КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

**Абызов Адель Наилевич**

# ПОЛУАРТИНОВЫ КОЛЬЦА И МОДУЛИ НАД НИМИ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Казань – 2019

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный консультант: **Туганбаев Аскар Аканович**
доктор физико–математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Крылов Петр Андреевич**
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»,
механико–математический факультет,
заведующий кафедрой алгебры

**Царев Андрей Валерьевич**
доктор физико–математических наук,
ФГБОУ ВО «Московский педагогический
государственный университет»,
профессор кафедры алгебры

**Рацеев Сергей Михайлович**
доктор физико–математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный
университет», профессор кафедры информационной
безопасности и теории управления

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится «27 июня» 2019 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.35 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, ауд. 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Электронная версия диссертации размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru.

Автореферат разослан «     » марта 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.35
кандидат физико-математических наук, доцент Еникеев А. И.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В 1905 году в своей статье о представлениях конечных матричных групп Леви ввел ряды, которые в настоящее время называются рядами Леви. В работе [69] Крулль использовал ряды Леви при изучении теории идеалов в коммутативных нетеровых кольцах. Трансфинитные ряды Леви впервые появились в работе Крулля [70], посвященной "обобщенным кольцам целых чисел".

Модуль $M$ называется полуартиновым (или модулем Леви), если модуль $M$ совпадет с одним из членов его ряда Леви, т.е. для некоторого ординала $\alpha$ выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\alpha(M) = M$. Разложение полуартиновых модулей на их примарные компоненты изучались в работах [41], [42], [74], [80]. Т. Шорс изучил полуартиновы модули и их инварианты Леви в [81]. В этой же работе была поставлена проблема об артиновости полуартиновых модулей, у которых инварианты Леви конечны. А. Факкини в работе [47] доказал, что полуартинов модуль $M$ над коммутативным кольцом является артиновым в точности тогда, когда инварианты Леви модуля $M$ конечны. В [48] был построен пример неартинова и полуартинова модуля над некоммутативным кольцом, у которого все инварианты Леви конечны. В этой же работе была установлена полулокальность кольца эндоморфизмов каждого полуартинова модуля, у которого все инварианты Леви конечны, что является обобщением теоремы Кампа и Дикса [38] о полулокальности кольца эндоморфизмов артиновых модулей.

В работе [36] Х. Басс показал, что полусовершенное кольцо $R$ является полуартиновым справа кольцом в точности тогда, когда радикал Джекобсона кольца $R$ является $t$-нильпотентным слева. В настоящее время полусовершенные полуартиновы слева кольца называются совершенными справа. В работе [73] было показано, что кольцо $R$ является полуартиновым справа кольцом в точности тогда, когда радикал Джекобсона кольца $R$ является $t$-нильпотентным слева и $R/J(R)$ – полуартиново справа кольцо. В этой же работе было установлено, что каждое полуартиново нормальное кольцо является полурегулярным. В [31] было установлено, что каждое полуартиново справа кольцо является кольцом со свойством замены.

Проблема о возможной правой длине Леви совершенных слева колец была поставлена Бассом в работе [36]. В [78]Ософская показала, что для любой пары бесконечных ординалов $\alpha$ и $\beta$ существует совершенное кольцо, у которого правая длина Леви равна $\alpha+1$, а левая – $\beta+1$. Для произвольного ординарного числа $\alpha$ Фукс в работе [50] привел пример регулярного коммутативного кольца, у которого длина Леви равна $\alpha + 1$. В [37] Камилло и Фуллер показали, что если правая длина Леви кольца $R$ равна натуральному числу $n$, то левая длина Леви кольца $R$ не превосходит $2^n - 1$.

Регулярные полуартиновы кольца, в частности, SV-кольца, были систематически изучены в работах Дж. Бачелло [32], [34], [35]. В [32] для произвольного ординала $\alpha > 0$ построен пример первичного обратимо регулярного правого SV-кольца длины Леви $\alpha + 1$, которое не является левым $V$-кольцом. В [10] для каждого ординала $\alpha > 0$ построен пример регулярного правого SV-кольца длины Леви $\alpha + 1$, у которого для всякого ординала $\beta < \alpha$ фактор-кольцо $R/\operatorname{Soc}_\beta(R)$ не является прямоконечным. В [35] было показано, что полуартиново регулярное кольцо $R$ является обратимо регулярным в точности тогда, когда каждое фактор-кольцо кольца $R$ является прямоконечным.

Основные направления в области исследований по теории колец и модулей были сформированы во многом благодаря монографии А. Картана и С. Эйленберга [3] и программе в области гомологической классификации колец, выдвинутой в 1961 году Л.А. Скорняковым [11], [12]. Основная цель этой программы – исследовать связи между свойствами кольца и категории модулей над ним. Программа по гомологической классификации моноидов была предложена Л.А. Скорняковым в работах [13], [14] и широко представлена в итоговой монографии М. Кильпа, У. Кнауэра и А.В. Михалева [65]. Гомологическая классификация модулей, т.е изучение связей между свойствами произвольного модуля $M$ и категории Висбауэра $\sigma(M)$, была предложена Р. Висбауэром и изложена в монографиях [21], [39], [40], [89]. В связи со сказанным выше представляется важным и интересным изучение связей между свойствами полуартинового кольца и категории модулей над ним. Одним из первых важных результатов в этом направлении является результат Х. Басса [36], согласно которому для кольца $R$ следующие условия равносильны: 1) $R$ – совершенное справа кольцо, 2) над кольцом $R$ каждый плоский правый модуль является проективным, 3) над кольцом $R$ каждый правый модуль обладает проективным накрытием.

Кольцо $R$ называется $I_0$-кольцом, если каждый его правый (левый) идеал, который не содержится в радикале Джекобсона кольца $R$, содержит в себе ненулевой идемпотент. Примерами $I_0$-колец являются полуартиновы кольца, полусовершенные кольца, регулярные кольца, полурегулярные кольца и кольца со свойством замены. $I_0$-кольца, у которых радикал Джекобсона является ниль-идеалом, под названием колец Цорна рассматриваются в книге Джекобсона [1]. Кольца Цорна впервые были изучены Левицким в работе [72]. $I_0$-кольца под названием лево-$I$-подобных колец были введены в 1965 году И.И. Сахаевым в работе [9]. Им было показано, что кольцо $R$ является полусовершенным кольцом в точности тогда, когда $R$ – $I_0$-кольцо, у которого каждое множество ортогональных ненулевых идемпотентов конечно. Никольсон в 1975 году в работе [75] установил ряд важных свойств $I_0$-колец. Модульными аналогами понятия $I_0$-кольца являются понятия слабо регулярного модуля и $I_0$-модуля. Модуль $M$ называется $I_0$-модулем (соотв., слабо регулярным), если каждый немалый подмодуль (соотв., циклический немалый подмодуль) модуля $M$ содержит в себе ненулевое прямое слагаемое $M$. В начале 90-х годов XX века И.И. Сахаевым было инициировано изучение слабо регулярных модулей. В частности, изучение колец, над которыми каждый модуль является слабо регулярным. Х. Хакми изучал проективные слабо регулярные модули и их кольца эндоморфизмов. В частности, им были описаны кольца, над которыми каждый проективный модуль имеет слабое регулярное кольцо эндоморфизмов [54]. Проблема об описании колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным, рассматривалась в работах [16], [17], [18], [19], [109] и монографиях [20], [61]. Важным частным случаем этой проблемы является задача об описании колец, над которыми каждый ненулевой правый модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль. В коммутативном случае эта проблема была решена в работе [76]. В статье [46] было показано, что квазипроективный модуль $P$ является $SV$-модулем в точности тогда, когда каждый ненулевой циклический подфактор $P$ содержит ненулевой $P$-инъективный подмодуль. Из этого результата следует, что над кольцом $R$ каждый ненулевой правый модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль в точности тогда, когда $R$ – правое $SV$-кольцо. Примерами слабо регулярных модулей являются модули со свойством подъема. В работе [87] было установлено, что над кольцом $R$ каждый правый $R$-модуль является модулем со свойством подъема тогда и только тогда, когда $R$ является артиновым полуцепным и $J^2(R) = 0$. Модули $M$, у которых в категории Висбауэра $\sigma(M)$ каждый модуль является модулем со свойством подъема, были описаны в работе [77].

Модуль $M$ называется автоморфизм-продолжаемым (соотв., эндоморфизм-продолжаемым), если для любого подмодуля $X$ модуля $M$ каждый автоморфизм (соотв., эндоморфизм) модуля $X$ продолжается до эндоморфизма модуля $M$. В работе [85] было доказано, что полуартинов модуль $M$ является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда $M$ является автоморфизм-инвариантным модулем. В [84] было доказано, что если $M$ – полуартинов модуль, то каждый эндоморфизм-продолжаемый модуль является квазиинъективным. В работе [15] был доказан дуальный результат, было показано, что над совершенным справа кольцом каждый эндоморфизм-поднимаемый правый модуль является квазипроективным. Квазипроективные модули над совершенными справа кольцами были описаны в [66]. Автоморфизм-коинвариантные модули над совершенными кольцами были изучены в работах [51], [52], [82], [62]. В [51] было показано, что правый модуль $M$ над совершенным справа кольцом является автоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда $M$ – псевдопроективный модуль.

Модуль $M$ называется ретрактабельным, если для каждого его ненулевого подмодуля $N$ выполнено условие $\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0$. Дуально определяется понятие коретрактабельного модуля. Кольцо $R$ называется правым $mod$-ретрактабельным (соотв., правым $CC$-кольцом), если каждый правый модуль над ним является ретрактабельным (соотв., коретрактабельным). Полуартиновы кольца, в частности, совершенные кольца и SV-кольца, естественно возникают при изучении $mod$-ретрактабельных колец и $CC$-колец. Ретрактабельные модули впервые были введены в работе [63]. В последующем ретрактабельные модули нашли приложения при изучении различных вопросов из теории колец и модулей (см. [53], [64], [79], [86], [94], [92], [97]). mod-ретрактабельные кольца изучались в работах [67], [86], [103]. В статьях [97], [67] было показано, что класс коммутативных mod-ретрактабельных колец совпадает с классом коммутативных полуартиновых колец. В работе [86] было показано, что редуцируемое кольцо $R$ является mod-ретрактабельным в точности тогда, когда $R$ – нормальное SV-кольцо. Коретрактабельные модули впервые были изучены в работе [25]. В этой же работе было показано, что каждое правое $CC$-кольцо является совершенным. Описание правых $CC$-колец приведено в работах [93], [103]. С правыми $mod$-ретрактабельными и правыми $CC$-кольцами тесно связаны правые CSL-кольца, т.е. кольца $R$, удовлетворяющие условию: всякий правый $R$-модуль $M$, у которого $\mathrm{End}_R(M)$ – тело, является простым. Впервые CSL-кольца были изучены в работе [88]. В этой же работе было показано, что класс коммутативных CSL-колец совпадает с классом коммутативных колец, у которых каждый простой идеал является максимальным. Регулярные CSL-кольца были изучены в работе [60]. Было показано, что всякое регулярное кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов, является CSL-кольцом и кольцо $\mathrm{End}_D(V)$, где $V$ – левое векторное пространство над телом $D$, является правым CSL-кольцом в точности тогда, когда $\dim(V_D) < \infty$. В [45] было показано, что полуартиново регулярное кольцо $R$ является правым CSL-кольцом в точности тогда, когда $R$ – правое SV-кольцо. Совершенные CSL-кольца были описаны в работе [23]. Полуартиновы CSL-кольца были описаны в работе [97].

**Цели и задачи диссертации.** Цель работы заключается в создании новых методов исследования структурной теории полуартиновых колец, установлении связей между свойствами полуартиновых колец и категорий модулей над ними. Основными задачами работы являются: описание колец, над которыми каждый модуль является $I_0$-модулем (слабо регулярным), описание полуартиновых колец, над которыми каждый модуль является $I_0^*$-модулем, развитие теории автоморфизм-коинвариантных модулей и близких к ним классов модулей над совершенными кольцами, описание полуартиновых $CSL$-колец, описание колец, над которыми каждый модуль является ретрактабельным (коретрактабельным), описание полуартиновых и $SV$-колец формальных матриц.

**Основные методы исследования.** В работе используются классические методы структурной теории колец, теории модулей и теории категорий.

**Выносимые на защиту положения.** Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

- Для произвольного квазипроективного модуля $P$ получены необходимые и достаточные условия, при которых категория Висбауэра $\sigma(P)$ состоит из слабо регулярных модулей. Решена проблема 16.19 из монографии [61] о строении колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным.

- Описаны следующие классы колец формальных матриц: полуартиновы справа кольца, $max$-кольца, правые $SV$-кольца, правые $V$-кольца, вполне идемпотентные кольца.

- Решена проблема об описании колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным; эта проблема была сформулирована в работе [27].

- Исследованы модули, близкие к проективным, над совершенными кольцами. Найдены условия, при которых автоморфизм-коинвариантный модуль над совершенным справа кольцом квазипроективен. Доказано, что над совершенным справа кольцом правый модуль $M$ является автоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда $M$ – строго автоморфизм-поднимаемый модуль.

- Описаны полуартиновы кольца, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем. В случае полуартиновых колец установлена двойственность в описаниях колец, над которыми каждый модуль является $I_0$-модулем, и колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем.

- Выяснено строение полуартиновых колец, над которыми каждый правый модуль является прямой суммой проективного (инъективного) и $V$-модуля. Доказано, что над кольцом $R$ каждый модуль является прямой суммой проективного (инъективного) и $V$-модуля в точности тогда, когда над кольцом $R$ каждый модуль одновременно является $I_0$-модулем и $I_0^*$-модулем.

- Получены характеризации следующих классов колец: инвариантные справа $mod$-ретрактабельные кольца, полуартиновы $CSL$-кольца, правые $CC$-кольца, строгие кольца Каша.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Полученные в работе результаты могут найти свое применение в дальнейших теоретических исследованиях в рамках теории колец и модулей. Кроме того, результаты диссертационной работы могут использоваться при написании учебных пособий и монографий, а также при чтении специальных курсов по теории колец и модулей в высших учебных заведениях Российской Федерации.

**Апробация работы.** Результаты диссертационного исследования были доложены автором: на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Россия, г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 мая–3 июня 2008 г.); на международной конференции "Алгебра и математическая логика", посвященной 100-летию со дня рождения профессора КГУ

В.В. Морозова (Россия, г. Казань, КФУ, 25–30 сентября 2011 г.); на международной конференции "Математика в современном мире", посвященной 150-летию Д.А. Граве (Россия, г. Вологда, ВГПУ, 6–11 октября 2013 г.); на международной конференции "Алгебра и логика, теория и приложения"(Россия, г. Красноярск, 21–27 июля 2013 г.); на международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения"(Россия, г. Казань, КФУ, 2–7 июня 2014 г.); на международной научной конференции "International workshop on Algebra and Applications"(Марокко, г. Фез, университет S. M. Ben Abdellah, 18–21 июня 2014 г.); на международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения" (Россия, г. Тула, 25–30 мая 2015 г.); на всероссийской молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения-2015" (Россия, г. Казань, КФУ, 22–27 октября 2015 г.); на международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Россия, г. Казань, КФУ, 26 июня–2 июля 2016 г.); на международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Россия, г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 22–26 мая 2018 г.). Кроме того, результаты докладывались на научном семинаре кафедры алгебры механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета в 2016 г.; на научном семинаре кафедры алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 2017 г.; на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета в 2005–2018 гг.

**Публикации.** Все основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 19 статьях, из которых работы [95]-[106] опубликованы в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК, работы [107]-[113] в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных цитирования Web of Science и Scopus. Все относящиеся к диссертации результаты в совместных работах принадлежат автору.

**Структура диссертации.** Диссертация включает в себя введение, семь глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключение и список литературы, содержащий 229 наименований, включая список работ, опубликованных автором по теме диссертации. Общий объем диссертации – 273 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация теорем и следствий в данной работе соответствует нумерации, приводимой в диссертации.

**Глава 1** является вводной, в ней приводятся основные определения и предварительные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

В § 1.1 приводятся основные факты, связанные с понятиями относительной проективности и относительной инъективности модулей.

В § 1.2 рассматриваются кольца и модули, близкие к регулярным. Приводятся основные свойства слабо регулярных модулей, $I_0$-модулей, $V$-модулей, $SSP$- и $SIP$-модулей.

В § 1.3 приводятся основные свойства полуартиновых колец и $max$-колец. Доказана следующая теорема, которая имеет самостоятельный интерес и следствие из которой используется при доказательстве теоремы 5.3.1 и теоремы 5.3.2.

**Теорема 1.3.4.** *Если каждый замкнутый подмодуль полуартинова модуля $M$ является конечно порожденным, то модуль $M$ имеет конечную размерность Голди.*

**Следствие 1.3.2.** *Каждый конечно порожденный полуартинов $CS$-модуль имеет конечную размерность Голди. В частности, всякий полуартинов конечно порожденный инъективный правый $R$-модуль является конечной прямой суммой инъективных оболочек своих простых подмодулей.*

**Следствие 1.3.3 [44, следствие 3.3].** *Для правого $CS$-кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – совершенное слева кольцо;*

*2) $R$ – полуартиново справа кольцо.*

В § 1.4 рассматриваются $SV$-кольца и $SV$-модули. Правый $R$-модуль $M$ называется *$SV$-модулем,* если модуль $M$ одновременно является полуартиновым и $V$-модулем. Кольцо $R$ называется *правым $SV$-кольцом,* если $R_R$ – $SV$-модуль. Для каждого кольца $R$ определяется идеал $SI(R)$, который используется в дальнейшем при изучении колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным.

Пусть $M$ – правый $R$-модуль. Для каждого ординального числа $\alpha$ подмодуль $SI_\alpha(M)$ определяется с помощью трансфинитной индукции. При $\alpha = 0$ положим, $SI_\alpha(M) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $SI_{\beta+1}(M)/SI_\beta(M)$ – сумма всех простых $M/SI_\beta(M)$-инъективных подмодулей правого $R$-модуля $M/SI_\beta(M)$. Когда $\alpha$ – предельное ординальное число, положим, $SI_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} SI_\beta(M)$. Пусть $\tau$ – наименьший ординал, для которого имеют место равенства $SI_\tau(M) = SI_{\tau+1}(M)$. Через $SI(M)$ обозначается подмодуль $SI_\tau(M)$. Для произвольного кольца $R$ идеал $\mathrm{SI}(R_R)$ обозначается через $\mathrm{SI}(R)$. Показано, что модуль $M$ является $SV$-модулем в точности тогда, когда $SI(M) = M$ (следствие 1.4.1). Для произвольного модуля $M$ вполне инвариантный подмодуль $SI(M)$ впервые был определен в работе [18]. В монографии [61] идеал $SI(R)$ кольца $R$ обозначается через $I^{(1)}(R)$.

Кольцо $R$ называется *нормальным,* если каждый идемпотент из кольца $R$ является центральным. Примерами SV-колец, как показывают следующие утверждения, являются полуартиновы нормальные полупримитивные кольца.

**Теорема 1.4.1.** *Для нормального кольца $R$ имеют место следующие утверждения:*

*1) если* $J(R)=0$*, то идеал* $L(R)$ *регулярен;*

*2) если* $J(R)=0$*, то* $\mathrm{SI}(R)=L(R)$*;*

*3)* $\mathrm{Soc}(R/\mathrm{SI}(R))\subseteq J(R/\mathrm{SI}(R))$.

**Следствие 1.4.3.** *Для нормального кольца* $R$ *следующие условия равносильны:*

*1)* $R$ *– регулярное полуартиново кольцо;*

*2)* $R$ *– полуартиново справа кольцо и для каждого непредельного ординального числа* $\alpha$ $\mathrm{Soc}_{\alpha}(R)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(R)$ *– прямая сумма тел;*

*3)* $R$ *– полуартиново кольцо, у которого* $J(R)=0$*;*

*4)* $R$ *–* $SV$*-кольцо.*

Для произвольного кольца $R$ через $E(R)$ обозначим минимальный инъективный копорождающий модуль в категории правых $R$-модулей.

В работе [49] К. Фейс поставил следующие проблемы:

1) Если кольцо $\mathrm{End}(E(R))$ является правым $max$-кольцом, то следует ли отсюда, что кольцо $R$ также является правым $max$-кольцом?

2) Если $R$ – правое $max$-кольцо, то следует ли отсюда, что кольцо $\mathrm{End}(E(R))$ является правым $max$-кольцом?

В работе [91] был положительно решен первый вопрос и получен контрпример ко второму вопросу. В этой же работе была сформулирована следующая проблема:

если $R$ – $max$-кольцо, то следует ли отсюда, что кольцо $\mathrm{End}(E(R))$ является правым $max$-кольцом?

**Теорема 1.4.2.** *Для нормального регулярного полуартинова кольца* $R$ *следующие условия равносильны:*

*1)* $\mathrm{End}(E(R))$ *является правым* $max$*-кольцом;*

*2) кольцо* $R$ *имеет конечную длину Леви.*

Хорошо известны примеры коммутативных полуартиновых регулярных колец, у которых длина Леви бесконечна [50]. Тогда из теоремы 1.4.2 следует существование $max$-колец, у которых кольцо эндоморфизмов минимального инъективного копорождающего не является правым $max$-кольцом.

**Глава 2** посвящена исследованию колец формальных матриц, которые принадлежат к одному из следующих классов колец: полуартиновы кольца, $max$-кольца, $V$-кольца и SV-кольца, вполне идемпотентные кольца.

В § 2.1 приводятся необходимые сведения из теории колец формальных матриц.

В § 2.2 изучаются вполне идемпотентные гомоморфизмы и их приложения к вполне идемпотентным модулям и вполне идемпотентным кольцам формальных матриц. Доказано, что кольцо формальных матриц $K=K(\{M_{ij}\}\colon\{\varphi_{ikj}\})$ порядка $n$ является вполне идемпотентным (соотв., справа, слева) в точности тогда, когда для каждой пары индексов $1\leqslant i,j\leqslant n$ и каждого элемента $m\in M_{ij}$ выполнено условие $m\in R_imM_{ji}mR_j$ (соотв., $m\in mM_{ji}mR_j$, $m\in R_imM_{ji}m$) (следствие 2.2.2). В частности, кольцо матриц $M_n(R)$ порядка $n$ над $R$ является вполне идемпотентным (соотв., справа, слева) в точности тогда, когда кольцо $R$ является вполне идемпотентным (соотв., справа, слева).

В § 2.3 доказано, что кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ является полуартиновым справа (соотв., $max$-справа) в точности тогда, когда $R$ и $S$ – полуартиновы справа (соотв., $max$-справа) кольца (теорема 2.3.1 и теорема 2.3.2). С помощью этого утверждения доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.3.3.** *Для кольца формальных матриц* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны:*

*1) $K$ – совершенное слева кольцо;*

*2) $R$, $S$ – совершенные слева кольца.*

В § 2.4 изучается важный подкласс класса вполне идемпотентных колец формальных матриц – $V$-кольца формальных матриц.

Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ – кольцо формальных матриц. Бимодуль $M$ называется *$N$-регулярным* (соотв., *$N$-вполне идемпотентным справа*), если для каждого $m \in M$ выполнено условие $m \in mNm$ (соотв., $m \in mNmS$). Аналогично определяются понятия $M$-регулярности и $M$-вполне идемпотентности справа бимодуля $N$.

**Теорема 2.4.1.** *Пусть* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *– кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $K$ – правое $V$-кольцо;*

*2) $R$, $S$ – правые $V$-кольца, модуль $M$ $N$-вполне идемпотентен справа и модуль $N$ $M$-вполне идемпотентен справа.*

**Теорема 2.4.2.** *Пусть* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *– кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $K$ – правое $SV$-кольцо;*

*2) $R$, $S$ – правые $SV$-кольца, модуль $M$ $N$-регулярен и модуль $N$ $M$-регулярен;*

*3) $R$, $S$ – правые $SV$-кольца, модуль $M$ $N$-вполне идемпотентен справа и модуль $N$ $M$-вполне идемпотентен справа.*

Пункты 1) - 4) следующего утверждения были доказаны соответственно в [26, следствие 2.2.], [90, следствие 1(c)], [32, теорема 2.9], [31, предложение 1.5].

**Следствие 2.4.3.** *Пусть $P$ – конечно порожденный проективный правый $R$-модуль и $S = \mathrm{End}_R(P)$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

*1) если $R$ – правое $V$-кольцо, то $S$ – правое $V$-кольцо;*

*2) если $R$ – правое $max$-кольцо, то $S$ – правое $max$-кольцо;*

*3) если $R$ – правое $SV$-кольцо, то $S$ – правое $SV$-кольцо;*

*4) если $R$ – правое полуартиново кольцо, то $S$ – правое полуартиново кольцо.*

В § 2.5 приводится описание полуартиновых $SSP$-колец формальных матриц.

Модуль $M$ называется *$SSP$-модулем*, если сумма двух прямых слагаемых модуля $M$ является прямым слагаемым модуля $M$. Кольцо $R$ называется $SSP$-кольцом, если $R_R$ – $SSP$-модуль. Каждое регулярное кольцо является $SSP$-кольцом. Через $Reg(R)$ обозначается наибольший регулярный идеал кольца $R$.

**Теорема 2.5.5.** *Пусть* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *– кольцо формальных матриц и* $R$, $S$ *– полуартиновы справа кольца. Тогда следующие условия равносильны:*

*1)* $K$ *–* $SSP$*-кольцо;*

*2)* $R$, $S$ *–* $SSP$*-кольца и* $Reg(K) = \begin{pmatrix} Reg(R) & M \\ N & Reg(S) \end{pmatrix}$.

**Глава 3** посвящена исследованию обобщенных $SV$-модулей, т.е. модулей $M$, у которых в категории Висбауэра $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным.

В § 3.1 изучаются свойства категории Висбауэра $\sigma(M)$, у которой каждый модуль является слабо регулярным.

**Теорема 3.1.1.** *Для произвольного правого* $R$*-модуля* $M$ *следующие условия равносильны:*

*1) в категории* $\sigma(M)$ *каждый модуль является слабо регулярным;*

*2) в категории* $\sigma(M)$ *каждый модуль является* $I_0$*-модулем;*

*3) в категории* $\sigma(M)$ *каждый модуль является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой* $M$*-инъективный подмодуль.*

В § 3.2 показано, что над регулярным кольцом $R$ каждый правый модуль является слабо регулярным в точности тогда, когда $R$ – правое $SV$-кольцо (теорема 3.2.1).

В § 3.3 для произвольного квазипроективного модуля $P$ найдены необходимые и достаточные условия, при которых категория Висбауэра $\sigma(P)$ состоит из слабо регулярных модулей. В качестве следствия выяснено строение колец, над которыми каждый модуль является слабо регулярным.

Пусть $M$ – правый $R$-модуль и $N \in \sigma(M)$. С помощью трансфинитной индукции для каждого ординального числа $\alpha$ определим подмодуль $I^M_\alpha(N)$ модуля $N$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим, $I^M_\alpha(N) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I^M_{\beta+1}(N)/I^M_\beta(N)$ – сумма всех локальных $M$-инъективных правых подмодулей модуля $N/I^M_\beta(N)$ длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является $M$-инъективным модулем. Когда $\alpha$ – предельное ординальное число, положим, $I^M_\alpha(N) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I^M_\beta(N)$. Пусть $\tau$ – наименьший ординал, для которого имеет место равенство $I^M_\tau(N) = I^M_{\tau+1}(N)$. Через $I^M(N)$ обозначается подмодуль $I^M_\tau(N)$. В случае, если $M = N$, то подмодуль $I^M(M)$ обозначается через $I(M)$. Для произвольного кольца $R$ через $I(R)$ обозначается идеал $I(R_R)$. Для произвольного кольца $R$ идеал $I(R)$ впервые был определен в работе [109]. В монографии [61] идеал $I(R)$ кольца $R$ обзначается через $I^{(2)}(R)$.

Основными результатами параграфа § 3.3 являются следующие утверждения.

**Теорема 3.3.1.** *Если $P$ – квазипроективный обобщенный* SV*-модуль, то $P$ – полуартинов модуль.*

**Теорема 3.3.2.** *Для квазипроективного правого $R$-модуля $P$ следующие условия равносильны:*

*1) $P$ – обобщенный* SV*-модуль;*

*2) если $M$ – порождающий объект категории $\sigma(P)$, то в категории $\sigma(M/I(M))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема.*

*3) каждый подмодуль произвольного модуля $M \in \sigma(P)$, который не содержится в радикале Джекобсона модуля $M$, содержит локальное прямое слагаемое модуля $M$.*

Кольцо $R$ называется *обобщенным справа SV-кольцом,* если над кольцом $R$ каждый правый модуль является слабо регулярным.

**Следствие 3.3.4** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – обобщенное справа SV-кольцо;*

*2) $R/I(R)$ – артиново полуцепное и $J^2(R/I(R)) = 0$;*

*3) каждый правый модуль над кольцом $R/I(R)$ является модулем со свойством подъема;*

*4) каждый подмодуль произвольного правого $R$-модуля $M$, который не содержится в радикале Джекобсона модуля $M$, содержит локальное прямое слагаемое модуля $M$.*

Эквивалентность пунктов 1) и 2) из следующего утверждения была доказана в работе [46].

**Следствие 3.3.5.** *Для квазипроективного правого $R$-модуля $P$ следующие условия равносильны:*

*1) $P$ –* SV*-модуль;*

*2) каждый ненулевой модуль из категории $\sigma(P)$ содержит ненулевой $P$-инъективный подмодуль;*

*3) $P$ – $V$-модуль и в категории $\sigma(P)$ каждый модуль является $I_0$-модулем.*

**Глава 4** посвящена исследованию обобщенных $SV$-колец, которые удовлетворяют одному из следующих условий конечности: каждый примитивный образ кольца является артиновым, конечность индекса нильпотентности и кольцо, без бесконечного числа нецентральных ортогональных идемпотентов. Доказано, что если кольцо $R$ удовлетворяет одному из перечисленных выше условий конечности, то над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем в точности тогда, когда либо $R$ – правое $SV$-кольцо, либо $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$. В связи с этим естественной является следующая проблема, сформулированная в монографии [61, стр. 160].

**Проблема**

1) Пусть $R$ – кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0$-модулем. Верно ли, что либо $R$ – правое $SV$-кольцо, либо $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$?

2) Пусть $R$ – $PI$-кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0$-модулем. Верно ли, что либо $R$ – правое $SV$-кольцо, либо $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$?

Положительное решение второго пункта предыдущей проблемы получено в параграфе 4.1 как следствие основных результатов этого параграфа. В параграфе 4.4 приведен пример обобщенного справа SV-кольца, для которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым.

В § 4.1 приводятся эквивалентные условия для колец, над которыми каждый правый и каждый левый модуль является слабо регулярным.

**Теорема 4.1.2.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов;*

*2) $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и для каждого ординала $\alpha$ $SI_{\alpha+1}(R)/SI_\alpha(R)$ – прямая сумма полных матричных колец конечных порядков над телами;*

*3) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо и каждая прямая сумма попарно изоморфных простых инъективных правых $R$-модулей является инъективным модулем;*

*4) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо и каждый максимально неразложимый фактор $R/I$ кольца $R$ является артиновым полуцепным, у которого $J^2(R/I) = 0$;*

*5) $R$ – обобщенное $SV$-кольцо, т.е. над кольцом $R$ каждый правый $R$-модуль и каждый левый $R$-модуль является слабо регулярным.*

С помощью предыдущей теоремы доказано, что над $PI$-кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем в точности тогда, когда либо $R$ – правое $SV$-кольцо, либо $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$ (теорема 4.1.3).

В § 4.2 получено описание обобщенных справа $SV$-колец ограниченного индекса нильпотентности и обобщенных справа $SV$-колец без бесконечного числа нецентральных взаимно ортогональных идемпотентов.

Наибольший регулярный идеал кольца $R$, чей индекс нильпотентности не превосходит натурального числа $n$, обозначается через $\mathrm{Reg}_n(R)$.

**Теорема 4.2.3.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо ограниченного индекса;*

*2) $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и существует такое натуральное число $n$, что для каждого ординала $\alpha$ идеал $SI_{\alpha+1}(R)/SI_\alpha(R)$ фактор-кольца $R/SI_\alpha(R)$ является прямой суммой полных матричных колец конечных порядков над телами, чьи размеры не превосходят натурального числа $n$;*

*3) $R/SI(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и $SI_1(R)$ – прямая сумма полных матричных колец конечных порядков над телами, чьи порядки не превосходят некоторого натурального числа $n$;*

*4) $R$ – полуартиново справа кольцо и для некоторого натурального числа $n$ $R/\operatorname{Reg}_n(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/\operatorname{Reg}_n(R)) = 0$.*

**Теорема 4.2.4.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо без бесконечного числа нецентральных взаимно ортогональных идемпотентов;*

*2) для некоторого ординального числа $\gamma$ существует такое семейство идеалов $(I_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ кольца $R$, что*

*a) $I_0$ =0;*

*b) $I_\alpha \subsetneqq I_\beta$, где $\alpha < \beta$;*

*c) $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ – прямая сумма тел;*

*d) $I_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta$, если $\alpha$ – предельное ординальное число;*

*e) $R/I$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/I) = 0$, где $I = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} I_\alpha$;*

*3) $R$ – полуартиново справа кольцо и $R/\operatorname{Reg}_1(R)$ – артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/\operatorname{Reg}_1(R)) = 0$.*

В § 4.3 приведен пример обобщенного справа $SV$-кольца $R$, у которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым. Кольцо $R$ называется *обобщенным справа $SV$-кольцом типа* I, если $R/SI(R)$ является артиновым полуцепным кольцом, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и типа II, если фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым.

**Предложение 4.3.1.** *Пусть $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо типа I;*
2) *прямая сумма всякого семейства локальных правых $R$-модулей длины два является инъективным модулем;*
3) *прямая сумма всякого семейства попарно изоморфных локальных правых $R$-модулей длины два является инъективным модулем.*

**Глава 5** посвящена исследованию колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем. Модуль $M$ называется $I_0^*$-*модулем*, если каждый несущественный подмодуль модуля $M$ содержится в прямом слагаемом модуля $M$, который отличен от модуля $M$. Понятие $I_0^*$-модуля двойственно понятию $I_0$-модуля. Каждый $CS$-модуль является $I_0^*$-модулем. Таким образом, примерами $I_0^*$-модулей являются инъективные, квазиинъективные, непрерывные и квазинепрерывные модули.

В § 5.1 изучаются свойства категории Висбауэра $\sigma(M)$, у которой каждый модуль является $I_0^*$-модулем. Доказано, что если $P$ – квазипроективный модуль, у которого $J(P) = 0$, и в категории $\sigma(P)$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем, то $P$ – $V$-модуль (теорема 5.1.2).

В § 5.2 приводится описание полуартиновых колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем.

**Теорема 5.2.2.** *Для полуартинова справа (слева) кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) каждый правый модуль над кольцом $R$ является $I_0^*$-модулем;*

*2) каждый правый $R$-модуль является либо $V$-модулем, либо содержит проективное ненулевое прямое слагаемое;*

*3) каждый правый $R$-модуль $N$, у которого $J(N) \neq 0$, содержит ненулевое проективное прямое слагаемое;*

*4) в кольце $R$ существует множество правых идеалов $\{A_i\}_{i \in I}$, для которого выполнены следующие условия:*

*a) $A_i$ – локальный инъективный модуль длины два для каждого $i \in I$;*

*b) $J(R) = \oplus_{i \in I} J(A_i)$;*

*c) $R/J(R)$ – правое* SV*-кольцо.*

В § 5.3 получено описание полуартиновых колец, над которыми каждый модуль является прямой суммой проективного (инъективного) модуля и $V$-модуля.

**Теорема (5.3.1 и 5.3.3).** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – обобщенное справа $SV$-кольцо типа I, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем;*

*2) $R$ – полуартиново справа кольцо, над которым каждый правый модуль является прямой суммой проективного модуля и $V$-модуля;*

*3) $R$ – полуартиново справа кольцо, над которым каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $V$-модуля;*

*4) кольцо $R$ изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц* $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, *где*

*a) $S$ – правое $SV$-кольцо;*

*b) для некоторого идеала $I$ кольца $S$ выполнены условия: $MI = 0$ и $S/I$ классически полупросто;*

*c) кольцо* $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ *является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

Примерами колец, удовлетворяющих условиям 2) и 3) из предыдущей теоремы, являются кольца, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным. Эти кольца изучены в шестой главе.

В § 5.4 изучаются кольца, над которыми каждый модуль является расширением полупростого модуля с помощью инъективного. Проблема об описании колец, над которыми каждый модуль является расширением полупростого модуля с помощью инъективного, была поставлена в монографии [20, стр. 452]. Доказано, что над инвариантным справа кольцом $R$ каждый модуль является расширением полупростого модуля с помощью инъективного в точности тогда, когда правая длина Леви кольца $R$ не превосходит двух и $R$ представимо в виде прямого произведения артинова полуцепного кольца и регулярного полуартинова кольца (теорема 5.4.6).

В § 5.5 вводится понятие слабо бэровского модуля. Изучаются условия, при которых $I_0^*$-модуль является слабо бэровским.

**Глава 6** посвящена исследованию следующих взаимосвязанных классов модулей, близких к проективным и инъективным: автоморфизм-коинвариантные модули, автоморфизм-поднимаемые модули, почти проективные модули и мало (квази)проективные модули, почти инъективные модули и существенно (квази)инъективные модули. Над совершенным справа кольцом каждый почти проективный модуль является мало проективным и всякий автоморфизм-коинвариантный модуль является мало квазипроективным.

В § 6.1 приводятся предварительные сведения о модулях, близких к проективным и инъективным.

В § 6.2 изучаются существенно инъективные модули и мало проективные модули. Описываются кольца, над которыми каждый модуль является мало проективным. Аналогичные вопросы также рассмотрены и для существенно инъективных модулей.

В § 6.3 изучены кольца, над которыми каждый простой модуль является почти проективным (почти инъективным). Понятия почти инъективного модуля и почти проективного модуля впервые возникли в работах [29], [30], [55]-[59] Харады, его коллег и учеников. В последнее время почти инъективные модули были рассмотрены в работах [22], [27], [28], [83].

**Теорема 6.3.1.** *Для правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны:*

*1) каждый простой правый $R$-модуль является почти проективным в категории $\sigma(M)$;*

*2) каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является либо полупростым модулем, либо содержит ненулевой $M$-инъективный подмодуль;*

*3) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0$-модулем.*

**Следствие 6.3.1.** *Над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем в точности тогда, когда каждый простой правый $R$-модуль является почти проективным.*

Правый $R$-модуль $M$ называется *почти $V$-модулем,* если каждый простой правый $R$-модуль почти инъективен относительно каждого модуля из категории $\sigma(M)$.

**Теорема 6.3.4.** *Для модуля $M$ следующие условия равносильны:*

*1) $M$ является почти $V$-модулем;*

*2) каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является либо $V$-модулем, либо содержит ненулевое прямое слагаемое, которое является проективным объектом в категории $\sigma(M)$;*

*3) в модуле $M$ существует независимое множество локальных подмодулей $\{A_i\}_{i \in I}$, для которого выполнены условия:*

*a) $A_i$ – $M$-инъективный и $M$-проективный модуль длины два для каждого $i \in I$;*

*b) $J(M) = \oplus_{i \in I} J(A_i)$;*

*c) $M/J(M)$ – $V$-модуль.*

**Следствие 6.3.2.** *Для полуартинова справа кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) над кольцом $R$ каждый простой правый модуль почти инъективен;*

*2) над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем.*

Из результатов, приведенных выше, следуют следующие утверждения, показывающие двойственность между описанием полуартиновых справа колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0$-модулем, и описанием полуартиновых справа колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем.

**Теорема.** *Для полуартинова справа кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем;*

*2) над кольцом $R$ каждый правый модуль является либо полупростым, либо содержит ненулевой инъективный подмодуль;*

*3) над кольцом $R$ каждый правый модуль $M$, у которого $\mathrm{Soc}(M) \neq M$, содержит ненулевой инъективный подмодуль;*

*4) над кольцом $R$ каждый простой правый модуль является почти проективным.*

**Теорема.** *Для полуартинова справа кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем;*

*2) над кольцом $R$ каждый правый модуль является либо $V$-модулем, либо содержит ненулевой проективный подмодуль;*

*3) над кольцом $R$ каждый правый модуль $M$, у которого $J(M) \neq 0$, содержит ненулевой проективный подмодуль;*

*4) над кольцом $R$ каждый простой правый модуль является почти инъективным.*

В § 6.4 получено описание колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным. Проблема об описании таких колец была поставлена в работе [27]. В качестве следствия показано, что над коммутативным кольцом $R$ каждый модуль является почти инъективным в точности тогда, когда каждый $R$-модуль является расширением полупростого модуля с помощью инъективного. Основными результатами параграфа § 6.4 являются следующие утверждения.

**Теорема 6.4.1.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) каждый правый $R$-модуль является почти инъективным;*

*2) $R$ – полуартиново справа кольцо, $\operatorname{Loewy}(R_R) \leqslant 2$ и над кольцом $R$ каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $V$-модуля;*

*3) $R$ – полуартиново справа кольцо, $\operatorname{Loewy}(R_R) \leqslant 2$ и над кольцом $R$ каждый правый модуль является прямой суммой проективного модуля и $V$-модуля;*

*4) для кольца $R$ выполнены условия:*

*a) в кольце $R$ существует такое конечное множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}$, что $e_iR$ – инъективный локальный правый $R$-модуль длины два для каждого $i \in I$ и $J(R) = \oplus_{i\in I} J(e_iR)$;*

*b) $R/J(R)$ – правое $\mathrm{SV}$-кольцо и $\operatorname{Loewy}(R_R) \leqslant 2$;*

*c) $R/\operatorname{SI}_1(R)$ – артиново справа кольцо.*

*5) кольцо $R$ изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & {}_TM_S \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где*

*a) $S$ – правое $SV$-кольцо и $\operatorname{Loewy}(S) \leqslant 2$;*

*b) для некоторого идеала $I$ кольца $S$ имеет место равенство $MI = 0$ и кольцо $\begin{pmatrix} T & {}_TM_{S/I} \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

**Теорема 6.4.2.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) каждый правый $R$-модуль является почти инъективным;*

*2) $R$ – обобщенное справа $\mathrm{SV}$-кольцо типа $I$, над которым каждый правый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и существенно инъективным.*

**Теорема 6.4.3.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) каждый правый и каждый левый модуль над кольцом $R$ является почти инъективным;*

*2) $R$ – обобщенное $\mathrm{SV}$-кольцо, над которым каждый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и существенно инъективным;*

*3) $R$ – прямое произведение $SV$-кольца, у которого $\operatorname{Loewy}(R_R) \leqslant 2$, и артинова полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

В § 6.5 изучены автоморфизм-коинвариантные модули. Модуль $M$ называется *автоморфизм-коинвариантным,* если для каждых малых подмодулей $K_1, K_2$ модуля $M$ всякий малый эпиморфизм $\nu\colon M/K_1 \to M/K_2$ поднимается до эндоморфизма $\theta$ модуля $M$. Автоморфизм-коинвариантные модули были впервые введены в работе [82] как двойственный аналог понятия автоморфизм-инвариантного модуля, т.е. модуля, инвариантного относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки.

Доказана теорема о структуре автоморфизм-коинвариантного модуля над совершенным кольцом.

**Теорема 6.5.5.** *Пусть $R$ – совершенное справа кольцо, $M$ – автоморфизм-коинвариантный правый $R$-модуль. Тогда*

$$M = P' \oplus (\oplus_{i=1}^{n} Q_i),$$

*где $P'$ – квазипроективный модуль, $\mathrm{End}_R(\oplus_{i=1}^{n} Q_i / J(\oplus_{i=1}^{n} Q_i))$ – конечное булево кольцо, $\oplus_{i=1}^{n} Q_i$ – циклический модуль, у которого каждый ненулевой гомоморфный образ не является квадратом, и для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ модуль $Q_i$ является нелокальным и неразложимым.*

Получены следующие условия, при которых автоморфизм-коинвариантный модуль над совершенным кольцом является квазипроективным.

**Следствие 6.5.3.** *Пусть $R$ – совершенное справа кольцо, у которого 2 обратимо. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый $R$-модуль является квазипроективным.*

**Следствие 6.5.5.** *Пусть $R$ – конечномерная алгебра над полем $P$. Если $\mid P \mid > 2$, то для неразложимого правого $R$-модуля следующие условия равносильны:*

*1) $M$ – автоморфизм-коинвариантный модуль;*

*2) $M$ – квазипроективный модуль.*

**Следствие 6.5.7.** *Пусть $R$ – нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый $R$-модуль является квазипроективным.*

В § 6.6 методы, развитые при рассмотрении автоморфизм-коинвариантных модулей, используются при изучении нильпотентно-коинвариантных модулей.

Модуль $M$ называется *нильпотентно-поднимаемым*, если для каждого подмодуля $N$ модуля $M$ каждый нильпотентный эндоморфизм $f$ модуля $M/N$ может быть поднят до некоторого эндоморфизма $f'$ модуля $M$. Если модуль $M$ обладает проективным накрытием $p : P \to M$ и для каждого нильпотентного эндоморфизма $f \in \mathrm{End}(P)$ выполнено условие $f(\mathrm{Ker}(\alpha)) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$, то модуль $M$ называется *нильпотентно-коинвариантным.*

**Теорема 6.6.1.** *Пусть $M$ – нильпотентно-поднимаемый модуль, обладающий проективной оболочкой. Тогда модуль $M$ является нильпотентно-коинвариантным.*

**Теорема 6.6.2.** *Пусть $R$ – совершенное справа кольцо, $M$ – конечно порожденный нильпотентно-коинвариантный правый $R$-модуль. Если каждый ненулевой подмодуль $M/J(M)$ содержит ненулевой квадратный корень в $M/J(M)$, то $M$ – квазипроективный модуль.*

В § 6.7 изучаются строго автоморфизм-поднимаемые модули. Правый $R$-модуль $M$ называется *(строго) автоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля $N$ модуля $M$ каждый автоморфизм $f$ фактор-модуля $M/N$ может быть поднят до некоторого автоморфизма (эндоморфизма) модуля $M$. В статье [85] А.А. Туганбаевым была доказана теорема, согласно которой полуартинов модуль $M$ является (строго) автоморфизм продолжаемым в точности тогда, когда $M$ является автоморфизм-инвариантным модулем. Двойственными аналогами этой теоремы являются следующие два утверждения.

**Теорема 6.7.5.** *Пусть $R$ – совершенное справа кольцо и $M$ – правый $R$-модуль. Тогда следующие утверждения равносильны:*

*1) $M$ – строго автоморфизм-поднимаемый модуль;*

*2) $M$ – автоморфизм-коинвариантный модуль.*

**Следствие 6.7.1.** *Пусть $R$ – артиново справа кольцо и $M$ – конечно порожденный правый $R$-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) модуль $M$ является автоморфизм-коинвариантным;*

*2) модуль $M$ является автоморфизм-поднимаемым;*

*3) модуль $M$ является строго автоморфизм-поднимаемым.*

В следующих утверждениях найдены условия, при которых автоморфизм-поднимаемый модуль над артиновым кольцом является квазипроективным.

**Теорема 6.7.6.** *Пусть $R$ – артиново справа кольцо и $M$ – правый $R$-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $M$ – квазипроективный модуль;*

*2) $M$ – автоморфизм-поднимаемый модуль, для которого выполнено равенство $M = \oplus_I M_i$, где $M_i$ – полый модуль для каждого $i \in I$.*

**Следствие 6.7.2.** *Пусть $R$ – артиново справа кольцо и $M$ – правый $R$-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $M$ – автоморфизм-поднимаемый модуль, который является модулем со свойством подъема;*

*2) $M$ – квазипроективный модуль.*

**Следствие 6.7.3.** *Пусть $R$ – нормальное артиново справа кольцо и $M$ – конечно порожденный правый $R$-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $M$ – автоморфизм-поднимаемый модуль;*

*2) $M$ – квазипроективный модуль;*

*3) $M$ – автоморфизм-коинвариантный модуль.*

**Глава 7** посвящена исследованию следующих взаимосвязанных классов колец: $mod$-ретрактабельных колец, $CC$-колец, строгие кольца Каша и CSL-колец.

В § 7.1 изучаются CSL-кольца и $mod$-ретрактабельные кольца. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых полуартиново кольцо является $CSL$-кольцом.

**Теорема 7.1.3.** *Для полуартинова кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – $mod$-ретрактабельное кольцо;*

*2) $R$ – правое $mod$-ретрактабельное кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым;*

*3) $R$ – $CSL$-кольцо;*

*4) $R$ – правое $CSL$-кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым;*

*5) каждый максимальный неразложимый фактор кольца $R$ изоморфен полному кольцу матриц конечного порядка над совершенным локальным кольцом.*

Эквивалентность пунктов 4) и 5) в следующем утверждении была установлена в работе [23].

**Следствие 7.1.2.** *Для совершенного кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – $mod$-ретрактабельное кольцо;*

*2) $R$ – правое $mod$-ретрактабельное кольцо;*

*3) $R$ – $CSL$-кольцо;*

*4) $R$ – правое $CSL$-кольцо;*

*5) кольцо $R$ изоморфно конечному прямому произведению полных колец матриц конечных порядков над совершенными локальными кольцами.*

Описание (квази)инвариантных справа mod-ретрактабельных колец получено в следующих утверждениях.

**Теорема 7.1.9.** *Для квазиинвариантного справа (слева) кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ –* mod-*ретрактабельное кольцо;*

*2) $R$ – полуартиново* CSL-*кольцо;*

*3) $R$ – полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является локальным совершенным кольцом.*

**Следствие 7.1.5** *Для правого (или левого) инвариантного кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ –* mod-*ретрактабельное кольцо;*

*2) $R$ – полуартиново* CSL-*кольцо;*

*3) $R$ – полуартиново кольцо.*

**Следствие 7.1.6 [67, теорема 3.10].** *Для коммутативного кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – $mod$-ретрактабельное кольцо;*

*2) $R$ – полуартиново кольцо.*

В § 7.2 получены описания $CC$-колец и строгих колец Каша. Если каждый простой модуль из категории $\sigma(M)$ вложим в модуль $M$, то модуль $M$ называется *модулем Каша.* Если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является модулем Каша, то модуль $M$ называется *строгим модулем Каша.* Строгие модули Каша были введены в работе [24]. В этой же работе была поставлена проблема об описании строгих колец и модулей Каша. Основными результатами § 7.2 являются следующие утверждения.

**Следствие 7.2.2.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

*1) $R$ – строгое справа кольцо Каша;*

*2) над кольцом $R$ каждый правый конечно порожденный модуль является коретрактабельным;*

*3) над кольцом $R$ каждый правый циклический модуль является коретрактабельным;*

*4) всякое фактор-кольцо кольца $R$ является правым кольцом Каша;*

*5) кольцо $R$ изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец над локальными совершенными слева кольцами.*

**Теорема 7.2.2.** *Для кольца $R$ следующие утверждения равносильны:*

*1) $R$ – строгое кольцо Каша;*

*2) для каждого идеала $I$ кольца $R$ фактор-кольцо $R/I$ является кольцом Каша;*

*3) над кольцом $R$ каждый правый или левый конечно порожденный модуль является коретрактабельным;*

*4) над кольцом $R$ каждый правый или левый циклический модуль является коретрактабельным;*

*5) $R$ – совершенное правое $CSL$-кольцо;*

*6) $R$ – совершенное правое $mod$-ретрактабельное кольцо;*

*7) $R$ – правое $CC$-кольцо;*

*8) $R$ – левое $CC$-кольцо;*

*9) $R$ – конечное прямое произведение полных колец матриц конечных порядков над совершенными локальными кольцами.*

В § 7.3 показано, что для модуля $M$ конечной длины следующие условия равносильны: 1) $M$ – CSL-модуль; 2) $M$ – $mod$-ретрактабельный модуль; 3) $M$ – $CC$-модуль; 4) $M$ – строгий модуль Каша; 5) у каждого неразложимого модуля из категории $\sigma(M)$ все простые подфакторы изоморфны (теорема 7.3.1). В качестве следствий доказаны следующие утверждения.

**Следствие 7.2.2.** *Пусть $M$ – локально нетеров правый $R$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*1) для каждого полуартинова модуля $N$ из категории $\sigma(M)$ имеет место разложение $N = \oplus_{i \in I} N_i$, где для каждого $i \in I$ все простые подфакторы модуля $N_i$ изоморфны и для различных $i, j$ из $I$ модули $N_i, N_j$ не имеют изоморфных простых подфакторов;*

*2) если $S_1, S_2 \in \sigma(M)$ – простые неизоморфные модули, то $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$.*

**Следствие 7.2.2 [41, теорема 1.1].**

*Пусть $R$ – нетерово справа кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*1) для каждого полуартинова правого $R$-модуля $M$ имеет место разложение $M = \oplus_{i \in I} M_i$, где для каждого $i \in I$ все простые подфакторы модуля $M_i$ изоморфны и для различных $i, j$ из $I$ модули $M_i, M_j$ не имеют изоморфных простых подфакторов;*

*2) если $S_1, S_2$ – простые неизоморфные правые $R$-модули, то $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$.*

Автор выражает глубокую признательность научному консультанту, д.ф.-м.н., профессору Аскару Акановичу Туганбаеву за поддержку в работе, внимание и интерес к исследованиям автора. Автор выражает глубокую благодарность своему учителю и первому научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Исхаку Идрисовичу Сахаеву, пробудившему интерес к научной деятельности в области теории колец и модулей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе изучены связи между свойствами полуартиновых колец и категорий модулей над ними. Исследованы свойства модулей над полуартиновыми кольцами, которые являются важными обобщениями полуартиновых V-колец и модулей, близких к проективным над совершенными кольцами.

Получены следующие основные результаты:

- Для произвольного квазипроективного модуля $P$ получены необходимые и достаточные условия, при которых категория Висбауэра $\sigma(P)$ состоит из слабо регулярных модулей. Выяснено строение колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным.

- Получено описание полуартиновых колец, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем. Выяснено строение полуартиновых колец, над которыми каждый правый модуль является прямой суммой проективного (инъективного) модуля и V-модуля. Доказано, что над такими кольцами каждый правый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем.

- Выяснено строение колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным. Исследованы автоморфизм-коинвариантные модули и близкие к ним классы модулей над совершенными кольцами. Найдены условия, при которых автоморфизм-коинвариантный правый модуль над совершенным справа кольцом является квазипроективным. Выяснено строение автоморфизм-коинвариантных правых модулей над совершенными справа кольцами. Доказано, что для совершенного справа кольца $R$ класс автоморфизм-коинвариантных правых $R$-модулей совпадает с классом строго автоморфизм-поднимаемых правых $R$-модулей.

- Исследованы следующие взаимосвязанные классы колец: $CSL$-кольца, $CC$-кольца и mod-ретрактабельные кольца. Выяснено строение полуартиновых $CSL$-колец. Доказано, что инвариантное кольцо $R$ является полуартиновым в точности тогда, когда $R$ – mod-ретрактабельное кольцо. Получены описания $CC$-колец и строгих колец Каша.

- Исследованы важные классы колец формальных матриц, близкие к регулярным. Получено описание колец формальных матриц, которые принадлежат к одному из следующих классов колец: полуартиновы справа кольца, правые $max$-кольца, правые $SV$-кольца, правые $V$-кольца, вполне идемпотентные кольца.

В дальнейшем перспективным представляется изучение следующих задач.

- Пусть $M$ – правый $R$-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным. Верно ли, что в этом случае модуль $M$ является полуартиновым? Частным случаем предыдущей проблемы является следующий открытый вопрос. Пусть $M$ – правый $R$-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый ненулевой модуль содержит ненулевой $M$-инъективный подмодуль. Верно ли, что в этом случае модуль $M$ является полуартиновым?

- Изучить локально конечно порожденные категории Гротендика, в которых каждый ненулевой (соотв., неполупростой) объект содержит ненулевой инъективный подобъект.

- Описание колец, над которыми каждый правый модуль является почти проективным. Описание колец, над которыми каждый циклический правый модуль является почти инъективным (соотв., почти проективным).

- Описание регулярных правых CSL-колец. Является ли регулярное правое mod-ретрактабельное кольцо правым SV-кольцом? Является ли правое mod-ретрактабельное кольцо полуартиновым справа кольцом?

- Исследование полуартиновых колец, у которых длина Леви конечна. Пусть $R$ – полуартиново справа кольцо и $\mathrm{Loewy}(R_R) = n < \infty$. Какие значения может принимать левая длина Леви кольца $R$?

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Джекобсон, Н. Строение колец / Н.Джекобсон. – М.: ИЛ, 1961. – 392 с.

[2] Каш, Ф. Модули и кольца / Ф.Каш. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

[3] Картан, А. Гомологическая алгебра / А. Картан, С. Эйленберг. – М.: ИЛ, 1960. – 512 с.

[4] Крылов, П.А. Кольца формальных матриц и модули над ними / П.А.Крылов, А.А.Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2017. – 190 с.

[5] Крылов, П.А. Модули над областями дискретного нормирования / П.А.Крылов, А.А.Туганбаев. – М.: Факториал Пресс, 2007. – 384 с.

[6] Крылов, П.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П.А.Крылов, А.В. Михалев, А.А.Туганбаев. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 512 с.

[7] Ламбек, И. Кольца и модули / И. Ламбек. – М.: Мир, 1971. – 275 с.

[8] Мишина, А.П. Абелевы группы и модули / А.П. Мишина, Л.А. Скорняков. – М.: Наука, 1969. – 152с.

[9] Сахаев, И.И. О проективности конечно порожденных плоских модулей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Сахаев Исхак Идрисович. – Казань, 1965. – 90 с.

[10] Силаев, В.Н. О правых SV-кольцах / В.Н. Силаев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – Т. 7. – № 1. – С. 121–129.

[11] Скорняков, Л.А. Гомологическая классификация колец / Л.А. Скорняков // Труды IV Всесоюзного математического съезда, 1961, т. 2, Л., 1964, С. 22-32.

[12] Скорняков, Л.А. Гомологическая классификация колец / Л.А. Скорняков // Мат. вестник. — 1967. – Т.4. – № 119. – С. 415-434.

[13] Скорняков, Л. А. Гомологическая классификация моноидов / Л.А. Скорняков // Сибирский математический журнал. – 1969. – Т. 10. – № 5. – С. 1139–1143.

[14] Скорняков, Л.А. Характеризация категории полигонов / Л.А. Скорняков // Матемематический сборник . – 1969. – Т. 80. – № 4. – С. 492-502.

[15] Туганбаев, А.А. Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули / А.А. Туганбаев // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1979. – № 3. – С. 48–51.

[16] Туганбаев, А.А. Модули с большим числом прямых слагаемых / А.А. Туганбаев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 8. – С. 233–241.

[17] Туганбаев, А.А. Кольца, над которыми все модули полурегулярны / А.А. Туганбаев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 185–194.

[18] Туганбаев, А.А. Кольца, над которыми все модули являются $I_0$-модулями / А.А. Туганбаев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13. – Вып. 5. – С. 193–200.

[19] Туганбаев, А.А. Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов / А.А. Туганбаев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 207–221.

[20] Туганбаев, А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца / А.А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2009. – 472 с.

[21] Albu, T. Lessons on the Grothendieck Category $\sigma[M]$ / T. Albu. – Editura Universitatii Bucuresti, 2004. – 122 p.

[22] Alahmadi, A. A note on almost injective modules / A. Alahmadi, S.K. Jain // Mathematical Journal of Okayama University. – 2009. – Vol. 51. – P. 101–109.

[23] Alaoui, M. Perfect rings for which the converse of Schur's lemma holds / M. Alaoui, A. Haily // Publ. Mat. – 2001. – Vol. 45. – № 1. – P. 219–222.

[24] Albu, T. Kasch modules / T. Albu, R. Wisbauer // Advances in Ring Theory (Granville, OH, 1996), Trends in Mathematics, Birkhauser, Boston, 1997. – P. 1–16.

[25] Amini, B. Coretractable modules / B. Amini, M. Ershad, H. Sharif // Journal of the Australian Mathematical Society. – 2009. – Vol. 86. – № 3. – P. 289–304.

[26] Anderson, F. Simple injective modules / F. Anderson // Math. Scand. – 1978. – Vol. 43. – P. 204–210.

[27] Arabi-Kakavand, M. Rings over which every module is almost injective / M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgari, Y. Tolooei // Communications in Algebra. – 2016. – Vol. 44. – № 7. – P. 2908–2918.

[28] Arabi-Kakavand, M. Rings for which every simple module is almost injective / M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgari, H. Khabazian // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. – 2016. – Vol. 42. – № 1. – P. 113–127.

[29] Baba, Y. Note on almost M-injectives / Y. Baba // Osaka Journal of Mathematics. – 1989. – Vol. 26. – № 3. – P. 687–698.

[30] Baba, Y. On almost M-projectives and almost M-injectives / Y. Baba, M. Harada // Tsukuba Journal of Mathematics. – 1990. – Vol. 14. – № 1. – P. 53–69.

[31] Baccella, G. Exchange property and the natural preorder between simple modules over semi-Artinian rings / G. Baccella // Journal of Algebra. – 2002. – Vol. 253. – № 1. – P. 133-166.

[32] Baccella, G. Semi-Artinian $V$-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings / G. Baccella // Journal of Algebra. – 1995. – Vol. 173. – № 3. – P. 587–612.

[33] Baccella, G. Semiartinian rings whose loewy factors are nonsingular / G. Baccella, G. Di Campli // Communications in Algebra. – 1997. – Vol. 25. – № 9. – P. 2743-2764.

[34] Baccella, G. Representation of artinian partially ordered sets over semiartinian von Neuman regular algebras / G. Baccella // Journal of Algebra. – 2010. – Vol. 323. – № 3. – P. 790-838.

[35] Baccella, G. $K_0$ of semiartinian von Neumann regular rings. Direct finiteness versus unit-regularity / G. Baccella, L. Spinosa // Algebras and Representation Theory. – 2017. – Vol. 20. – № 5. – P. 1189–1213.

[36] Bass, H. Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings / H. Bass // Transactions of the American Mathematical Society. – 1960. – Vol. 95. – № 3. – P. 466–488.

[37] Camillo, V.P. On Loewy length of rings / V.P. Camillo, K.R. Fuller // Pacific Journal of Mathematics. – 1974. – Vol. 53. – № 2. – P. 347-354.

[38] Camps, R. On semilocal rings / R.Camps, W.Dicks // Israel Journal of Mathematics. – 1993. – Vol. 81. – № 1-2. – P. 203–211.

[39] Clark, J. Lifting modules. Supplements and Projectivity in Module Theory / J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer (Frontiers in Math.). – Boston, Birkhauser, 2006. – 394 p.

[40] Dung, N.V. Extending modules / N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith, R. Wisbauer (Pitman Research Notes in Mathematics Series 313). – Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994. – 248 p.

[41] Dickson, S.E. Decomposition of modules. I: Classical rings / S.E.Dickson // Mathematische Zeitschrift. – 1965. – Vol. 90. – № 1. – P. 9–13.

[42] Dickson, S.E. Decomposition of modules. II: Rings without chain conditions / S.E.Dickson // Mathematische Zeitschrift. – 1968. – Vol. 104. – № 5. –P. 349-357.

[43] Dickson, S.E. Direct decompositions of radicals / S.E. Dickson // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. – P. 366–374.

[44] Dinh, H.Q. Some Results on Self-Injective Rings and $\Sigma - CS$ Rings / H.Q.Dinh, D.V.Huynh // Communications in Algebra. – 2003. – Vol. 31. – № 12. – P. 6063–6077.

[45] Dombrovskaya M. Asymmetry in the converse of Schur's lemma / M. Dombrovskaya, G. Marks // Communications in Algebra. – 2010. – Vol. 38. – № 3. – P. 1147–1156.

[46] Dung, N.V. On semi-artinian $V$-modules / N.V.Dung, P.F.Smith // Journal of Pure and Applied Algebra. – 1992. – Vol. 82. – № 1. – P. 27–37.

[47] Facchini, A. Loewy and Artinian Modules Over Commutative Rings / A.Facchini // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1981. – Vol. 128. – № 1. – P. 359–374.

[48] Facchini A. Loewy modules with finite Loewy invariants and max modules with finite radical invariants / A.Facchini, Mai Hoang Bien // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43. – № 6. – P. 2293-2307.

[49] Faith, C. Rings whose modules have maximal submodules / C. Faith // Publicacions Matematiques. – 1995. – Vol. 39. – № 1. – P. 201–214.

[50] Fuchs, L. Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules / L. Fuchs // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1969. – №239-240. – P. 169–179.

[51] Guil Asensio, P.A. Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers / P.A.Guil Asensio, D.T.Keskin, B.Kalebogaz, A.K.Srivastava // Journal of Algebra. – 2016. – Vol. 466. – P. 147–152.

[52] Guil Asensio, P.A. Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules / P. A.Guil Asensio, Truong Cong Quynh, A.K.Srivastava // Bulletin of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 7. – № 2. – P. 229–246.

[53] Haghany, A. Study of semi-projective retractable modules / A.Haghany, M.R.Vedadi // Algebra Colloquium. – 2007. – Vol. 14. – № 3. – P. 489–496.

[54] Hamza, H. $I_0$-rings and $I_0$-modules / H. Hamza // Mathematical Journal of Okayama University. – 1998. – Vol. 40. – P. 91–97.

[55] Harada, M. On almost M-projectives / M.Harada, T.Mabuchi // Osaka Journal of Mathematics. – 1989. – Vol. 26. – № 4. – P. 837–848.

[56] Harada, M. On almost relative injectives on Artinian modules / M.Harada // Osaka Journal of Mathematics. – 1990. – Vol. 27. – № 4. – P. 963–971.

[57] Harada, M. Direct sums of almost relative injective modules / M.Harada // Osaka Journal of Mathematics. – 1991. – Vol. 28. – № 3. – P. 751–758.

[58] Harada, M. Note on almost relative projectives and almost relative injectives / M.Harada // Osaka Journal of Mathematics. – 1992. – Vol. 29. – № 3. – P. 435–446.

[59] Harada, M. Almost projective modules / M.Harada // Journal of Algebra. – 1993. – Vol. 159. – № 1. – P. 150–157.

[60] Hirano, Y. On injective modules whose endomorphism rings are simple Artinian / Y.Hirano, C.Y.Hong, J.Y.Kim, J.K.Park // Communications in Algebra. – 1999. – Vol. 27. – № 3. – P. 1385–1391.

[61] Jain, S.K. Cyclic Modules and the Structure of Rings / S.K. Jain, A.K. Srivastava, A.A. Tuganbaev (Oxf. Math. Monogr.). – Oxford: Oxford University Press, 2012. – 220 p.

[62] Keskin Tutuncu D. When Automorphism-coinvariant Modules are Quasi-projective / D. Keskin Tutuncu // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45. – № 2. – P. 688–693.

[63] Khuri, S.M. Endomorphism rings and lattice isomorphisms / S.M.Khuri // Journal of Algebra. – 1979. – Vol. 56. – № 2. – P. 401–408.

[64] Khuri, S.M. Nonsingular retractable modules and their endomorphism rings / S.M.Khuri // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 1991. – Vol. 43. – № 1. – P. 63–71.

[65] Kilp, M. Monoids, acts and categories / M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev. – Berlin: Walter de Gruyter, 2000. – 529 p.

[66] Koehler, A. Quasi-projective and quasi-injective modules / A.Koehler // Pacific Journal of Mathematics. – 1971. – Vol. 36. – № 3. – P. 713–720.

[67] Kosan, M.T. Mod-retractable rings / M.T.Kosan, J.Zemlicka // Communications in Algebra. – 2014. – Vol. 42. – № 3. – P. 998–1010.

[68] Krull, W. Uber verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen / W.Krull // Mathematische Zeitschrift. – 1925. – Vol. 23. – № 1. – P. 161–196.

[69] Krull, W. Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, 1. / W. Krull // Sitzungsber. Heidelberger Akad. – 1926. – Vol. 7. – P. 1–32.

[70] Krull, W. Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe / W.Krull // Mathematische Annalen. – 1928. – Vol. 99. – № 1. – P. 51–70.

[71] Krull, W. Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen / W. Krull // Heidelberger Akademie der Wissenschaften 2, 1932. – P. 13–38.

[72] Levitzki, J. On the structure of algebraic algebras and related rings / J.Levitzki // Transactions of the American Mathematical Society. – 1953. – Vol. 74. – № 3. – P. 384–409.

[73] Nastasescu C. Anneaux semi-artiniens / C.Nastasescu, N.Popescu // Bulletin de la Societe Mathematique de France. – 1968. – Vol. 96. – P. 357–368.

[74] Nastasescu, C. Decomposition primaire dans les anneaux semi-artiniens / C.Nastasescu // Journal of Algebra. – 1970. – Vol. 14. – № 2. – P. 170–181.

[75] Nicholson, W.K. *I*-rings / W.K.Nicholson // Transactions of the American Mathematical Society. – 1975. – Vol. 207. – P. 361–373.

[76] Ohtake, K. Commutative rings of which all radicals are left exact / K.Ohtake // Communications in Algebra. – 1980. – Vol. 8. – № 16. – P. 1505–1512.

[77] Oshiro, K. Modules with every subgenerated module lifting / K.Oshiro, R.Wisbauer // Osaka Journal of Mathematics. – 1995. – Vol. 32. – № 2. – P. 513–519.

[78] Osofsky, B.L. Loewy length of perfect rings / B.L.Osofsky // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1971. – Vol. 28. – № 2. – P. 352–354.

[79] Smith, P.F. Modules with many homomorphisms / P.F.Smith // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2005. – Vol. 197. – № 1-3. – P. 305–321.

[80] Shores, T. The structure of Loewy modules / T.Shores // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1972. – Vol. 254. – P. 204–220.

[81] Shores, T. Loewy series of modules / T.Shores // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1974. – Vol. 265. – P. 183–200.

[82] Singh, S. Dual automorphism-invariant modules / S.Singh, A.K.Srivastava // Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 371. – P. 262–275.

[83] Singh, S. Almost relative injective modules / S.Singh // Osaka Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 53. – № 2. – P. 425–438.

[84] Tuganbaev, A.A. Semidistributive Modules and Rings / A.A. Tuganbaev. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 357 p.

[85] Tuganbaev, A.A. Automorphism-invariant semi-Artinian modules / A.A.Tuganbaev // Journal of Algebra and Its Applications. – 2017. – Vol. 16. – № 2. – 1750029 (5 pages).

[86] Tolooei, Y. On rings whose modules have nonzero homomorphisms to nonzero submodules / Y. Tolooei, M.R. Vedadi // Publicacions Matematiques. – 2013. – Vol. 57. – № 1. – P. 107-122.

[87] Vanaja, N. Characterisations of generalised uniserial rings in terms of factor rings / N.Vanaja, V.M.Purav // Communications in Algebra. – 1992. – Vol. 20. – № 8. – P. 2253–2270.

[88] Ware, R. Simple endomorphism rings / R.Ware, J.Zelmanowitz // American Mathematical Monthly. – 1970. – Vol. 77. – № 9. – P. 987–989.

[89] Wisbauer, R. Foundations of Module and Ring Theory / R.Wisbauer. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1991. – 616 p.

[90] Watters, J.F. Loewy series, V-modules and trace ideals / J.F. Watters // Communications in Algebra. – 1999. – Vol. 27. – № 12. – P. 5951-5965.

[91] Xue, W. Two questions on rings whose modules have maximal submodules / W.Xue // Communications in Algebra. – 2000. – Vol. 28. – № 5. – P. 2633–2638.

[92] Zhou, Z.P. A lattice isomorphism theorem for nonsingular retractable modules / Z.P.Zhou // Canadian Mathematical Bulletin. – 1994. – Vol. 37. – P. 140–144.

[93] Zemlicka, J. Completely coretractable rings / J.Zemlicka // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. – 2013. – Vol. 39. – № 3. – P. 523–528.

[94] Zelmanowitz, J.M. Correspondences of closed submodules / J.M.Zelmanowitz // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1996. – Vol. 124. – № 10. – P. 2955–2960.

## Работы автора по теме диссертации

### В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК РФ.

[95] Абызов, А.Н. Слабо регулярные модули над нормальными кольцами / А.Н.Абызов // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49. – № 4. – С. 721–738.

[96] Абызов, А.Н. Обобщенные SV-модули / А.Н.Абызов // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50. – № 3. – С. 481-488.

[97] Абызов, А.Н. О некоторых классах полуартиновых колец / А.Н.Абызов // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53. – № 5. – С. 955–966.

[98] Абызов, А.Н. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы / А.Н.Абызов, Д.Т.Тапкин // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56. – № 6. – С. 1199–1214.

[99] Абызов, А.Н. Дуально автоморфизм-инвариантные модули над совершенными кольцами / А.Н.Абызов, Ч.К.Куинь, Д.Д.Тай // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58. – № 5. – С. 959–971.

[100] Абызов, А.Н. Почти проективные и почти инъективные модули / А.Н.Абызов // Математические заметки. – 2018. – Т. 103. – № 1. – С. 3–19.

[101] Абызов, А.Н. Обобщенные SV-кольца ограниченного индекса нильпотентности / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 3–14.

[102] Абызов, А.Н. Вполне идемпотентность Hom / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 3–8.

[103] Абызов, А.Н. Регулярные полуартиновы кольца / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 1. – С. 3–11.

[104] Абызов, А.Н. $I_0^*$-модули / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 8. – С. 3–17.

[105] Абызов, А.Н. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 10. – С. 57–60.

[106] Абызов, А.Н. Кольца, над которыми каждый модуль является $I_0^*$-модулем / А.Н.Абызов // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 12. – С. 3–15.

**В изданиях, индексируемых в системах WoS, Scopus.**

[107] Abyzov, A.N. Lifting of automorphisms of factor modules / A.N.Abyzov, Cong Quynh Truong // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46. – № 11. – P. 5073–5082.

[108] Abyzov, A.N. SSP rings and modules / A.N.Abyzov, T.C.Quynh, T.H.N.Nhan // Asian-European J. Math. – 2016. – Vol. 9. – № 1. – 9 pp.

[109] Abyzov, A.N. Rings over which all modules are $I_0$-modules. II / A.N. Abyzov, A.A. Tuganbaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162. – № 5. – P. 587-593.

[110] Abyzov, A.N. Homomorphisms close to regular and their applications / A.N. Abyzov, A.A. Tuganbaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183. – № 3. – P. 275-298.

[111] Abyzov, A.N. Modules in Which Sums or Intersections of Two Direct Summands Are Direct Summands / A.N. Abyzov, A.A. Tuganbaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 211. – № 3. – P. 297-303.

[112] Abyzov, A.N. Retractable and Coretractable Modules / A.N. Abyzov, A.A. Tuganbaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 213. – № 2. – P. 132-142.

[113] Abyzov, A.N. Formal Matrices and Rings Close to Regular / A.N. Abyzov, A.A. Tuganbaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 233. – № 5. – P. 604-615.

**Материалы докладов на научных конференциях.**

[114] Абызов, А.Н. Обобщенные SV-кольца / А.Н. Абызов // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тезисы докладов. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008. – С. 23-24.

[115] Абызов, А.Н. $I_0^*$-модули / А.Н. Абызов // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти В.П. Шункова. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2013. – С. 7-8.

[116] Абызов, А.Н. Слабо бэровские и $I_0^*$-модули / А.Н. Абызов // Математика в современном мире. Материалы Международной конференции, посвященной 150-летию Д.А. Граве. – Вологда: Вологодская типография, 2013. – С. 8-9.

[117] Абызов, А.Н. Ретрактабельные и коретрактабельные модули / А.Н. Абызов // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" и сопутствующей молодежной летней школы "Вычислимость и вычислимые структуры". – Казань: Изд-во Казанского университета, 2014. – С. 35.

[118] Абызов, А.Н. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным / А.Н. Абызов // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. – Тула: Изд-во Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 143-145.

[119] Абызов, А.Н. Кольца, над которыми каждый модуль является $I_0^*$-модулем / А.Н. Абызов // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых. – Казань: Казанский университет, изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 81-82.

[120] Абызов, А.Н. Почти проективные и почти инъективные модули / А.Н. Абызов, Ч.К. Куинь // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2018. – С. 23-25.

[121] Abyzov, A.N. Semiartinian rings / A.N. Abyzov // International Workshop on Algebra and Applications. – Fez, 2014. – P. 5.