На правах рукописи

Созонтова Елена Александровна

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2018

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”.

Научный руководитель: **Миронов Алексей Николаевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математики и прикладной
информатики Елабужского института
ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский)
федеральный университет”

Официальные оппоненты: **Кожанов Александр Иванович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории
дифференциальных и разностных уравнений
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Солдатов Александр Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Вычислительного
центра им. А.А. Дородницына Федерального
исследовательского центра “Информатика
и управление” Российской академии наук

Ведущая организация: ФГБОУ ВО “Орловский государственный
университет имени И.С. Тургенева”

Защита состоится 4 октября 2018 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет” по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО “Казанский (Приволжский) федеральный университет” по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан “____” ________________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Тема предлагаемой диссертации относится к одному из направлений теории уравнений со старшими (доминирующими) частными производными. В случае одной неизвестной функции структура таких уравнений в их линейном варианте имеет вид

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{k<m, \\ k_s \leq m_s}} a_k(x) \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1}, \dots, \partial x_n^{k_n}} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $m = m_1 + \dots + m_n$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, m_s, k_s, $s = \overline{1, n}$ – целые неотрицательные числа, $m > 1$.

При $m_s = 1$, $(s = \overline{1, n})$ уравнение (1) носит имя Л. Бианки, который одновременно с О. Николетти еще в 1895 году предложил распространить на указанное уравнение метод решения задачи Коши, разработанный ранее Б. Риманом для уравнения

$$\theta_{xy} + a\theta_x + b\theta_y + c\theta = f. \tag{2}$$

В связи со сказанным появление уравнений вида (1) является естественным моментом на пути теоретических обобщений.

После Л. Бианки и О. Николетти уравнения вида (1) с различных точек зрения исследовали в своих работах ряд зарубежных математиков: H. Bateman, D. Colton, A. Corduneanu, S. Easwaran, E. Holmgren, H. Hornich, E. Lahaye, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, V. Radochova, M. Stecher, W. Rundell. В том числе начали публиковаться результаты, относящиеся к уравнениям с кратными производными ($m_k > 1$), названные Д. Колтоном псевдопараболическими. В нашей стране начало исследованию уравнений вида (1) было положено в работах М. К. Фаге и С. С. Ахиева. Постепенно обнаруживались прикладные аспекты обсуждаемых уравнений, связанные с явлениями вибрации и фильтрации, передачи тепла в гетерогенных средах, с моделированием биологических и оптимальных процессов, с изучением ситуаций, приводящих к постановке обратных задач и др.

Начали появляться группы математиков, ведущих систематические исследования в данной области. Одна из них сложилась в Казани (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миронов и др.). Участниками этой группы предложено развитие метода Римана, позволившее построить решения задач Гурса и Коши для самого общего уравнения вида (1), изучены постановки новых задач, например, с нормальными производными в граничных условиях, интенсивный характер приобрел поиск новых возможностей решения рассматриваемых задач в квадратурах и т.д. В основном изучались задачи с одной искомой функцией, системы дифференциальных уравнений изучены значительно меньше.

В предлагаемой диссертации рассматриваются характеристические задачи Гурса и некоторые их видоизменения для системы уравнений

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \dots \partial x_n^{m_{in}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j < m_i, \\ k_{js} \le m_{js}}} a_{jk_{j_1}\dots k_{jn}}(x) \frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}} \dots \partial x_n^{k_{jn}}} = f_i(x), \ i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $m_i = m_{i_1} + \dots + m_{i_n}$, $k_j = k_{j_1} + \dots + k_{j_n}$, m_s, k_s, $s = \overline{1,n}$ – целые неотрицательные числа.

Частные случаи этой системы с различных точек зрения изучались многими авторами. Только для $m_i = 1$ $(i = \overline{1,n})$ можно указать работы Э. Хольмгрена, А. В. Бицадзе, Т. В. Чекмарева, О. М. Теута, И. Е. Плещинской, В. И. Жегалова, Н. Х. Х Зомота. Так, А. В. Бицадзе при $n = 2$ были исследованы задачи Коши и Гурса, получены формулы интегрального представления решения этих задач, позволяющие установить их структурные свойства. В работах Н. Х. Х. Зомота исследована характеристическая задача, являющаяся обобщением задачи Гурса. В. И. Жегаловым для той же системы изучена задача с нормальными производными первого порядка в граничных условиях.

В работах А. В. Бицадзе также были изложены решения задачи Коши и Гурса для системы (3) при $m_i = 2$, $m_{i_1} = m_{i_2} = 1$ $(i = \overline{1,n})$, полученные методом Римана. Та же система с точки зрения обобщения метода каскадного интегрирования на случай гиперболических систем уравнений рассматривалась С. Я. Старцевым. Аналогичная система (но с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа) изучалась А. В. Жибером, Ю. Г. Михайловой. Для систем с кратными доминирующими частными производными Л. Б. Мироновой был разработан векторно-матричный аналог метода Римана, изучены задачи Коши и Гурса, а также поставлен ряд новых характеристических задач и исследован характер их разрешимости (например, в R^2 задачи с граничными значениями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника). Частные случаи системы (3) более высокого порядка рассматривались, например, А. А. Андреевым, Ю. О. Яковлевой, О. М. Джохадзе.

Цели и задачи диссертационной работы. Исследование вопросов разрешимости ранее не изученных характеристических задач для систем уравнений со старшими частными производными и возможности применения полученных результатов к решению в явном виде систем уравнений Вольтерра с частными интегралами.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными (методы Римана, каскадного интегрирования и факторизации), а также методы теории интегральных уравнений.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории систем со старшими частными производными.

Положения, выносимые на защиту.

1. Доказаны существование и единственность решения задачи Гурса для общего случая системы (3).

2. С помощью методов каскадного интегрирования и факторизации получены условия, обеспечивающие разрешимость задачи Гурса в квадратурах для системы (3) при различных $m,\ n$.

3. Сформулированы отличающиеся от задачи Гурса характеристические задачи для системы (3) и исследованы вопросы их разрешимости.

4. Полученные результаты применены к исследованию разрешимости в явном виде систем уравнений Вольтерра с частными интегралами.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты дис-

сертации по мере их получения докладывались автором
– на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета,
– на X международной научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2011 г.),
– на семинаре кафедры ФАиП под руководством академика РАН Е. И. Моисеева (Москва, МГУ, 2014 г.),
– на международной научной конференции "АМАДЕ–2015" (Минск, 2015 г.),
– на проводимых в КФУ молодежных научных конференциях "Лобачевские чтения" (2015, 2016 гг.),
– на семинаре кафедры уравнений математической физики ФГАОУ ВО "Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева" (руководитель семинара: д.ф.-м.н., профессор Л.С. Пулькина, Самара, 2017 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [20], из них восемь статей [1] – [8] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, статьи [2], [3], [5], [6], [7] входят в международные базы данных Web of Science, Scopus. Работы [3], [7] выполнены в соавторстве с В. И. Жегаловым, которому принадлежат постановка задачи и рекомендации общего характера, связанные с применяемыми методами исследования.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 116 страниц и состоит из введения, четырех глав, разбитых на 12 параграфов, заключения и списка литературы из 86 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор литературы, связанной с темой диссертации, излагается краткое содержание работы и формулируются результаты, выносимые на защиту.

Глава 1 состоит из четырех параграфов. В § 1 формулируется следующая

Задача 1.1 (Гурса). В области $\Omega = \{x_{k0} < x_k < x_{k1},\ k = \overline{1, n}\}$ найти регулярное решение системы (3), удовлетворяющее непрерывно дифференцируемым граничным условиям

$$\frac{\partial^{i_1} u_i}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10},\ x_2, \dots,\ x_n) = \varphi_{1ii_1}(x_2, \dots, x_n)\ (i_1 = \overline{0,\ m_{i_1} - 1}),$$
$$\frac{\partial^{i_2} u_i}{\partial x_2^{i_2}}(x_1,\ x_{20}, \dots,\ x_n) = \varphi_{2ii_2}(x_1,\ x_3,\ \dots, x_n)\ (i_2 = \overline{0,\ m_{i_2} - 1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial^{i_n} u_i}{\partial x_n^{i_n}}(x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n0}) = \varphi_{nii_n}(x_1, \dots, x_{n-1})\ (i_n = \overline{0,\ m_{i_n} - 1}),\ i = \overline{1, n},$$

значения которых на границе Ω согласуются по формулам

$$\frac{\partial^{i_2} \varphi_{1ii_1}}{\partial x_2^{i_2}}(x_{20},\ x_3, \dots,\ x_n) = \frac{\partial^{i_1} \varphi_{2ii_2}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10},\ x_3, \dots,\ x_n),$$
$$\frac{\partial^{i_3} \varphi_{1ii_1}}{\partial x_3^{i_3}}(x_2,\ x_{30},\ x_4,\ \dots,\ x_n) = \frac{\partial^{i_1} \varphi_{3ii_3}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10},\ x_2,\ x_4,\ \dots,\ x_n), \dots,$$
$$\frac{\partial^{i_n} \varphi_{1ii_1}}{\partial x_n^{i_n}}(x_2,\ x_3, \dots,\ x_{n-1},\ x_{n0}) = \frac{\partial^{i_1} \varphi_{nii_n}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10},\ x_2, \dots,\ x_{n-1});$$
$$\frac{\partial^{i_3} \varphi_{2ii_2}}{\partial x_3^{i_3}}(x_1,\ x_{30},\ x_4, \dots,\ x_n) = \frac{\partial^{i_2} \varphi_{3ii_3}}{\partial x_2^{i_2}}(x_1,\ x_{20},\ x_4,\ \dots,\ x_n), \dots,$$
$$\frac{\partial^{i_n} \varphi_{2ii_2}}{\partial x_n^{i_n}}(x_1,\ x_3,\ x_4, \dots,\ x_{n0}) = \frac{\partial^{i_2} \varphi_{nii_n}}{\partial x_2^{i_2}}(x_1,\ x_{20},\ x_3, \dots,\ x_{n-1}),\ \dots,$$
$$\frac{\partial^{i_n} \varphi_{n-1ii_{n-1}}}{\partial x_n^{i_n}}(x_2,\ x_3,\ x_4, \dots,\ x_{n0}) = \frac{\partial^{i_{n-1}} \varphi_{nii_n}}{\partial x_{n-1}^{i_{n-1}}}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_{n-10}).$$

С помощью метода сжимающих отображений доказана теорема существования и единственности решения этой задачи.

Значительная часть остального содержания диссертации связана с отысканием частных случаев задачи 1.1, для которых возможно построение решения в квадратурах. При этом существенную роль играют случаи разрешимости в явном виде задачи Гурса для уравнения (2) с условиями

$$\begin{gathered}\theta(x_0,y)=\varphi(y),\ \theta(x,y_0)=\psi(x),\ \varphi(y_0)=\psi(x_0),\\ x\in[x_0,x_1],\ y\in[x_0,x_1].\end{gathered}\tag{4}$$

Известно, что решение задачи (2), (4) записывается через соответствующие функции Римана, причем для последних имеются различные случаи их построения в явном виде (соотношения (20) из [5]). Путем развития метода каскадного интегрирования в совместной с В.И. Жегаловым статье автора [7] получено шесть новых случаев разрешимости задачи (2), (4) в явном виде. Вместе с обозначенными выше соотношениями они образуют уже 13 вариантов разрешимости в квадратурах задачи (2), (4), которые в объединенном виде можно записать следующим образом

$$\begin{gathered}1)\ h\equiv 0;\ 2)\ k\equiv 0;\ 3)\ 2h-(\ln h)_{xy}-k\equiv 0;\\ 4)\ 2k-(\ln k)_{xy}-h\equiv 0;\ 5)\ a_x\equiv b_y,\ h\equiv\xi_0(x)\eta_0(y)\neq 0;\\ 6)\ b_y-a_x\equiv h\equiv\xi_1(x)\eta_1(y)\neq 0;\ 7)\ a_x-b_y\equiv k\equiv\xi_2(x)\eta_2(y)\neq 0;\\ 8)\ h\equiv 2\mu_0(x)\tau_0(y)\neq 0,\ k\equiv 3\mu_0(x)\tau_0(y)\neq 0;\\ 9)\ h\equiv 3\mu_1(x)\tau_1(y)\neq 0,\ k\equiv 2\mu_1(x)\tau_1(y)\neq 0;\\ 10)\ (\ln h)_{xy}\equiv h-k,\ h\equiv 2b_y\equiv\omega_1;\ 11)\ (\ln k)_{xy}\equiv k-h,\ k\equiv 2a_x\equiv\omega_2;\\ 12)\ m_0a_x-b_y\equiv m_0b_y-a_x\equiv(m_0-1)(ab-c);\\ 13)\ h\equiv\omega_0;\ 14)\ k\equiv\omega_0,\end{gathered}\tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}h=a_x+ab-c,\ k=b_y+ab-c,\\ \omega_r=\tfrac{2s_r'(x)t_r'(y)}{(2-m_r)[s_r(x)+t_r(y)]^2},\ [s_r(x)+t_r(y)]s_r'(x)t_r'(y)\neq 0.\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь $\xi_k,\ \eta_k,\ \mu_l,\ \tau_l\in C^1$ $(k=\overline{0,2},\ l=0,1)$, $s,\ t,\ m\in C^2$, причем m зависит только от одной из переменных (x,y) и $m\neq 2$. В остальном указанные функции произвольны, то есть в соответствующем классе должны найтись функции, при которых перечисленные соотношения выполняются. Коэффициенты $a,\ b,\ c$ имеют гладкость, обеспечивающую возможность выполнения записанных формул. Классы гладкости задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций. Каждого из тождеств 1) – 4) и наборов 5) – 11) достаточно для получения явного вида функций Римана. Формулами же 12) – 13) и 12) – 14) следует пользоваться совместно: при выполнении набора 12) функцию Римана можно построить, когда выполняется одно из условий 13), 14).

Доказана теорема

Теорема 1.2. *Пусть h, k, ω_r определяются формулами (6). Тогда построение решения задачи (2), (4) в квадратурах обеспечивается любым из тождеств 1) – 4) из (5), а также существованием функций ξ_r, η_r, μ_r, τ_r, m_r, s_r, t_r, для которых имеет место любая из групп соотношений 5) – 11), или когда вместе с 12) любая из определяемых в (6) комбинаций h, k имеет вид, указанный в 13) – 14). При этом зависящая лишь от одной из переменных (x, y) функция ω_0 удовлетворяет условию $\omega_0 \neq 0$, а ω_1, ω_2 – $(\omega_k + 1)(\omega_k - 2) \neq 0$.*

Далее теорема 1.2 применяется к исследованию задач Гурса для систем уравнений первого порядка на плоскости и в трехмерном пространстве. При этом используется возможность редукции рассматриваемых систем к уравнениям вида (2) и его пространственным аналогам. Так, для двумерной системы получено 26 различных условий разрешимости задачи Гурса в квадратурах, для пространственного варианта – 99.

В главе 2 с помощью результатов предыдущей главы для систем второго порядка изучаются задачи Гурса и их видоизменения, связанные с привлечением других частей границы области в качестве носителей краевых значений. В § 5 рассматриваются граничные задачи на плоскости.

Задача 2.1. В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ найти регулярное решение системы

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y + e_1 u + f_1 v = g_1, \\ v_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y + e_2 u + f_2 v = g_2, \end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x_0, y) = \varphi_1(y),\ u(x, y_0) = \psi_1(x),\ v(x_0, y) = \varphi_2(y),\ v(x, y_0) = \psi_2(x), \\ \varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0) \end{gathered} \tag{8}$$

При этом предполагается, что $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^1(\overline{X})$, $\psi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$ и гладкость коэффициентов системы (7) определяется включениями

$$a_1,\ a_2,\ c_1,\ c_2 \in C^{(1,0)},\ b_1,\ c_1,\ c_2,\ d_2 \in C^{(0,1)},\ e_1,\ e_2,\ f_1,\ f_2 \in C^{(0,0)}. \qquad (9)$$

Используя факторизацию уравнений системы (7) и налагая определенные условия на коэффициенты этой системы, получены условия разрешимости задачи 2.1 в квадратурах. В том же параграфе рассмотрены задачи с граничными условиями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника. Например,

Задача 2.3. Найти в области D регулярное решение системы (7), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0,y)=\varphi_1(y),\ u(x,y_1)=\omega_1(x),\ v(x,y_0)=\psi_2(x),\ v(x_1,y)=\omega_2(y),$$

где $\omega_1 \in C^1(\overline{Y_1}),\ \omega_2 \in C^1(\overline{X_1})$.

Установлена справедливость следующего утверждения

Теорема 2.6. *Если в замыкании области D выполняются включения (9), то существует единственное решение задачи 2.3.*

При этом задача 2.3 редуцируется к задаче 2.1, а значит, для нее остаются справедливыми условия разрешимости в квадратурах, полученные ранее.

В § 6 рассматриваются пространственные аналоги описанных выше задач.

В главе 3 рассматриваются системы уравнений, содержащие производные высокого порядка или нормальные производные в граничных условиях. Используемый во второй главе метод, основанный на факторизации уравнений системы с целью получения условий разрешимости в квадратурах задачи Гурса, распространяется в этой главе на двумерные системы псевдопараболических уравнений 3-го порядка, а затем обобщается на системы n-го порядка

$$u_{k(r,s)} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+s}}^{r}\sum_{j=0}^{s}\left(a_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)} + a_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\right) = f_k, \qquad (10)$$

где $u_{k(i,j)} = \frac{\partial^{i+j}u_k}{\partial x^i \partial y^j},\ k=1,2,\ i>1,\ j>1.$

В § 9 той же главы для системы первого порядка рассматривается задача с нормальными производными второго порядка в граничных условиях и ее n-

мерное обобщение.

Задача 3.6. В области D найти регулярное решение системы

$$\begin{cases} u_x = a(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_y = b(x,y)u + f_2(x,y), \end{cases} \tag{11}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} c_1(y)u_{xx}(x_0,y) + c_2(y)v_{xx}(x_0,y) = m_1(y), \\ d_1(x)u_{yy}(x,y_0) + d_2(x)v_{yy}(x,y_0) = m_2(x). \end{cases}$$

Считаем $a,\ a_y,\ b,\ b_x,\ f_1,\ f_2 \in C(\overline{D})$, $c_1,\ c_2,\ n_1 \in C[y_0,y_1],\ d_1,\ d_2,\ n_2 \in C[x_0,x_1]$, причем $c_1^2 + c_2^2 \neq 0,\ d_1^2 + d_2^2 \neq 0$.

Сформулированы условия, при которых задача 3.6 разрешима однозначно или с точностью до двух произвольных постоянных.

Задача 3.7. В области D найти регулярное решение системы (11), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} a_0(y)\varphi(y) + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}|_{x=x_0} + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(y)\frac{\partial^j v}{\partial x^j}|_{x=x_0} = m_1(y), \\ b_0(x)\psi(x) + \sum\limits_{i=1}^{r} b_i(x)\frac{\partial^i u}{\partial y^i}|_{y=y_0} + \sum\limits_{j=1}^{s} d_j(y)\frac{\partial^j v}{\partial y^j}|_{y=y_0} = m_2(x). \end{cases}$$

Доказана теорема

Теорема 3.14. *Если* $a_i^2 + c_j^2 \neq 0\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}),\ b_k^2 + d_l^2 \neq 0\ (k = \overline{1,r},\ l = \overline{1,s})$ *и* $a_0(y) \neq 0,\ b_0(x) \neq 0$, *то число произвольных постоянных* t, *с точностью до которых разрешима задача 3.7 может принимать значение*

$$0 \leq t \leq T,$$

где $T = \max\{n+r,\ m+r-1,\ n+s-1,\ m+s-2\}$.

В главе 4 полученные ранее варианты разрешимости применяются к системам уравнений Вольтерра с частными интегралами

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^{n}(a_{jk}\int\limits_{x_k^0}^{x_k}(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\varphi_i)dt_k) + f_j, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{12}$$

с целью выделения случаев их разрешимости в явном виде. Здесь $\varphi_j = \varphi_j(x_1,\dots,x_n)$ – неизвестные функции, $a_{jk},\ b_{ki},\ f_j$ – переменные коэффициенты и свободный член, зависящие от $(x_1, \ldots, x_n)$. Система (12) редуцируется к задаче

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_{jk}(x) u_j(x) = f_k(x), \\ u_k|_{x_k = x_k^0} \equiv \varphi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \ (k = \overline{1, n}), \end{gathered} \tag{13}$$

которая является частным случаем однозначно разрешимой задачи 1.1. При $n = 2$ задача (13) рассматривалась в § 3: выделено 26 различных условий разрешимости этой задачи (а, следовательно, и системы (12)) в квадратурах. В случае $n = 3$ на основании результатов § 4 получено 99 вариантов разрешимости системы (12) в явном виде.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Автор выражает глубокую признательность Валентину Ивановичу Жегалову за предложенную тематику исследований, постоянное внимание к работе и поддержку, а также Алексею Николаевичу Миронову за ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Созонтова, Е. А. О характеристических задачах для одной системы гиперболического типа в трехмерном пространстве / Е. А. Созонтова // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. серия. – 2013. – №6 (107). – С. 74–84.

2. Созонтова, Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е. А. Созонтова // Изв. вузов. Математика. – 2013. – №10. – С. 43–54

3. Жегалов, В. И. Условия разрешимости одной системы интегральных уравнений в квадратурах / В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, №7. – С. 958–961.

4. Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости трехмерной системы интегральных уравнений в квадратурах / Е. А. Созонтова // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. серия. – 2015. – №10 (132). – С. 40–46.

5. Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости граничных задач в квадратурах для гиперболических систем второго порядка / Е. А. Созонтова //

Уфимск. матем. журн. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 135–140.

6. Созонтова, Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы высокого порядка / Е. А. Созонтова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 94–111.

7. Жегалов, В. И. Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах / В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 270–272.

8. Созонтова, Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной системы первого порядка / Е. А. Созонтова // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2017. – № 2. – С. 128–138.

Публикации в других изданиях

9. Созонтова, Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е. А. Созонтова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", г. Казань, 1–7 июля 2011 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, Изд-во Казан. гос. ун-та., 2011. – Т. 43. – С. 322–323.

10. Созонтова, Е. А. О характеристической задаче с нормальными производными 2-го порядка для системы гиперболического типа / Е. А. Созонтова // Труды IV международной конференции для молодых математиков по дифференциальным уравнениям и приложениям, посвященная Я. Б. Лопатинскому, г. Донецк, 14–17 ноября 2012 г. – Донецк: Донецкий национальный ун-т, 2012. – С. 76.

11. Созонтова, Е. А. О характеристической задаче с нормальными производными n-го порядка для одной системы гиперболического типа / Е. А. Созонтова // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., г.Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 2. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 86–87.

12. Созонтова, Е. А. Характеристические задачи для одной системы гиперболического типа в трехмерном пространстве / Е. А. Созонтова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического об-

разования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2013”, г. Санкт-Петербург, 15–20 апреля 2013 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. – С. 130–132.

13. Жегалов, В. И. О разрешимости одной системы уравнений с частными интегралами / В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции “Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014”, г. Казань, 29 сентября–1 октября 2014 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – Т. 49. – С. 160–162.

14. Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости в квадратурах задачи Гурса для гиперболической системы второго порядка / Е. А. Созонтова // Материалы Четырнадцатой Всероссийской молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения – 2015”, г. Казань, 22–27 октября 2015 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, Изд-во Академии наук РТ, 2015. – Т. 52. – С. 140–143.

15. Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной гиперболической системы первого порядка / Е. А. Созонтова // Материалы международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016”. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, 2016. – С. 365–369.

16. Созонтова, Е. А. К условиям разрешимости характеристической задачи в квадратурах для системы уравнений с кратным дифференцированием / Е. А. Созонтова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2016”, г. Санкт-Петербург, 11–15 апреля 2016 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 104–105.

17. Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы уравнений n-го порядка / Е. А. Созонтова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2016”, г. Санкт-Петербург, 11–15 апреля 2016 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 106–108.

18. Жегалов, В. И. К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах / В. И. Жегалов, Е. А. Созонтова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Пятнадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2016", г. Казань, 24–29 ноября 2016 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, Изд-во Академии наук РТ, 2016. – Т. 53. – С. 75–76.

19. Созонтова, Е. А. Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений n-го порядка / Е. А. Созонтова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции "Герценовские чтения – 2017", г. Санкт-Петербург, 10–14 апреля 2017 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. – С. 93–94.

20. Созонтова, Е. А. К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы второго порядка / Е. А. Созонтова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Шестнадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2017", г. Казань, 24–29 ноября 2017 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т. 55. – С. 140–141.