pi \,\}$$

не содержит точек $L(\rho)$, за исключением концевых точек $w_0(\rho)$, $w_0(\rho) + 2\pi i$. Для больших ρ в этом последнем секторе будут расположены лучи с уравнениями

$$\Re\left(e^{i\beta_0}\, w\right) = \Re\left(\pm i exp\left(i\theta_\Gamma^0\right)\, w\right)\right) = \mathrm{const}.$$

Таким образом, получаем, что $\partial F_0(\mathbb{D}_\rho^*)$ — обобщенно жорданова кривая, и так как $F_0(z)$ локально однолистна в $\overline{\mathbb{D}}_\rho^* \setminus \{\infty\}$, то по теореме 1.1.1 получим однолистность $F_0(z)$ в $\overline{\mathbb{D}}_\rho^*$.

Если $\cos\theta_\Gamma^0 > 0$, то

$$\lim_{\rho\to\infty} \Delta_2 = 2\pi, \quad \Delta_2 > 2\pi$$

при больших ρ. Аналогичный предыдущему случаю анализ $\partial F_0(\mathbb{D}_\rho^*)$ показывает, что $F_0(\mathbb{D}_\rho^*)$ содержит двулистный участок, ограниченный одним из лучей, частями другого луча и дуги $L(\rho)$.

Лемма доказана.

Определение. *Сохранив прежние обозначения $w(s)$ и $w'(s)$, будем считать эти функции продолженными на всю числовую ось по формулам:*

$$w(\tau + l) = w(\tau) - 2\pi i a_1, \quad w'(\tau + l) = w'(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Через $L_w(\tau,\tau+l)$ будем обозначать ориентированную кривую с уравнением

$$w=w(s),\quad \tau\le s\le \tau+l,\quad \tau=\mathrm{const}.$$

Для фиксированных β, τ и $\varepsilon\ge 0$ введем ориентированную кривую

$$L_w^\beta(\tau)=\Gamma_w^-\cup L(\tau,\tau+l)\cup\Gamma_w^+,$$

где Γ_w^- и Γ_w^+ — некоторые конгруэнтные бесконечные разрезы, соединяющие концы $L_w(\tau,\tau+l)$ с точкой $w=\infty$. Считаем, что вблизи концов разрезы содержат прямолинейные участки, точнее, при $\varepsilon>0$

$$\{\,w\,:\,w=w(\tau)-ire^{i\beta},\quad 0\le r\le \varepsilon/(1+\varepsilon^2),\ r\ge\varepsilon\,\}\subset\Gamma_w=|\Gamma_w^\pm|.$$

Предложение 4.1.1 *Пусть решение задачи 1 существует. Тогда для любого τ существуют $\varepsilon=\varepsilon(\tau)\ge 0$ и область*

$$\Omega_w^\beta(\tau)\in\mathcal{M}^0,$$

проекция границы которой на плоскость имеет вид $L_w^\beta(\tau)$, причем множество

$$\overline{\Omega}_w^\beta(\tau)\setminus\{\infty\}$$

локально однолистно, а в окрестности точки $w=\infty$ область $\Omega_w^\beta(\tau)$ устроена стандартным образом, описанным в лемме 4.1.1 при

$$a_0=f(\infty),\quad a_1=[w(0)-w(l)]/(2\pi i).$$

Доказательство состоит в применении леммы 4.1.1 к функции

$$F(z;\tau+l/2)=w(\tau+l/2)+\int_{t(\tau+l/2)}^{z}f(\zeta)d\zeta$$

в области $\Omega_z\setminus\Gamma_z$, где Γ_z — разрез, выбранный так, чтобы вблизи концов он проходил вдоль линии уровня

$$\Re\left(e^{i\beta}F(z;\tau+l/2)\right)=\Re\left(e^{i\beta}w\right).$$

Предложение 4.1.1 дает необходимое условие разрешимости задачи 1. Предположив функцию $w=w(s)$, $0\le s\le l$, такой, что утверждение предложения 4.1.1 выполнено, можно указать три подхода к решению задачи 1.

1) *Явная склейка.*

Суть этого подхода состоит в сведении задачи 1 к обычной внешней обратной краевой задаче путем построения такой функции $\zeta=G(w)$, для которой функция

$$\zeta=G[F(z;\tau+l/2)]$$

является однозначной в Ω_z. Г. Г. Тумашевым ([89], §11) функция $w=G^{-1}(\zeta)$ построена в явном виде при указанных выше дополнительных предположениях. Основная идея этого метода может быть реализована для задачи 1 и в общем случае, если выполнены следующие ограничения:

существует такое τ_0, что область

$$\Omega_w^\beta(\tau_0),$$

проекция $L_w^\beta(\tau_0)$ границы которой определена выше при

$$\varepsilon=\varepsilon(\tau_0)=0,\quad \tau=\tau_0,$$

является однолистной в окрестности точки $w=\infty$, причем

$$\Omega_w^\beta(\tau_0)\in\mathcal{M}^0,$$

а кривая $L_w^\beta(\tau_0)$ *составлена из дуги*

$$L_w(\tau_0, \tau_0 + l)$$

и двух лучей Γ_w^+, Γ_w^-, *перпендикулярных отрезку*

$$[w(\tau_0), w(\tau_0 + l)]$$

и не пересекающих дугу $L_w(\tau_0, \tau_0 + l)$.

Отметим, что тогда в качестве τ_0 можно взять точку $s = \tau_0$, в которой достигается минимум функции

$$\Re\left[i\overline{a}_1 w(s)\right],$$

если в этой точке

$$\exp[i\beta(\tau_0)] = -ia_1/|a_1|.$$

Можно положить

$$\zeta = G(w) \equiv G_0(aw + b),$$

где

$$a = -1/a_1, \quad b = w(\tau_0)/a_1 - 1 + \pi i,$$

а функция $w = G_0^{-1}(\zeta)$ определена явным образом

$$w = G_0^{-1}(\zeta) \equiv \zeta + \ln\zeta$$

и однолистна в области

$$\Omega_\zeta = \mathbb{C} \setminus \{\, \zeta \, : -\infty \le \Re\,\zeta \le 0 \,\}.$$

Кроме того, имеем

$$G_0^{-1}(\Omega_\zeta) = \mathbb{C} \setminus \{\, w \,:\, w = x \pm \pi i,\ x \leq -1 \,\}.$$

Рассмотрим теперь второй подход.

2) *Сведение к краевой задаче со сдвигом.*

Для любого фиксированного τ и $\varepsilon \geq 0$ в области $\Omega_w^\beta(\tau)$ мы имеем достаточно данных для определения отображения $z = z(w)$, обратного к $w = F(z; \tau + l/2)$.

Соотношение

$$F(t(s); \tau + l/2) = w(s), \quad \tau \leq s \leq \tau + l,$$

позволяет, как известно, определить значения функции

$$\Re \ln(dz/dw)$$

на кривой $L_w(\tau, \tau + l)$. Кроме того, на кривых Γ_w^+ и Γ_w^- даны условия склейки:

$$z(w) = z(w - 2\pi i a_1),$$

т. е.

$$z'(w) = z'(w - 2\pi i a_1)$$

для всех $w \in \Gamma_w^-$, $w - 2\pi i a_1 \in \Gamma_w^+$.

Таким образом, приходим к задаче *определения функции*

$$q(w) = \ln z'(w),$$

аналитической в $\Omega_w^\beta(\tau)$, *непрерывной вплоть до границы, когда на части границы имеем условие задачи Дирихле, на остальной* *части — условие краевой задачи Карлемана:*

$$\Re\, q(w) \quad \textit{известна на} \quad L_w(\tau, \tau + l), \tag{4.6}$$

$$q(w) = q(w - 2\pi i a_1) \quad \textit{для всех} \quad w \in \Gamma_w^-. \tag{4.7}$$

3) Пусть

$$\Phi(\zeta) = F[z(\zeta); \tau + l/2],$$

где $z = z(\zeta)$ — функция с простым полюсом в точке $\zeta = \infty$, конформно отображающая $\mathbb{D}^- = \{\, \zeta \, : \, |\zeta| > 1 \,\}$ на область Ω_z.

Если $\Phi(\zeta)$ известна, то из равенства

$$\Phi(e^{-i\theta}) = w(s), \qquad \tau \le s \le \tau + l,$$

может быть определено соотношение $s = s(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, позволяющее найти искомое решение.

Таким образом, задача будет решена, если удастся *найти функцию $\Phi(\zeta)$ по ее известным свойствам. В нашем случае эти свойства таковы:*

$$\Phi'(\zeta) \ne 0, \qquad \forall \zeta \in \overline{\mathbb{D}^-}, \tag{4.8}$$

$$\Phi'(\zeta) = b_0 + a_1/\zeta + g'(\zeta), \qquad b_0 \ne 0, \tag{4.9}$$

где b_0 — неизвестная постоянная, $g(\zeta)$ — неизвестная аналитическая в $\mathbb{D}^-$ функция с непрерывной в $\overline{\mathbb{D}^-}$ производной; кривая $L_\Phi(0, 2\pi)$ с уравнением

$$w = \Phi(e^{-i\theta}) = b_0 e^{-i\theta} - i a_1 \theta + g(e^{-i\theta}), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

совпадает с кривой $L_w(\tau, \tau + l)$, т. е.

$$Ł_\Phi(0, 2\pi) \sim L_w(\tau, \tau + l). \tag{4.10}$$

Имеет место

Предложение 4.1.2 *Задача (4.8) – (4.10) разрешима тогда и только тогда, когда для кривой* $L_w(\tau, \tau+l)$ *существует область вида*

$$\Omega_w^{\beta(\tau)} \in \mathcal{M}^0.$$

Если задача (4.8) – (4.10) разрешима, то существование

$$\Omega_w^{\beta(\tau)} \in \mathcal{M}^0$$

получаем, как и в предложении 4.1.1.

Обратное утверждение и также разрешимость задачи (4.6), (4.7) фактически обоснованы в более общей ситуации в следующем пункте с использованием одного из основных результатов теории краевых задач со сдвигом.

Метод явной склейки показывает, что задача 1 равносильна некоторой внешней обратной краевой задаче для мероморфной функции, имеющей единственный простой полюс в бесконечности. Эта задача хорошо изучена [89].

Второй и третий подходы в сочетании с методами главы 1 удается использовать для доказательства разрешимости более общих задач, когда функция $F(z)$ имеет конечное число полярных и логарифмических особенностей.

4.1.2 Расширение класса функций

Пусть $w = w(s)$, $0 \leq s \leq l$, удовлетворяет указанным в постановке задачи 1 условиям, кроме (4.2), и

$$c = w(0) - w(l), \tag{4.11}$$

где c — произвольное комплексное число, в частности, $c = 0$.

Пусть $\Omega_z \in \mathcal{M}^0$, через $F(z)$,

$$F \,:\, \overline{\Omega}_z \to \overline{\mathbb{C}},$$

обозначим непрерывную (в сферической метрике) в $\overline{\Omega}_z$ функцию, являющуюся неопределенным интегралом мероморфной в Ω_z функции $f(z)$, имеющей лишь конечное число нулей и полюсов.

Очевидно, если Ω_z задана, то для функции $F(z)$ можно определить краевые значения

$$w = F(t(s)), \quad 0 \le s \le l,$$

как значения некоторой однозначной вдоль граничной кривой ветви $F(z)$, где $z = t(s)$, $0 \le s \le l$.

Задача 2. *Дана функция $w = w(s)$, $0 \le s \le l$, обладающая указанными свойствами. Найти Ω_z и функцию $F(z)$ в Ω_z, такие, чтобы выполнялось краевое условие*

$$F(t(s)) = w(s), \qquad 0 \le s \le l, \tag{4.12}$$

и решение (Ω_z, F) принадлежало заданному классу $(\mathcal{M}^0, \mathcal{M}_F)$.

Определение. *Будем писать $\Omega_z \in \mathcal{M}^+$, если Ω_z ограничена, односвязна и не имеет точек ветвления. Запись*

$$F(z) \in \mathcal{M}_F[\{c_1, \ldots, c_k\}, \{m_1, \ldots, m_k\}]$$

будет означать, что $f(z)$ (производная $F(z)$) имеет в Ω_z конечное число нулей и полюсов, причем число полюсов

$$k' \ge k \ge 0,$$

заданы вычеты $c_j \neq 0$ *и порядки* $m_j \geq 1$ *первых* k *полюсов функции* $f(z)$,

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k = (2\pi i)^{-1} c;$$

вычеты $f(z)$ *в оставшихся* $(k' - k)$ *полюсах считаются нулевыми.*

Если

$$c = w(0) - w(l) = 0,$$

то, очевидно, допускаются две возможности:

1) $k \geq 1$

и

2) $k = 0$,

т. е. $f(z)$ не имеет ненулевых вычетов. В этом последнем случае формально можно считать, что множество $\{c_1, \ldots, c_k\}$ пусто.

Запись

$$F(z) \in \mathcal{M}_F\{c_1, \ldots, c_k\}$$

будет означать, что m_j *не заданы.*

Как обычно (см. [89]), два решения (Ω_z^1, F_1), (Ω_z^2, F_2) будем считать совпадающими, если для некоторых постоянных λ_1 и λ_2, $|\lambda_1| = 1$, преобразование $z_2 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2$ задает конформное соответствие областей Ω_z^1 и Ω_z^2, причем $F_1(z_1) \equiv F_2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2)$.

Имеет место

Теорема 4.1.1 *Пусть задана функция* $w = w(s)$, $0 \leq s \leq l$, *обладающая указанными свойствами. Тогда существуют область* $\Omega_z \in \mathcal{M}^+$ *с гладкой границей* L_z *и функция*

$$F(z) \in \mathcal{M}_F[\{c_1, \ldots, c_k\}, \{m_1, \ldots, m_k\}],$$

удовлетворяющая краевому условию (4.12).

Для формулировки теоремы единственности нам нужны некоторые определения.

Определение. *Будем говорить, что конечнолистная область Ω_w^* согласована с кривой L_w и набором $\{c_1, \dots, c_k\}$, если Ω_w^* односвязна и проекция L_w^* ее границы на плоскость образована следующим образом.*

Если $c = w(0) - w(l) = 0$ и набор $\{c_1, \dots, c_k\}$ отсутствует, то $L_w^* = L_w$.

В общем же случае

$$L_w^* = \cup_{j=1}^k (L_{wj} \cup \Gamma_{wj}^+ \cup \Gamma_{wj}^-),$$

где L_{wj} — ориентированная дуга с уравнением

$$w = w(s) + C_j, \quad s_j \leq s \leq s_{j+1},$$

причем

$$C_1 = 0, \quad C_j = 2\pi i(c_1 + \dots + c_{j-1}), \quad 2 \leq j \leq k,$$

здесь

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_k < s_{k+1} = l,$$

в остальном выбор s_j произволен;

Γ_{wj}^+ — произвольно выбранная ориентированная локально простая дуга, идущая от конца $w(s_{j+1}) + C_j$ дуги L_{wj} к точке $w = \infty$;

Γ_{wj}^- получается из Γ_{wj}^+ параллельным переносом на $2\pi i c_j$ и сменой ориентации, т. е. $w = \infty$ — начало дуги Γ_{wj}^-, а конец Γ_{wj}^- совпадает, очевидно, с началом $L_{w(j+1)}$, т. е. с точкой

$$w(s_{j+1}) + C_{j+1}.$$

Считаем, что $\Gamma_{wj}^{\pm}$ выбраны так, что L_w^* является локально простой кривой, дуга Γ_{wj}^+ совпадает с некоторым лучом в окрестности точки $w = \infty$ и с некоторым отрезком, лежащим слева от L_{wj}, в окрестности точки $w(s_{j+1}) + C_j$.

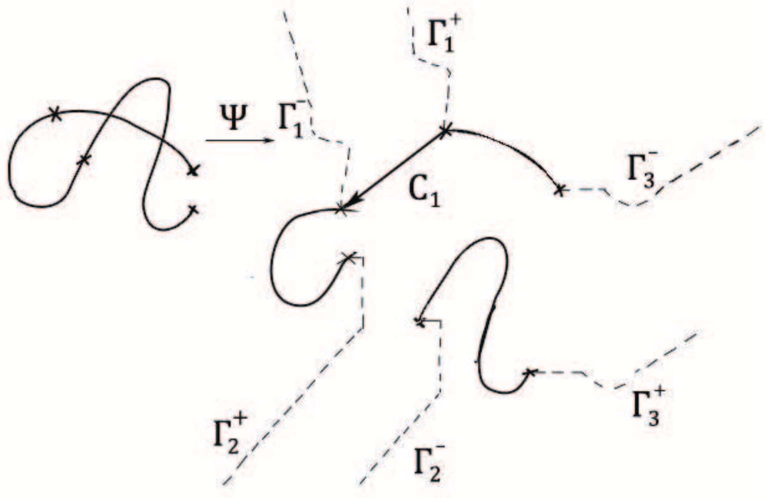

Рис. 4.1: Дуга L_w до и после перестройки

Если

$$w = w^*(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi$$

— одно из параметрических представлений L_w^*, то при возрастании τ точка $w^*(\tau)$ описывает дугу L_{wj}, затем — Γ_{wj}^+, и попадает в точку $w = \infty$, возвращаясь вдоль Γ_{wj}^- к началу $L_{w(j+1)}$, $j = 1, \ldots, k$.

Конец L_{wk} и начало L_{w1}, очевидно, совпадают в силу условия

$$2\pi i(c_1 + \cdots + c_k) = c.$$

Отметим также, что мы не исключаем возможности: $c = 0$, но $\sum |c_j| \ne 0$.

Ясно, что отображение

$$\Pi \,:\, L_w \mapsto L_w^*$$

(т. е. перестройка L_w и добавление конгруэнтных линий), сопоставляющее дуге L_w ориентированную локально простую в $\overline{\mathbb{C}}$ кривую L_w^* специального вида, содержит достаточно широкий произвол.

Многозначное отображение П, очевидно, может быть осуществлено, исходя из заданной ориентированной дуги L_w, и подсказано следующим обстоятельством.

Пусть (Ω_z, F) — некоторая пара, $\Omega_z \in \mathcal{M}^+$,

$$F(z) \in \mathcal{M}_F\{c_1, \ldots, c_k\}.$$

Через Ω_z^* обозначим область, полученную из Ω_z разрезанием вдоль взаимно непересекающихся дуг

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_k,$$

где γ_j — простая в Ω_z дуга, соединяющая граничную точку $t(s_j)$ с точкой a_j, где $f(z) = F'(z)$ имеет особенность с вычетом, равным заданной постоянной c_j.

Ясно, что если

$$F(z) \in \mathcal{M}_F\{c_1, \ldots, c_k\}$$

и выполнено краевое условие (4.12), то аналитический образ Ω_w^* области Ω_z^* при отображении некоторой ветвью $F(z)$ (обозначим $\Omega_w^* = F(\Omega_z^*)$) является конечнолистной областью, согласованной с L_w и набором $\{c_1, \ldots, c_k\}$, если γ_j выбраны специальным образом вблизи концов. При этом Γ_{wj}^+ и Γ_{wj}^- являются образами разных берегов γ_j^+ и γ_j^- разреза γ_j, и допускаемый нами произвол в выборе $\Gamma_{wj}^\pm$ объясняется выбором γ_j, числа нулей и полюсов $f(z)$.

Теорема 4.1.2 *Пусть заданы функция $w = w(s)$, $0 \le s \le l$, имеющая указанные выше свойства, и конечнолистная область Ω_w^*, согласованная с дугой L_w и набором $\{c_1, \ldots, c_k\}$.*

Тогда существуют область $\Omega_z \in \mathcal{M}^+$ с гладкой границей L_z и функция

$$F(z) \in \mathcal{M}_F\{c_1, \ldots, c_k\},$$

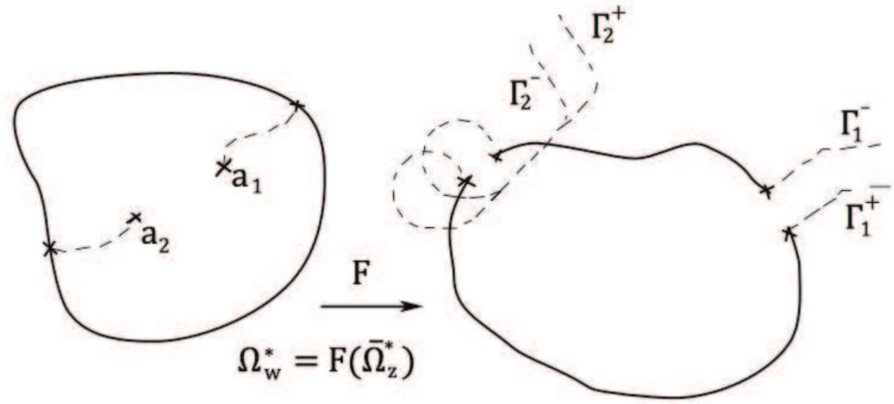

Рис. 4.2: Логарифмические дорожки

удовлетворяющая краевому условию (4.12), причем $\Omega_w^* = F(\Omega_z^*)$ *для некоторой системы разрезов* $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Такое решение (Ω_z, F) *единственно.*

Для доказательства теорем 4.1.1 и 4.1.2, кроме результатов главы 1, нужны еще несколько фактов. В следующей лемме 4.1.2 пользуемся понятием неполного разветвленного элемента конечной кратности. В [69], с. 104, это понятие введено для элементов, расположенных над $\mathbb{C}$. Применением преобразования $w_1 = 1/w$ естественно определяются и неполные разветвленные элементы в окрестности точки $w = \infty$.

Пусть функция $g(\zeta)$ аналитична в круге $\mathbb{D}_a = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| < a \,\}$, где $a > 0$, и

$$F_0(\zeta) = \frac{a_m}{\zeta^m} + \dots + \frac{a_1}{\zeta} + a_0 + c_0 \ln \zeta + g(\zeta) \quad (a_m \neq 0,\ c_0 \neq 0,\ m \geq 0)$$

— функция, однозначно определенная в $\mathbb{D}_a^* = \mathbb{D}_a \setminus \gamma$, где γ — разрез, соединяющий точку $\zeta = 0$ с границей круга и совпадающий с линией уровня $\Re[e^{i\beta} F_0(\zeta)] = \mathrm{const}$ для некоторой вещественной постоянной β.

Для малых r обозначим $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}_r \setminus \gamma$, Γ_r^+ и Γ_r^- — образы разных берегов γ_r^+ и γ_r^- разреза $\gamma_r = \gamma \cap \mathbb{D}_r$ при отображении функцией

$w = F_0(\zeta)$.

Риманову поверхность, получаемую как образ $\mathbb{D}_r^*$ при отображении функцией $F_0(\zeta)$, обозначим через $F_0(\mathbb{D}_r^*)$.

Пусть $\Omega(\Gamma_r^+, \Gamma_r^-)$ — полосообразная часть плоскости в окрестности точки $w = \infty$, заключенная между лучами Γ_r^+ и Γ_r^-.

Справедливо следующее обобщение леммы 4.1.1.

Лемма 4.1.2 *Для достаточно малых r функция $w = F_0(\zeta)$ не более, чем $(m+1)$-листна в $\mathbb{D}_r^*$, причем*

а) $F_0(\mathbb{D}_r^*)$ — неполный разветвленный элемент кратности нуль при $m = 0$;

б) $F_0(\mathbb{D}_r^*)$ — неполный разветвленный элемент кратности m или $m-1$ в зависимости от выбора γ и $\arg(c_0/a_m)$, имеющий над точками $\Omega(\Gamma_r^+, \Gamma_r^-)$ соответственно $(m+1)$ или $(m-1)$ лист при $m \geq 1$.

Доказательство. Так как $F_0'(\zeta) \to \infty$ при $\zeta \to 0$, то эта производная $F_0'(\zeta) \neq 0$ в $\mathbb{D}_r \setminus \{0\}$ для малых r. Поэтому отображение $F_0 : \gamma_r^+ \to \Gamma_r^+$ локально взаимно однозначно.

Кроме того, Γ_r^+ — луч, т. е. простая дуга, следовательно, отображение $F_0 : \gamma_r^+ \to \Gamma_r^+$ взаимно однозначно.

Аналогично, Γ_r^- есть взаимно однозначный образ γ_r^-.

Так как Γ_r^+ и Γ_r^- не пересекаются, то $F(\zeta)$ определяет локально взаимно однозначное отображение границы $\mathbb{D}_r$, т. е. выполнены граничные условия Морса. Поэтому для малых r область $F_0(\mathbb{D}_r^*)$ представляет собой неполный разветвленный элемент конечной кратности. Для формального применения теории Морса необходимы замены переменных:

$$w_1 = 1/w, \zeta_1 = \sqrt{\zeta}.$$

Граница $F_0(\mathbb{D}_r^*)$ состоит из лучей $\Gamma_r^{\pm}$ и дуги L_r, определяемой уравнением

$$w = F_0(re^{i\theta}), \quad \theta(r) \le \theta \le \theta(r) + 2\pi,$$

$re^{i\theta(r)}$ — точка пересечения γ с окружностью $\{\,\zeta\ :\ |\zeta| = r\,\}$. Для малого r функция

$$w_1 = 1/F_0(re^{i\theta}), \quad \theta(r) \le \theta \le \theta(r) + 2\pi,$$

определяет кривую, близкую к m раз обходимой окружности радиуса $(1/|a_m|)r^{-m}$ при $m \ge 1$. Изучив асимптотическое поведение L_r при $r \to 0$, аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 4.1.1, нетрудно подсчитать кратность элемента $F_0(\mathbb{D}_r^*)$.

Приводимая ниже лемма 4.1.3 является следствием известного факта о конформном склеивании в теории краевых задач со сдвигом (см. [45], §17).

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — совокупность простых и взаимно непересекающихся дуг Ляпунова, и пусть $\alpha_j(\zeta)$ — взаимно однозначное отображение γ_j на себя, сохраняющее концы, причем $\alpha_j'(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера, отлична от нуля и на концах дуги обращается в единицу, $j = 1, \ldots, n$. Считая, что ζ^+ и ζ^- — точки различных берегов одной и той же дуги, связанные соотношением

$$\zeta^+ = \alpha(\zeta^-),$$

рассмотрим краевое условие

$$\Phi_0(\zeta^+) = \Phi_0(\zeta^-), \quad \zeta^\pm \in \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Лемма 4.1.3 *Существует однолистная в области*

$$\Omega^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{j=1}^n |\gamma_j|$$

функция $w = \Phi_0(\zeta)$, имеющая простой полюс в точке $\zeta = \infty$, аналитическая в $\Omega^* \setminus \{\infty\}$, которая непрерывно продолжима на берега $\gamma_j^{\pm}$ разрезов γ_j и удовлетворяет краевому условию (4.13).

Образ $\Phi_0(\gamma_j)$ для каждой γ_j является разомкнутой дугой Ляпунова.

Если кривая L из $\overline{\mathbb{C}}$ определяется отображением

$$w\,:\,[0,2\pi]\to\overline{\mathbb{C}},$$

$w(0)$ и $w(2\pi)\in\mathbb{C}$, то L будем называть локально простой тогда и только тогда, когда локально простой является продолженная кривая $\tilde{L}$, определяемая отображением

$$\tilde{w}\,:\,(-\infty,\infty)\to\overline{\mathbb{C}},$$

причем

$$\tilde{w}\mid(0,2\pi]=w,\quad \tilde{w}(\tau+2\pi)=\tilde{w}(\tau)+w(2\pi)-w(0),\quad -\infty<\tau<\infty.$$

Лемма 4.1.4 *Пусть L — ориентированная локально простая в $\overline{\mathbb{C}}$ кривая, концы которой расположены в конечных точках, уравнение $w = w(\tau)$, $0\le\tau\le 2\pi$, — одно из параметрических представлений L.*

Пусть $c_1,\dots,c_k$ — комплексные постоянные,

$$2\pi i(c_1+\dots+c_k)=w(0)-w(2\pi),$$

m_j — натуральные числа, $j=1,\dots,k$, т. е. заданы L и множества

$$\{c_1,\dots,c_k\},\quad \{m_1,\dots,m_k\}.$$

Тогда существует непрерывная (в сферической метрике) в *области* $\overline{\mathbb{D}} = \{ \zeta \, : \, |\zeta| \leq 1 \}$ *функция* $\Phi(\zeta)$ *вида*

$$w = \Phi(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} c_j \ln(\zeta - \zeta_j) + \Phi_0(\zeta), \tag{4.14}$$

где

ζ_j *— некоторые несовпадающие точки из* $\mathbb{D}$*;*

$\Phi_0(\zeta)$ *— мероморфная в* $\mathbb{D}$ *функция;*

$\Phi'(\zeta)$ *в точке* $\zeta = \zeta_j$ *имеет полюс порядка* $m_j \geq 1$*;*

$\Phi(\zeta)$ *локально однолистна в точках* $\partial\mathbb{D}$ *(относительно* $\overline{\mathbb{D}}$*) и* $w = \Phi(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$*, представляет собой параметрическое представление* L *(имеется в виду одна из ветвей* $\Phi(\zeta)$*, выделенная вдоль* $\partial\mathbb{D}$*), причем возрастанию* θ *соответствует заданная ориентация* L*.*

Формальное доказательство леммы 4.1.4 достаточно громоздко, мы ограничимся описанием основных шагов в построении $\Phi(\zeta)$ и некоторыми пояснениями.

Шаг 1. Исходя из L и постоянных $c_1, \ldots, c_k$, перестройкой L и добавлением произвольно выбранных конгруэнтных линий Γ_j^+ и Γ_j^- образуем замкнутую ориентированную локально простую в $\overline{\mathbb{C}}$ кривую

$$L^* = \cup_{j=1}^{k}(L_j \cup \Gamma_j^+ \cup \Gamma_j^-)$$

подобно тому, как это описано перед теоремой 4.1.2.

Поскольку выбор точек $w(\tau_j)$, которыми L разбивается на части L_j, произволен, то линию Γ_j^+ можно считать прямолинейной вблизи концов и гладкой в смысле Ляпунова в любой ограниченной части; начальная дуга Γ_j^+ (отрезок) подходит к $w(\tau_j)$ трансверсально и оставаясь слева по отношению к частичной дуге L, содержащей $w(\tau_j)$. Без ограничения общности можно считать L^* такой, что при обходе Γ_j^+ и Γ_j^- область $\Omega(\Gamma_j^+, \Gamma_j^-)$ (см. обозначение в лемме 4.1.2) остается слева. Последнее требование необязательно и взято нами лишь для определенности в последующих построениях.

Шаг 2. Пусть

$$w^* = w^*(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi$$

— некоторое параметрическое представление локально простой кривой L^*, и пусть точки τ_j из $[0, 2\pi)$ таковы, что $w^*(\tau_j) = \infty$ и $(\tau_j, w^*(\tau_j))$ определяет точку стыка Γ_j^+ и Γ_j^-, т. е. концевую точку Γ_j^+ и начало Γ_j^-, $j = 1, \dots, k$.

По теореме 1.2.1 существуют жорданова область $\Omega_{\zeta'}$ и рациональная функция $R(\zeta')$, такие, что $R : \partial\Omega_{\zeta'} \to L^*$ дает новое параметрическое представление L^*, а особым точкам $(\tau_j, w(\tau_j))$ соответствуют точки

$$\zeta'_j \in \partial\Omega_{\zeta'}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для нас существенно следующее уточнение граничного поведения функции $R(\zeta')$. Уточняя построение функции $g(\zeta, \tau)$ в доказательстве леммы 1.2.1 с учетом локальной простоты L^*, жорданову кривую $L_{\zeta'} = \partial\Omega_{\zeta'}$ и рациональную функцию $R(\zeta')$ можно построить так, чтобы:

а) $p(\zeta', R, \overline{\mathbb{C}}) = 1$ для всех $\zeta \in \partial\Omega_{\zeta'}$, за исключением точек $\zeta'_1, \dots, \zeta'_k$;

б) $p(\zeta'_j, R, \overline{\Omega}_{\zeta'}) = m_j$, $p(\zeta'_j, R, \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_{\zeta'}) = 1$.

Пункт б) означает, в частности, что отображение R малой окрестности (относительно $\overline{\Omega}_{\zeta'}$) точки ζ'_j определяет неполный разветвленный элемент в смысле Морса кратности $m_j - 1$.

Шаг 3. Дополнительными однолистными конформными отображениями области $\Omega_{\zeta'}$ с применением теорем Римана и О. Д. Келлога (см., например, [47]) и леммы 4.1.3 приходим к кругу с гладкими разрезами

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \cup_{j=1}^k \gamma_j$$

и определенной в $\mathbb{D}^*$ функции $w = \Phi(\zeta) = R(\omega(\zeta))$.

Здесь $\omega : \mathbb{D}^* \to \Omega_{\zeta'}$ — однолистное конформное отображение,

$$\omega(\gamma_j^{\pm}) = R^{-1}(\Gamma_j^{\pm}) \subset L_{\zeta'}, \quad \omega(\partial\mathbb{D}) = R^{-1}(\cup L_j) \subset L_{\zeta'},$$

причем для точек $\zeta^+ \in \gamma_j^+$ и $\zeta^- \in \gamma_j^-$ с одинаковым аффиксом $\zeta = \zeta^+ = \zeta^-$ имеет место равенство:

$$\Phi(\zeta^+) = \Phi(\zeta^-) - 2\pi i c_j.$$

Последнее означает аналитическую продолжимость $\Phi(\zeta)$ через внутренние точки γ_j. Очевидно, $\Phi(\zeta)$ имеет представление (4.14), где ζ_j — концевая точка γ_j в круге $\mathbb{D}$.

Порядок полюса $\Phi'(\zeta)$ в точке $\zeta = \zeta_j$ равен m_j в силу условия б) при построении $R(\zeta')$ и леммы 4.1.2. Также по построению

$$w = \Phi(e^{i\theta}), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi,$$

является параметрическим представлением L для некоторого θ_0.

Функция $w = \Phi(e^{-i\theta_0}\zeta)$ будет удовлетворять всем требованиям, чем и завершается описание доказательства леммы 4.1.4.

Доказательство теоремы 4.1.1. Для кривой L_w, определяемой функцией $w = w(s)$, $0 \leq s \leq l$, и векторов $(c_1, \ldots, c_k)$, $(m_1, \ldots, m_k)$ по лемме 4.1.4 существует функция $\Phi(\zeta)$, $|\zeta| < 1$, вида (4.14), такая, что

$$\Phi(\zeta) \in \mathcal{M}_\Phi[\{c_1, \ldots, c_k\}, \{m_1, \ldots, m_k\}], \quad \Phi'(e^{i\theta}) \neq 0,$$

$w = \Phi(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ — параметрическое представление L_w.

Равенство $w(s) = \Phi(e^{i\theta})$ определяет функцию

$$s = s(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

причем $s'(\theta)$ является гёльдеровой по теореме О. Д. Келлога, $s'(\theta) > 0$ и $s'(0) = s'(2\pi)$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по обычной схеме ([89], гл. 1). А именно, если функция $z = g(\zeta)$ определяет конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на искомую область Ω_ζ, то $\Re \ln(dz/d\zeta)$ равна $\ln s'(\theta)$ при $\zeta = e^{i\theta}$, поэтому (λ_1 и λ_2 — постоянные, $|\lambda_1| = 1$)

$$z = g(\zeta) = \lambda_1 \int_0^\zeta \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln s'(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta\right)d\zeta + \lambda_2.$$

Легко проверить, что

$$\Omega_z = g(\mathbb{D}), \quad L_z = g(\partial\mathbb{D}), \quad F(z) = \Phi(g^{-1}(z))$$

дают искомое решение.

Доказательство теоремы 4.1.2. Задана область Ω_w^*, граница которой проектируется на кривую

$$L_w^* = \cup_{j=1}^k (L_{jw} \cup \Gamma_{wj}^+ \cup \Gamma_{wj}^-).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_{wj}^\pm$ являются достаточно гладкими, т. е. обладают свойствами, описанными при обосновании леммы 4.1.4. Действительно, если это не так, то можно локально деформировать Γ_{wj}, вырезав из Ω_w^* неполный разветвленный элемент $U(w^+)$ с центром в точке $w^+ \in \Gamma_{wj}^+$ и приклеив затем этот элемент вдоль Γ_{wj}^- в окрестности точки

$$w^- = w^+ + 2\pi i c_j.$$

Такое изменение, очевидно, не влияет на решение задачи. Допустимые изменения Ω_w^* указанного типа позволяют также считать, что Ω_w^* не имеет точек ветвления вдоль $\Gamma_{wj}^{\pm}$ за исключением разве лишь точки стыка Γ_{wj}^{+}, Γ_{wj}^{-} на бесконечности.

С применением леммы 4.1.4 построим функцию $w = \Phi(\zeta)$ вида (4.14) в $\mathbb{D}$, такую, что $w = \Phi(e^{i\theta})$, $0 \le \theta \le 2\pi$, описывает L_w для некоторой ветви $\Phi(\zeta)$, причем $w = \Phi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \gamma_j$ на Ω_w^*. Тогда $\Phi(\gamma_j^{\pm}) = \Gamma_{wj}^{\pm}$.

Определив $s = s(\theta)$ из соотношения $w(s) = \Phi(e^{i\theta})$, найдем затем Ω_z и $F(z)$ как и при доказательстве теоремы 4.1.1.

Совпадение двух решений (Ω_z^1, F_1) и (Ω_z^2, F_2) доказывается так же, как и в модельных задачах [89]. А именно, соотношения

$$F_1(\Omega_z^{1*}) = F_2(\Omega_z^{2*}) = \Omega_w^*$$

и граничные условия

$$F_1(z_1(s)) = F_2(z_2(s)) = w(s)$$

показывают, что конформное отображение $z_1 = F_1^{-1}(F_2(z_2))$ удовлетворяет граничному условию $|dz_1| = |dz_2| = ds$. Последнее с учетом гладкости L_z влечет равенство $z_1 = \lambda_1 z_2 + \lambda_2$, где $|\lambda_1| = 1$, λ_1 и λ_2 — постоянные.

Замечание 4.1.3 *Для локально простой L_w доказанные выше леммы позволяют записать равенство $F(t(\tau)) = \Phi(e^{i\theta})$, $t \in L_z$, по заданным Ω_w^*, $\mathcal{M}_F\{c_1, \ldots, c_k\}$ или по заданным*

$$L_w, \qquad \mathcal{M}_F[\{c_1, \ldots, c_k\}, \{m_1, \ldots, m_k\}].$$

Роль параметра s проявляется лишь на последнем этапе при восстановлении отображения

$$g\,:\,\mathbb{D} \to \Omega_z$$

по известной функции $s'(\theta)$.

Ясно, что аналоги теорем 4.1.1, 4.1.2 можно установить и в случае параметра τ, отличного от s (например, $\tau = x = \Re z$, $\tau = \varphi = \arg z$ и другие (см. [68], [89])).

Действительно, определив зависимость параметра τ от θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, на основании равенства

$$F(t(\tau)) = w(\tau) = \Phi(e^{i\theta}),$$

для восстановления $z = g(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, можно воспользоваться известными схемами с учетом заданного класса искомых областей.

Мы ограничимся этим замечанием и вернемся снова к обратной краевой задаче по параметру s.

4.1.3 Общий случай. Аналоги уравнения Гахова

Сохранив условия теорем 4.1.1 и 4.1.2 относительно $w = w(s)$ и класса функций $\mathcal{M}_F$, рассмотрим более широкие классы искомых областей $\mathcal{M}_\Omega$.

Определение. *Будем писать*

$$\Omega_z \in \mathcal{M}_\Omega[\{m\}, \{n_1, \dots, n_q\}],$$

если Ω_z односвязна, содержит m листов вблизи точки $z = \infty$ и имеет q точек ветвления $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_q$ кратностей $n_1, n_2, \dots, n_q$ над конечными точками.

Для $m > 0$ задачу можно назвать внешней.

При $m = 0$ мы получим внутреннюю обратную краевую задачу, рассмотренный выше класс $\mathcal{M}^+$ соответствует классу

$$\mathcal{M}_\Omega[\{0\}, \emptyset].$$

Через $\mathcal{M}_\Omega^-$ обозначим класс $\mathcal{M}_\Omega[\{1\}, \emptyset]$.

Необходимо указать, что если Ω_z имеет точки ветвления, то под локальными свойствами функции $F(z) \in \mathcal{M}_F$ (порядки нулей и полюсов, величины вычетов и т. п.), как обычно, подразумеваются свойства в плоскости локального (униформизирующего) параметра.

Рассмотрим задачу для

$$\Omega_z \in \mathcal{M}_\Omega[\{m\}, \{n_1, \ldots, n_q\}]$$

с гладким L_z. Пусть $z = g(\zeta)$ — неизвестная функция, взаимно однозначно и конформно (за исключением прообразов точек ветвления) отображающая круг $\mathbb{D} = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| < 1 \,\}$ на Ω_z. Найдя, как и раньше, зависимость $s = s(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, придем к следующей сопутствующей краевой задаче.

Задача 3. *Найти отображение*

$$g \,:\, \mathbb{D} \to \Omega_z \in \mathcal{M}_\Omega[\{m\}, \{n_1, \ldots, n_q\}],$$

конформное в $\mathbb{D} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$, *если известны краевое условие* $|g'(e^{i\theta})| = s'(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, *и прообразы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *точек ветвления* $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_q$.

Мы здесь предполагаем непрерывность $|g'(\zeta)|$ вблизи и на границе $\partial\mathbb{D}$, оставляя в стороне функциональные обобщения.

Если $m = 0$, то задача 3 не представляет новых трудностей по сравнению со случаем, когда $g'(\zeta) \ne 0$ всюду в $\mathbb{D}$ (см. [45], а также [43]). Будем иметь

$$z = g(\zeta) = \lambda_1 \int_0^\zeta g_0'(\tau) \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\tau - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j \tau} \right)^{n_j} d\tau + \lambda_2,$$

где

$$\ln g_0'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln s'(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta. \qquad (4.15)$$

Таким образом, при $m = 0$ теорема 4.1.1 сохраняется, а при заданной области Ω_w^* (аналог теоремы 4.1.2) для установления единственности дополнительно следует считать заданными образы $\tilde{A}_j \in \Omega_w^*$ точек ветвления $\tilde{a}_j$, $j = 1, \ldots, q$.

Разрешимость задачи 3 при $m = 1$, $\{n_1, \ldots, n_q\} = \emptyset$ установлена Ф. Д. Гаховым и составляет один из фундаментальных результатов теории обратных краевых задач. Тем же методом разрешимость задачи 3 при $m = 1$ и произвольных n_q обосновала Н. Н. Видякина [43].

Мы предлагаем здесь способ, отличный от методики Ф. Д. Гахова, позволяющий доказать разрешимость задачи 3 в ряде случаев при $m \geq 1$.

Число $m \geq 1$ равно сумме кратностей полюсов $g(\zeta)$. Для простоты будем искать функцию $g(\zeta)$, имеющую единственный полюс порядка $m \geq 1$ в некоторой точке

$$\beta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}.$$

Тогда (см., например, [43]) $z = g(\zeta) =$

$$= \lambda_1 \int_0^\zeta g_0'(\tau) \left(\frac{1 - \overline{\beta}\tau}{\tau - \beta} \right)^{m+1} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\tau - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j \tau} \right)^{n_j} d\tau + \lambda_2, \qquad (4.16)$$

где $g_0'(\zeta)$ определяется формулой (4.15). Задача 3 будет разрешимой, если формула (4.16) дает однозначную в $\mathbb{D}$ функцию $g(\zeta)$, точнее, если существует точка

$$\beta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\},$$

такая, что $res\, g'(\zeta) \mid_{\zeta=\beta} = 0$, что обеспечит отсутствие логарифмической особенности у функции $g(\zeta)$.

Обозначим:

$$\varphi(\zeta) = g_0'(\zeta) \prod_{j=1}^{q} [(\zeta - \alpha_j)/(1 - \overline{\alpha}_j \zeta)]^{n_j}.$$

Вычислив коэффициент при $(\zeta - \beta)^m$ в разложении произведения $(1 - \overline{\beta}\zeta)^{m+1}\varphi(\zeta)$ в ряд вблизи точки $\zeta = \beta$ и приравняв этот коэффициент к нулю, получим обобщенное уравнение Гахова

$$\psi(\beta) \equiv \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \frac{C_{m+1}^{m-\nu}}{\nu!} \overline{\beta}^{m-\nu} (1 - \beta\overline{\beta})^{\nu} \frac{\varphi^{(\nu)}(\beta)}{\varphi(\beta)} = 0, \qquad (4.17)$$

равносильное соотношению $res\, g'(\zeta) \mid_{\zeta=\beta} = 0$.

Через $\operatorname{ind} \psi(\beta)$ обозначим вращение векторного поля $\psi(\beta)$ на границе $(q+1)$-связной области, достаточно близкой к области

$$\mathbb{D} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}.$$

Поведение $\psi(\beta)$ вблизи $|\beta| = 1$ определяется первым членом

$$(-1)^m (m+1) \overline{\beta}^m$$

суммы в (4.17), так как при $\nu \geq 1$ имеем

$$\varphi^{(\nu)}(\beta)(1 - \beta\overline{\beta})^{\nu} = o(1) \quad \text{при} \quad |\beta| \to 1$$

в силу гёльдеровости $\ln \varphi(\beta)$ вблизи $|\beta| = 1$.

В окрестности точки $\beta = \alpha_j$ поведение $\varphi(\beta)$ зависит от порядка полюсов $\varphi^{(\nu)}(\beta)/\varphi(\beta)$ при $1 \le \nu \le m$.

Если $\operatorname{ind}\psi(\beta) \ne 0$, то, как известно (см., например, [57]), уравнение (4.17) имеет решение $\beta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. Вычисления показывают, что $\operatorname{ind}\psi(\beta) \ne 0$ при $m \ge 1$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} = \emptyset$ либо при $1 \le m \le \min_j n_j$, $q \ge 2$.

Итак, доказана

Теорема 4.1.3 *Задача 3 имеет по крайней мере одно решение в одном из двух случаев:*

1^0*)* $m \ge 1$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} = \emptyset$*;*

2^0*)* $1 \le m \le \min_j n_j$, $q \ge 2$*.*

Если справедливо одно из двух ограничений 1^0) и 2^0) теоремы 4.1.3, то, очевидно, аналоги теорем 4.1.1 и 4.1.2 без единственности будут справедливы и в классе $\mathcal{M}_\Omega[\{m\}, \{n_1, \ldots, n_q\}]$.

Замечание 4.1.4 *Гёльдеровость и отличие от нуля функции* $w'(s)$ *взяты нами лишь для простоты изложения.*

Отметим, что вопрос о наиболее широких предположениях относительно функции $w(s)$ *в обратных краевых задачах достаточно полно исследован С. Н. Андриановым и Ф. Д. Гаховым (см. [45], [89]). Их результаты в полной мере можно использовать и в задачах 1, 2 и 3.*

Действительно, так как лемма 4.1.4 не использует свойств гладкости (в силу теоремы 1.2.1 аналог леммы 4.1.4 справедлив и для конечного числа квази л. п. кривых), то нам нужны лишь некоторые условия гладкости на функцию $s = s(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, *при рассмотрении сопутствующей краевой задачи 3 в различных классах.*

Требуемые свойства $s(\theta)$ *зависят лишь от локальных свойств функции* $w = w(s)$ *и границы области* Ω^*_w*.*

Некоторые ослабления дифференциальных свойств $w(s)$ в задачах 1 и 2, были рассмотрены нами в [8].

Отметим, что по уравнению Гахова и его аналогам имеется ряд интересных результатов, связанных с геометрической теорией функций (см., например, статьи Л. А. Аксентьева, А. В. Казанцева, Н. И. Попова [36], Г. Р. Галиуллиной и С. Р. Насырова [44] и А. В. Казанцева [52], [53] и библиографию в них).

4.2 Условия однолистности искомых областей

Рассмотрим основные обратные краевые задачи, когда граничные условия задаются в виде функции от дуговой абсциссы s искомого контура L_z (постановки задач и построение интегрального представления решения см. [89], гл. 1, [45], §33, а также в 4.1 данной работы).

В этих задачах ищутся контур L_z и функция $w_0(z)$, аналитическая внутри контура L_z (внутренняя задача, $L_z = \partial\Omega_z^+$) или вне контура L_z (внешняя задача, $L_z = \partial\Omega_z^-$), если известно, что

$$w_0(z) \mid_{z\in L_z} = w(s) = u(s) + iv(s), \quad 0 \leq s \leq l. \tag{4.18}$$

Предполагается, что $u(s)$ и $v(s)$ определяют на плоскости w простой замкнутый контур $L_w = \partial\Omega_w$, $u'(s)$ и $v'(s)$ являются гёльдеровыми,

$$u'^2(s) + v'^2(s) \neq 0$$

за исключением конечного числа особых точек.

Условно простейшие обратные краевые задачи такого типа можно сформулировать так:

найти такую односвязную область Ω_z, *чтобы существовало конформное отображение* $F : \Omega_z \to \overline{\mathbb{C}}$ *с заданными гранично-*

ми значениями.

При определенных предположениях решение такой задачи существует, но найденная область Ω_z не всегда может быть реализована на плоскости, она может оказаться неоднолистной, реализуемой лишь на некоторой локально однолистной римановой поверхности рода нуль.

Такая ситуация недопустима в прикладных обратных краевых задачах, так как в них Ω_z — поперечное сечение некоторого трёхмерного физического поля. Таким образом, возникает необходимость нахождения условий (= признаков) однолистности искомой области Ω_z.

Обычно (см. [21], [32]) признаки однолистности решений основных обратных краевых задач выражают через функцию

$$p(\theta) = \ln(ds/d\theta),$$

где зависимость $s = s(\theta)$ определяется из равенства

$$w(s) = \tilde{w}(e^{i\theta}), \quad 0 \leq s \leq l, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \tag{4.19}$$

где $w = \tilde{w}(\zeta)$ — функция, однолистно и конформно отображающая круг

$$\mathbb{D}^+ = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| < 1 \,\}$$

или внешность круга

$$\mathbb{D}^- = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| > 1 \,\}$$

на область Ω_w.

Это связано с тем, что функции, конформно отображающие канонические области плоскости ζ на искомую область Ω_z, восстанавливаются через функцию $p(\theta)$ с помощью явных интегральных представлений. А именно, в предположении, что ищется область Ω_z из класса В. И. Смирнова ([75], с.250), конформное отображение $z_\pm(\zeta)$ области $\mathbb{D}^+$ (или $\mathbb{D}^-$) на Ω_z^+ (или Ω_z^-) представимо в виде (см. [45], [89]):

$$z_\pm(\zeta) = e^{i\alpha} \int \exp\left(\pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_\pm(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta\right)d\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D}^\pm. \quad (4.20)$$

Знак плюс берется для внутренней задачи, знак минус — для внешней, причем $\alpha = \mathrm{const} \in \mathrm{R}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_-(\theta)e^{i\theta}d\theta = 0. \quad (4.21)$$

Отметим, что условие (4.21) является существенным, поскольку обеспечивает однозначность (отсутствие логарифмической особенности) функции $z_-(\zeta)$. Будем также считать для простоты, что

$$\alpha = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} p_\pm(\theta)d\theta = 0. \quad (4.22)$$

Нормировки (4.22) несущественны при исследовании однолистности, так как их можно добиться умножением $z_\pm(\zeta)$ на ненулевую постоянную.

Следует также отметить, что признаки однолистности функций $z_\pm(\zeta)$ из (4.20) связаны с однолистной разрешимостью не только основных обратных краевых задач. Интегральные представления вида (4.20) возникают при решении разнообразных обратных краевых задач как для аналитических функций, так и для эллиптических систем уравнений (см. [68], с. 356).

4.2.1 Ограничения на полунорму Липшица

Во многих прикладных задачах искомые граничные кривые L_z предполагаются гладкими или кусочно-гладкими, составленными из дуг Ляпунова. Тогда в силу теоремы О. Д. Келлога [47] функция $p_\pm(\theta)$ должна быть гёльдеровой, за исключением конечного числа точек.

Именно этим объясняется то, что в первых работах (см. [89], гл. 1, [21], [22]) условия однолистности функций $z_\pm(\zeta)$ найдены в виде ограничений на полунорму $A_\pm$ Липшица или Гельдера функций $p_\pm(\theta)$ или $p'_\pm(\theta)$. Поэтому одним из основных становится вопрос о точных оценках величин

$$|g(z)|, \qquad |\Im g(z)|, \qquad |\Re g(z)|$$

для аналитической функции $g(\zeta)$, заданной в $\mathbb{D}^+$, в зависимости от полунормы Гельдера $A_\pm$ функции

$$\Re g(e^{i\theta}),$$

при условии $g(0) = 0$ или $g(0) = g'(0) = 0$.

Отметим, что требование $g(0) = g'(0) = 0$ естественно в применениях оценок к внешней задаче, так как в связи с условием (4.21) возникает необходимость в оценках для класса функций $g(\zeta)$, имеющих нуль не менее второго порядка в точке $\zeta = 0$, так как функция $\ln z'_-(1/\zeta)$ имеет нуль порядка $n \geq 2$ в точке $\zeta = 0$.

Методами комплексного анализа докажем точные оценки [4], частные случаи которых, а именно, оценки для величин

$$|\Re g(e^{i\theta})| \quad \text{и} \quad |\Im g(e^{i\theta})|$$

установлены ранее в теории приближений в работах С. Н. Бернштейна, Г. Бора, Й. Фавара, Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (см. [90], с. 384, аналоги неравенства Виртингера, а также [40]).

Теорема 4.2.1 *Пусть функция $g(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{D}^+$, непрерывна в $\bar{\mathbb{D}}^+$, $g(0) = 0$, и пусть n и k — фиксированные целые числа, $n \geq 1$, $k \geq 0$.*

Пусть функция $u(\theta) = \Re\, g(e^{i\theta})$ *не менее* k *раз непрерывно дифференцируема,* $u^{(k)}(\theta)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|u^{(k)}(\theta_1) - u^{(k)}(\theta_2)| \le A\,|\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi], \tag{4.23}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.24}$$

Тогда для любого $r \in (0,1]$ *в круге* $|\zeta| \le r$ *справедливы точные оценки:*

$$|g(\zeta)| \le \frac{A}{n^{k+1}} M_k(r^n); \tag{4.25}$$

$$|\Re\, g(\zeta)| \le \frac{A}{n^{k+1}} M_k(r^n), \quad |\Im\, g(\zeta)| \le \frac{A}{n^{k+1}} m_k(r^n) \tag{4.26}$$

при k *четном;*

$$|\Re\, g(\zeta)| \le \frac{A}{n^{k+1}} m_k(r^n), \quad |\Im\, g(\zeta)| \le \frac{A}{n^{k+1}} M_k(r^n) \tag{4.27}$$

при k *нечетном.*

Здесь

$$M_k(r) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^{k+2}} \le \frac{\pi}{2} r,$$

$$m_k(r) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} r^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^{k+2}} \le \frac{4}{\pi} r.$$

Доказательство. Введем функции соотношениями

$$g_1(\zeta) = i\zeta g'(\zeta), \quad g_\nu(\zeta) = i\zeta g'_{\nu-1}(\zeta), \quad \nu \ge 2.$$

В силу (4.24) функция $g(\zeta)$ и функции $g_1(\zeta), \ \ldots, \ g_{k+1}(\zeta)$ в точке нуль имеют один и тот же порядок нуля, равный $n \ge 1$.

Кроме того,

$$u^{(\nu)}(\theta) = \Re\, g_\nu(e^{i\theta}), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k. \tag{4.28}$$

Очевидно, при $k \geq 1$ равенства (4.28) получаются по индукции для $\nu = 1, \ldots, k$ с применением теорем И. И. Привалова и Ф. Рисса (см. [47], §5, гл. IX).

Из принципа максимума для гармонических функций и из условия Липшица (4.23) следует, что

$$|\Re\, g_{k+1}(\zeta)| \equiv |\Re[i\zeta g_k'(\zeta)]| \leq A, \qquad \zeta \in \mathbb{D}^+.$$

Функция $g_{k+1}(\zeta)/A$ имеет нуль порядка n в точке $\zeta = 0$ и подчинена однолистной функции

$$w = g_0(\zeta) = \frac{2}{\pi i} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad g_0(0) = 0.$$

По лемме Шварца

$$|g_0^{-1}[A^{-1} g_{k+1}(\zeta)]| \leq |\zeta|^n,$$

поэтому образ круга $|\zeta| \leq r^n$ при отображении функцией $g_0(\zeta)$ содержит все значения функции $g_{k+1}(\zeta)/A$ при $|\zeta| \leq r$. Но тогда при $|\zeta| < r$

$$|\Re\, g_{k+1}(\zeta)| \leq A \max_{|\zeta| \leq r^n} |\Re\, g_0(\zeta)| = \frac{4A}{\pi} \arctan r^n, \tag{4.29}$$

$$|\Im\, g_{k+1}(\zeta)| \leq |g_{k+1}(\zeta)| \leq A \max_{|\zeta| \leq r^n} |g_0(\zeta)| =$$

$$= A \max_{|\zeta| \leq r^n} |\Im\, g_0(\zeta)| = \frac{2A}{\pi} \ln \frac{1+r^n}{1-r^n}. \tag{4.30}$$

При $n = 1$ аналогичные неравенства даны в ([47], с. 330).

Замечая, что для $\zeta = re^{i\theta}$

$$g(\zeta) = \frac{1}{i^{k+1}} \int_0^r \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t^k} g_{k+1}(te^{i\theta}) \frac{dt_1 \ldots dt_k dt}{t_1 \ldots t_k t}$$

(интегрирование ведется при фиксированном θ), будем иметь

$$|g(\zeta)| \leq \frac{2A}{\pi} \int_0^r \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \int_0^{t_k} \ln \frac{1+t^n}{1-t^n} \frac{dt}{t} = \frac{A}{n^{k+1}} M_k(r^n).$$

Здесь мы воспользовались явным разложением $g_0(\zeta)$ в степенной ряд. Неравенства (4.26) и (4.27) получаются аналогично. Различие для четных и нечетных k появляется из-за множителя i^k, который является вещественным или чисто мнимым.

Оценки (4.25) – (4.27) достигаются для функций вида

$$g(\zeta) = \tilde{g}(\epsilon\zeta), \quad |\varepsilon| = 1,$$

где

$$\tilde{g}(\zeta) = \frac{A}{n^{k+1}} \frac{1}{i^{k+2}} \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^{k+2}}, \quad \tilde{g}_{k+1}(\zeta) \equiv A g_0(\zeta^n),$$

и только для них. Последнее следует из того, что знаки равенства в оценках (4.29), (4.30) для $g_{k+1}(\zeta)$ достигаются лишь в том случае, когда

$$g_{k+1}(\zeta) \equiv A g_0(\varepsilon\zeta^n).$$

Таким образом, знаки равенства в оценках (4.25) – (4.27) реализуются тогда и только тогда, когда $u^{(k)}(\theta) \equiv \tilde{u}^{(k)}(\theta+\theta_0)$, где θ_0 — произвольное вещественное число, $\tilde{u}^{(k)}(\theta)$ — $(2\pi/n)$-периодичная пилообразная функция:

$$\tilde{u}^{(k)}(\theta) = \{A\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/(2n);$$

$$-A(\theta - \pi/n),\ \pi/(2n) \leq \theta \leq 3\pi/(2n);$$

$$A(\theta - 2\pi/n),\ 3\pi/(2n) \leq \theta \leq 2\pi/n\}.$$

Отметим, что указанные оценки $(\pi/2)r$ и $(4/\pi)r$ для $M_k(r)$

и $m_k(r)$ недостижимы при $0 < r < 1$, равенство реализуется при $r = 0$, $M_0(1) = \pi/2$.

Укажем лишь некоторые из разнообразных применений теоремы 4.2.1 и оценок, полученных в ходе ее доказательства.

Предложение 4.2.1 *Пусть $p_+(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $A > 0$ и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_+(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \ (n \geq 1).$$

Тогда функция $z_+(\zeta)$ из (4.20) является выпуклой в круге

$$|z| \leq r = r(n, A), \quad r^n = th[\pi/(4A)] < 1,$$

но не всегда в большем.

Предложение 4.2.2 *Пусть $p_-(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $A > 0$ и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_-(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \ (n \geq 2).$$

Тогда функция $z_-(\zeta)$ из (4.20) отображает $|\zeta| \geq \varrho$ на область с выпуклым дополнением, где

$$\varrho = \varrho(n, A), \quad \varrho^n = cth[\pi/(4A)].$$

Значение ϱ нельзя заменить на меньшее без дополнительных ограничений на функцию $p_-(\theta)$.

Доказательства предложений 4.2.1 и 4.2.2 получаются непосредственным применением точных оценок (4.29) и (4.30) на основании известного факта о том, что необходимое и достаточное условие выпуклости образа окружности $|\zeta| = r$ при отображении

$z_\pm(\zeta)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Im\ln z'_\pm(re^{i\theta}) = \Re\frac{\zeta z''_\pm(\zeta)}{z'_\pm(\zeta)} \geq -1, \quad \zeta = re^{i\theta}.$$

Имеем: $p_\pm(\theta) = \Re\ln z'_\pm(e^{i\theta})$. Положив $g(\zeta) = \ln z'_+(\zeta)$ или $g(\zeta) = \ln z'_-(1/\zeta)$, применим оценки (4.29) и (4.30). Точность найденных значений радиусов следует из того, что для экстремальной функции $\tilde{p}_\pm(\theta)$

$$\max_{|\zeta|=r}\Im[i\zeta\tilde{g}'(\zeta)] = -\min_{|\zeta|=r}\Im[i\zeta\tilde{g}'(\zeta)] = \frac{2A}{\pi}\ln\frac{1+r^n}{1-r^n}.$$

Предложение 4.2.3 *Пусть функция $p_+(\theta)$ непрерывно дифференцируема и $p'_+(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $A > 0$,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_+(\theta)e^{i\nu\theta}d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \ (n \geq 1).$$

Если $A \leq n/m_0(1)$, то $z_+(\zeta)$ из (4.20) однолистна и выпукла в $\mathbb{D}^+$; если же $A > n/m_0(1)$, то точный радиус выпуклости r определяется из равенства

$$\frac{A}{n}m_0(r^n) \equiv \frac{4A}{n\pi}\int_0^{r^n}\arctan t\frac{dt}{t} = 1.$$

Предложение 4.2.4 *Пусть функция $p_-(\theta)$ k раз ($k \geq 1$) непрерывно дифференцируема, $p^{(k)}(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $A > 0$.*

Тогда функция $z_-(\zeta)$ отображает $\mathbb{D}^-$ однолистно на область с выпуклым дополнением, если $A \leq 2^k/m_{k-1}(1)$ при k нечетном, $A \leq 2^k/M_{k-1}(1)$ при k четном.

Оценки константы A неулучшаемы.

Доказательство сводится к применению теоремы 4.2.1 при $p_{\pm}^{(k)} = u^{(k-1)}(\theta)$. При обосновании предложения 4.2.4 мы учли условие (4.21).

Отметим, что при $r = n = 1$ из предложения 4.2.3 получается результат Л. А. Аксентьева [33].

Наличие нуля порядка n у функции $\ln z'_{\pm}(\zeta)$, как видим, приводит к n-кратному увеличению верхнего предела для коэффициентов в условии Липшица для $p'_{\pm}(\theta)$, если пользоваться условием выпуклости. В связи с этим рассмотрим

Пример. Определим $z_{-}(\zeta)$ уравнением

$$\ln z'_{-}(\zeta) = \tilde{g}(1/\zeta) = \frac{A}{n^{k+1}} \frac{4}{\pi i^{k+2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\zeta^{-n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^{k+2}}, \ |\zeta| > 1.$$

Тогда

$$z_{-}(\zeta) = \zeta + a_0 + \sum_{\nu=n-1}^{\infty} a_{\nu}/\zeta^{\nu}, \quad |\zeta| > 1,$$

где $|a_{n-1}| = 4A/[\pi n^k(n-1)]$.

По теореме Г. М. Голузина ([47], с. 471) при $|a_{n-1}| \geq 2/n$ функция $z_{-}(\zeta)$ будет неоднолистной.

С другой стороны, $p_{-}^{(k)}(\theta)$ для этой функции удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом A. Поэтому $z_{-}(\zeta)$ неоднолистна при

$$A \geq n^{k+1}(\pi/2)(1 - 1/n).$$

Аналогично получается, что функция $z_{+}(\zeta)$, определенная условием $\ln z'_{+}(\zeta) = \tilde{g}(\zeta)$, $|\zeta| < 1$, неоднолистна в $\mathbb{D}^{+}$ при условии

$$A \geq n^{k+1}(\pi/2)(1 + 1/n).$$

Оказывается, что множитель n^{k+1} точно характеризует возможный порядок роста коэффициентов в условии Липшица для $p^{(k)}(\theta)$.

Предложение 4.2.5 *Пусть функция $p_\pm(\theta)$ k раз ($k \geq 0$) непрерывно дифференцируема,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_\pm(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$n \geq 1$ для внутренней задачи, $n \geq 2$ для внешней задачи.

Пусть $p_\pm^{(k)}(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $A^\pm(n,k)$. Тогда существует такая постоянная

$$\kappa \geq \kappa_0 = 2\ln 2/\pi,$$

что требование $A^\pm(n,k) \leq \kappa n^{k+1}$ гарантирует однолистность $z_\pm(\zeta)$ в области $\mathbb{D}^\pm$.

С другой стороны, при любых заданных n и k существуют неоднолистные функции $z_\pm(\zeta)$, для которых

$$A^\pm(n,k)/n^{k+1} \in (\kappa_0, \pi).$$

Действительно, неоднолистные функции $z_\pm(\zeta)$, для которых

$$A^\pm(n,k) = (\pi/2) n^{k+1} (1 \pm 1/n),$$

указаны в примере. Оценки для κ в случае внутренней задачи получаются непосредственным применением теоремы 4.2.1 для $u(\theta) = p_+(\theta)$ с привлечением признака Носиро–Варшавского или (при $k \geq 1$) предложения 3.3.3. Вычисления показывают, что в случае внутренней задачи можно взять $\kappa = 1$.

Для случая внешней задачи $n \geq 2$. Полагая

$$g(1/\zeta) = \ln z'_-(\zeta), \quad |\zeta| > 1, \quad u(-\theta) = p_-(\theta),$$

из (4.25) получаем неравенства

$$|g(\zeta)| \le \frac{A^-(n,k)}{n^{k+1}} M_k(|\zeta|^n),$$

$$|i\zeta g'(\zeta)| \le \frac{A^-(n,k)}{n^k} M_{k-1}(|\zeta|^n), \quad |\zeta| < 1.$$

Замечая, что при $\zeta \in \mathbb{D}^+$

$$z'_-(1/\zeta) - 1 = \int_0^\zeta e^{g(\zeta)} g'(\zeta) d\zeta,$$

$$\frac{dM_k(r^n)}{dr} = n\frac{M_{k-1}(r^n)}{r},$$

будем иметь при любом $\zeta \in \bar{\mathbb{D}}^-$, $A = A^-(n,k)$,

$$|z'_-(\zeta) - 1| \le \int_0^1 \exp[An^{-k-1}M_k(r^n)]An^{-k}M_{k-1}(r^n)r^{-1}dr =$$

$$= \exp[An^{-k-1}M_k(1)] - 1 \le 1,$$

если $A = A^-(n,k) \le n^{k+1}\ln 2/M_k(1)$, т. е. при $\kappa \le 2\ln 2/\pi$. Поэтому (см. предложения 2.1.4 – 2.1.5 и примечания к ним) $z_-(\zeta)$ однолистна.

При $n = 1$, $k = 0$ или 1 предложение 4.2.5 фактически было известно. В общем случае предложение 4.2.5 интересно тем, что дает точные по порядку роста по n и k оценки $A^\pm(n,k)$.

Следует сказать, что наибольшая из возможных постоянная $\kappa = \kappa^\pm_{n,k} \in (\kappa_0, \pi)$, вообще говоря, будет зависеть от n, k и областей $\mathbb{D}^\pm$. Мы указали здесь лишь некоторый интервал, где может находиться $\kappa^\pm_{n,k}$.

При $n = 1$, $k = 0, 1$ более точные двусторонние оценки (в том числе и результаты автора) приведены в монографии Ф. Д. Гахова ([45], с. 335).

Отметим, что вслед за [4], [21] в ряде статей С. Н. Кудряшова, И. Р. Нежметдинова, А. П. Тихонова (см. [61], [62], обзор [22]) были получены уточненные двусторонние оценки $\kappa^{\pm}_{n,k}$ при различных k и n. Однако,

точное значение $\kappa^{\pm}_{n,k}$ ни при каких n и k в настоящее время неизвестно.

Можно привести ряд доводов в пользу следующей гипотезы. Определим для заданных n и k величину $A^{\pm}_0(n,k)$ из условия: при $A = A^{\pm}_0(n,k)$ функция $z_{\pm}(\zeta)$ из примера 10.1 однолистна в $\mathbb{D}^{\pm}$, но неоднолистна в замыкании $\mathbb{D}^{\pm}$.

Гипотеза: $\kappa^{\pm}_{n,k} = n^{-k-1}A^{\pm}_0(n,k)$.

Если $A^{\pm}(n,k) = 0$, то $z_{\pm}(\zeta) = \zeta$, т. е. ядра соответствующих функционалов состоят из единственной функции. Предложения 4.2.3 – 4.2.5 описывают специальную окрестность тождественного отображения, состоящую из выпуклых или однолистных функций. Приведем утверждение иного типа.

Пусть $\tilde{z}_{\pm}(\zeta)$ — заданные однолистные функции вида (4.20), для которых $\tilde{p}_{\pm}(\theta)$ удовлетворяют нормировкам (4.21), (4.22). Обозначим

$$u(\theta) = p_{\pm}(\theta) - \delta\tilde{p}_{\pm}(\theta),$$

где δ — фиксированная постоянная из интервала $(-1/6, 1/6)$.

Предложение 4.2.6 *Функция $z_+(\zeta)$ (или $z_-(\zeta)$) будет однолистной, если $u(\theta)$ k раз $(k \geq 0)$ непрерывно дифференцируема,*

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)e^{i\nu\theta}d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$u^{(k)}(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом

$$A \leq n^{k+1}(2/\pi)\ln(2 - 6|\delta\,|).$$

Действительно, как и при доказательстве предложения 4.2.5, мы получаем неравенство

$$|z'_\pm(\zeta)/\tilde{z}'^{\delta}_\pm(\zeta) - 1| \leq 1 - 6|\delta\,|, \qquad \zeta \in \mathbb{D}^\pm,$$

и однолистность $z_\pm$ следует из предложения 2.1.4.

4.2.2 Другие функциональные условия

Выделение массивов однолистных функций (решений обратных краевых задач) условиями вида

$$I[p_\pm(\theta)] \leq \kappa = \mathrm{const},$$

где I — полунорма Гельдера функции

$$u^{(k)}(\theta) = p_\pm^{(k)}(\theta) - \tilde{p}_\pm^{(k)}(\theta),$$

достаточно универсально и удобно. Но оказывается, что однолистности $z_\pm(\zeta)$ можно добиться при условиях весьма простого вида, не требующих гёльдеровости $u(\theta) = u^{(0)}(\theta)$.

Из теоремы 2.1.1 (см. ее следствие 2.1.1) и принципа максимума непосредственно вытекает

Предложение 4.2.7 *Если $p_\pm(\theta)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$ и имеет ограниченное колебание*

$$|p_\pm(\theta_1) - p_\pm(\theta_2)| \leq \kappa^\pm, \qquad \forall \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi],$$

то функция $z_\pm(\zeta)$ однолистна в $\mathbb{D}^\pm$ при условии $\kappa^\pm \leq \pi/(3 \mp 1)$.

Пусть функция $\tilde{z}_\pm(\zeta)$ однолистна в области $\mathbb{D}^\pm$. Предположим, что

$$\tilde{z}_\pm(\mathbb{D}^\pm) \in G_{1,1}(A, B),$$

где A и B — положительные постоянные, и пусть $\tilde{p}_{\pm}(\theta)$ — плотности, определяющие $\tilde{z}_{\pm}(\zeta)$ по формуле (4.20).

Следующие предложения 4.2.8 и 4.2.9 — следствия теоремы 2.1.3.

Предложение 4.2.8 *Функция $z_{\pm}(\zeta)$ будет однолистной, если функции $p_{\pm}(\theta)$ и $u(\theta) = p_{\pm}(\theta) - \tilde{p}_{\pm}(\theta)$ суммируемы на $[0, 2\pi]$, $u(\theta)$ имеет ограниченное колебание*

$$|u(\theta_1) - u(\theta_2)| \leq (\pi/2)\kappa(A, B), \qquad \forall \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi],$$

где $\kappa(A, B)$ — величина, указанная в теореме 2.1.3.

В постановке обратной краевой задачи предположим, что $w'(s)$ из (4.18) непрерывна и не равна нулю, через Ω_z^+ обозначим локально однолистную искомую область из класса В. И. Смирнова. При определении этого класса, в отличие от [75], с. 250, мы не предполагаем однолистности области Ω_z.

Предложение 4.2.9 *Область Ω_z^+ будет однолистной, если (4.18) определяет область $\Omega_w^+ \in G_{1,1}(A, B)$, кроме того*

$$\frac{\max[u'^2(s) + v'^2(s)]}{\min[u'^2(s) + v'^2(s)]} \leq \exp\left[\frac{\pi}{2}\kappa(A, B)\right].$$

Аналог последнего предложения справедлив и для внешней задачи для функции $w(z)$, имеющей простой полюс в бесконечности (если существует ее решение Ω_z^- из класса В.И. Смирнова).

Пусть $\tilde{z}_{\pm}(\zeta)$ однолистна в $\mathbb{D}^{\pm}$, причем

$$\Omega^{\pm} = \tilde{z}_{\pm}(\mathbb{D}^{\pm}) \in G_{1,1}^{\omega}(A, B),$$

где $\omega = \varrho_{\Omega}^{-1}(w)$ — коэффициент гиперболической метрики области Ω. Указанный класс областей определен в пункте 2.2.3 после доказательства теоремы 2.2.4.

Предложение 4.2.10 *Функция $z_\pm(\zeta)$ будет однолистной, если функции*
$$p_\pm(\theta), \quad u(\theta) = p_\pm(\theta) - \tilde{p}_\pm(\theta)$$
абсолютно непрерывны на $[0, 2\pi]$, $u'(\theta)$ существенно ограничена лишь с одной стороны, а именно, либо
$$\sup_\theta u'(\theta) \le \kappa^\pm,$$
либо
$$\inf_\theta u'(\theta) \ge -\kappa^\pm,$$
где $2\kappa^- = 4\kappa^+ = \kappa(A, B)$.

Доказательство. Введем функцию
$$g_\pm(\zeta) = \ln[z'_\pm(\zeta)/\tilde{z}'_\pm(\zeta)], \quad \zeta \in \mathbb{D}^\pm.$$

Из условия ограниченности $u'(\theta)$ с одной стороны по принципу максимума получим
$$\Re[i\zeta g'_\pm(\zeta)] \le \kappa^\pm \quad \text{или} \quad \Re[i\zeta g'_\pm(\zeta)] \ge -\kappa^\pm, \quad \zeta \in \mathbb{D}^\pm.$$

Отметим, что $g_+(0) = 0$, $g_-(\zeta)$ имеет нуль не ниже второго порядка в точке $\zeta = \infty$. Применив дополнительное конформное преобразование:
$$-w/(2-w) \quad \text{или} \quad w/(2+w) \quad (w = i\zeta g'_\pm(\zeta)/\kappa^\pm),$$
получим представление
$$i\zeta g'_\pm(\zeta) = \frac{2\psi_\pm(\zeta)}{1-\psi_\pm(\zeta)}, \quad |\psi_\pm(\zeta)| < 1, \quad \zeta \in \mathbb{D}^\pm.$$

Следовательно, с учетом порядка нулей,

$$|g'_+(\zeta)| \le \frac{2\kappa^+}{1-|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{D}^+; \qquad |g'_-(\zeta)| \le \frac{2\kappa^-|\zeta|^{-3}}{1-|\zeta|^{-2}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}^-,$$

отсюда

$$|g'_\pm(\zeta)| \le c^\pm \varrho_{\mathbb{D}^\pm}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}^\pm, \quad c^\pm = (3 \pm 1)\kappa^\pm.$$

Из последнего неравенства следует, что функция

$$f(w) = z_\pm(\tilde{z}_\pm^{-1}(w))$$

в области $\Omega = \tilde{z}_\pm(\mathbb{D}^\pm)$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)}\right| \le c^\pm \varrho_\Omega(w), \quad \forall w \in \Omega = \Omega^\pm.$$

Но тогда $f(w)$ однолистна в Ω, так как для $\Omega \in G^\omega_{1,1}(A, B)$ справедлив очевидным образом аналог леммы 2.1.2, если заменить $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ на функцию $\varrho_\Omega^{-1}(z)$ в формулировке этой леммы.

Доказательство завершено.

Применение признаков однолистности, полученных в главе 2, к функциям $z_+(\zeta)$ и $z_-(\zeta)$ весьма разнообразно. Мы привели лишь типичные примеры, связанные с простыми функциональными ограничениями на плотности интегральных представлений.

Как видим, важное значение приобретает выбранный априорно вид функционала $I[p_\pm(\theta)]$. В качестве I можно брать такие функционалы, которые гарантируют импликацию

$$I[p_\pm(\theta)] \le \kappa^\pm \Rightarrow \tilde{I}[z_\pm(\zeta)] \le a^\pm(\kappa^\pm),$$

где $\tilde{I}$ — какой-либо допустимый функционал для функций вида (4.20) в области $\mathbb{D}^\pm$, а функция $a^\pm(x)$ обладает свойством:

$a^{\pm}(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Функционалы I могут быть связаны, например, с модулями непрерывности второго порядка. Приведем одно любопытное утверждение.

Предложение 4.2.11 *Пусть справедливо представление*

$$p_{-}(\theta) = \alpha \ln |1 - e^{-i\theta}| + u(\theta), \quad \alpha \in [0, 1),$$

где $u(\theta)$ — непрерывная функция, для любых вещественных θ_1 и θ_2 удовлетворяющая неравенству

$$\left| u(\theta_1) + u(\theta_2) - 2u\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right| \le A \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}.$$

Если $A \le 2(2 - \alpha)$, то функция $z_{-}(\zeta)$ однолистна (выпукла).

Действительно, из представления $p_{-}(\theta)$ мы получим, что

$$z'_{-}(\zeta) = (1 - 1/\zeta)^{\alpha} g(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}^{-},$$

где $g(\zeta)$ — аналитична в $\mathbb{D}^{-}$, $|g(\zeta)|$ непрерывна при $|\zeta| \ge 1$ и $|g(e^{i\theta})| = \exp u(\theta)$. Имеем

$$\Re \frac{\zeta z''_{-}}{z'_{-}} = \Re \left[\frac{\alpha/\zeta}{1 - 1/\zeta} + \zeta g'(\zeta) \right] \ge -\frac{\alpha}{2} + \Re[\zeta g'(\zeta)], \quad \zeta \in \mathbb{D}^{-},$$

поэтому $z_{-}(\zeta)$ отображает $\mathbb{D}^{-}$ однолистно на область с выпуклым дополнением, если $|\Re[\zeta g'(\zeta)]| \le 1 - \alpha/2$. Нужная нам оценка дается в следующей лемме.

Лемма 4.2.1 *Пусть $\omega(\theta)$ — модуль непрерывности некоторой функции. Пусть, далее, функция $g(\zeta)$ непрерывна в $\bar{\mathbb{D}}^{+}$, анали-*

тична в $\mathbb{D}^+$, $u(\theta) = \Re\, g(e^{i\theta})$. *Если* $\tilde u(\theta) = \int_0^\theta u(\tau)d\tau$ *и*

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|\le t}\left|\tilde u(\theta_1)+\tilde u(\theta_2)-2\tilde u\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right|\le A\omega(t),\quad A>0,$$

то справедлива оценка

$$\|\Im\, g(\zeta)\|_{\mathbb{D}^+}\le\frac{A}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\omega(2t)}{\sin^2(t/2)}dt. \tag{4.31}$$

Если дополнительно предположить, что $u(\theta)$ *обладает периодом, равным* π, *то*

$$\|\Im\, g(\zeta)\|_{\mathbb{D}^+}\le\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin^2 t}dt. \tag{4.32}$$

Доказательство леммы. В предположении, что правая часть (4.31) конечна, справедлива формула (см., например, [51], с.130)

$$\Im\, g(e^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\tilde u(\theta+t)+\tilde u(\theta-t)-2\tilde u(\theta)}{4\sin^2(t/2)}dt.$$

Оценка (4.31) получается сразу. Нужная нам при доказательстве предложения 4.2.11 оценка (4.32) получается с учетом того, что при $t\in(\pi/2,\pi)$ можно использовать неравенство

$$|\tilde u(\theta+t)+\tilde u(\theta-t)-2\tilde u(\theta)|\le A\omega(2\pi-2t),$$

вытекающее из условия π-периодичности $u(\theta)$.

4.2.3 О двух задачах теории фильтрации

Отметим, что в постановках прикладных обратных краевых задач (см. [68], [89]), как правило, требование однолистности решения явно не указывается, но всегда предполагается. А именно, интегральные представления конформных отображений $z(\zeta)$ заданной области Ω_ζ на искомую Ω_z строятся таким образом, чтобы при подходящих заданных краевых данных Ω_z была бы однолистной областью с кусочно-гладкой границей.

Неоднолистная Ω_z физически нереализуема, поэтому нахождение признаков однолистности $z(\zeta)$ представляет собой принципиальную проблему.

Рассмотрим следующую задачу [89]:

найти непроницаемый подземный контур длины l, если на контуре заданы скорость фильтрации $v = v(s)$, $0 \le s \le l$, известны k — коэффициент фильтрации, H — напор, и глубина водопроницаемого слоя T бесконечна.

Случай, когда $v(s) \equiv \mathrm{const}$, изучен П. Я. Полубариновой-Кочиной и приводит к однолистному решению, при $v(s) \not\equiv \mathrm{const}$ задача рассматривалась как обратная краевая задача теории фильтрации М. Т. Нужиным [89]. Здесь $v(s)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера.

Будем пользоваться известной схемой построения решения ([89], §26).

В предположении, что границы бьефов расположены на одном уровне и искомый контур является дугой Ляпунова, простота этого контура и однолистность области фильтрации следует из однолистности функции $z_-(\zeta)$ из (4.20) в замыкании области

$$\mathbb{D}^- \cap \{\, \zeta \,:\, \Im \zeta < 0 \,\},$$

причем $p_-(\theta) = \ln |ds/d\theta|$, $p_-(\theta)$ — четная функция, а функция $s = s(\theta)$ определяется из соотношения

$$\varphi(s) = \int_0^s v(t)dt - \frac{kH}{2} = \frac{kH}{2}\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right), \quad -\pi \le \gamma \le 0. \tag{4.33}$$

Должны быть выполнены условия разрешимости

$$\int_0^l v(s)ds = kH, \int_0^l v(s)\ln v(s)\cos\left(\frac{\pi}{kH}\int_0^s v(t)dt\right)ds = 0. \quad (4.34)$$

Второе из этих равенств равносильно (4.21) с учетом (4.33) и четности $p_-(\theta)$. Пусть (4.34) имеет место. Тогда справедливо

Предложение 4.2.12 *Область фильтрации будет однолистной, а искомый подземный контур будет простой кривой, расположенной строго ниже своих концов, если выполнено одно из следующих условий:*

1^0 $\max v(s)/\min v(s) \le e^{\pi/4}$;

2^0 $kH\int_0^l [v'^2(s)/v^3(s)]ds < 4\pi^2/9$;

3^0 $\sup|v'(s)/v^2(s)| \le 4\ln 2/(kH)$;

4^0 $\sup\frac{|2v'^2(s)-v(s)v''(s)|}{v^4(s)} \le \frac{8\pi\ln 2}{(kH)^2}$.

Функция $v(s)$ предполагается гёльдеровой и $v(s)\ne 0$.

Кроме того, в условиях 2^0 – 4^0 предполагается абсолютная непрерывность $v(s)$, в условии 4^0 предполагается абсолютная непрерывность $v'(s)$.

Действительно, из (4.33) при $-\pi \le \theta \le 0$, $0 \le s \le l$, последовательным дифференцированием получим

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{kH}{\pi}\frac{1}{v(s)}, \qquad p_-(\theta) = -\ln v(s) + \ln\frac{kH}{2},$$

$$p'_-(\theta) = -\frac{kH}{\pi}\frac{v'(s)}{v^2(s)},$$

$$p''_-(\theta) = \left(\frac{kH}{\pi}\right)^2\frac{2v'^2(s) - v(s)v''(s)}{v^4(s)}.$$

При выполнении 1^0 однолистность функции $z_-(\zeta)$ следует из предложения 4.2.7.

Мы исключили знак равенства в оценке, чтобы гарантировать однолистность $z_-(\zeta)$ в замкнутой области (можно показать, что $z_-(\zeta)$ будет однолистна в $\overline{\mathbb{D}^-}$ и при сохранении знака равенства).

Если выполнено 3^0 или 4^0, то требуемое утверждение следует из предложения 4.2.6 при $\delta = 0$.

Обратимся теперь к обратной задаче построения подземного контура гидросооружения по эпюре напоров, рассмотренной в [89]. В случае разной высоты бьефов и $T = \infty$ однолистная разрешимость этой задачи равносильна однолистности функции

$$f(\zeta) = \omega(\zeta) - \frac{im}{\pi} \arcsin \zeta + 2A\sqrt{\zeta^2 - 1} - \frac{im}{2}, \quad \Im \zeta < 0, \quad (4.35)$$

где A — положительная постоянная, $\omega(\zeta)$ аналитична вне отрезка $[-1, 1]$, кроме того,

$$\omega(\zeta) = \frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(t)dt}{(t-\zeta)\sqrt{1-t^2}}. \quad (4.36)$$

Здесь $x(t)$ определяется из равенств

$$h(x) = (H/\pi) \arcsin t, \quad 0 \le x \le l, \quad -1 \le t \le 1;$$

функция $h(x)$, вообще говоря, многозначна, но известны ограничения $-H/2 \le h(x) \le H/2$ и положительные постоянные m, H заданы.Кроме того, A произвольна, $x = x(h)$ монотонно убывает при $h \in [-H/2, H/2]$ и обладает гёльдеровой производной.

С помощью замены $2\zeta = z + 1/z$ перейдем к полукругу

$$\Omega = \{\, z\, :\, |z| < 1, \Im z > 0 \,\}.$$

При этом

$$2F(z) = A^{-1}f(\zeta(z)) = \frac{1}{z} + \alpha \ln z + \varphi(z), \quad z \in \Omega,$$

где

$$\alpha = m/(\pi A), \quad A\varphi(z) = \omega(\zeta(z)) - Az - im.$$

Как мы доказали в предложении 2.1.4, функция $F(z)$ будет однолистной в замкнутом полукруге $\overline{\Omega}$, если

$$\|\varphi'(z)\|_\Omega \leq 1 - \pi|\alpha|/2.$$

В рассматриваемом нами случае в силу (4.36)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta - \frac{im}{A},$$

где

$$p(\theta) = x(\theta)/A - \cos\theta,$$

$x(\theta)$ определяется из соотношений

$$x(\theta) = x(-\theta), \quad h(x) = (H/\pi)\theta - H/2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

На основании теоремы 4.2.1 будем иметь, что $|iz\varphi'(z)| \leq B$, т. е. $|\varphi'(z)| \leq B$ при любом $z \in \Omega$, если

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta) e^{ik\theta} d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.37}$$

и $p'(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $B_1 = 2B(n+1)/\pi$. Выразив требование ограниченности $p''(\theta)$ через функцию $h(x)$, получим следующее утверждение.

Предложение 4.2.13 *Функция $f(\zeta)$ из (4.35) будет однолистной в замкнутой полуплоскости $\Im \zeta \leq 0$, если функция $x(t)$ лип-*

шицева и выполняется неравенство

$$\sup_x \left|\frac{H^2}{A\pi^2}\frac{h''(x)}{h'^2(x)} - \sin\frac{\pi h(x)}{H}\right| \le M \le \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{m}{2A}\right). \tag{4.38}$$

Если дополнительно выполнено n условий (4.37), то в (4.38) достаточно лишь потребовать $M \le (2-m/A)(n+1)/\pi$.

4.2.4 Обратная задача теории крыла

Достаточные условия однолистности решения обратной краевой задачи теории крыла по заданной скорости потока на контуре профиля крыла

$$v = v(s), \quad 0 \le s \le l_z,$$

рассматривались в нескольких работах (см. [21], [22], где указаны и некоторые результаты автора).

Известные признаки не охватывают важного случая, когда угол в задней кромке профиля является нулевым. Необходимо выделить массивы однолистных функций $z_-(\zeta)$ из (4.20) в терминах функций $p_-(\theta)$, когда $z_-(\partial\mathbb{D}^-)$ — кусочно-гладкая кривая с одной точкой возврата (однолистная область Ω_z должна иметь нулевой внешний угол). Сложность задачи обусловлена в этом случае тем, что L_z не является квазиконформной кривой.

Применив результаты главы 3, предложим и докажем несколько признаков однолистности решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики для профиля с нулевым углом. Кроме того, укажем признак однолистности решений усложненных задач для случая профилей с ненулевыми углами, который сравнительно просто выражается через $v(s)$.

Нам потребуется теорема 3.2.2 и введенные перед этой теоремой определения классов $\overline{G}_\alpha(A)$, $\overline{G}_{\alpha,\beta}(A,B)$, множества $L(\gamma)$.

Если указанная задача аэрогидродинамики разрешима, то функция $F(\zeta)$, конформно отображающая область

$$\mathbb{D}^- = \{\, \zeta \,:\, |\zeta| > 1 \,\}$$

на область течения, найдется по формуле

$$z = F[\zeta; p(\theta)] = \int \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta + ic\right)d\zeta, \quad (4.39)$$

где функция $p(\theta)$ вполне определенным образом связана с заданным распределением $v(s)$ (см. [89]) и удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)e^{i\theta}d\theta = 0.$$

Пусть точка $\zeta = 1$ при конформном отображении (4.39) соответствует точке схода потока на искомом профиле. Будем предполагать $p(\theta)$ такой, что разность

$$p(\theta) - \ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

является гёльдеровой функцией.

Хорошо известно (в силу теорем И. И. Привалова и О. Д. Келлога), что указанное свойство $p(\theta)$ влечет наличие нулевого угла у искомого профиля и гладкость L_z по Ляпунову.

Пусть функция $p_0(\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$, обладает свойствами:

$p_0(\theta) - \ln|2\sin\frac{\theta}{2}|$ гёльдерова,

$\int_{-\pi}^{\pi} p_0(\theta)e^{i\theta}d\theta = 0$,

функция $F_0(\zeta) = F[\zeta; p_0(\theta)]$ является однолистной в $\overline{\mathbb{D}^-}$.

Тогда соотношение

$$x + iy = F_0(e^{i\theta}), \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

представляет собой параметрическое представление контура L_0 некоторого профиля с нулевым углом. В качестве $F_0(\zeta)$ можно взять, например, функцию

$$F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}, \quad |\zeta| \geq 1, \quad p_0(\theta) = \ln |F_0'(e^{i\theta})| = \cos\theta + \ln \left| 2\sin\frac{\theta}{2} \right|.$$

Предложение 4.2.14 *Пусть для однолистной функции*

$$F_0(\zeta) = F[\zeta; p_0(\theta)], \quad |\zeta| \geq 1,$$

контур $L_0 = F_0(\partial\mathbb{D}^-) \in \overline{G}_{1/2}(A)$ *с некоторым* $A > 0$,

$$c_0 = \min_\theta \exp\left[p_0(\theta) - \ln\left| 2\sin\frac{\theta}{2} \right| \right].$$

Пусть, далее, разность $p(\theta) - p_0(\theta)$ *непрерывно дифференцируема,*

$$u(\theta) = p'(\theta) - p_0'(\theta), \quad u(0) + i\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\mathrm{ctg}\frac{t}{2} dt = 0.$$

Если функция

$$u_1(\theta) = u(2\theta)/(2\sin\theta)$$

удовлетворяет условию Липшица с постоянной $K \leq 32c_0/(\pi A^2)$, *то функция* $F(\zeta) = F[\zeta; p(\theta)]$ *будет однолистной в* $\overline{\mathbb{D}^-}$.

Для доказательства нужна

Лемма 4.2.2 *Пусть функция* $f(\zeta)$ *аналитична в круге* $\mathbb{D}$, *непрерывна в* $\overline{\mathbb{D}}$, $u(\theta) = \Re f(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Пусть $f(1) = 0$, *функция*

$$u_1(\theta) = u(2\theta)/(2\sin\theta)$$

удовлетворяет условию Липшица с постоянной $K > 0$.

Тогда для любой точки $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ справедлива оценка

$$|f(\zeta)| \leq \frac{\pi K |\zeta|^n}{2(2n+1)} |1-\zeta|, \quad |\zeta| \leq 1, \tag{4.40}$$

где n — порядок нуля функции $f(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$, причем $n \geq 0$ ($n = 0$ соответствует случаю $f(0) \neq 0$).

Доказательство леммы. В силу теоремы И. И. Привалова функция $f(\zeta)$ будет гёльдеровой в $\overline{\mathbb{D}}$, и, поскольку $f(1) = 0$, функция $f(\zeta)/(1-\zeta)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ и может иметь в точке $\zeta = 1$ особенность разве лишь интегрируемого порядка. Следовательно, функция

$$f_0(\zeta) = -if(\zeta^2)/(\zeta - \zeta^{-1}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta$$

непрерывна в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ и $\Re f_0(e^{i\theta}) = 0$ при $0 < \theta < 2\pi$. Продолжив $f_0(\zeta)$ по принципу симметрии на всю плоскость и применив обобщенную теорему Лиувилля, убедимся, что продолжение $f_0(\zeta)$ имеет устранимую особенность в точке $\zeta = 1$. Поэтому функция

$$f_1(\zeta) = if(\zeta^2)/(\zeta - \zeta^{-1})$$

будет непрерывной всюду в $\overline{\mathbb{D}}$, $u_1(\theta) = \Re f_1(e^{i\theta})$.

Кроме того, очевидно, функция $f_1(\zeta)$ обращается в нуль порядка $(2n+1)$ в точке $\zeta = 0$. По теореме 4.2.1 получим тогда

$$|f_1(\zeta)| \leq \frac{K}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\zeta|^{(2n+1)(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2} \leq \frac{K}{2n+1} \frac{\pi}{2} |\zeta|^{2n+1}$$

для всех $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, отсюда и следует требуемая оценка (4.40).

Доказательство предложения 4.35. Так как

$$p(\theta) - p_0(\theta) = \ln |F'(e^{i\theta})/F_0'(e^{i\theta})|,$$

то для функции

$$\tilde{f}(\zeta) = i\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - i\zeta\frac{F_0''(\zeta)}{F_0'(\zeta)}, \quad |\zeta| \geq 1,$$

будем иметь:

$$\tilde{f}(1) = 0, \quad u(\theta) = \Re\,\tilde{f}(e^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

функция $\tilde{f}(\zeta)$ обращается в нуль порядка $n \geq 2$ в точке $\zeta = \infty$.

По лемме 4.2.2, примененной к функции $\tilde{f}(1/\zeta)$ при $n = 2$, получим

$$\left|\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{F_0''(\zeta)}{F_0'(\zeta)}\right| \leq \frac{\pi K}{10}\frac{|1-1/\zeta|}{|\zeta|^3}, \quad |\zeta| \geq 1. \qquad (4.41)$$

Функция $F(\zeta)$ будет локально однолистной в $\overline{\mathbb{D}^-} \setminus \{1\}$, так как $F'(\zeta)$ непрерывна и не равна нулю в $\overline{\mathbb{D}^-} \setminus \{1\}$. Кроме того, $|1-1/\zeta| \leq (1/c_0)|F_0'(\zeta)|$, $|\zeta| \geq 1$, следовательно,

$$\left|\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{F_0''(\zeta)}{F_0'(\zeta)}\right| \leq \frac{3.4}{A^2}|F_0'(\zeta)|, \quad \forall\zeta \in \mathbb{D}^-,$$

что равносильно неравенству

$$|g''(z)/g'(z)| \leq 3.4/A^2, \qquad \forall z \in F_0(\mathbb{D}^-),$$

для функции $g(z) = F(F_0^{-1}(z))$. Функция $g(z)$, а значит и $F(\zeta)$, будет однолистна по теореме 2.2.3 с учетом того, что $3.4 < 4\kappa_0$.

Предложение 4.2.14 доказано.

Предложение 4.2.14 выделяет класс функций $p(\theta)$, для которых $F(\zeta) = F[\zeta; p(\theta)]$ являются однолистными, в зависимости от выбора $F_0(\zeta)$. Опишем несколько подробнее конкретный пример $F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}$. В этом случае параметрическое уравнение контура

$L_0 = F_0(\partial\mathbb{D}^-)$ в полярных координатах имеет вид:

$$|z| = e^{\cos\theta}, \quad \arg z = \theta - \sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{4.42}$$

Кривая L_0 является простой, симметричной относительно оси абсцисс, ограниченный L_0 профиль имеет нулевой угол в точке $x = e$, $y = 0$. Вблизи особой точки (точки возврата) из (4.42) получаем

$$\pm y = (1/3)\sqrt{2/e}(e-x)^{3/2} + O((e-x)^{3/2}), \quad -1/e \le x \le e,$$

поэтому $L_0 \notin \overline{G}_\alpha(A)$ при любом $\alpha \in (2/3, 1]$, но $L_0 \in \overline{G}_\alpha(A)$ при $\alpha \in (0, 2/3]$, и для фиксированного $\alpha \in (0, 2/3]$ можно определить $A = A(\alpha)$. Простые, но громоздкие вычисления показывают, что

$$(9e)^{1/3} \le A(2/3) \le \pi^2 e/4, \quad A_0 = A(1/2) \le \pi^2 e/4.$$

Кроме того, для данного примера

$$c_0 = 1/e, \quad u(\theta) = p'(\theta) + \sin\theta - (1/2)\mathrm{ctg}(\theta/2).$$

Таким образом, справедливо

Следствие 4.2.1 *Функция $F(\zeta) = F[\zeta; p(\theta)]$ будет однолистной в $\overline{\mathbb{D}^-}$, если*

а) функция $u_1(\theta) = u(2\theta)/(2\sin\theta)$, где

$$u(\theta) = p'(\theta) + \sin\theta - (1/2)\mathrm{ctg}(\theta/2),$$

удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом

$$K \le 34/(\pi e A_0^2),$$

причем $A_0 \le \pi^2 e/4$;

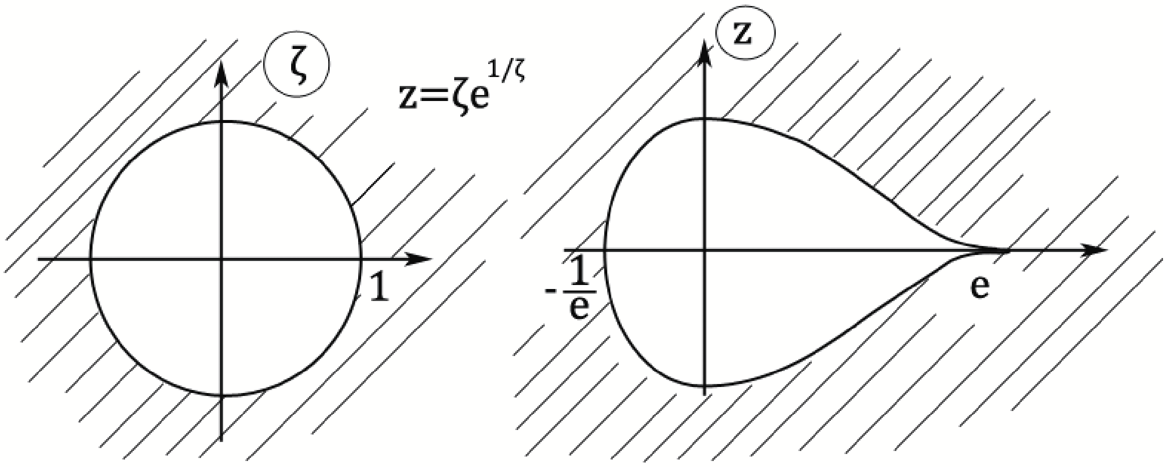

Рис. 4.3: Вспомогательный профиль

б) $u(0) + i\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\mathrm{ctg}(t/2)dt = 0.$

Замечание 4.2.1 *Из доказательства предложения 4.2.14 ясно, что условие Липшица на функцию $u_1(\theta)$ можно заменить любым другим, гарантирующим оценку вида (4.41) с заменой K на $\psi(K)$, $\lim_{x\to 0}\psi(x) = 0$. Как показывает теорема 2.2.3, существенно менее жесткие требования могут появиться в том случае, когда $L_0 = F_0(\partial\mathbb{D}^-) \in \overline{G}_\alpha(A)$ с некоторым $\alpha > 1/2$.*

С учетом того, что $\alpha \le 2/3$ для примера $F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}$, докажем следующее утверждение.

Предложение 4.2.15 *Функция $F(\zeta) = F[\zeta; p(\theta)]$ будет однолистной в $\overline{\mathbb{D}^-}$, если функция*

$$p(\theta) - \ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

абсолютно непрерывна, причем функция

$$u_1(\theta) = [p'(2\theta) + \sin(2\theta) - (1/2)\mathrm{ctg}\theta]/(2\sin\theta)$$

интегрируема с квадратом, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_1^2(\theta)d\theta \le K_1, \tag{4.43}$$

где

$$K_1 \le 1/(4eA_1^3), \qquad A_1 = A(2/3) \le \pi^2 e/4.$$

Доказательство. Пусть

$$f(\zeta) = i\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta) - i\zeta F_0''(\zeta)/F_0'(\zeta), \quad F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}.$$

В силу (4.43) функция

$$f_1(\zeta) = if(\zeta^2)/(\zeta - 1/\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta, \quad |\zeta| > 1,$$

принадлежит классу Харди H_2, следовательно, с учетом равенства $f_1(\infty) = 0$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi} u_1^2(\theta)d\theta \le 2K_1. \tag{4.44}$$

Так как $|1 - e^{-i\theta}|^2 \le 2e|F_0'(e^{i\theta})|$ для функции $F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}$, можем записать

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\theta})|^2}{|F_0'(e^{i\theta})|}d\theta \le 2e\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}}\right|^2 d\theta = 2e\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(e^{i\theta})|^2 d\theta. \tag{4.45}$$

Из (4.44) и (4.45) следует

$$\int_{L_0} |g''(z)/g'(z)|^2 |dz| \le 4eK_1, \tag{4.46}$$

где

$$L_0 = F_0(\partial\mathbb{D}^-), \quad g(z) = F(F_0^{-1}(z)).$$

Однолистность $F(\zeta)$ при условии (4.46) вытекает по-существу из предложения 2.2.4, этим и завершается доказательство.

Укажем еще один путь получения достаточных условий однолистности профиля с нулевым углом.

Пусть известны:

а) функция $F_0(\zeta) = F[\zeta; p_0(\theta)]$, $|\zeta| \geq 1$, *однолистно и конформно отображающая* $\mathbb{D}^-$ *на внешность кусочно-гладкого профиля;*

б) априорная оценка

$$\exp|\ln[F'(\zeta)/F_0'(\zeta)]| - 1 \leq \varrho(z), \quad \forall z = F_0(\zeta).$$

По теореме 3.1.1 функция $g(z) = F(F_0^{-1}(z))$ *(а, значит, и* $F(\zeta)$*) будет однолистной в области* $\Omega = F_0(\mathbb{D}^-)$, *если функция* $\varrho(z)$ *удовлетворяет* λ*-условию с* $\lambda = 1$ *(см. (3.1)).* Указанную схему для функции $F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}$ можно реализовать следующим образом.

Предложение 4.2.16 *Пусть функция*

$$u_0(\theta) = [p(2\theta) - \cos(2\theta) - \ln|2\sin\theta|]/\sin\theta$$

удовлетворяет условию Гельдера с фиксированным показателем $\nu \in (0,1]$ *и некоторым коэффициентом* K,

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\mathrm{ctg}(\theta/2)d\theta = 0.$$

Существует такая постоянная $K_0 > 0$, *что функция*

$$F(\zeta) = F[\zeta; p(\theta)]$$

будет однолистной в $\overline{\mathbb{D}^-}$, *если* $K \leq K_0$.

Доказательство. Обозначим

$$F_0(\zeta) = \zeta e^{1/\zeta}, \quad f_0(\zeta) = \ln[F'(\zeta)/F_0'(\zeta)], \quad f_1(\zeta) = if(\zeta^2)/(\zeta - \zeta^{-1}).$$

Так как $u_0(\theta) = \Re f_1(e^{i\theta})$, то условие Гельдера на функцию $u_0(\theta)$ как следствие теоремы И. И. Привалова влечет оценку

$$|f_0(\zeta)| \le KC|1 - 1/\zeta|, \qquad \forall \zeta \in \mathbb{D}^-, \ C = \mathrm{const} > 0.$$

Положим

$$\varrho(z) = \varrho(\zeta e^{1/\zeta}) = \exp(KC|1 - 1/\zeta|) - 1.$$

Имеем λ-условие с $\lambda = 1$, если для любых θ_1 и θ_2, удовлетворяющих условию $0 < \theta_2 - \theta_1 \le \pi$, справедливо неравенство

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |F_0'(e^{i\theta})| \left(e^{2KC\sin(\theta/2)} - 1\right) d\theta < |F_0(e^{i\theta_1}) - F_0(e^{i\theta_2})|. \qquad (4.47)$$

Левая часть неравенства (4.47) не превосходит величины

$$KCe^{KC+1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |2\sin\frac{\theta}{2}|^2 d\theta.$$

Кроме того, вычисления показывают, что

$$\sup_{0 \le \theta_2 - \theta_1 \le \pi} \{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 d\theta / \left|F_0(e^{i\theta_1}) - F_0(e^{i\theta_2})\right|\} < \infty,$$

поэтому (4.47) будет верно для всех $K \in (0, K_0)$ с некоторым числом $K_0 > 0$.

Опишем теперь схематично два примера, иллюстрирующие возможность применения теоремы 2.1.3 в односвязном и конечносвязном случаях.

1) Одиночный профиль.

Пусть L_0 — контур известного профиля, Ω_0 — область течения, $\partial\Omega_0 = L_0$; L, Ω — искомые контур и область, $v_0(\sigma)$ и $v(s)$ — скорости потока на L_0 и L соответственно, $0 \le \sigma \le l_0$, $0 \le s \le l$.

Пусть заданные в обратной краевой задаче параметры таковы, что потокам в Ω и Ω_0 соответствует одна и та же область Ω_w в плоскости комплексного потенциала (хотя область Ω неизвестна, область Ω_w в обратных краевых задачах известна заранее, см. [89]).

Тогда равенство потенциалов $\varphi(s) = \varphi_0(\sigma)$ дает зависимость $s = s(\sigma)$, $0 \le \sigma \le l_0$, и для конформного отображения $z = g(\zeta)$, $\zeta \in \Omega_0$, $z \in \Omega$, известны краевые значения модуля производной:

$$|g'(\zeta(\sigma))| = \frac{v(s(\sigma))}{v_0(\sigma)}, \qquad 0 \le \sigma \le l_0.$$

Если $L_0 \in \overline{G}_{1,1}(A, B)$, то условие однолистности искомой области можно записать в виде неравенства

$$\exp(2q) = \frac{\max[v(s(\sigma))/v_0(\sigma)]}{\min[v(s(\sigma))/v_0(\sigma)]} < \exp\left[\frac{\pi}{2}\kappa(A, B)\right].$$

Здесь использована теорема 2.1.3 при $\delta = 0$, а также предполагаются обычные для прикладных задач условия гладкости заданных функций $v_0(\sigma)$ и $v(s)$, контуров L_0 и L.

2) Профили в криволинейной полуплоскости.

Пусть Ω_0 — известная $(n+1)$-связная область, линия

$$L_0 \subset \partial\Omega_0$$

является графиком функции $y = y_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, $y_0(x)$ непрерывно дифференцируема и

$$\lim_{|x|\to\infty} y_0'(x) = 0.$$

Остальные граничные компоненты $L_0^j \subset \partial\Omega_0$, $j = 1, \dots, n$, являются контурами некоторых профилей.

Заданы течение (комплексный потенциал) в Ω_0 и его характеристики, область Ω_w^0 в плоскости комплексного потенциала.

Пусть $y = y(x)$, $-\infty < x < \infty$ — функция с теми же свойствами, что и $y_0(x)$, L — график $y(x)$. И пусть Ω — искомая область некоторого течения, причем задана граничная компонента $L \subset \partial\Omega$, а остальные граничные кривые (контуры некоторых профилей) ищутся по заданным на них скоростям (как функции дуговой абсциссы) потока.

Если Ω_0 такова, что граничные кривые принадлежат

$$\overline{G}_{1,1}(A, B)$$

и потокам в областях Ω и Ω_0 соответствует одна и та же область Ω_w^0 в плоскости комплексного потенциала, то можно сформулировать достаточные признаки однолистности искомой области Ω в виде условия

$$\delta^2 + q^2 < (16/\pi^2)\kappa^2(A, B). \tag{4.48}$$

Здесь

$$\delta = \frac{1}{2}\max\{\theta_0^* - \theta_*, \theta^* - \theta_{0*}\}$$

θ^* и θ_* (θ_0^* и θ_{0*} — соответственно максимум и минимум функции $\arctan y'(x)$ ($\arctan y_0'(x)$)

$$q = \max\{q_1, \dots, q_n\}, \quad \exp(2q_j) = \frac{\max p_j(\sigma)}{\min p_j(\sigma)},$$

где $p_j(\sigma)$ — отношение скоростей на j-ом профиле, определяемое так же, как и в предыдущем случае.

Действительно, мы можем непосредственно применить теорему 2.1.3 и предложение 3.2.5. Таким образом, в двух последних примерах признаки однолистности решений краевых задач являются следствиями теорем общего характера, причем мы получаем серию признаков за счет выбора эталонной области Ω_0.

Глава 5

Экстремальные проблемы

Геометрическая теория функций имеет разнообразные применения в краевых задачах. Цель данной главы — показать это на конкретных примерах, объединенных вокруг трех идей:

нестандартные применения неевклидовых метрик (пункт 5.1),

восстановление областей по экстремальным характеристикам конформных отображений (пункт 5.2),

связи граничных и внутренних характеристик функций (5.3).

Изложение пунктов 5.1–5.3 основано на статьях автора [11], [13], [14] и на совместных статьях автора с А. М. Елизаровым [23], И. Р. Каюмовым [24] и Д. В. Маклаковым [26].

Кроме того, в пункте 5.4 изложены некоторые результаты Р. Г. Насибуллина и И. К. Шафигуллина (см. [70] и [150]) по условиям однолистности и p-листности гармонических и бигармонических отображений

5.1 Применения неевклидовых метрик

В первом пункте рассматривается задача восстановления конформного отображения по нелинейному граничному условию равенства метрик. Когда одна из метрик евклидова, получаются обобщенные задачи теории струйных и волновых течений, а евклидовость другой метрики намечает связь с областями класса Смирнова и канонической факторизацией класса Харди H_1.

Нас привлекла идея А. Бёрлинга [118] о близости подобной задачи к классической теореме Римана о существовании конформного отображения односвязной области на круг. Кроме того, интерпретация краевых условий как равенства метрик позволяет понять, что разрешимость задач существенно зависит от количественной сопоставимости коэффициентов метрик.

Во втором пункте приведено решение одной классической задачи. Пусть $P(\Omega)$ — коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω, т. е.

$$P(\Omega) = 2\iint u\,dx\,dy,$$

где u — решение краевой задачи: $\Delta u = -2$ в области Ω и $u = 0$ на границе.

Такое точное определение жесткости кручения получил в 1847 году Сен-Венан [160], изучая задачу кручения вслед за Кулоном, Коши и другими.

Нерешенный вопрос, привлекавший с тех пор многих авторов, состоял в следующем:

найти геометрическую величину или комбинацию геометрических величин, эквивалентную $P(\Omega)$.

Нами доказано, что для любой односвязной области Ω

$$\lambda_1 I(\partial\Omega) \le C_0(\Omega) \le \lambda_2 I(\partial\Omega),$$

где λ_1 и λ_2 — абсолютные постоянные, $\lambda_1 \in [1,3]$, $\lambda_2 \in [4,64]$,

$$I(\partial\Omega) = \iint \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)dx\,dy.$$

Очевидно, геометрический параметр $I(\partial\Omega)$ может быть назван моментом инерции области Ω относительно своей границы.

Отметим, что наше решение $P(\Omega) \approx (7/2)I(\partial\Omega)$ по простоте и форме напоминает формулу Кулона для круга: $P(\Omega) = (\pi/2)r^4 = I_0(\Omega)$, где r — радиус круга, $I_0(\Omega)$ — его момент инерции относительно центра.

5.1.1 Задача восстановления конформного отображения по нелинейному граничному условию равенства метрик

Рассмотрим задачу восстановления конформного отображения $f : \Omega \to G$ по граничному условию

$$\frac{|dw|}{\Phi(w)} = \frac{|dz|}{\Psi(z)}, \qquad w = f(z), \quad \forall z \in \partial\Omega, \tag{5.1}$$

где Ω и G — плоские области, $\Phi(w)$ и $\Psi(z)$ — заданные функции. Понимая под граничным условием (5.1) предельное равенство

$$\lim_{\Omega \ni z \to t} |f'(z)|\Psi(z)/\Phi(f(z)) = 1$$

для всех $t \in \partial\Omega$, мы изучаем существование решения и его свойства в двух следующих классах функций

$$A_0(\Omega) = \{f(z) \quad \textit{аналитична в} \quad \Omega \quad \textit{и непрерывна в} \quad \overline{\Omega}\},$$

$$A_1(\Omega) = \{\Omega - \textit{круг } |z| < 1,\ f \in A_0(\Omega),\ f' \in H_1 \quad \textit{(класс Харди)}\}.$$

Поставленная задача намечает связь между двумя группами идей и результатов, имеющих дело со специальными случаями граничного условия (5.1), когда либо $\Phi(w)$, либо $\Psi(z)$ постоянна. Речь идет о параметрических представлениях однолистных функций класса $A_1(\Omega)$ и их применениях в обратных краевых задачах и о задачах со свободными границами в теории струйных и волновых течений.

Будем предполагать, что

$$0 \in \Omega, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0.$$

Обозначим

$$\alpha(\Phi) = \overline{\lim}_{w\to\infty}\Phi(w)/|w|, \quad \beta(\Phi) = \underline{\lim}_{w\to 0}\Phi(w)/|w|.$$

Теорема 5.1.1 *Пусть функции $\Phi(w)$ и $\Psi(z)$ определены, непрерывны и положительны при $0 < |w| < \infty$ и $0 < |z| < \infty$ соответственно, кроме того,*

$$\alpha(\Phi) < \beta(\Phi), \quad \alpha(\Psi) < \beta(\Psi)$$

и пересечение интервалов

$$(\alpha(\Phi), \beta(\Phi)), \quad (\alpha(\Psi), \beta(\Psi))$$

не пусто. Тогда существуют односвязные жордановы области Ω и G со спрямляемыми границами и однолистное конформное отображение $f : \Omega \to G$ класса $A_0(\Omega)$, удовлетворяющее граничному условию (5.1) и римановым нормировкам $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

Опишем план доказательства теоремы. В круге $\mathbb{D}$ ищется пара однолистных функций $w = p(\zeta)$ и $z = q(\zeta)$ класса $A_0(\mathbb{D})$ с римановыми нормировками в нуле и граничными условиями

$$\frac{|dw|}{\Phi(w)} = \lambda|d\zeta|, \quad \frac{|dz|}{\Psi(z)} = \lambda|d\zeta|, \quad |\zeta| = 1, \tag{5.2}$$

где λ — одна из общих точек указанных в теореме интервалов.

Для доказательства существования $w = p(\zeta)$ рассматривается задача максимизации $p'(0)$ при ограничении

$$\overline{\lim}_{\zeta\to 1}|p'(\zeta)|/\Phi(p(\zeta)) \leq \lambda$$

и аналогичная задача для $q(\zeta)$.

Пользуясь леммами А. Бёрлинга [118] о расширенном объединении и суженном пересечении, можно установить, что экстремальные функции $p_0(\zeta)$ и $q_0(\zeta)$ существуют и удовлетворяют граничным условиям (5.2). Тогда

$$G = p_0(\mathbb{D}), \quad \Omega = q_0(\mathbb{D}), \quad f(z) = p_0(q_0^{-1}(z))$$

— искомое решение.

Примеры показывают, что при невыполнении ограничений на характеристики α, β решение может и не существовать. Так, если

$$\Phi_0(w) = |w|, \quad \Psi_0(z) = k|z|,$$

то

$$\alpha(\Phi_0) = \beta(\Phi_0) = 1, \quad \alpha(\Psi_0) = \beta(\Psi_0) = k$$

и утверждение теоремы имеет место лишь для $k = 1$.

Рассмотрим теперь основную задачу для граничного условия (5.1), возникающую тогда, когда заданы коэффициенты $\Phi(w)$, $\Psi(z)$ и одна из областей Ω или G. Нам потребуются следующие числовые характеристики:

$$a(\Phi) = \inf_{0<|w|<\infty} \Phi(w)/|w|, \quad b(\Phi) = \sup_{0<|w|<\infty} \Phi(w)/|w|,$$

$$c(\Phi) = \inf_{0<R<\infty} M(\Phi, R)/R, \quad M(\Phi, R) = \sup_{|w|\leq R} \Phi(w).$$

Отметим, что $0 \leq a(\Phi) \leq c(\Phi) \leq b(\Phi) \leq \infty$.

Теорема 5.1.2 *Пусть* $\Omega = \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, $\Phi(w)$ *непрерывна и положительна при* $0 < |w| < \infty$, $\Psi(z)$ *положительна и* $\ln \Psi(z)$ *— гармоническая функция, определенная в* $\mathbb{D}$.

1) Если существует однолистная в $\mathbb{D}$ *функция* $w = f(z)$ *класса* $A_0(\mathbb{D})$, *удовлетворяющая граничному условию (5.1) и нормировке* $f(0) = 0$, *то* $a(\Phi) \leq \Psi(0) \leq b(\Phi)$.

2) Если $\lim_{w\to 0} \Phi(w) = \Phi(0) > 0$ *и для некоторого фиксированного* $\nu \in (0,1)$ *выполняется неравенство*

$$c(\Phi) < ||\Psi(z)||_\nu := (1-\nu) \inf_{|z|<1} \Psi(z)(1-|z|)^{-\nu},$$

то существует конформное отображение класса $A_0(\mathbb{D})$, *удовлетворяющее условию (5.1) и нормировкам* $f(0) = 0$ *и* $f'(0) > 0$.

Опишем схему доказательства. Пункт 1 теоремы есть простое следствие граничного условия (5.1) и принципа максимума, примененного к функции $g(z) = (z/w)(dw/dz)$ с учетом того, что $g(0) = 1$.

Для обоснования пункта 2 рассматривается операторное уравнение $f = Sf$, равносильное краевой задаче. А именно,

$$(Sf)(z) = \int_0^z \Phi_A(f(\zeta))/\Psi_A(\zeta)d\zeta, \qquad |z| < 1,$$

где $\Psi_A(z)$ и $\Phi_A(f(z))$ — аналитические в $\mathbb{D}$ функции, однозначно определяемые следующими свойствами:

$\Psi_A(0) > 0$, $|\Psi_A(z)| \equiv \Psi(z)$ при $|z| < 1$, $\Phi_A(f(0)) > 0$, $\Phi_A(f(z))$ непрерывна и не равна нулю при $|z| \leq 1$, $|\Phi_A(f(e^{i\gamma}))| \equiv \Phi(f(e^{i\gamma}))$ при $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Разрешимость уравнения $f = Sf$ в классе $A_0(\mathbb{D})$ при выполнении неравенства $c(\Phi) < ||\Psi(z)||_\nu$ следует из принципа Шаудера.

Рассмотрим простой пример:

$$\Psi_1(z) \equiv \lambda = \mathrm{const}, \quad \Phi_1(w) = 1 + |w|^2,$$

т. е. $1/\Phi_1(w)$ — коэффициент сферической метрики.

По теореме 5.1.2 для разрешимости краевой задачи необходимо, чтобы

$$\lambda \geq 2 = a(\Phi_1),$$

и достаточно, чтобы

$$\lambda > 2 = c(\Phi_1).$$

С другой стороны, нетрудно проверить непосредственно, что при любом $\lambda \geq 2$ функция $f(z) = cz$, где $c = \lambda/2 \pm \sqrt{\lambda^2/4 - 1}$, является решением. Заметим кстати, что при $\lambda > 2$ имеются, по крайней мере, два решения.

В следующей теореме утверждается существование единственного решения в классе $A_1(\mathbb{D})$ для коэффициентов $\Phi(w)$, связанных с гиперболической метрикой. А именно, пусть G_0 — односвязная область гиперболического типа на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $0 \in G_0$, $\infty \notin G_0$, $\lambda(w, G_0)$ — коэффициент гиперболической метрики области G_0 в точке $w \in G_0$. Положим $\Phi(w, G_0) = 1/\lambda(w, G_0)$, если $w \in G_0$ и $\Phi(w, G_0) = 0$, если $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus G_0$. Справедлива

Теорема 5.1.3 *Пусть* $\Omega = \mathbb{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}$, $\Phi(w) = \Phi(w, G_0)$, $\Psi(z)$ *положительна и* $\ln \Psi(z)$ — *гармоническая функция, определенная в* $\mathbb{D}$.

Конформное отображение $f \,:\, \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) \subset G_0$ *класса* $A_1(\mathbb{D})$, *удовлетворяющее граничному условию (5.1) и требованию*

$$f(\overline{\mathbb{D}}) \subset G_0$$

существует тогда и только тогда, когда функция $1/\Psi_A(z)$ *принадлежит классу Харди* H_1.

Такое отображение, нормированное условиями $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, *единственно.*

Необходимость условия $1/\Psi_A(z) \in H_1$ почти очевидна. Доказательства достаточности этого условия, а также единственности решения сводятся к исследованию двух нелинейных задач. А именно, можно показать существование и единственность решения уравнения Лиувилля $\Delta u = 4e^{2u}$ в круге $\mathbb{D}$ при следующих ограничениях

$$\lim_{|z|\to 1} e^{u(z)}\Psi(z) = 1, \quad \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} u(re^{i\gamma})d\gamma = \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} 1/\Psi(re^{i\gamma})d\gamma,$$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \exp u(re^{i\gamma})d\gamma < \infty.$$

Подробные доказательства приведены в работе автора [12].

Построение отображения f по уже найденной функции $u(z)$ сводится к хорошо изученной задаче определения аналитической функции $w = f(z)$ по известному шварциану $\{f, z\}$.

А именно, положим

$$u(z) = \ln|f'(z)| - \ln\Phi(f(z), G_0),$$

тогда $f(z)$ удовлетворяет граничному условию (5.1) и уравнению

$$\{f, z\} = \partial^2 u/\partial z^2 - u^2$$

с известной правой частью.

В отличие от теоремы 5.1.1, конформные отображения, существование которых гарантируется теоремами 5.1.2 или 5.1.3, могут оказаться неоднолистными.

Согласно [118], существование однолистного решения гарантируется при $\Psi(z) \equiv \mathrm{const}$, $\Omega = \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Приведем без доказательства более общее условие, гарантирующее однолистность любого решения.

Ниже мы рассматриваем граничное условие (5.1) для случая, когда $\Omega = \mathbb{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}$.

Теорема 5.1.4 *Пусть функция* $\Phi(w)$ *дифференцируема в* $\mathbb{C}$, *а функция* $\ln \Psi(z)$ *гармонична в* $\mathbb{D}$ *и* $1/\Psi_A \in H_2$. *Если функция* $g(z) = \int 1/\Psi_A(z)dz$ *однолистна в* $\mathbb{D}$, $g(\mathbb{D})$ *— выпуклая область и*

$$|\mathrm{grad}\, \Phi(w)| \leq 2/||g'(e^{i\gamma})||_{L_2}, \qquad \forall w \in \mathbb{C},$$

то любое конформное отображение $f \,:\, \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющее граничному условию (5.1), является однолистным.*

В заключение отметим, что изложенная здесь кратко тематика получила интересное развитие в работах ряда авторов, в частности, в статьях Р. Фурние и Ш. Рушевейха [128], Е. Вегерта, О. Рота и Д. Крауса [166], Ф. Бауера, Д. Крауса, О. Рота и Е. Вегерта [114], М. Черне и М. Заеса [121], М. Черне [122], М. Черне и М. Флореса [123]. В этих статьях имеются ссылки и на статьи автора по этой тематике, а также на первое издание настоящей монографии.

5.1.2 Решение обобщенной задачи Сен-Венана

Рассмотрим задачи, возникшие в середине 19-го столетия и имеющие богатую историю (см. [160], [158], а также [73]).

Речь идет о двусторонних оценках через один и тот же геометрический параметр коэффициента жесткости кручения и об аналогичной задаче для основной частоты колеблющейся мембраны. Пусть Ω — область гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. По теореме Пуанкаре существует конформное отображение

$$f\,:\,\mathbb{D}\to\Omega,\quad \text{где}\quad \mathbb{D}=\{\,\zeta\,:\,|\zeta|<1\,\},$$

устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{D}$ и универсальным накрытием Ω. Положим

$$h(z,\Omega)=(1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)|,\qquad z=f(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}. \tag{5.3}$$

Известно (см. [47]), что выражения

$$|dz|/h(z,\Omega)\quad \text{и}\quad dx\,dy/h^2(z,\Omega)$$

— дифференциальные элементы длины и площади в конформно-инвариантной метрике Пуанкаре области Ω, причем функция $v=\ln h$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\Delta v=-4\exp(2v). \tag{5.4}$$

Для любой односвязной области Ω, не содержащей точки $z=\infty$, величина h совпадает с конформным радиусом Ω в точке z. Пусть $C^\infty(\Omega)$ — множество гладких вещественнозначных функций в Ω, $C_0^\infty(\Omega)$ — его подмножество, состоящее из функций $u(z)$ с компактным в Ω носителем. А. Анкона в статье [96] доказал следующее неравенство

$$\iint_\Omega \frac{u^2}{h^2(z,\Omega)}dx\,dy\le\iint_\Omega|\operatorname{grad}u|^2dx\,dy\quad\forall u\in C_0^\infty(\Omega)$$

где Ω — односвязная область гиперболического типа, $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$.

Справедливы следующие конформно-инвариантные неравенства, обобщающие результат А. Анконы.

Теорема 5.1.5 *Пусть $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ — односвязная область гиперболи-*

ческого типа. Тогда

1) для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega \frac{u^2}{h^2(z,\Omega)}dx\,dy \le \iint_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\,dy \le \tag{5.5}$$

$$\le \iint_\Omega h^2(z,\Omega)|\Delta u|^2 dx\,dy;$$

2) для любой функции $u \in C^\infty(\Omega)$

$$\iint_G u^2 \frac{dx\,dy}{h^2(z,\Omega)} \le \iint_G |\operatorname{grad} u|^2 dx\,dy + \int_{\partial G} u^2 \frac{|dz|}{h(z,\Omega)}, \tag{5.6}$$

где G — произвольная конечносвязная область с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющая условиям: $\overline{G} \subset \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \notin \partial G$.

Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ — однолистное конформное отображение единичного круга на область Ω. Для вывода (5.6) рассмотрим неотрицательный интеграл

$$\iint_G \left(\operatorname{grad} u - u\,\frac{\operatorname{grad} a}{a}\right)^2 dx\,dy \ge 0, \tag{5.7}$$

положив $a(z) = \sqrt{1-|g(z)|^2}$, где $\zeta = g(z)$ — функция, обратная к функции $z = f(\zeta)$. В силу первой формулы Грина

$$\iint_G \left[u^2 \Delta \ln a + (\operatorname{grad} u^2, \operatorname{grad}\, \ln a)\right] dx\,dy = \int_{\partial G} u^2 \frac{\partial \ln a}{\partial n}|dz|. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) получим

$$\iint_G \left\{|\operatorname{grad} u|^2 + \left(\Delta \ln a + \frac{|\operatorname{grad} a|^2}{a^2}\right) u^2\right\} dx\,dy \ge \tag{5.9}$$

$$\ge \int_{\partial G} u^2 \frac{\partial \ln a}{\partial n}|dz|.$$

Имеем
$$\Delta \ln a + \frac{|\mathrm{grad}\, a|^2}{a^2} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{4}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \overline{z}} =$$
$$= -\frac{|g'(z)|^2}{(1-|g(z)|^2)^2} - \frac{|g'(z)|^2}{1-|g(z)|^2} = -\frac{1}{h^2(z,\Omega)} - \frac{|g'(z)|}{h(z,\Omega)}. \qquad (5.10)$$
Пусть, далее, $\vec{n} = e^{i\theta}$ — вектор внешней нормали к ∂G в точке $z \in \partial G$,
$$\mathrm{grad}\, a = \partial a/\partial x + i\partial a/\partial y = 2\partial a/\partial \overline{z}.$$
Тогда
$$\frac{\partial \ln a}{\partial n} = \frac{2}{a}\Re(e^{-i\theta}\partial a/\partial \overline{z}) = -\frac{\Re[e^{-i\theta} g(z)\overline{g'(z)}]}{1-|g(z)|^2}. \qquad (5.11)$$

Из (5.9), (5.10) и (5.11) следует, что
$$\iint_G \left(\frac{1}{h^2} + \frac{|g'(z)|}{h}\right) u^2 dx\, dy \le \iint_G |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\, dy + \int_{\partial G} u^2 |g(z)| \frac{|dz|}{h},$$
что влечет за собой требуемое неравенство (5.6).

Левое неравенство в (5.5) — следствие (5.6).

Для обоснования правого неравенства в (5.5) снова привлечем первую формулу Грина
$$\iint |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\, dy = -\iint u \Delta u\, dx\, dy,$$
и применим последовательно неравенство Коши-Буняковского и левое неравенство из (5.5).

Получим
$$\iint_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\, dy \le \sqrt{\iint_\Omega u^2 h^{-2} dx\, dy}\ \sqrt{\iint_\Omega h^2 |\Delta u|^2 dx\, dy} \le$$

$$\leq \sqrt{\iint_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\, dy}\ \sqrt{\iint_\Omega h^2 |\Delta u|^2 dx\, dy},$$

что равносильно правому неравенству в (5.5).

Теорема 5.1.6 *Пусть Ω — конечносвязная область, $\infty \notin \overline{\Omega}$, $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кривых Ляпунова, $l(\partial\Omega)$ — сумма длин граничных кривых. Если $\varphi(h)$ — непрерывно дифференцируемая функция переменной $h \in [0, \infty)$, то справедлива формула ($h = h(z, \Omega)$)*

$$2\varphi(0)\, l(\partial\Omega) + 4 \iint_\Omega \varphi'(h)\, dx\, dy = -\iint_\Omega (h\varphi(h))' \Delta h\, dx\, dy \qquad (5.12)$$

Применим следствие формулы Грина

$$\iint_\Omega \Delta a\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial a}{\partial n} |dz|$$

к функции $a(x, y) = \int_0^h \varphi(t)\, dt$, где $h = h(z, \Omega)$, $z = x + iy$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Получим

$$\iint_\Omega \{\varphi(h)\Delta h + \varphi'(h)|\operatorname{grad} h|^2\} dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \varphi(h) \frac{\partial h}{\partial n} |dz|.$$

Отсюда с учетом формулы (5.4) следует (5.12), если мы покажем, что

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(h) \frac{\partial h}{\partial n} |dz| = -\varphi(0)\, l(\partial\Omega). \qquad (5.13)$$

Выведем (5.13). Дифференцирование (5.3) дает тождество

$$\frac{\partial h(z, \Omega)}{\partial z} = \frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)} \left[-\overline{\zeta} + \frac{1 - |\zeta|^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right], \qquad z = f(\zeta). \qquad (5.14)$$

Любая граничная компонента $\partial\Omega$ является локально взаимно однозначным образом некоторой дуги β окружности $|\zeta| = 1$

при отображении $f : \mathbb{D} \to \Omega$.

Так как $\partial\Omega$ — кривые Ляпунова, то

$$(1-|\zeta|^2)f''(\zeta)/f'(\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad \zeta \to t \in \beta$$

по локальной версии теорем О. Д. Келлога и Харди-Литтлвуда (см. [47]).

Следовательно, $|\partial h/\partial z| \equiv 1$ при $\zeta \in \partial\Omega$ в силу (5.14).

Но $h(z,\Omega) \equiv 0$ для $z \in \partial\Omega$ и $h(z,\Omega) > 0$ для $z \in \Omega$, поэтому

$$\partial h/\partial n \equiv -2$$

для $z \in \partial\Omega$, что и доказывает формулу (5.13), следовательно, и равенство (5.12).

Пусть Ω — область на плоскости $\mathbb{C}$, $z = x + iy$. Рассмотрим две величины

$$\kappa_0(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{(\iint_\Omega |u| dx\, dy)^2}{\iint_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\, dy}, \tag{5.15}$$

$$\kappa_1(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\iint_\Omega |u|^2 dx\, dy}{\iint_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\, dy}. \tag{5.16}$$

Известно, что если Ω — односвязная область, то $\kappa_0(\Omega)$ лишь постоянным множителем отличается от физической величины — коэффициента жесткости кручения цилиндра с поперечным сечением Ω.

Величина $1/\kappa_1(\Omega)$ — основная частота мембраны Ω, закрепленной вдоль границы $\partial\Omega$ области Ω.

Величины $\kappa_0(\Omega)$ и $\kappa_1(\Omega)$ зависят лишь от формы и размеров области Ω, причем коэффициент жесткости кручения $\kappa_0(\Omega)$ имеет размерность четвертой степени длины, а величина $\kappa_1(\Omega)$ — квадрата длины.

Пусть $dist(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, $z = x + iy$,

$$\rho(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} dist(z, \partial\Omega), \qquad I(\partial\Omega) = \iint_{\Omega} dist^2(z, \partial\Omega) dx\, dy. \quad (5.17)$$

Очевидно, $\rho(\Omega)$ — радиус максимального круга, вписанного в область Ω.

Геометрическая величина $I(\partial\Omega)$ из (5.17), определенная для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, введена нами и названа моментом инерции области Ω относительно границы.

Известен ряд результатов по двусторонним оценкам величины $\kappa_1(\Omega)$ с использованием внутреннего радиуса. Историю вопроса и результаты для случая конечносвязных областей можно найти в статье Р. Оссермана [155].

Пусть $j = 2.4048\ldots$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$, B_0 — постоянная Блоха для однолистных в круге функций, $0.57 < B_0 \leq \pi/4$ (см. [139]). Обоснованные ниже неравенства $\kappa_1(\Omega) \leq h^2(\Omega)$ и (5.18) усиливают оценки из [155].

Теорема 5.1.7 *Для всех односвязных областей $\kappa_1(\Omega) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho(\Omega) < \infty$, причем*

$$B_0 \leq \frac{\rho(\Omega)}{\sqrt{\kappa_1(\Omega)}} \leq j. \quad (5.18)$$

По задачам оценок κ_0 имеется ряд глубоких результатов. Но рассмотренные ранее многими авторами геометрические характеристики области Ω дают для κ_0 лишь односторонние оценки (см. [73]).

История определения жесткости кручения упругой балки с заданным поперечным сечением восходит к Кулону. Он изучал кручение круглых стержней и на этой основе изобрел сверхточные крутильные весы.

Приближенную формулу для вычисление жесткости кручения стержня с прямоугольным сечением получил Коши. (Удивительный факт: теоремы О. Коши имеются почти во всех областях математики, кроме того, он является одним из основателей математической теории упругости).

Общую теорию создал Сен-Венан. Согласно его фундаментальной теории, коэффициент жесткости кручения упругой балки с односвязным поперечным сечением Ω вычисляется по формуле

$$P(\Omega) = 2 \iint U(x, y)\, dx\, dy,$$

где функция U является решением краевой задачи:

$$\Delta U = -2 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad\qquad U = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Отметим, что

$$P(\Omega) = 4\, \kappa_0(\Omega).$$

Классические приближенные формулы Кулона, Коши и Сен-Венана выражают коэффициент жесткости кручения $P(\Omega)$ через площадь Ω и моменты инерции Ω относительно центра масс и главных осей.

Экспериментально и теоретически было обнаружено, что эти формулы справедливы лишь для узких классов областей.

Поэтому математическая теория развивалась по пути создания точных утверждений, выражаемых изопериметрическими неравенствами. В 1924 году Е. Николаи доказал, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$P(\Omega) \le I_2(\Omega), \tag{5.19}$$

где $I_2(\Omega)$ — момент инерции области Ω относительно ее центра масс, т. е.

$$I_2(\Omega) = \iint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

если центр масс области находится в начале координат. Это неравенство придало некоторую определенность формуле Кулона

$$P(\Omega) \approx I_2(\Omega).$$

Отметим, что равенство в (5.19) имеет место лишь для круга.

В 1948 году Д. Пойа (см. [73]) доказал справедливость классической гипотезы Сен-Венана

$$P(\Omega) \le \frac{|\Omega|^2}{2\pi}, \tag{5.20}$$

где $|\Omega|$ — площадь односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Как и в (5.19), равенство в (5.20) имеет место лишь для круга.

Как показали Д. Пойа и Г. Сегё [73], аналогичная обработка приближенной формулы Сен-Венана

$$P(\Omega) \approx \frac{|\Omega|^4}{4\pi^2 I_2(\Omega)}$$

невозможна, т. е. отношение $I_2(\Omega)\, P(\Omega)/|\Omega|^4$ не отделено ни от нуля, ни от бесконечности на множестве всех односвязных областей с конечной площадью.

Кроме того, известно, что неравенства (5.19) и (5.20) являются лишь односторонними, т. е.

$$\inf_\Omega P(\Omega)/I_2(\Omega) = \inf_\Omega P(\Omega)/|\Omega|^2 = 0,$$

где точные нижние границы берутся по множеству односвязных областей, для которых указанные величины корректно определяются.

Геометрический функционал, эквивалентный коэффициенту жесткости кручения $P(\Omega)$ на всем множестве односвязных областей Ω, был найден автором (см. ниже теорему (5.1.8)):

для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$\iint_\Omega h^2(z,\Omega)\,dx\,dy \leq P(\Omega) \leq 4\iint_\Omega h^2(z,\Omega)\,dx\,dy. \tag{5.21}$$

В силу классической леммы Шварца и теоремы Кебе об 1/4

$$\mathrm{dist}(z,\partial\Omega) \leq h(z,\Omega) \leq 4\mathrm{dist}(z,\partial\Omega) \tag{5.22}$$

для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа. Поэтому неравенства (5.21) и (5.22) позволяют записать универсальный аналог формулы Кулона с использованием момента инерции Ω относительно границы, т. е. величины

$$I(\partial\Omega) := \iint_\Omega \mathrm{dist}^2(z,\partial\Omega)\,dx\,dy. \tag{5.23}$$

Следующая теорема дает решение обобщенной проблемы Сен-Венана в терминах оценок для $\kappa_0(\Omega) = P(\Omega)/4$. В таком виде теорема была опубликована нами в первом издании настоящей монографии в 1996 году. Полная версия теоремы, близкие результаты с изложением истории вопроса опубликованы в статье [15] (1998 год).

Теорема 5.1.8 *Для всех односвязных областей* $\kappa_0(\Omega) < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $I(\partial\Omega) < \infty$, *причем*

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\kappa_0(\Omega)}{I(\partial\Omega)} \leq 16. \tag{5.24}$$

Доказательство теорем.

Отметим, что правая оценка в (5.18) является простым следствием двух фактов: $\kappa_1(\Omega)$ меняется монотонно при расширении области и известна для круга [73]. Остальные оценки доказываются сначала в терминах $h(z,\Omega)$ из (5.3) и имеют вид:

$$\frac{1}{4} \le \frac{\kappa_0(\Omega)}{I_h(\partial\Omega)} \le 1, \qquad \kappa_1(\Omega) \le h^2(\Omega), \tag{5.25}$$

где

$$I_h(\partial\Omega) = \iint_\Omega h^2(z,\Omega)dx\,dy, \qquad h(\Omega) = \sup_{z\in\Omega} h(z,\Omega). \tag{5.26}$$

Из (5.5) следует, что для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega u^2 dx\,dy \le h^2(\Omega) \iint_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 dx\,dy, \tag{5.27}$$

где $h(\Omega) = \sup\{h(z,\Omega) \,:\, z \in \Omega\}$.

В силу определения B_0 имеем

$$B_0 h(\Omega) \le \rho(\Omega) = \sup\{dist(z,\partial\Omega) \,:\, z \in \Omega\}.$$

Отсюда следуют левое неравенство в (5.18), второе неравенство в (5.25), утверждение о том, что $\kappa_1(\Omega) < \infty$, если $\rho(\Omega) < \infty$.

Пусть Ω — область гиперболического типа, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и неравенством (5.5), будем иметь

$$\left(\iint_\Omega |u| dx\,dy\right)^2 \le \iint_\Omega u^2 \frac{dx\,dy}{h^2} \iint_\Omega h^2 dx\,dy \le \tag{5.28}$$

$$\le I_h(\partial\Omega) \iint_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\,dy.$$

Из (5.28) следует правая оценка в (5.25) для любой односвязной области гиперболического типа, а отсюда следует правое неравенство в (5.24) в силу неравенства Кёбе об 1/4 (см. [47]).

Остается доказать лишь левые неравенства в (5.24) и (5.25).

Предположим сначала, что Ω — ограниченная область, а $\partial\Omega$ — кривая Ляпунова. Тогда $h(z,\Omega) \equiv 0$ при $z \in \partial\Omega$. Полагая $u_0(z) = h^2(z,\Omega)$ и учитывая (5.12) при $\varphi(h) = h^3$, будем иметь

$$\left(\iint_\Omega u_0\,dx\,dy\right)^2 \le \kappa_0(\Omega)\iint_\Omega |\mathrm{grad}\,u_0|^2 dx\,dy =$$

$$= 4\kappa_0(\Omega)\iint_\Omega h^2|\mathrm{grad}\,h|^2 dx\,dy = \tag{5.29}$$

$$= 4\kappa_0(\Omega)\iint_\Omega h^2 dx\,dy = 4\kappa_0(\Omega)\iint_\Omega u_0\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$4\kappa_0(\Omega) \ge \iint_\Omega u_0 dx\,dy = \iint_\Omega h^2 dx\,dy = I_h(\partial\Omega) \tag{5.30}$$

Отсюда следуют левые неравенства для κ_0 в (5.24) и (5.25), так как $h(z,\Omega) \ge dist(z,\Omega)$ для любой области Ω гиперболического типа.

Общий случай получается аппроксимацией Ω. Пусть

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega = \cup\Omega_n.$$

Пусть, далее, область Ω такова, что

$$I_h(\partial\Omega) = \iint_\Omega h^2(z,\Omega)dx\,dy < \infty. \tag{5.31}$$

Из (5.31) следует, что $\infty \notin \Omega$. Поэтому Ω_n — ограниченная область.

Полагая

$$u_n(z) = \{h^2(z,\Omega_n),\ z \in \Omega_n;\quad 0,\ z \in \Omega \setminus \Omega_n\}$$

на основании (5.29) и (5.30) получаем

$$4\kappa_0(\Omega) \geq \iint_{\Omega} u_n dx\, dy = \iint_{\Omega_n} h^2(z, \Omega_n) dx\, dy. \tag{5.32}$$

Последовательность $u_n(z)$ не убывает и

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = h^2(z, \Omega).$$

Следовательно, по теореме Беппо Леви о сходимости интегралов с учетом (5.31) и (5.32) получаем требуемое неравенство

$$4\kappa_0(\Omega) \geq \iint_{\Omega} h^2(z, \Omega) dx\, dy. \tag{5.33}$$

Теорема 5.1.8 доказана.

Теоремы 5.1.7 и 5.1.8 позволяют ответить на несколько вопросов, сформулированных Д. Пойа и Г. Сегё в их монографии ([73], с. 37–39, пункты 13, 14, 21) основной таблицы. По этому поводу см. нашу статью [15].

Дальнейшие исследования по тематике статьи [15] можно найти в ряде работ, в частности, в статьях Д. А. Абрамова [1], автора [16], автора и А. Р. Касимова [102], автора и Р. Г. Салахудинова [108], а также в статьях Р. Бануэлоса, М. Ван ден Берга и Т. Кэррола [113], А. Карбери, В. Мазьи, М. Митреа и Д. Руле [120], Г. Кэди [142], А. А. Кузнецова [144], Р. Г. Салахудинова [80], [161].

Увлечения, связанные с изопериметрическими проблемами математической физики, влекли визиты автора в другие «математические миры» (см. работы [16] – [18], [98] – [111] и библиографию в них).

5.2 Задачи теории крыла

В пункте 5.2.1 излагаются результаты автора и А. М. Елизарова [23], связанные с экстремальными задачами для гармонических отображений. Дальнейшие результаты и нерешенные проблемы можно найти в [101].

В пункте 5.2.2 дано изложение аналитической части статьи автора и Д. В. Маклакова [26]. Подробные доказательства, дальнейшие результаты и численные исследования можно найти в статьях [25] – [27], [37], [106] и в монографии Д. В. Маклакова [64], глава 2, с. 53 – 94.

По-видимому, автором и Д. В. Маклаковым впервые получено физическое истолкование тригонометрически выпуклых функций, играющих важную роль в теории целых аналитических функций.

Отметим также, что задачи пунктов 5.2.1 и 5.2.2 имеют непустое пересечение.

5.2.1 Оценки критического числа Маха

Одной из важных задач теории течений газа около тел заданной формы является определение диапазона изменения числа Маха M_∞ набегающего потока, при котором течение остается всюду дозвуковым. Верхняя граница M^* этого диапазона называется критическим числом Маха и служит параметром, по которому оцениваются аэродинамические характеристики околозвуковых крыловых профилей.

Критическое число Маха является функционалом от формы профиля. Оценки M^* для различных классов профилей и определение конфигураций, доставляющих максимально возможное M^*, представляют собой трудную задачу. Для ряда классов симметричных профилей при нулевой подъемной силе эта задача решена в работах Д. Гильбарга и М. Шиффмана [134], К. Лёвнера [146], а также А. Н. Крайко [56].

Приведем сначала постановку задачи и описание основных результатов. Воспользуемся моделью газа Чаплыгина, обеспечивающей удовлетворительную точность приближения во всей дозвуковой области (см. [42], [84]).

Согласно Г. Ю. Степанову [84], §24, переход к газу Чаплыгина дает на порядок бóльшую относительную погрешность зависимости плотности ρ от числа Маха, чем погрешность приближенной зависимости ρ от относительной скорости $\lambda = v/v_*$, где v_* — критическая скорость. Поэтому, хотя формально для газа Чаплыгина число Маха не достигает единицы, в приближении С. А. Чаплыгина определяют только скорость λ, а затем M вычисляют по точной формуле

$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}\lambda} \Big/ \sqrt{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}}, \tag{5.34}$$

где κ — показатель адиабаты.

Принятие модели газа Чаплыгина и формулы (5.34) означает, что максимизация M^* эквивалентна максимизации v_∞ при условии $\lambda \leq 1$ всюду в потоке.

Через α обозначим угол отклонения профиля от направления обтекания с нулевой подъемной силой. Рассмотрим непроницаемый профиль, плавно обтекаемый плоскопараллельным потоком газа Чаплыгина и характеризуемый углом α. Зафиксировав $\alpha \in [0, \pi/2]$, мы получим класс профилей. В этом классе требуется *определить значение $v^*_\infty(\alpha)$ скорости набегающего потока, такое, что*

а) при $v_\infty < v^*_\infty(\alpha)$ существуют профили, обтекаемые потоком с докритической скоростью;

б) при $v_\infty > v^*_\infty(\alpha)$ не существует ни одного профиля, об-

текаемого с докритической скоростью.

Как известно, при обтекании профиля газом Чаплыгина область течения является образом области $\{\zeta : |\zeta| > 1\}$ при квазиконформном отображении $z = z(\zeta)$, удовлетворяющем уравнению Бельтрами $z_{\overline{\zeta}} + \mu(\zeta) z_\zeta = 0$, где

$$\mu(\zeta) = c^2 \overline{h(\zeta)} \exp[\overline{X(\zeta)} + X(\zeta)]/h(\zeta),$$

причем переход в плоскость z осуществляется по формуле

$$dz = u_0\{h(\zeta)\exp[-X(\zeta)]d\zeta - c^2\overline{h(\zeta)}\exp[\overline{X(\zeta)}]\overline{d\zeta}\}. \qquad (5.35)$$

Здесь

$$h(\zeta) = e^{-i\alpha}[1 - e^{2i\alpha}/\zeta^2 + (e^{2i\alpha} - 1)/\zeta],$$

$$X(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\gamma)\frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta}d\gamma, \qquad |\zeta| > 1, \qquad (5.36)$$

$S(\gamma)$ — некоторая интегрируемая функция, c^2 — положительная постоянная, выбираемая из условий лучшей линейной аппроксимации адиабаты в модели газа Чаплыгина.

Следуя Г. Ю. Степанову [84], возьмем $c^2 = 0.296$. Обозначим

$$A_0(c) = \ln\{[(1 + 4c^2)^{1/2} - 1]/(2c^2)\}.$$

Постоянная u_0 в (5.35) задает линейный масштаб и не влияет на решение задачи. Ее можно определить однозначно, задав, например, периметр L контура профиля.

Обозначим:

$$\lambda_\infty = v_\infty/v^*, \quad \lambda_\infty^*(\alpha) = v_\infty^*(\alpha)/v^*,$$

$$\lambda_\infty^*(\alpha) = \exp(T_k)/(1 - c^2\exp(2T_k)), \qquad k = 1, 2, \qquad (5.37)$$

где T_k — корень уравнения

$$T - A_0(c) + k \sin\alpha \frac{1 - c^2\exp(2T)}{1 + c^2\exp(2T)} = 0, \qquad k = 1, 2. \qquad (5.38)$$

Основной результат заключается в доказательстве следующих неравенств:

$$\lambda_\infty^{(2)}(\alpha) \le \lambda_\infty^*(\alpha) \le \lambda_\infty^{(1)}(\alpha), \qquad (5.39)$$

причем правое неравенство будет доказано для всех $\alpha \in [0, \pi/2]$, а левое — для $\alpha \in [0, \alpha_0]$, $\alpha_0 \cong 3\pi/8$.

Левое неравенство следует из решения некоторой вспомогательной задачи.

Равенство в правом неравенстве реализуется только для неоднолистных профилей.

Таким образом, для реальных профилей

$$\lambda_\infty^*(\alpha) < \lambda_\infty^{(1)}(\alpha).$$

Это означает, что если $\lambda_\infty \ge \lambda_\infty^{(1)}(\alpha)$, то для любого профиля, обтекаемого газом Чаплыгина и имеющего угол отклонения α, на контуре профиля существуют участки, на которых $\lambda > 1$.

Следствием (5.34) и (5.39) являются двусторонние оценки критического числа Маха

$$M^{(2)}(\alpha) \le M^*(\alpha) \le M^{(1)}(\alpha), \qquad (5.40)$$

где $M^{(k)}(\alpha)$ при $k = 1, 2$ определяются равенством

$$M^{(k)}(\alpha) = \sqrt{\frac{2\exp(T_k)[1 - c^2\exp(2T_k)]}{(x+1)[1 - c^2\exp(2T_k)]^2 - (\kappa - 1)\exp(2T_k)}}. \qquad (5.41)$$

Отметим еще одно следствие неравенства (5.39) для случая идеальной несжимаемой жидкости.

Взяв $c = 0$, получим $A_0(0) = 0$ и $T_k = -k \sin \alpha$.

Обозначим $v^*_{\max}$ — минимальную из всех $v_{\max}$ по классу профилей, обтекаемых с заданными v_∞ и α. Тогда из (5.39) следует, что

$$\sin \alpha \leq (v^*_{\max}/v_\infty) \leq 2 \sin \alpha \tag{5.42}$$

и, в частности, для любого профиля, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью и имеющего угол отклонения α от направления бесциркуляционного обтекания, имеет место оценка

$$v_{\max}/v_\infty \geq \exp(\sin \alpha). \tag{5.43}$$

Итак, для доказательства оценок (5.40), (5.42), (5.43) достаточно обосновать оценки (5.39).

Приведем схемы доказательств оценок (5.39).

Согласно (5.35) и (5.36), каждой 2π-периодической функции $S(\gamma) \in L_1[0, 2\pi]$ соответствует некоторый профиль (возможно, неоднолистный), если выполняется условие замкнутости контура профиля [50]

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 2\pi i e^{i\alpha} A(T, \alpha), \tag{5.44}$$

где

$$A(T, \alpha) = \sin \alpha (1 - c^2 \exp(2T))/(1 + c^2 \exp(2T)).$$

Кроме того, условие $\lambda = v/v_* \leq 1$ равносильно неравенству

$$S(\gamma) \leq A_0(c), \qquad 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \tag{5.45}$$

Далее, $\lambda_\infty = \exp(T)/(1 - c^2\exp(2T))$, где

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\gamma)d\gamma. \tag{5.46}$$

Следовательно, максимизация величины λ_∞ равносильна максимизации функционала T для 2π-периодических функций

$$S(\gamma) \in L[0, 2\pi],$$

удовлетворяющих ограничениям (5.44), (5.45).

Используя принцип Линделёфа (см., например, [47]), можно показать, что при фиксированном T

$$\inf \sup_{|\zeta|>1} \Re[X(\zeta) - X(\infty)] = A(T, \alpha), \tag{5.47}$$

где инфимум берется по всем функциям $S(\gamma)$, удовлетворяющим (5.44) и (5.46).

Поскольку

$$S(\gamma) = T + \Re[X(e^{i\gamma}) - X(\infty)],$$

ограничение (5.45) и равенство (5.47) дают неравенство

$$T - A_0(c) + A(T, \alpha) \leq 0. \tag{5.48}$$

Так как левая часть (5.48) монотонна по T, то максимальное значение T, удовлетворяющее (5.48), получается как решение уравнения (5.38) при $k = 1$ (с учетом того, что уравнение (5.38) имеет единственный корень при любом $\alpha \in [0, \pi/2]$).

Таким образом, $T_1 = \max T$. Отсюда и следует правое неравенство в (5.39) в силу заданной связи между λ_∞ и T. По T_1 формула (5.41) определяет $M^{(1)}(\alpha)$ и правое неравенство в (5.40).

В предельном случае при $\alpha = 0$ имеем:

$$T_1 = A_0(c), M^{(1)}(0) = 1.$$

Этому случаю соответствует симметричное обтекание отрезка прямой. В общем случае зависимость $M^{(1)} = M^{(1)}(\alpha)$ выпуклая убывающая функция, $M^{(1)}(\pi/2) = 0.298$, $M^{(1)}(0) = 1$.

Для оценок λ_∞^* и M^* снизу, т. е. для доказательства левых частей оценок (5.39) и (5.40), достаточно взять эти величины для некоторого течения, удовлетворяющего условию $\lambda \leq 1$. Пример такого течения подберем как решение некоторой новой вариационной задачи.

Введем величину

$$B[\lambda_\infty, \alpha, \lambda, \theta] = \sup[\ln^2(\Lambda/\Lambda_\infty) + (\theta_\infty - \theta)^2]^{1/2} =$$

$$= \sup |\ln[\Lambda e^{-i\theta}/(\Lambda_\infty e^{-i\theta_\infty})]|,$$

характеризующую отклонение потока от невозмущенного. Здесь $\lambda e^{i\theta}$ *— вектор относительной скорости течения газа Чаплыгина, а число*

$$\Lambda = [(1 + 4c^2\lambda^2)^{1/2} - 1]/(2c^2\lambda)$$

— обобщенный модуль относительной скорости. Супремум берется по всем точкам области течения вокруг изолированного профиля, имеющего по-прежнему угол отклонения $\alpha \in [0, \pi/2]$. *Ставится задача*

$$B[\lambda_\infty, \alpha, \lambda, \theta] \to \min \tag{5.49}$$

при заданных λ_∞ *и* c.

Величину этого минимума обозначим через $B[\lambda_\infty, \alpha]$. В силу (5.35) и (5.36) $X(\zeta) = \ln(\Lambda e^{-i\theta})$, и по принципу Линделёфа

$$B[\lambda_\infty.\alpha] = \min \sup_{|\zeta|>1} |X(\zeta) - X(\infty)| = 2A(T, \alpha),$$

причем минимум достигается для функции

$$X(\zeta) = a(T, \alpha)/\zeta + X(\infty),$$

где

$$a(T, \alpha) = 2ie^{i\alpha} A(T, \alpha), \quad T = X(\infty), \quad \theta_\infty = 0.$$

Поэтому по формуле (5.35) можно восстановить профиль, решающий задачу (5.49). Для этого профиля условие $\max \lambda = 1$, т. е. условие $\max S(\gamma) = A_0(c)$, приводит к уравнению (5.38) при $k = 2$, причем $T_2 < T_1$. По формуле (5.41) определим затем $M^{(2)}(\alpha)$.

Полученные величины $\lambda_\infty^{(2)}(\alpha)$ и $M^{(2)}(\alpha)$ дадут левые оценки в (5.39) и (5.40) только тогда, когда соответствующие профили будут однолистными. Расчеты показали, что функциям

$$X(\zeta) = a(T, \alpha)/\zeta + T$$

при $0 \le T \le T_2$ соответствуют однолистные течения лишь при $0 \le \alpha \le \alpha_0 < \pi/2$, где $\alpha_0 \approx 3\pi/8$.

5.2.2 Теория кавитационных диаграмм

Рассмотрим изолированный профиль, обтекаемый безотрывно потоком идеальной несжимаемой жидкости в плоскости z. Пусть α — угол атаки, отсчитываемый от линии нулевой подъемной силы, V_∞ — модуль скорости набегающего потока. Предположим, что точка схода потока на профиле одна и та же при любых углах атаки и обозначим эту точку через z_0. Кавитационной диаграммой будем называть следующую функцию от $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$F(\alpha) = -C_{p\,\min}(\alpha) = (p_\infty - p_{\min})/(\rho V_\infty^2/2), \tag{5.50}$$

где $p_{\min}$ — минимальное давление на поверхности профиля, p_∞ — давление на бесконечности, ρ — плотность жидкости.

По функции $F(\alpha)$ можно судить о диапазоне углов атаки, в котором обтекание профиля будет бескавитационным. Условие бескавитационности обтекания записывается так:

$$F(\alpha) \leq Q,$$

где

$$Q = 2(p_\infty - p_v)/(\rho V_\infty^2)$$

— число кавитации (см., например, [55]).

В данном пункте мы даем:

1) описание множества всех кавитационных диаграмм;

2) аналитический метод построения профилей, кавитационная диаграмма которых в точности совпадает с заранее заданной функцией;

3) точные оценки снизу кавитационных диаграмм для симметричных профилей.

Предлагаемый метод состоит из двух шагов

$$F(\alpha) \longrightarrow V(\gamma, \alpha) \longrightarrow \text{профиль},$$

где $V(\gamma, \alpha)$ — распределение скорости на параметрической окружности $\mid \zeta \mid = 1$ при конформном отображении $z = z(\zeta)$ области $\mid \zeta \mid > 1$ на внешность профиля такое, что $z(\infty) = \infty, z(1) = z_0$.

Шаг 2

$$V(\gamma, \alpha) \longrightarrow \text{профиль}$$

хорошо изучен в теории обратных краевых задач (см. [127], [49]). На нем не останавливаемся.

Шаг 1 сводится к построению двух функций

$$M(\gamma, \beta) \quad \text{и} \quad u(\gamma).$$

Первая из них однозначно определяется по $F(\alpha)$. В выборе второй имеется произвол, ограниченный строго оговоренными требованиями.

Далее, распределение скорости вычисляется по формуле

$$V(\gamma,\alpha)=V_\infty M(\gamma,\alpha)\exp[-u(\gamma)]. \tag{5.51}$$

Для построения $M(\gamma,\alpha)$ введем вспомогательные функции

$$f(\alpha)=\sqrt{1+F(\alpha)}, \qquad q(\alpha)=2\left[\alpha+\operatorname{arctg}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]. \tag{5.52}$$

Эти функции имеют простой физический смысл

$$V_\infty f(\alpha)=\max_\gamma V(\gamma,\alpha)=V[q(\alpha),\alpha]. \tag{5.53}$$

Первое равенство в (5.53) — следствие (5.50), (5.52) и интеграла Бернулли. Второе равенство доказывается на основе анализа неотрицательной функции $\sigma(\gamma,\alpha)=V_\infty f(\alpha)-V(\gamma,\alpha)$.

Продолжим теперь π-периодически функцию $f(\alpha)$ с промежутка $[-\pi/2,\pi/2]$ на всю числовую ось. При этом $q(\alpha)$ продолжится по правилу:

$$q(\alpha+\pi)=q(\alpha)+2\pi.$$

Каждому $\gamma\in(-\infty,\infty)$ поставим в соответствие точку α следующим образом: α — любая точка числовой оси такая, что

$$q(\alpha-0)\le\gamma\le q(\alpha+0).$$

Так как $q(\alpha)$ изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, такая точка обязательно существует. В результате получим функцию

$$\alpha=q^{-1}(\gamma).$$

Далее положим $\alpha = q^{-1}(\gamma)$ и

$$M(\gamma,\beta) = f(\alpha) \mid \cos(\gamma/2-\beta)/\cos(\gamma/2-\alpha) \mid . \tag{5.54}$$

Если функции $f(\alpha)$ и $q(\alpha)$ произвольны, то указанный алгоритм неоднозначен из-за неоднозначности в выборе $\alpha = q^{-1}(\gamma)$. Тем не менее справедлива

Лемма 5.2.1 *Если $F(\alpha)$ такова, что π-периодическое продолжение $f(\alpha)$ — тригонометрически выпуклая функция, то указанный выше алгоритм построения $M(\gamma,\beta)$ всегда приводит к одной и той же функции, причем $M(\gamma,\beta)$ будет 2π-периодической и абсолютно непрерывной по γ.*

Кроме того,

$$\frac{\partial \ln M(\gamma,\beta)}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}(\gamma/2-\alpha) - \operatorname{tg}(\gamma/2-\beta)\right], \alpha = q^{-1}(\gamma). \tag{5.55}$$

При доказательстве существенно используются свойства тригонометрически выпуклых функций, которые во многом аналогичны свойствам обычной выпуклости (см. [90]).

В частности, условие $f''(\alpha) \geq 0$ для обычной выпуклости заменяется на условие $f''(\alpha) + f(\alpha) \geq 0$. Отсюда можно вывести, что $q(\alpha)$ — неубывающая функция, и доказать утверждение леммы.

Следующая теорема дает полное описание множества всех кавитационных диаграмм.

Пусть

$$K_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \ln M(\gamma,0)\,d\gamma, \qquad K_1 + iK_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma} \ln M(\gamma,0)\,d\gamma.$$

Теорема 5.2.1 *1. Функция $F(\alpha)$ является кавитационной диаграммой для некоторого профиля тогда и только тогда, когда* *выполняются следующие три свойства:*

Ω_1) $f(\alpha) > 1$ для любого α, π-периодическое продолжение $f(\alpha)$ является тригонометрически выпуклой функцией.

Ω_2) Существует угол $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, для которого

$$q(\alpha_0 - 0) < 0 < q(\alpha_0 + 0).$$

Ω_3) $K_0 > 0$, $K_1 + iK_2 \in S(K_0, I^*)$, где $S(K_0, I^*)$ — внутренность выпуклой оболочки множества $\{K_0 e^{i\gamma} : \gamma \in I^*\}$, I^* — объединение всех невырожденных сегментов $[q(\alpha - 0), q(\alpha + 0)]$, связанных с точками разрыва функции $q(\alpha)$.

Из свойства Ω_2 следует, что любая кавитационная диаграмма имеет по крайней мере одну точку разрыва производной, причем максимум скорости на угле атаки $\alpha = \alpha_0$ будет достигаться одновременно на верхней и нижней сторонах профиля. В последнем свойстве область $S(K_0, I^*)$ представляет собой внутренность круга радиуса K_0 с выброшенными сегментами, опирающимися на дуги, из которых состоит множество $\{K_0 e^{i\gamma} : \gamma \notin I^*\}$.

Конструктивный способ построения $V(\gamma, \alpha)$ по $F(\alpha)$ дает

Теорема 5.2.2 *Пусть $F(\alpha)$ удовлетворяет условиям Ω_1–Ω_3. Тогда существует непрерывная, 2π-периодическая функция $u(\gamma)$, такая, что*

$$u(0) > 0;\ u(\gamma) \geq 0,\ \gamma \in I^*,\ u(\gamma) = 0,\ \gamma \notin I^*, \tag{5.56}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\gamma) d\gamma = K_0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} u(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = K_1 + iK_2. \tag{5.57}$$

Профиль, построенный по распределению $V(\gamma, \alpha)$, вычисляемому в виде (4.46), будет замкнутым и имеет кавитационную диаграмму $F(\alpha)$.

В доказательстве теорем 5.2.1 — 5.2.2 существенную роль играют свойства тригонометрически выпуклых функций [90], теория тригонометрических моментов [58] и представление (5.55).

Из теоремы 5.2.2 следует, что функция $V(\gamma, \alpha)$ однозначно восстанавливается по $F(\alpha)$ всюду, за исключением множества I^*, образованного точками разрыва производной $F(\alpha)$.

При $\gamma \in I^*$ в выборе $V(\gamma, \alpha)$ имеется произвол, ограниченный представлением (5.51) и условиями (5.56), (5.57). Так как согласно свойству Ω_2 множество I^* не пусто, этот произвол невозможно исключить за счет выбора $F(\alpha)$.

Однако, произвол можно свести к минимуму, если сузить класс рассматриваемых профилей.

С этой целью будем предполагать, что

точки, в которых достигается максимум $V(\gamma, \alpha)$, *образуют связную дугу.*

Тогда $u(\gamma) \neq 0$ лишь на одном участке

$$[q(\alpha_0 - 0), q(\alpha_0 + 0)].$$

Кроме того, носители $V_{\max}$, т. е. точки, в которых достигается максимум скорости при каком-либо α, сплошь заполняют носовую часть профиля. А это гарантирует выпуклость носовой части по принципу максимума, примененному к гармонической функции $\ln V(z, \alpha)$.

Легко заметить, что участок $[q(\alpha_0 - 0), q(\alpha_0 + 0)]$, на котором $V(\gamma, \alpha)$ не задано, является участком восстановления давления при угле атаки α_0. На этом участке можно использовать хорошо известные распределения скоростей, например, Стрэтфорда [127], Г. Ю. Степанова [84] и аналогичные, обеспечив тем самым благоприятное развитие пограничного слоя на профиле.

Условия разрешимости (5.56), (5.57) удовлетворяются за счет имеющихся в этих распределениях свободных параметров.

Теорема 5.2.3 *В классе профилей, симметричных относительно хорды и имеющих связный носитель максимумов скорости, справедлива следующая точная оценка снизу функции $f(\alpha)$ при заданном $f(0)$:*

$$f(\alpha) \geq f(0)\cos\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \alpha^*,$$

$$f(\alpha) \geq f(0)\frac{\cos(\gamma^*/2-\alpha)}{\cos(\gamma^*/2)},\ \alpha^* \leq \alpha \leq \pi/2. \tag{5.58}$$

Здесь числа $\alpha^* \in [0,\pi/2]$ и $\gamma^* \in [0,\pi/2]$ определяются как корни уравнений

$$A(0,\alpha^*) = 2\pi\ln f(0), \quad A(\gamma^*,0) = 2\pi\ln f(0),$$

где

$$A(\gamma,\alpha) = \int_\gamma^\pi (\pi - t + \sin t)[\mathrm{tg}(t/2) - \mathrm{tg}(t/2-\alpha)]dt.$$

Огибающая всех функций $T(\alpha)$ по параметру $f(0) \in (1,\infty)$ дает глобальную оценку

$$f(\alpha) \geq T^*(\alpha) = \cos\alpha\exp\frac{A(0,\alpha)}{2\pi}. \tag{5.59}$$

Отметим, что экстремальные профили, реализующие точные оценки, имеют в точке схода потока особенность типа спирального завитка. Такая особенность имеется в точке замыкания каверны в известной кавитационной схеме Тулина-Терентьева.

5.3 Оценки в классах Зигмунда и Блоха

В пункте 5.3.1 изложены некоторые результаты из статьи автора [11], а в пункте 5.3.2 — результаты из совместной статьи автора и И. Р. Каюмова [24].

5.3.1 Оценки в классе Зигмунда

Решение ряда прикладных краевых задач с неизвестными границами на плоскости сводится к отысканию конформного отображения $f : \Omega \to \Omega^*$ заданной области Ω на искомую. При этом производная $f(w)$ восстанавливается как решение некоторой краевой задачи; в частности, $\ln f'(w)$ определяется как решение краевой задачи по известным граничным значениям

$$|f'(w)| \quad \text{или} \quad \arg f'(w)$$

на различных участках границы [89], [68], [22].

По физическому смыслу задач искомые области должны быть однолистными, что требует обоснования критериев однолистности $f(w)$ по граничным характеристикам $f'(w)$.

Одна из задач, навеянная работой [49] по аэрогидродинамике, заключается в следующем.

Задача. *Пусть Ω_0 — жорданова область в плоскости $\mathbb{C}$, γ — дуга из $\partial\Omega_0$, $\varphi(w)$ — непрерывная на γ функция с вещественными значениями.*

Аналитические в Ω_0 функции $f(w)$, для которых $\ln|f'(w)|$ непрерывен на множестве $\Omega_0 \cup \gamma$ и

$$|f'(w)| = \exp\varphi(w) \quad \text{на} \quad \gamma,$$

составляют достаточно широкий класс функций. Этот класс обозначим как

$$S^{\varphi}_{\gamma}(\Omega_0).$$

Если γ мала, а $\varphi(w)$ непрерывна на γ, то можно ли утверждать, что $S^{\varphi}_{\gamma}(\Omega_0)$ содержит однолистные в Ω_0 функции?

Здесь для решения этого вопроса и количественного описания условий однолистности $f(w)$ по граничным свойствам $|f'(w)|$ применяется класс А. Зигмунда. Напомним определение и некоторые свойства функций этого класса.

По определению функция $g(t)$, $-\infty < t < \infty$, с комплексными значениями принадлежит классу $\Lambda^*(k)$, где $k = \mathrm{const} > 0$, если $g(t)$ непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$ и

$$|\Delta_t^2 g(x)| := |g(x+t) - 2g(x) + g(x-t)| \le k|t|, \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Объединение $\Lambda^*(k)$ по всем $k > 0$ обозначим через Λ^*.

Множество всех непрерывных на множестве Ω функций обозначаем, как обычно, через $C(\Omega)$, $\overline{\Omega}$ означает замыкание Ω на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $\psi(z)$ аналитична в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Из результатов А. Зигмунда [51] следует, что

$$\Re\psi \in C(\overline{\mathbb{D}}), \Re\psi(e^{i\theta}) \in \Lambda^* \Leftrightarrow \Im\psi \in C(\overline{\mathbb{D}}), \Im\psi(e^{i\theta}) \in \Lambda^*; \tag{5.60}$$

$$\psi \in C(\overline{\mathbb{D}}), \quad \psi(e^{i\theta}) \in \Lambda^* \Longleftrightarrow \sup_{|z|<1} |\psi''(z)|(1 - |z|^2) < \infty, \tag{5.61}$$

кроме того, модуль непрерывности функций класса Λ^* не превосходит $O(t\ln(1/t))$.

Несколько более общим, чем (5.60) и (5.61), является следующий результат И. М. Стейна (см. [83], с.171).

Пусть $u(x,y)$ — гармоническая функция в верхней полуплоскости $H = \{x + iy : y > 0\}$, являющаяся интегралом Пуассона от функции $\mu(t)$, $\|\mu\|_\infty < \infty$. Тогда эквивалентны две следующие нормы:

$$\|\mu\|_\infty + \sup_{x+iy\in H} \left| y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|, \quad \|\mu\|_\infty + \sup_{-\infty<t,\,x<\infty} |t|^{-1} \left|\Delta_t^2 \mu(x)\right|.$$

Ниже дано усиление этого результата, связанное с исключением требования $|\mu|_\infty < \infty$, и найдены количественные оценки. Приведем формулировки результатов и краткое описание подходов к доказательствам.

Пусть $S^{\varphi}_{\gamma}(\Omega_0)$ — класс функций, введенный выше при постановке задачи. Через $z = g_0(w)$ обозначим функцию, конформно отображающую Ω_0 на полуплоскость

$$H = \{z \,:\, y = \Im z > 0\}$$

и переводящую γ на отрезок $[-1, 1]$.

Теорема 5.3.1 *Пусть заданы дуга $\gamma \subset \partial\Omega_0$ и непрерывная на γ функция $\varphi_0(w) \not\equiv \mathrm{const}$.*

Если $\varphi(w) \equiv m\varphi_0(w)$ на γ, то существует такая постоянная $m_0 > 0$, что при $m \geq m_0$ класс $S^{\varphi}_{\gamma}(\Omega_0)$ не содержит однолистных функций.

В случае $\varphi_0 = g_0|_\gamma$ можно взять $m_0 = 2\pi^2$.

Предложение 5.3.1 *Пусть функция $h(z)$ аналитична на полуплоскости H,*

$$u(x, y) := \Re\, h(x + iy), \quad y = \Im z > 0.$$

Рассмотрим три группы условий:

(I) $\sup_{z\in H} |yh''(z)| < \infty$;

(II) $u(x, y) \in C(\overline{H} \setminus \{\infty\})$, $\quad \mu(x) := u(x, 0) \in \Lambda^*$,

$$\overline{\lim}_{z\to\infty}|h(z)|/(|z| \ln |z|) < \infty;$$

(III) $\mu(x) \in \Lambda^*$,

$$\int_R \frac{|\mu(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty, \Re\, h(z) = \frac{1}{\pi}\int_R \mu(t)\Re\frac{1}{i(t-z)}\,dt, z \in H. \quad (5.62)$$

Тогда $(III) \Rightarrow (I) \iff (II)$.

Теорема 5.3.2 *Пусть функция* $h(z)$ *аналитична в* H, $z = x+iy$, $y > 0$.

а) Если выполнено (II) и, кроме того, $\mu(x) \in \Lambda^*(k)$, *то для любой точки* $z = x + iy \in H$

$$\pi y|\Re\, h''(z)| \leq (5/4)k, \quad \pi y|h''(z)| \leq (10/\pi)k. \quad (5.63)$$

б) Если $\sup|yh''(z)| \leq k_1$, *то* $h(z) \in C(\overline{H} \setminus \{\infty\})$ *и*

$$h(x) := \mu(x) + i\nu(x) \in \Lambda^*(\lambda\pi k_1),$$

причем постоянная $\lambda \in [1, \pi/2)$ *и мажорируется решением вариационной задачи типа Больца, а именно*

$$\lambda\pi = 2\inf_u \left[\int_0^1 \sqrt{1+t^2u^{-2}}\sqrt{1+\dot{u}^2}dt + u(0) + u(1)\right], \quad (5.64)$$

где точная нижняя граница берется по всем неотрицательным абсолютно непрерывным функциям $u = u(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

в) Если

$$\sup_{z\in H}|yh''(z) + ia(z)| \leq k_2,$$

где $a(z)$ *— непрерывная вещественнозначная функция,* $|a(z)| \leq 1$ *в* H, *то*

$$\mu(x) := \Re\, h(x) \in \Lambda^*(2+5k_2), \quad h(x) \in \Lambda^*(5+5k_2).$$

Если $\|\mu\|_\infty < \infty$ или выполняются условия (5.62), то первое неравенство в (5.63) можно получить непосредственно оценкой производных интеграла Пуассона, следуя, например, [83], с. 171.

В общем случае, когда даны ограничения (II), этот прием неприменим.

Для доказательства неравенств (5.63) мы пользуемся следующими вспомогательными оценками для функции $h_0(z)$, полагая

$$(5/4)kh_0(z) := h''(z)$$

либо

$$kh_0(z) := h(x_0 + z) + \overline{h}(x_0 - \overline{z}) - h(x_0) - \overline{h}(x_0) + \alpha z,$$

где постоянная α подбирается из условия $h_0(iy_0) = 0$.

Лемма 5.3.1 *Пусть функция $h_0(z)$ аналитична в полуплоскости H.*

а) Если $|\Re\, h_0(z)| \le 1/y$ для всех $z \in H$, $y = \Im\, z$, $\Im\, h_0(z) \to 0$ при $y \to \infty$, то

$$|h_0'(z)| \le m/y^2, \quad |h_0(z)| \le m/y$$

для всех $z \in H$, причем постоянная $m \in [2, 8/\pi]$.

б) Если $|\Re[h_0(z)/z]| \le 1$ в H и $h_0(iy_0) = 0$ для некоторого $y_0 > 0$, то

$$|h_0''(iy_0)| \le (5/2)/y_0.$$

Оценка точная.

Доказательства пунктов б) и в) теоремы 5.3.2 основаны на оптимальном выборе путей интегрирования и формулах

$$\Delta_t^2 h(x_0) = X(x_0+t) - 2X(x_0) + X(x_0-t), \quad X(x) = \int_w^x (x-z)h''(z)dz,$$

где $w = x_0 + iy_0$, y_0 — некоторое положительное число.

Теорема 5.3.1 следует из теоремы 5.3.2 и известных фактов. Действительно, пусть

$$f(w) \in S_\gamma^\varphi(\Omega_0), \quad h'(z) := \ln f'(g_0^{-1}(z)), \quad z \in H.$$

Тогда функция $h'(z)$ будет непрерывной в $H \cup [-1,1]$ в силу теоремы Каратеодори о граничном соответствии для конформных отображений.

Если $\varphi_0 := g_0|_\gamma$, то $\Re\, h'(x) = mx$ при $-1 \le x \le 1$,

$$\Re[h(1) - 2h(0) + h(-1)] = m \ge 2\pi^2.$$

С другой стороны, если $f(w)$ однолистна в Ω_0, то на основании неравенства Л. Бибербаха ([47], с. 52) можно получить оценку $|h''(z)| \le 4/y$ для любой точки $z = x + iy \in H$. Тогда

$$|\Delta_t^2 \Re\, h(x)| \le 2\pi^2 |t|$$

по теореме 5.3.2, что противоречит выбору $m \ge m_0 = 2\pi^2$ при $t = 1$, $x = 0$.

Аналогичное рассуждение обосновывает общий случай с учетом того, что из условий

$$\varphi_0(w) \not\equiv \text{const}, \quad \Re\, h'(x) = m_0 \varphi_0[g_0^{-1}(x)], \quad -1 \le x \le 1,$$

по теореме Шварца ([72], с. 324) вытекает существование точек $x \pm t \in (-1,1)$, для которых

$$\Re[h(x+t) - 2h(x) + h(x-t)] = m\Delta_t^2 \int \varphi_0[g_0^{-1}(x)]dx \ne 0.$$

П. Л. Дюрен, Г. С. Шапиро и А. Л. Шилдс [126] впервые обратили внимание на важную связь между результатами А. Зигмунда (5.60), (5.61) для функции

$$\psi(z), \quad iz\psi'(z) := \ln f'(z) + \mathrm{const}$$

и условиями однолистности функции $f(z)$, аналитической в единичном круге $\mathbb{D} = \{z\,:\,|z| < 1\}$.

Переход от порядковых к явным оценкам оказался трудной задачей. Некоторые количественные оценки, аналоги и обобщения результата из [126] получены П. Л. Шабалиным, автором и М. А. Севодиным (см. обзор [22], с. 48).

Применение теоремы 5.3.2 позволяет по-новому и единообразно получить существенные усиления известных оценок, а также новые факты.

Рассмотрим функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, определенные соответственно в полуплоскости $H := \Omega_1$, круге $\mathbb{D} := \Omega_2$, внешности круга $\Omega_3 := \{z\,:\,|z| > 1\}$, причем $\ln|f_j'(z)|$ представлен интегралом Пуассона-Стилтьеса в Ω_j с плотностью $d\mu_j(t)$, $j = 1, 2, 3$.

Предполагаем выполненными нормировки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu_2(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_3(t)dt = 0,$$

условие однозначности функции $f_3(z)$ в виде равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu_3(t)e^{it}dt = 0,$$

ограничения

$$\int_{\mathbb{R}} |\mu_1(t)|(1+t^2)^{-1}dt < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} t^{-1}\mu_1(t) = 0.$$

Здесь $\mu_j(t)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, имеющая ограниченную вариацию на любом конечном промежутке, $j = 1, 2, 3$. Кроме того, функции $\mu_2(t)$ и $\mu_3(t)$ являются

2π-периодическими.

Отметим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в Ω_1 и Ω_2 соответственно, $f_3(z)$ будет иметь простой полюс в точке $z=\infty$.

Теорема 5.3.3 *а) Пусть $j \in \{1,2,3\}$. Если $f_j(z)$ однолистна в области Ω_j, то*

$$\mu_j(t) \in \Lambda^*(k), \quad k < 12.$$

б) Пусть $j=1$ или 2. Если

$$\mu_j(t) \in \Lambda^*(k), \quad k \le \pi^2/20,$$

то $f_j(z)$ однолистна в Ω_j.

в) Если

$$\mu_3(t) \in \Lambda^*(k), \quad k \le \pi^2/(20e),$$

то $f_3(z)$ однолистна в Ω_3.

При доказательстве используются оценки теоремы 5.3.2 для функции

$$h'(z) := \ln f_j'(u_j(z)),$$

где $u_1(z) := z$, $u_2(z) := \exp(iz)$, $u_3(z) := \exp(-iz)$, $z \in H$, необходимые условия однолистности Л. Бибербаха и Г. М. Голузина ([47], с. 52, 139), а также достаточные условия однолистности Й. Беккера, автора и Р. Кюнау ([22], с. 42).

Теорема 5.3.4 *Пусть Ω — односвязная область расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\Omega} \ne \overline{\mathbb{C}}$, $w_0 \in \Omega$, причем $w_0 = \infty$, если $\infty \in \Omega$. Пусть $f(w)$ мероморфна в Ω, $f'(w)$ непрерывна и отлична от нуля в Ω, $f'(w_0)=1$. Через $\psi(z)$ обозначим функцию, определяемую условием*

$$iz\psi'(z) := \ln f'(g(z)), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \ln 1 = 0,$$

где $g : \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω с нормировкой $g(0) = w_0$.

а) Если функция $f(z)$ однолистна в Ω, то $\psi(z) \in C(\overline{\mathbb{D}})$ и $\psi(e^{i\theta}) \in \Lambda^*(2\pi^2)$.

б) Пусть область Ω ограничена квазиконформной в $\overline{\mathbb{C}}$ кривой и $\Re\,\psi(z)$ представима в $\mathbb{D}$ интегралом Пуассона с плотностью $\mu(t)$. Тогда существует постоянная $k_0 > 0$, для которой условие $\mu(t) \in \Lambda^*(k_0)$ влечет однолистность $f(w)$ в Ω.

Число k_0 может быть оценено снизу через геометрические характеристики области Ω. Действительно, если

$$iz\psi'(z) =: h'(\zeta), \quad z = \exp(i\zeta), \quad \zeta \in H,$$

то в силу (5.63) условие $\mu(t) \in \Lambda^*(k_0)$ дает оценку

$$|zf''(g(z))/f'(g(z))| \cdot |g'(z)| \leq (10/\pi^2)k_0 \ln(1/|z|), \quad z \in \mathbb{D},$$

на основании которой можно получить неравенство

$$|f''(w)/f'(w)| \leq (10/\pi^2)ek_0/\mathrm{dist}(w, \partial\Omega), \quad w \in \Omega.$$

Число k_0, гарантирующее однолистность $f(w)$ в Ω, оценивается тогда через характеристики О. Мартио и Й. Сарваса или через характеристики автора (см. главу 2).

Развитие этой тематики можно найти в совместной статье автора и П. Л. Шабалина [30].

5.3.2 Оценки функций Блоха и обобщения

В этом пункте дается решение проблемы, поставленной Й. М. Андерсоном, Й. Клуни и Х. Поммеренке в 1974 году в обзорной статье [97].

Кроме того, мы доказываем обобщение теоремы К.-Й. Вирца [167], используя новый, более простой метод, и приводим новые утверждения об асимптотическом поведении коэффициентов ряда для функции Блоха. Рассмотрен также аналог функций Блоха в произвольных областях.

Нам потребуются следующие обозначения и известные факты (см., например, [97]).

Функции класса Блоха $\mathcal{B}$ определяются условиями:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

аналитична в круге $\mathbb{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}$ и

$$B(f) := \sup\{(1 - |z^2|)|f'(z)| \,:\, z \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

Они образуют несепарабельное банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + B(f).$$

Пусть $\mathcal{B}_S$ — семейство функций $f(z) = \ln g'(z)$, где

$$g(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

— аналитические и однолистные в $\mathbb{D}$ функции. Известно, что

$$\{f \in \mathcal{B} \,:\, B(f) \leq 1\} \subset \mathcal{B}_S \subset \{f \in \mathcal{B} \,:\, B(f) \leq 6\}. \qquad (5.65)$$

В [97] поставлена задача нахождения или оценки величины

$$\sigma(S) = \sup\{|a_n| \,:\, f \in \mathcal{B}_S,\, n \geq 1\} = \sup\{A_n \,:\, n \geq 1\},$$

где $A_n = \sup\{|a_n| \,:\, f \in \mathcal{B}_S\}$.

Справедлива

Теорема 5.3.5 *Имеет место равенство* $\sigma(S) = A_1 = 4$.

Наметим кратко доказательство теоремы.

Так как

$$a_1 = 2\alpha_2, \quad a_2 = 3\alpha_3 - 1.25{\alpha_2}^2,$$

то из точных оценок Л. Бибербаха, М. Фекете и Г. Сегё (см. [47]) непосредственно следует, что

$$A_1 = 4, \quad A_2 = 3(1 + 2e^{-4}) < 4.$$

При $n \geq 3$ такой подход неприменим, и мы предварительно оцениваем коэффициенты следующих рядов в круге $|z| < 1$:

$$\ln(g(z)/z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma_n z^n,$$

$$\ln(zg'(z)/g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

$$\ln(z^2 g'(z)/g^2(z)) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

А именно, для любого натурального $n \geq 2$ справедливы оценки

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \pi, \tag{5.66}$$

$$|c_n| \leq \limsup_{n\to\infty} [\sup\{|c_n| \, : \, f \in \mathcal{B}_S\}] \leq \pi, \tag{5.67}$$

$$2|\gamma_n| \leq \min_{r\in(0,1)} \left(\frac{1}{nr^n} + \sqrt{\frac{-\ln(1-r^2)}{n}} \right). \tag{5.68}$$

Неравенство (5.66) следует из известного результата Г. Грунского (см. [47], [67]).

Первое неравенство в (5.67) обосновывается сравнением коэффициента c_n с коэффициентами аналогичного ряда для преобразования Й. Фабера

$$g(z^m)^{1/m}$$

при $m \to \infty$.

Второе неравенство в (5.67) является следствием (5.66) и известного факта (см. [67]) о равномерном стремлении $|\gamma_n|$ к нулю при $n \to \infty$.

Неравенство (5.68) — следствие теоремы площадей Н. А. Лебедева и И. М. Милина ([67], с. 16), его вывод основан на подходе И. М. Милина (см. [67], с. 29, 70, 71).

При $3 \leq n \leq 6$ пользуемся равенством $a_n = b_n + 4\gamma_n$, первым неравенством в (5.66) и оценкой (5.68) при $r^2 = 1 - 1/n$. Вычисления показывают, что $|a_n| < 4$.

При $n \geq 7$ привлекаем равенство $a_n = c_n + 2\gamma_n$, оценки (5.67) и (5.68) при $r^2 = 1 - 1/n$. Будем иметь

$$|a_n| \leq \pi + 2/n + \sqrt{\log n/n} \leq \pi + 2/7 + \sqrt{\log 7/7} < 4,$$

что и требовалось доказать.

Из результатов Й. Годулы и В. В. Старкова [135] следует, что $A_n \geq 2 + 2/n$.

Таким образом, $2 \leq A_n \leq 4$ при любом n. В отличии от этого, поведение индивидуальных коэффициентов a_n для $f \in \mathcal{B}$ (в силу соотношений (5.65) — и для $f \in \mathcal{B}_S$) весьма сложно.

Приведем здесь без доказательства теорему, дополняющую и уточняющую ряд утверждений из [97].

Теорема 5.3.6 *Существует функция $f \in \mathcal{B}$, такая, что $B(f) \leq 1$ и*

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n| = e/2.$$

С другой стороны, если $f \in \mathcal{B}$ и $B(f) \le 1$, то справедливы соотношения

1) $\liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\delta_n |a_n|^2 \le e\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ *для любой невозрастающей последовательности* $\delta_n > 0$,

3) $\lim_{n\to\infty} M(n)/n = 1$, *где* $M(n)$ *— число тех коэффициентов* a_k, *для которых* $k \le n$ *и* $|a_k| \le p_k/\sqrt{k}$, *где* p_k *— заданная неограниченная возрастающая последовательность.*

Если φ — конформный автоморфизм круга и $f_1(z) = f(\varphi(z))$, то $B(f) = B(f_1)$. Поэтому оценки коэффициентов в классе Блоха можно использовать для оценок производных функций, принадлежащих классу Блоха и его обобщениям. Приведем одно из таких утверждений.

Определение. *Пусть Ω — произвольная область гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости, $R(w,\Omega)$ — конформный радиус области в точке $w \in \Omega$.*

Пусть, далее, $t = |\nabla R(w,\Omega)|$ — модуль градиента конформного радиуса, $T(\Omega) = \{t = |\nabla R(w,\Omega) \,:\, w \in \Omega\}$ — промежуток изменения t для данной области, $k(t)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция, определяемая соотношением:

$$k(t) = \max_{a\in(0,1)} 1.5\sqrt{3}(1-a^2)(1-3a^2+ta), \quad t \ge 0. \tag{5.69}$$

Значение $a = a(t)$, при котором достигается максимум правой части в (5.69), определяется как корень уравнения:

$$8a - 12a^3 = t(1-3a^2), \quad a \in (0, 1/\sqrt{3}).$$

Теорема 5.3.7 *Пусть Ω — область гиперболического типа в расширенной комплексной плоскости, функция $F(w)$ аналитична в Ω и удовлетворяет неравенству $|F(w)| \le 1/R(w,\Omega)$ для любой* *точки $w \in \Omega$. Тогда*

$$|F'(w)| \leq \frac{k(t)}{R^2(w,\Omega)}, \quad t = |\nabla R(w,\Omega)|, \quad w \in \Omega. \tag{5.70}$$

Если область Ω односвязна, то для любой точки $w_0 \in \Omega$ существует функция из указанного класса, реализующая равенство в (5.70) для точки $w = w_0$.

Таким образом, определенная равенством (5.69) мажоранта $k(t)$ универсальна в том смысле, что не зависит от области. Однако $T(\Omega)$, вообще говоря, различны для разных областей. А именно, имеет место

Предложение 5.3.2 *Справедливы следующие утверждения, характеризующие область изменения градиента конформного радиуса:*

а) $2 \in \overline{T}(\Omega)$, причем $T(\Omega) = \{2\}$ тогда и только тогда, когда Ω — полуплоскость;

б) если область Ω выпукла и $\sup R(w,\Omega) < \infty$, то

$$\overline{T}(\Omega) = [0,2];$$

в) если область Ω односвязна и $\infty \notin \Omega$, то $\overline{T}(\Omega) \subset [0,4]$;

г) если $\infty \in \Omega$, то $[2,\infty] \subset \overline{T}(\Omega)$.

Если $\Omega = \mathbb{D} = \{z \,:\, |z| < 1\}$, то

$$R(w,\Omega) = 1 - |w|^2,\, t = 2|w| \in [0,2]$$

и (5.70) совпадает с оценкой К.-Й. Вирца [167].

Приведем некоторые значения $k(t)$:

$k(0) = 1.5\sqrt{3}$, $k(2) = 3.20..$ (см. [167]),

$k(4) = 4.64..$, $k(t) > t$ для любого $t \geq 0$,

$k(t) = t + O(1/t)$ при $t \to \infty$

Схемы доказательств теоремы 5.3.7 и предложения 5.3.2. Пусть $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω, $\psi(0) = w_0 \in \Omega$. Имеет место формула

$$|\nabla R(\psi(z), \Omega)| = |(1 - |z|^2)\psi''(z)/\psi'(z) - 2\overline{z}|. \qquad (5.71)$$

Поведение правой части (5.71) хорошо изучено в геометрической теории функций комплексного переменного. Все утверждения предложения 5.3.2 либо непосредственно, либо нетрудным анализом получаются из известных фактов, изложенных в [47].

Для доказательства теоремы 5.3.7 вводится вспомогательная функция

$$q(z) = F(\psi(z))\psi'(z).$$

Из принципа гиперболической метрики следует, что

$$|q(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)$$

при $|z| < 1$. Обозначив $q(0) = q_0$, $q'(0) = q_1$, получаем неравенство

$$R^2(w_0, \Omega)|F'(w_0)| \leq |q_1| + t|q_0|. \qquad (5.72)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$0 \leq q_0 \leq 1, \quad 0 \leq q_1.$$

Пусть

$$0 < b < 1/\sqrt{3}, \quad q(z) = p(\varphi(z))\varphi'(z),$$

где $\varphi(z) = (z + b)/(1 + bz)$. Тогда $|p(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)$ при $|z| < 1$ и

$$q_1 + tq_0 = (1 - b^2)((1 - b^2)p'(b) + (t - 2b)p(b)). \qquad (5.73)$$

Пусть, далее,

$$s(z) = (2/3)p(z/\sqrt{3}), \quad |z| < 1.$$

Так как $|s(z)| \le 1$, то по лемме Шварца

$$|s'(z)| \le (1 - |s(z)|^2)/(1 - |z|^2),$$

что в точке $z = b\sqrt{3}$ приводит к неравенству

$$p'(b) + (2\sqrt{3}/3)p^2(b)/(1 - 3b^2) \le (3\sqrt{3}/2)/(1 - 3b^2). \qquad (5.74)$$

Найдя максимум правой части (5.73) для неотрицательных $p(b)$ и $p'(b)$ при условии (5.74) и переходя к минимуму по $b \in [0, 1/\sqrt{3}]$, приходим к функции $k(t)$.

Экстремальное значение $b_0(t)$ будет зависеть от t. Экстремальная же функция $F_0(w)$, реализующая знак равенства в (5.70), находится из соотношений:

$$F_0(w) = q_0(\psi^{-1}(w))/\psi'(\psi^{-1}(w)),$$

$$q_0(z) = 3\sqrt{3}\varphi_0(z)\varphi_0'(z)/2,$$

$$\varphi_0(z) = (z + b_0(t))/(1 + b_0(t)z).$$

В случае многосвязной области функция $\psi^{-1}(w)$ неоднозначна, поэтому достижимость знака равенства нельзя утверждать.

В заключение приведем еще одно утверждение, дополняющее теорему 5.3.7 и доказываемое по той же схеме.

Предложение 5.3.3 *Пусть Ω — односвязная область гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости, функ-*

ция $F(w)$ аналитична в Ω и

$$I(F) = \sqrt{\int\int_{\Omega} |F(w)|^2 dudv} < \infty, \quad w = u + iv.$$

Тогда справедлива следующая точная оценка

$$|F'(w)| \leq I(F)\sqrt{2 + |\nabla R(w, \Omega)|^2}/(\sqrt{\pi}R^2(w, \Omega)), \quad w \in \Omega.$$

5.4 К теории допустимых функционалов

Здесь мы изложим некоторые результаты по гармоническим и бигармоническим отображениям. Отметим, что гармонические отображения встречаются в прикладных задачах, например, в модели Чаплыгина для течений газа. Приведем простой пример, наглядно показывающий отличия гармонических отображений от конформных. Обозначим $z = x + iy = re^{i\theta}$, возьмем правую полуплоскость H^+, определяемую неравенством $x > 0$, и полуполосу

$$\Pi^+ = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : u > 0, -\pi/2 < v < \pi/2\}.$$

Пусть комплекснозначное гармоническое отображение

$$f_0 : H^+ \to \Pi^+$$

задано формулой

$$w = f_0(z) = x + i\theta, \quad x > 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Легко проверить, что отображение $f_0 : H^+ \to \Pi^+$ является сюръекцией, якобиан $J_{f_0}(z) = x/r^2 > 0$, но отображение «сильно» вырождено на границе: образами лучей $\{x = 0, 0 < y < \infty\}$ и $\{x = 0, -\infty < y < 0\}$ оказываются всего лишь две точки $w_1 = i\pi/2$ и $w_2 = -i\pi/2$, соответственно. Вся остальная часть границы полуполосы Π^+ порождается предельными значениями $f_0(z)$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$.

Похожее граничное поведение имеет и обратная функция $f_0^{-1}(w) = u + iu \operatorname{tg} v$, которая не является гармонической функцией.

В 1927 году Рихард фон Мизес, изучая пограничный слой течения жидкости вблизи твердого тела, изобрел отображения вида $f(z) = x + i\psi(x, y)$ области $\Omega \subset \mathbb{C}$, где $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция (мнимая часть комплексного потенциала). Очевидно, наш пример $f_0(z) = x + i\theta$ представляет собой частный случай отображения фон Мизеса. Исследования В. Н. Монахова [68] показывают, что использование координат фон Мизеса (x, ψ) является плодотворным методом в аэрогидродинамике при решении ряда проблем, математические модели которых связаны с уравнениями эллиптического типа.

5.4.1 n-листные гармонические отображения

В этом пункте излагаются некоторые результаты Р. Г. Насибуллина и И. К. Шафигуллина из статьи [70] о гармонических отображениях единичного круга.

Пусть h и g — голоморфные функции, определенные в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Рассмотрим гармоническое отображение вида

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4.1 *Пусть* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *$n$ — целое чис-*

ло, $n \neq 0$. Предположим, что h и g являются голоморфными в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| < 1$ для любого $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, где $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$, кроме того, h удовлетворяет условию

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} h(z) = 1. \tag{5.75}$$

Тогда гармоническая функция $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, будет $|n|$-листной в $\mathbb{D}$, если

$$|n|\,|\omega(z)| + \left|\left(1 - |z|^{2n}\right)\left(n - 1 - z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)\right| \leq |n|, \qquad |z| < 1.$$

Доказательство. Зафиксируем число $r \in (0, 1)$ и определим непрерывное отображение $\widehat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\widehat{f}(z) = h(z) + \overline{g(z)}, |z| \leq r,$$

$$\widehat{f}(z) = h\left(r^2/\overline{z}\right) + \overline{g\left(r^2/\overline{z}\right)} +$$
$$+ \left(z^n - r^{2n}/\overline{z}^n\right) h'\left(r^2/\overline{z}\right) \overline{z}^{n-1}/(nr^{2(n-1)}), |z| \geq r.$$

Очевидно, что при $0 < |z| \leq r$ якобиан отображения $\widehat{f}$ будет положительным, а именно,

$$|\widehat{f}_z| - |\widehat{f}_{\overline{z}}| = |h_z| - |g_z| > 0$$

в силу неравенства $|\omega(z)| < 1$.

Рассмотрим поведение якобиана отображения $\widehat{f}$ при $|z| \geq r$.

Для этого найдем частные производные функции $\widehat{f}$ по переменным z и $\overline{z}$. Пусть $\zeta = r^2/\overline{z}$, следовательно, $\zeta \in (0, r)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\widehat{f}_z = \frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}} h'(\zeta) - \frac{\overline{\zeta}^2}{r^2} \overline{g'(\zeta)}$$

и
$$\widehat{f}_{\overline{z}} = \frac{1}{n}\frac{\zeta^2}{r^2}h'(\zeta)\left(\frac{r^{2n}}{\zeta^n\overline{\zeta}^n}-1\right)\left(n-1-\zeta\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}\right).$$
С учетом того, что
$$\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}} \le 1, \quad 1-\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}} \le 1-|\zeta|^{2n}$$
и неравенств
$$n\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}}|\omega(\zeta)| + \left|\left(1-\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}}\right)\left(n-1-\zeta\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}\right)\right| \le n, \quad |\zeta| \le r,$$
при $n \ge 1$,
$$|n|\frac{|\zeta|^{2|n|}}{r^{2|n|}}|\omega(\zeta)| + \left|\left(1-\frac{|\zeta|^{2|n|}}{r^{2|n|}}\right)\left(n-1-\zeta\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}\right)\right| \le |n|, \quad |\zeta| \le r,$$
при $n \le -1$, требуемая нам положительность якобиана следует из условий теоремы.

Таким образом, получаем, что функция $\widehat{f}$ непрерывна в области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. В силу положительности якобианов имеем локальную гомеоморфность функции $\widehat{f}$ для точек круга $0 < |z| \le r$ и внешних точек $r \le |z| < \infty$. Для применения теоремы С. Стоилова нам необходима локальная гомеоморфность $\widehat{f}$ во всем $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, которую мы получим используя лемму о склейке (см. гл. 1).

К тому же можно показать, что $\lim_{z\to\infty}\widehat{f}(z) = \infty$. Учитывая поведение функции f вблизи точки 0, получим, что отображение $\widehat{f}$ топологически эквивалентно отображению с помощью функции z^n. С учетом произвольности $r \in (0,1)$ получим $|n|$-листность гармонического отображения f.

Отметим, что из этой теоремы как следствия получаются известные теоремы Й. Беккера и автора (см. главы 2 и 3).

Справедлива также

Теорема 5.4.2 *Пусть* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, n *— целое число,* $n \neq 0$, $q \in [0, 1)$. *Далее, пусть функции* h *и* g *являются голоморфными в* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, $h'(z) \neq 0$, *кроме того, функция* h *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} h(z) = 1, h(z) - z^n = O\left(|z|^{|n|}\right). \qquad (5.76)$$

Тогда гармоническая функция $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, *будет* $|n|$*-листной в* $\mathbb{D}$, *если для любого* $z \in \mathbb{D}$

$$m \leq |h'(z) z^{1-n}| \leq M, |g'(z)/h'(z)| \leq q,$$

где m *и* M *— положительные постоянные, причем при* $n \geq 1$

$$1 < \frac{M}{m} \leq \exp\left(\frac{\pi(1-q)}{2}\right),$$

а при $n \leq -1$

$$1 < \frac{M}{m} \leq \exp\left(\frac{\pi(1-q)}{4}\right).$$

Доказательство. В силу условий

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} h(z) = 1, \quad h(z) - z^n = O\left(|z|^{|n|}\right)$$

и односвязности круга существует однозначная ветвь $\ln h'(z)/z^{n-1}$. Так как $m \leq |h'(z) z^{1-n}| \leq M$ для любого $z \in \mathbb{D}$, то значения этой ветви $s(z) = \ln h'(z)/z^{n-1}$ лежат в полосе

$$S(m, M) := \{w \in \mathbb{C} : \ln m < Re\ w < \ln M\}.$$

Поэтому $s(z)$ подчинена функции, которая конформно отображает круг на полосу. Следовательно, существует аналитичная в круге $\mathbb{D}$ функция φ такая, что

$$s(z) = \frac{2\ln(M/m)}{\pi i} \ln \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} + const,$$

где $|\varphi(z)| < 1$ и $\varphi(0) \in \mathbb{D}$ при $n \geq 1$,

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(2|n|-1)}(0) = 0.$$

К тому же, по инвариантной лемме Шварца и неравенству [110], справедливы неравенства

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \text{ при } n \geq 1,$$

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \leq \frac{2|n||z|^{2|n|-1}}{1-|z|^{4|n|}} \text{ при } n \leq -1.$$

Применяя конформный радиус полосы, формулы дифференцирования и предыдущие соотношения, имеем

$$|s'(z)| = |s'(w)||\varphi'(z)| = R(s(z), S(M,m))\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2},$$

где $R(w, S(M,m))$ — конформный радиус области $S(M,m)$ в точке w.

Так как

$$s(z) = \ln z^{1-n}h'(z), \quad s'(z) = h''(z)/h'(z) - (n-1)/z,$$

то для любого $z \in \mathbb{D}$ получим

$$\left| z\frac{h''(z)}{h'(z)} - n + 1 \right| \leq$$

$$\begin{cases} 2/\pi \ln(M/m)|z|(1-|z|^2)^{-1} & \text{при } n \geq 1, \\ 4/\pi \ln(M/m)|n||z|^{2|n|}(1-|z|^{4|n|})^{-1} & \text{при } n \leq -1. \end{cases}$$

Далее, используя полученное неравенство и неравенства

$$|\omega(z)| = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} \leq q, \quad 1 < \frac{M}{m} \leq \exp\left(\frac{\pi(1-q)}{2}\right) \text{ при } n \geq 1,$$

и соотношение

$$|\omega(z)| = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} \leq q, \quad 1 < \frac{M}{m} \leq \exp\left(\frac{\pi(1-q)}{4}\right) \text{ при } n \leq -1,$$

получим, что гармоническое отображение $f = h + \overline{g}$ будет $|n|$-листным по предыдущей теореме.

Отметим, что из этой теоремы как следствия получаются известные результаты Ф. Джона и автора (см. главу 2).

В заключение приведем один результат Р. Г. Насибуллина [150] о бигармонических отображениях, являющихся обобщениями гармонических отображений.

Пусть f — комплекснозначная бигармоническая функция, определенная в односвязной области Ω. А именно, мы предполагаем, что $f \in C^4(\Omega)$ и f удовлетворяем бигармоническому уравнению $\triangle^2 f = 0$ в области Ω, где

$$\triangle = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (z = x + iy)$$

— лапласиан.

Хорошо известно, что любую бигармоническую функцию f можно представить в следующем виде

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right),$$

где h, g, h_1, g_1 — функции, голоморфные в области Ω.

Очевидно, любая гармоническая функция является бигармонической. В этом смысле, бигармонические отображения являются обобщениями гармонических отображений.

Теорема 5.4.3 *Пусть h, g, h_1 и g_1 — функции, голоморфные в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, причем для всех $z \in \mathbb{D}$*

$$f_z'(z) = h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2 h_1'(z) \neq 0 \text{ и } \omega(z) < 1.$$

Предположим, что для всех $z \in \mathbb{D}$ справедливо неравенство

$$|\omega(z)| + \left(1 - |z|^2\right)\left|z\frac{f_{zz}''(z)}{f_z'(z)}\right| +$$

$$+\left(1 - |z|^2\right)\left|z\frac{h_1(z) + \overline{g_1(z)} + \overline{z}\overline{g_1'(z)} + zh_1'(z)}{f_z'(z)}\right| \leq 1,$$

где

$$\omega(z) = \frac{\overline{g'(z)} + z\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2\overline{g_1'(z)}}{h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2 h_1'(z)},$$

$$f_{zz}''(z) = h''(z) + 2\overline{z}h_1'(z) + |z|^2 h_1''(z).$$

Тогда бигармоническое отображение

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$$

является однолистным в круге $\mathbb{D}$.

Доказательство. Фиксируем число $r \in (0, 1)$. Пусть отображение $\widehat{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ определено соотношениями

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \leq r, \\ f\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) + \left(z - \frac{r^2}{\overline{z}}\right)\varphi\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right), & |z| \geq r, \end{cases}$$

где

$$\varphi(z) = h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2 h_1'(z).$$

Ясно, что функция $\widehat{f}$ непрерывна и $\widehat{f}(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. Поскольку

$$h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2 h_1'(z) \neq 0$$

и $|\omega(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$, то отображение $\widehat{f}$ сохраняет ориентацию и является локально однолистной при $|z| \leq r$.

Непосредственными вычислениями получаем, что отображение $\widehat{f}$ является сохраняющим ориентацию и локально однолистным при $|z| \geq r$, кроме того,

$$\lim_{z\to\infty} \widehat{f}(z) = \infty.$$

Глобальная однолистность $\widehat{f}$ следует из теоремы Адамара.

5.5 Список литературы к главам 1-5

По сравнению с первым изданием книги список литературы существенно вырос. А именно, нами добавлены около 50 новых источников, отражающих дальнейшее развитие теории и её современное состояние. Ссылки на новые источники также даны в тексте книги с соответствующими краткими комментариями.

Литература

[1] Абрамов Д. А. *Нижние оценки для константы эквивалентности жесткости кручения и момента инерции относительно границы.* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2011 – Т. 153 – № 4 – С. 59–66.

[2] Авхадиев Ф. Г. *К достаточным условиям однолистности решений обратных краевых задач.* // Докл. АН СССР– 1970 – Т. 190 – № 3 – С. 495–498.

[3] Авхадиев Ф. Г. *Об условиях однолистности аналитических функций.* // Изв. вузов. Математика – 1970 – № 11 – С. 3–13.

[4] Авхадиев Ф. Г. *Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений.* // Матем. заметки – 1970 – Т. 7 – № 5 – С. 581–592.

[5] Авхадиев Ф. Г. *Достаточные условия однолистности в невыпуклых областях.* // Сиб. матем. журн. – 1974 – Т. 15 – № 5 – С. 963–971.

[6] Авхадиев Ф. Г. *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений.* // Матем. заметки – 1975 – Т. 18 – № 6 – С. 793–802.

[7] Авхадиев Ф. Г. *Некоторые геометрические неравенства и достаточные условия p-листности.* // Изв. вузов. Математика – 1983 – № 10 – С. 3–12.

[8] Авхадиев Ф. Г. *Обратная краевая задача для функции с особенностями.* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1984 – Вып. 21 – С. 5–19.

[9] Авхадиев Ф. Г. *Об инъективности в области открытых изолированных отображений с заданными граничными свойствами.* // Докл. АН СССР – 1987 – Т. 292 – № 4 – С. 780–783.

[10] Авхадиев Ф. Г. *Допустимые функционалы в условиях инъективности для дифференцируемых отображений n-мерных областей.* // Изв. вузов. Математика – 1989 – № 4 – С. 3–12.

[11] Авхадиев Ф. Г. *Оценки в классе Зигмунда и их применение к краевым задачам.* // Докл. АН СССР – 1989 – Т. 307 – № 6 – С. 1289–1292.

[12] Авхадиев Ф. Г. *Метрики с переменной плотностью и обратные краевые задачи.* // Труды семинара по краевым задачам – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1990 – Вып. 27 – С. 3–23.

[13] Авхадиев Ф. Г. *Конформные отображения, удовлетворяющие граничному условию равенства метрик.* // Докл. АН – 1996 – Т. 343 – № 3 – С. 295–297.

[14] Авхадиев Ф. Г. *Вариационные конформно-инвариантные неравенства и их приложения.* // Докл. АН – 1998 – Т. 359 – № 6 – С. 727 – 730.

[15] Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана.* // Матем. сборник – 1998 – Т. 189 – № 12 – С. 3–12.

[16] Авхадиев Ф. Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4.// Изв. РАН. Сер. матем. – 2014 – Т. 78 – № 5 – С. 3–26.

[17] Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их приложения.*// Матем. сборник – 2015 – Т. 206 – № 12 – С. 3–28.

[18] Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы.*// Алгебра и анализ – 2018 – Т. 30 – № 2 – С. 18–44.

[19] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. *Принцип подчиненности в достаточных условиях однолистности.* // Докл. АН СССР – 1973 – Т. 211 – № 1 – С. 19–22.

[20] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. *Функции класса Базилевича в круге и кольце.* // Докл. АН СССР – 1974 – Т. 215 – № 2 – С. 241–244.

[21] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.* // Успехи матем. наук – 1975 – Т. 30 – № 4 – С. 3–60.

[22] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М. *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения.* // Итоги науки и техники. Матем. анализ – М.: ВИНИТИ – 1987 – Т. 25. – С. 3–121.

[23] Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М. *Оценки критического числа Маха для некоторых классов несущих крыловых профилей.* // Моделирование в механике – Новосибирск – 1992 – Т. 6 – № 3 – С. 5–13.

[24] Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р. *Оценки в классе Блоха и их обобщения.* // Докл. АН – 1996 – Т. 349 – № 5 – С. 583–585.

[25] Авхадиев Ф. Г., Маклаков Д. В. *Критерий разрешимости задачи построения профилей по кавитационной диаграмме.* // Изв. вузов. Математика – 1994 – № 7 – С. 3–12.

[26] Авхадиев Ф. Г., Маклаков Д. В. *Аналитический метод построения гидропрофилей по заданной кавитационной диаграмме.* // Докл. АН – 1995 – Т. 343 – № 2. – С. 195–197.

[27] Авхадиев Ф. Г., Маклаков Д. В. *Новые уравнения типа свертки, полученные заменой интеграла на максимум.* // Матем. заметки – 2002 – Т. 71 – № 1 – С. 18–26.

[28] Авхадиев Ф. Г., Насыров С. Р. *Необходимые условия существования римановой поверхности с заданной границей.* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1985 – Вып. 22 – С. 6–15.

[29] Авхадиев Ф. Г., Насыров С. Р. *Построение римановой поверхности по ее границе.* // Изв. вузов. Математика – 1986 – № 5 – С. 3–11.

[30] Авхадиев Ф. Г., Шабалин П. Л. *Конформные отображения круговых областей на конечно-связные области несмирновского типа.* // Уфимск. матем. журн. – 2017 – Т. 9 – № 1 – С. 3–17.

[31] Аксентьев Л. А. *Обратная краевая задача для аналитических функций на римановых поверхностях.* // Труды семинара по обратным краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1964 – Вып. 1 – С. 3–13.

[32] Аксентьев Л. А. *Геометрические вопросы в обратных краевых задачах.* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1964 – Вып. 1 – С. 14–18.

[33] Аксентьев Л. А. *Точные оценки для гармонических в круге функций.* // Изв. вузов. Математика – 1968 – № 3 – С. 3–8.

[34] Аксентьев Л. А. *Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности, I.* // Изв. вузов. Математика – 1968 – № 12 – С. 3–15.

[35] Аксентьев Л. А. *Многолистные функции из расширенных классов Беккера и Нехари и их гидромеханическое истолкование.* // Изв. вузов. Математика – 1999 – Т. 43 – № 6 – С. 1–12.

[36] Аксентьев Л. А., Казанцев А. В., Попов Н. И. *О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций.* // Изв. вузов. Математика – 1998 – Т. 42 – № 8 – С. 1–11.

[37] Аксентьев Л. А., Маклаков Д. В. *Интегральная теорема сравнения для кавитационных диаграмм.* // Изв. вузов. Математика – 2011 – № 9 – С. 95–98.

[38] Александров П. С. *Комбинаторная топология.* – М.: Гостехиздат, 1947 – 660 с.

[39] Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* – М.: Мир, 1969 – 132 с.

[40] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.* // Докл. АН СССР – 1937 – Т. 15 – № 3 – С. 107–112.

[41] Белинский П. П. *Общие свойства квазиконформных отображений.* – Новосибирск: Наука, 1974 – 98 с.

[42] Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* – М.: ИЛЛ, 1961 – 208 с.

[43] Видякина Н. Н. *О разрешимости одной обратной краевой задачи на римановой поверхности.* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1974 – Вып. 11 – С. 32–42.

[44] Галиуллина Г. Р., Насыров С. Р. *Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру* x. // Изв. вузов. Математика – 2002 – № 10 – С. 48–55.

[45] Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977 – 640 с.

[46] Гахов Ф. Д., Крикунов Ю. М. *Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам.* // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1956 – Т. 20 – № 2 – С. 207–240.

[47] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966 – 628 с.

[48] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* – М.: Наука, 1983 – 285 с.

[49] Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики.* // Докл. АН СССР – 1985 – Т. 284 – № 2 – С. 319–322.

[50] Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа – 1988 – № 3 – С. 5–13.

[51] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т.II. – М.: Мир, 1965 – 538 с.

[52] Казанцев А. В. *Условия золотого сечения для радиуса Митюка двусвязных областей.* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2017 – Т. 159 – № 1 – С. 33–46.

[53] Казанцев А. В. *О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева.* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2017 – Т. 159 – № 3 – С. 318–326.

[54] Каюмов И. Р. *Обобщение и приложение одной теоремы Радона.* // Изв. вузов. Математика – 1996 – № 4 – С. 35–38.

[55] Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. *Кавитация.* – М.: Мир, 1974 – 687 с.

[56] Крайко А. Н. *Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха.* // Прикл. матем. и мех. – 1987 – Т. 51 – № 6 – С. 941–950.

[57] Красносельский М. А., Забрейко П. П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975 – 512 с.

[58] Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи (Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие).* – М.: Наука, 1973 – 552 с.

[59] Кудрявцев Л. Д. *Дифференцируемые отображения n-мерных областей и гармонические отображения плоских областей.* // Успехи матем. наук – 1954 – Т. IX – Вып. 2 – С. 207–209.

[60] Кудрявцев Л. Д. *О вариации отображений областей.* // В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наукова думка, 1969 – Вып. 1 – С. 34–108.

[61] Кудряшов С. Н. *О некоторых признаках однолистности аналитических функций.* // Матем. заметки – 1973 – Т. 13 – № 3 – С. 359–366.

[62] Кудряшов С. Н., Тихонов А. П. *Об одном признаке однолистности аналитических функций.* // В сб.: Матем. анализ и его приложения: – Ростовск. ун-т, 1974 – С. 90–93.

[63] Куратовский К. *Топология*, Т. 2. – М.: Мир, 1969 – 624 с.

[64] Маклаков Д. В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами.* – М.: Янус-К, 1997 – 280 с.

[65] Маркушевич А. И. *Sur la représentation conforme des domaines à frontieres variables.* // Матем. сборник – 1936 – Т. 143 – № 6 – С. 863–886.

[66] Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций*, Т.II. – М.: Наука, 1968 – 624 с.

[67] Милин И. М. *Однолистные функции и ортонормированные системы.* – М.: Наука, 1971 – 256 с.

[68] Монахов В. Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1977 – 424 с.

[69] Морс М. *Топологические методы теории функций комплексного переменного.* – М.: ИИЛ, 1951 – 248 с.

[70] Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К. *Условия p-листности типа Авхадиева-Беккера для гпрмонических отображений круга.* // Изв. вузов. Математика – 2017 – № 3 – С. 84-88.

[71] Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей.* – Казаь: Магариф, 2008 – 279 с.

[72] Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: ГИТТЛ, 1957 – 552 с.

[73] Полиа Г., Сеге Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* – М.: ГИФМЛ, 1962 – 336 с.

[74] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.* – М.: МЦНМО, 2004 – 352 с.

[75] Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* – М.: ГИТТЛ, 1950 – 336 с.

[76] Радон И. О. *О краевых задачах для логарифмического потенциала.* // Успехи матем. наук – 1946 – Т. 1 – Вып. 3–4 – С. 96–124.

[77] Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* – Новосибирск: Наука, 1982 – 285 с.

[78] Рогожин В. С. *Два достаточных условия однолистности отображения.* // Уч. зап. Ростовск. ун-та – 1955 – Т. 32. – № 4 – С. 135–137.

[79] Рогожин В. С. *Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач.* // Прикл. матем. и мех. – 1958 – Т. 22. – № 6 – С. 804–807.

[80] Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические неравенства для L^p-норм функции напряжения многосвязной области на плоскости.* // Изв. вузов. Математика – 2013 – № 9 – С. 75–80.

[81] Салимов Р. Б., Славутин М. Л. *Обратная краевая задача для функции с полюсом и логарифмической особенностью.* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1984 – Вып. 21 – С. 180–186.

[82] Севодин М. А. *Об одном обобщении класса спиралеобразных функций.* // Изв. вузов. Математика – 2011 – № 10 – С. 59–67.

[83] Стейн Е. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973 – 342 с.

[84] Степанов Г. Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин.* – М.: Физматгиз, 1962 – 512 с.

[85] Стоилов С. *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций.* – М.: ИИЛ, 1964 – 227 с.

[86] Стоилов С. *Теория функций комплексного переменного,* Т.II. – М.: ИИЛ, 1964 – 416 с.

[87] Трохимчук Ю. Ю. *Непрерывные отображения и условия моногенности.* – М.: Физматгиз, 1963 – 212 с.

[88] Трохимчук Ю. Ю. *О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства.* // Укр. матем. журн. – 1964 – Т. XYI – № 2 – С. 196–211.

[89] Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та – 1965 – 333 с.

[90] Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: ИИЛ, 1948 – 456 с.

[91] Хейман У. *Мероморфные функции.* – М.: Мир, 1966 – 288 с.

[92] Чернавский А. В. *Дополнение к статье «О конечно кратных отображениях многообразий».* // Матем. сборник – 1965 – Т. 66 – № 3 – С. 471–472.

[93] Чирка Е. М. *Римановы поверхности.* Лекц. курсы НОЦ, 2006 – выпуск 1 – С. 3-105.

[94] Ahlfors L. V., Weil G. *A uniqueness theorem for Beltrami equations.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962 – V. 13 – № 6 – P. 975–978.

[95] Aksent'ev L. A., Shabalin P. L. *Sufficient Conditions for Univalence and Quasiconformal Extendibility of Analytic Functions.* // In "Handbook of Complex Analysis. Geometric Function Theory. V. 1" Edited by R. Kühnau. Elsevier Science – 2002 – Chapter 7 – P. 169–206.

[96] Ancona A. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$.// J. London Math. Soc. (2) – 1986 – V. 37 – P. 274 – 290.

[97] Anderson J. M., Clunie J. and Pommerenke Ch. *On Bloch functions and normal functions.* // J. Reine Angew. Math. – 1974 – V. 270 – P. 12–37.

[98] Avkhadiev F. G. *A simple proof of the Gauss-Winckler inequality.*// Amer. Math. Monthly – 2005 – V. 112 –№ 5 – P. 459–462.

[99] Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space.*// J. Math. Anal. Appl. – 2016 – V. 442 – P. 469–484.

[100] Avkhadiev F. G. *On locally invertible harmonic mappings of plane domains.*// Lobachevskii J. Math. – 2017 – V. 38– № 3 – P. 400–407.

[101] Avkhadiev F. G., Elizarov A. M., Fokin D. A. *Estimates for critical Mach number under isoperimetric constraints.* // Euro. J. of Applied Mathematics – 1995 – V. 6 – P. 385–398.

[102] Avkhadiev F. G., Kacimov A. R. *Analytical solutions and estimates for microlevel flows.* // Journal of Porous Media – 2005– V. 8 – № 2 – P. 125–148.

[103] Avkhadiev F. G., Kayumov I. R. *Admissible functionals and infinite-valent functions.*// Complex Variables and Applications – 1999 – V. 38 – P. 35–45.

[104] Avkhadiev F. G., Kayumov I. R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets.*// Collectanea Math. – 2004 – V. 55 – № 1 – P. 1–9.

[105] Avkhadiev F. G., Laptev A. *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains.*// International Mathematical Series "Around Research of Vladimir Maz'ya, I". Function Spaces. Springer – 2010 – V. 11 – P. 1–12.

[106] Avhadiev F. G., Maklakov D. V. *A Theory of Pressure envelopes for Hydrofoils.* // Ship technology research schiffstechnik – 1995 – V. 42 – № 2 – P. 81–102.

[107] Avkhadiev F. G., Pommerenke Ch., Wirths K.-J. *Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht fonctions.*// Comment. Math. Helv. – 2006 – V. 81 – P. 801–807.

[108] Avkhadiev F. G., Salahudinov R. G. *Isoperimetric Inequalities for Conformal Moments of Plane Domains.* // J. of Inequal. Appl. – 2002 –V. 7 – № 4 – P. 593–601.

[109] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *The conformal radius as a function and its gradient image.* // Isr. J. Math. – 2005 – V. 145 – P. 349–374.

[110] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009, 156 pp.

[111] Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer, 2015, 263 pp.

[112] Banach S., Mazur S. *Über mehrdeutige stetige Abbildungen.* // Studia Mathematica – 1934 – T. V – P. 174–178.

[113] Bañuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion.* // J. London Math. Soc.(2) – 2002 – V. 66 – № 2 – P. 499–512.

[114] Bauer F., Kraus D., Roth O., Wegert E. *Beurling's free boundary value problem in conformal geometry.* // Isr. J. of Math. – 2010 – V. 180 – № 1 – P. 223–253.

[115] Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen.* // J. Reine und Angew. Math. – 1972 – Bd. 255 – S. 23–43.

[116] Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien.* // Math. Ann. – 1973 – Bd. 202 – № 4 – S. 321–335.

[117] Becker J., Pommerenke Ch. *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete.* // J. Reine und Angew. Math. – 1984 – Bd. 354 – S. 74–94.

[118] Beurling A. *An extension of the Riemann mapping theorem.* // Acta Mathematica – 1953 – V. 9 – № 1–2 – P. 117–130.

[119] Biernacki M. *Les fonctions multivalentes.* – Paris: Gautier-Villars, 1938 – 66 p.

[120] Carbery A., Maz'ya V., Mitrea M., Rule D. *The Integrability of Negative Powers of the Solution of the Saint Venant Problem.* // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa-Cl. Sci. – 2014 – V. 13 –№ 2 – P. 465-531.

[121] Černe M., Zajes M. *Boundary differential relations for holomorphic functions on the disc.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2011 – V. 139 – P. 473–484.

[122] Černe M. *Beurling's boundary differential relations on multiply connected domains.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications – 2015 – V. 428 – № 1 – P. 544–562.

[123] Černe M., Flores M. *On Beurling's boundary differential relation.* // Israel Journal of Mathematics – 2014 – V. 199 – № 2 – P. 831–840.

[124] Cristea M. *Some properties of interior mappings. Banach-Mazur's theorem.* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1987 – V. 32 – № 3 – P. 211–214.

[125] Cristea M. *A generalization of the univalence on the boundary theorem with applications to Sobolev mappings.* // Complex Analysis and Operator Theory – 2017 – V. 11 – № 8 – P. 1789–1799.

[126] Duren P. L., Shapiro M. S., Shields A. L. *Singular measures and domaine not of Smirnov type.* // Duke Math. J. – 1966 – V. 33 – № 2. – P. 247–254.

[127] Eppler R. *Airfoil Design and Data.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag – 1990 – 562 p.

[128] Fournier R., Ruscheweyh St. *Free boundary value problems for analytic functions in the clised disk.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999 – V. 127 – № 11 – P. 3287–3294.

[129] Francis G. K. *Branched and folded parametrizations of the sphere.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974 – V. 80 – № 1 – P. 72–76.

[130] Gehring F. W. *Univalent functions and the Schwarzian derivative.* // Comment. Math. Helv. – 1977 – V. 52 – № 4 – P. 561–572.

[131] Gehring F.W., Osgood B.G. *Uniform domains and the quasihyperbolic metric.* // J. Anal. Math. – 1979 – V. 36 – P. 50–74.

[132] Gevirtz J. *An upper bound for the John constant.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981 – V. 83 – № 3 – P. 476–478.

[133] Gevirtz J. *On f''/f' and injectivity.* // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1983 – Ser. AI – V. 8 – № 1 – P. 87–92.

[134] Gilbarg D., Shiffman M. *On bodies achieving extreme values of the critical Mach number*, 1. // J. Ration. Mech. and Analysis – 1954 – V. 3 – № 2 – P. 209–230.

[135] Godula J. and Starkow V. *Logarithmic Coefficients of Locally Univalent Functions.* // Ann. Univ. Marie Curie – Sklodowska, Lublin – Polonia – 1989 – V. XLIII – 2 – P. 9–13.

[136] Goodman A. W. *A note on the Noshiro-Warschawski theorem.* // J. d'Analyse Math. – 1972 – V. 25 – P. 401–408.

[137] Hadamard J. *Sur les transformations ponctuelles.* // Bull. Soc. Math. Fr. – 1906 – V. 34 – P. 71–84.

[138] Hille E. *Remarks on a paper by Zeev Nehari.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949 – V. 55 – № 6 – P. 552–553.

[139] Jenkins J. *On the Bloch constant.* // J. Math. and Mech. – 1961 – 10 – № 5. – P. 729–734.

[140] John F. *On quasi-isometric mapping*, II. // Comm. Pure Appl. Math. – 1969 – V. 22 – № 2 – P. 265–278.

[141] John F. *A criterion for univalency brought up to date.* // Comm. Pure Appl. Math. – 1976 – V. 29 – № 3 – P. 293–295.

[142] Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev.*// J. Inequal. Pure Appl. Math., 8:2, Article 33, 4 pp., (electronic).

[143] Kühnau R. *Zur quasikonformen Fortsetzbarkeit schlichter konformer Abbildungen.* // Bull. Soc. sci. lettres Lodz – 1974/1975 – V. 26. – № 6 – P. 1–4.

[144] Kuznetsov A. A. *On a problem of Avhadiev.*// Lobachevskii J. Math. – 2004 – V. 16 – P. 57–69.

[145] Levi H. *Über die Darstellung ebener Kurven mit Doppelpunkten.* // Nach. Ackad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. – 1981 – K I.II – № 4. – S. 109–130.

[146] Loewner C. *Some bounds for the critical free stream Mach number of a compressible flow around an obstacle.* // Studies in Math. and Mech., presented to R. von Mises. – New York: Academic Press – 1954.

[147] Mañé R., Sad P., Sullivan D. *On the dynamics of rational maps.* // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1983 – V. 16 – P. 193–217.

[148] Martio O., Sarvas J. *Ingectivity theorems in plane and space.* // Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. AI, Math. – 1978/1979 – V. 4 – № 2 – P. 383–401.

[149] Marx M. L. *Normal curves, arising from light open mappings of the annulus.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965 – V. 120 – P. 45–56.

[150] Nasibullin R. G. *Avkhadiev-Becker Type Univalence Conditions for Biharmonic Mappings.* // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2018 – V. 39 – Is. 6 – P. 794–802.

[151] Nehari Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949 – V. 55 – № 6 – P. 545–551.

[152] Nehari Z. *On the zeros of solution of n-th order linear differential equations.* // J. London Math. Soc. – 1964 – V. 39 – P. 327–332.

[153] Nunokawa M. *An application of Ruscheweyh's univalence condition.* // Sci. Repts. Fac. Gumma Univ. – 1977 – V. 23 – P. 11–15.

[154] Osgood B. *Univalence criteria in multiplyconnected domains.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980 – V. 260 – № 2 – P. 459–473.

[155] Osserman R. *A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum.* // Comment. Math. Hevl. – 1977 – V. 52 – P. 545–555.

[156] Parthasarathy T. *On global univalence theorems.* Lecture Motes in Math. 977, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983 – 106 p.

[157] Picard E. *Traité d'Analyse, V. 2.* Paris: Gauthier-Villars, 1905 – 585 p.

[158] Lord Rayleigh. *The theory of sound*, 2nd edition. London, 1894/96.

[159] Ryll-Nardzewski C. *Une extension d'un théoreme de Sturm aux fonctions analytiques.* // Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect.A – 1950 – VII – P. 5–6.

[160] B. de Saint-Venant. *Mémoire sur la torsion des prismes.* – Mémoire présentés par divers savants á l'Académie des Sciences, 14, 1856 – P. 233–560.

[161] Salahudinov R. G. *Refined Inequalities for Euclidean Moments of a Domain with Respect to its Boundary.* // SIAM J. Math. Anal. – 2012 – V. 44 – № 4 – P. 2949–2961.

[162] Sullivan D., Thurston W. *Extending holomorphic motions.* // Acta Math. – 1986 – V. 157 – P. 259–286.

[163] Titus C. J. *The combinatorial topology of analytic function on the boundary of a disk.* // Acta math. – 1961 – V. 106 – № 1 – P. 45–64.

[164] Umezawa T. *Analytic functions convex in one direction.* // J. Math. Soc. Japan. – 1952 – V. 4 – P. 194–202.

[165] Umezawa T. *On the theory of univalent functions.* // Tohoku Math. J. – 1955 – V3 – P. 218–228.

[166] Wegert E., Roth O., Kraus D. *On Beurling's boundary value problem in circle packing.* // Complex Variables and Elliptic Equations – 2012 – V. 57 – № 2-4 – P. 397–410.

[167] Wirths K.-J. *Über holomorphe Functionen, die einer Wachstumshe-schränkungunterliegen.* // Arch. Mach. – 1978 – 30 – No 6. – P. 606–612.

[168] Zorich V. A. *The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems.* // A colletion of survejs 1960 – 1990, Springer Verlag. Lecture Notes in Mathematics. – 1992 – V. 1508 – P. 132–148.

5.6 Summary and content in English

Avkhadiev F. G. *Conformal mappings and boundary-value problems.* Second edition, revised and extended — Kazan Federal University. 2019. – 412 p. (in Russian)

The monograph is devoted to description of the development of the boundary correspondence principle, sufficient conditions of univalence for maps, sharp estimates for harmonic functions. Developed methods lead to interesting applications of non-Euclidean metrics to boundary-value problems, to solving of the classical Saint-Venant problem on geometric equivalent of the rigidity coefficient, etc. The book will be of interest for postgraduate students and researchers in geometric function theory and its applications.

References: 168 items, 16 illustrations.

Научное издание

Авхадиев Фарит Габидинович

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Компьютерная верстка
Ф.Г. Авхадиева

Дизайн обложки
Р.М. Абдрахмановой

Подписано в печать 31.10.2019.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 23,9.
Тираж 50 экз. Заказ 366/10

Отпечатано в типографии
Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28