

0-803328

*На правах рукописи*



**ЛЫКОВ**  
**Иван Александрович**

**Режимы с обострением процессов переноса в атмосфере:  
особенности математического и численного моделирования методами  
нелинейной динамики**

Специальность 05.13.18 –  
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени кандидата**  
**физико-математических наук**

**Екатеринбург**  
**2013**

Работа выполнена на кафедре общей и молекулярной физики и в секторе нелинейной динамики НИИ Физики и прикладной математики Института естественных наук ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина».

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор  
*Быстрый Геннадий Павлович*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,  
*Иванов Алексей Олегович*,  
ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,  
заведующий кафедрой математической физики Института математики и компьютерных наук;

кандидат физико-математических наук,  
*Баталов Сергей Васильевич*,  
ФГБУН Институт физики металлов УрО РАН, научный сотрудник лаборатории теории нелинейных явлений

Ведущая организация: ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН» (г. Екатеринбург).

Защита состоится «18» декабря 2013 г. в 12 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук на базе Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, зал диссертационных советов, к. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ

Автореферат разослан «14» ноября 2013 г.



853789

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Паменов В. Г.

**Актуальность темы**

Изучение климата нашей планеты всегда являлось одной из актуальных задач в связи с необходимостью выполнять его предсказание для планирования разнообразной деятельности человека. В последнее время довольно остро встает проблема изучения и компенсации влияния человека на окружающую среду. Атмосфера является одной из существенных составляющих, определяющих общее изменение климата на планете. Поэтому изучение протекающих в ней нелинейных процессов, в том числе процессов переноса, является актуальной задачей.

Проблема моделирования процессов переноса возникла ещё в начале XX века. Такими проблемами занимались Н. С. Пискунов, А. Н. Колмогоров, Р. Мюррэй, А. А. Самарский, А. Ребров и др. Особую актуальность в середине XX века приобретает изучение существенно нелинейных процессов переноса в открытых неравновесных системах.

Ввиду возникновения различных сложностей при попытках нахождения аналитических решений нелинейных уравнений диффузионного типа с развитием электронно-вычислительной техники появилась возможность нахождения их решений с помощью численных методов. Полученные разностные схемы для большинства уравнений математической физики позволяют проводить эффективное численное моделирование многих задач, в том числе нелинейных задач переноса для описания атмосферных явлений. При исследовании поведения решений некоторых нелинейных задач горения А. А. Самарским было введено понятие так называемого режима с обострением.

*Режим с обострением* – математический закон изменения исследуемых переменных, характеризующийся сверхбыстрым нарастанием их величин в результате наличия сильной положительной нелинейной обратной связи [14]. Может описывать неравновесные фазовые переходы.

Для математического моделирования очень важной является проблема проверки правильности построения разностных схем, которая может быть решена введением некоторых термодинамических функций [7] как пробных математических функций. Такая постановка делает данную работу принципиально отличной от других работ в этой области.

Однако, несмотря на значительную проработку подходов моделирования и описания нелинейных режимов переноса, в том числе и с обострением, такой подход требует введение новых математических методов, в том числе для проверки достоверности получаемых решений.

Автором для получения близких к наблюдаемым численных решений и проверки их достоверности, а также достоверности численных методов предложен метод пробных термодинамических функций. Метод связан с определением математических выражений для нахождения основных термодинамических величин, что для нелинейных открытых и неравновесных систем является нетривиальной задачей.

**Цель работы**

Цель работы – построение нелинейных математических моделей переноса тепла, импульса и заряда в атмосфере в режиме с обострением, способных описывать образование торнадо и молнии, и исследование возникающих пространственных диссипативных самоорганизованных структур.

Указанная цель предполагает решение следующих основных задач:

1. Построение двумерных нелинейных математических моделей переноса тепла, импульса и заряда в атмосфере в режиме с обострением. Исследование полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа. Определение условий получения непротиворечивых результатов математического моделирования.

2. Разработка для многопроцессорных систем численных алгоритмов решения полученной системы нелинейных уравнений на основе явно-неявных разностных схем и создание программного продукта с целью получения результатов численного моделирования. В рамках перехода к трёхмерной задаче переноса в атмосфере в режиме с обострением модернизация методов нелинейной динамики для улучшения эффективности количественной оценки хаотических свойств нелинейных моделей. Создание соответствующего программного продукта.

3. Получение и исследование решений численными методами, их проверка на достоверность в рамках метода пробных термодинамических функций, сравнение с данными наблюдений.

### **Используемые методы исследования**

Автором для решения поставленных в работе задач использовались методы нелинейной динамики, основные идеи которой были предложены Пуанкаре ещё в конце 20 века. На сегодняшний день они приобрели значительное развитие и обеспечили значительный прогресс в понимании физических основ хаотической динамики не только механических перемещений, но и процессов переноса, систем реакция-диффузия и др. Главная идея данного подхода заключается в использовании нелинейных математических моделей для описания открытых систем со сложным поведением. Помимо методов нелинейной динамики использовались методы теории разностных схем, теории бифуркаций и катастроф, теории детерминированного хаоса, теории вероятности и теории информации, методы из теории переноса и термодинамики. Для получения численных решений использовались методы компьютерного моделирования. Это позволило обеспечить глубину и достоверность результатов исследования, обоснованность выводов. Для создания программных продуктов применялась среда программирования Borland Delphi 7, основанная на языке Object Pascal.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Концепция построения двумерных нелинейных математических моделей переноса импульса и заряда в атмосфере в режиме с обострением для описания таких атмосферных явлений, как торнадо и молния.

2. Метод пробных термодинамических функций, применённый для проверки достоверности результатов математического и численного моделирования.

3. Оригинальный метод численного решения исследуемой системы двух нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа в плоском случае с учётом перекрёстных эффектов и функции источников и стоков.

4. Модернизированный метод Хёрста, использованный для анализа поведения нелинейных систем, и позволяющий производить оценку времени забывания начальных условий. При этом для хаотической динамики климата при усилении влияния человека показано существование режима с обострением.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Теоретическая ценность диссертации состоит в развитии нелинейных математических моделей переноса тепла при горении, импульса и заряда в атмосфере в режиме с обострением, более глубокого понимания причин возникновения самоорганизации при протекании анизотропных процессов.



бифуркаций и катастроф. Развита современные представления о нелинейной динамике атмосферных явлений, изменения климата с апробацией на широком классе задач.

Практическая значимость проведенного исследования заключается в получении новых результатов, как для математического моделирования в задачах с обострением, так и в численных методах. Разработаны, реализованы и протестированы оригинальные алгоритмы решения исследуемой системы нелинейных уравнений диффузионного типа и определения основных показателей нелинейной динамики. Оригинальный набор методов исследования параметров атмосферы с хаотической динамикой позволяет анализировать её сложность и состав, а также прогнозировать поведение исследуемых параметров для широкого класса прикладных задач.

### **Достоверность**

Достоверность представленных теоретических результатов заключается в непротиворечивости теории с экспериментом и подтверждается сравнением результатов, полученных при решении задач переноса импульса и заряда при использовании обоснованных методов математического моделирования с экспериментальными данными. Достоверность полученных численных решений уравнений математической физики подтверждена с помощью метода пробных термодинамических функций, а также сравнением результатов численного моделирования на разных программных продуктах, созданных с использованием различных сред программирования.

### **Научная новизна исследования**

В области разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений:

1. Впервые разработана обобщённая математическая модель для описания режима с обострением неравновесных нелинейных процессов переноса тепла, импульса и заряда в двухкомпонентных системах. Впервые в этих задачах дана математическая интерпретация параметров функций источников и стоков. При численном моделировании используемых уравнений математической физики введён метод пробных термодинамических функций. Он использован для получения близких к наблюдаемым численных решений и проверки их достоверности за счёт установления критериев самоорганизации.

2. Впервые с помощью термодинамического подхода получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа в виде обобщённого уравнения Курамото-Цузуки с учётом перекрёстных эффектов для описания режима с обострением задач переноса тепла, импульса и заряда в атмосфере.

В области разработки, исследования и обоснования математических объектов:

3. Задачи с обострением сформулированы и решены для векторных величин.
4. Впервые определены гидродинамические и термодинамические условия самоорганизации для нелинейных явлений переноса импульса и заряда в атмосфере, установлены ограничения на параметры нелинейных уравнений.

В области разработки, обоснования и тестирования эффективных численных методов с применением ЭВМ:

5. Найден оригинальный метод численного решения исследуемой системы двух нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа.

6. Построен оригинальный алгоритм получения численных решений исследуемой системы уравнений для многопроцессорных систем.

7. Впервые алгоритмы численного решения проверены на достоверность с помощью метода пробных термодинамических функций.

### **Апробация работы**

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Москва, 2012), на Третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2012), на Российской конференции по магнитной гидродинамике «РМГД-2012» (Пермь, 2012), на Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения» (Москва, 2012), на XI Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Екатеринбург, 2012). Результаты неоднократно обсуждались, в том числе на семинарах в лаборатории «Физики климата и окружающей среды» с участием иностранных специалистов (Екатеринбург, 2012), трёх семинарах отдела прикладных задач и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, семинаре лаборатории теории нелинейных явлений Института физики металлов УрО РАН, семинаре кафедры математической физики ИМКН УрФУ, семинарах департамента физики ИЕН УрФУ.

Результаты исследования использовались автором для учебного процесса при чтении учебных курсов «Синергетика» и «Физика открытых систем» по специальностям «Молекулярная физика» и «Медицинская физика» в Уральском федеральном университете в департаменте физики Института естественных наук.

### **Личный вклад автора**

Автором выполнена постановка задач математического моделирования режимов с обострением в процессах переноса тепла при горении на основе двухподрешёточной системы. Впервые введена система двух температурных подрешёток, которая используется в рассмотренных автором задачах математического моделирования процессов теплопереноса. Впервые введена анизотропия источников и стоков, что проявилось в тензорном характере нелинейной функции источников и стоков, благодаря чему за счёт нелинейной положительной обратной связи возникает режим с обострением. Автором впервые получена обобщённая система двух нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа с анизотропией переноса и функции источников и стоков для двумерной задачи, сформулировано несколько краевых задач и для них найдены численные решения. Автором впервые для проверки достоверности решений системы двух нелинейных уравнений применён метод пробных термодинамических функций.

Автору принадлежит построение разностной схемы с весами для полученной системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, нахождение для полученной разностной схемы коэффициентов прогонки и создание комплексных программных продуктов по решению рассмотренных нелинейных уравнений и изучению свойств временных рядов численных решений. Все численные расчёты выполнены автором.

Как в диссертации, так и во всех опубликованных работах все эти пункты выполнены лично автором.

Работа выполнялась в рамках общей научно-исследовательской работы кафедры общей и молекулярной физики, НИР темы 225 отдела теплофизики и поверхностных явлений НИИ физики и прикладной математики Уральского федерального университета, в рамках гранта № 381 (Договор № 11.634.31.0064) Правительства Российской Федерации на проведение научного исследования по направлению «Науки о Земле. Физика климата и окружающей среды. Химия атмосферы. Гидрологический и углеродный циклы. Парниковый эффект, изменение климата и окружающей среды. Дис-

танционное зондирование атмосферы. Математическое моделирование», проводимого под руководством доктора Жёна Жузеля в лаборатории «Физики климата и окружающей среды» ИЕН УрФУ, а также в рамках целевого направления подготовки аспирантов Уральского федерального университета.

### **Публикации**

По теме диссертации у автора имеется 13 публикаций: 2 статьи в реферируемых журналах, 6 статей в сборниках и трудах конференций и тезисах докладов, 2 свидетельства Роспатента о регистрации программных продуктов и 3 публикации в монографиях.

### **Структура и объем работы**

Материал диссертационной работы изложен на 148 страницах машинописного текста. Она состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы в 122 ссылки, содержания 1 таблицы и 36 рисунков.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дан краткий обзор по проблематике исследования, формулируется цель, и определяются задачи работы, её теоретическая и практическая значимость.

*Первая глава посвящена построению обобщённой нелинейной математической модели режима с обострением процессов переноса тепла, импульса и заряда в атмосфере для описания таких явлений, как торнадо, циклон и молния. Оригинальное построение математической модели позволило получить результаты численного эксперимента соответствующие наблюдаемым явлениям, ввести метод пробных термодинамических функций, который использован для проверки достоверности численных решений и установления критериев самоорганизации. Приведённые в конце каждого параграфа и главы результаты являются важными для развития, как нелинейной теории переноса, так и термодинамики неравновесных процессов.*

В параграфе 1 впервые для задач с обострением в рамках термодинамики неравновесных процессов построена нелинейная математическая модель переноса тепла с двумя подрешётками по температуре. При написании литературного обзора задач горения автором выявлены проблемы, описанные ниже, без решения которых невозможно построение эффективной математической модели для описания возникновения диссипативных структур вследствие возникновения самоорганизации для явлений переноса тепла.

При построении математической модели использован принцип локального неравновесия.

*Определение.* Локально-неравновесной системой называется система, которая неравновесна не только в целом, но и в локальной области.

Для моделирования процессов самоорганизации введен *принцип систем с самоорганизацией*: В открытых термодинамических системах с постоянной внутренней энергией при возникновении самоорганизации уменьшение энтропии сопровождается ростом свободной энергии (свободная энергия накапливается) и наоборот. Последнее означает, что свободная энергия может «расходиться» за счёт разрушения самоорганизованных структур.

Данный принцип позволяет автору ввести в модель условия самоорганизации и проверить её возникновение при получении точных или численных решений.

Расширим нелинейную задачу по теплопереносу академика Самарского А. А., представленную, например, в работе [1], сделав попытку решить проблемы, решение

которых отсутствует в задаче Самарского. Одной из проблем является обоснование ввода констант функции источников и стоков.

Рассмотрение среды горения как среды с двумя устойчивыми состояниями приводит нас к функции источников и стоков в виде кубического полинома. В этом случае показано, что можно ввести в рамках методов математической физики упрощённое его описание через параболическое уравнение теплопроводности с нелинейной функцией источников и стоков:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{W}{C_v \rho}, \quad \frac{W}{C_v \rho} = qT - \alpha T^3, \quad (1)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности ( $\text{м}^2/\text{с}$ ),  $W$  – функция источников тепла ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ). Источник тепла считаем линейным, а сток – нелинейным:  $q$  – константа, характеризующая интенсивность источника, а  $\alpha$  – нелинейного стока тепла соответственно.

**Утверждение.** В уравнениях диффузионного типа с источниками и стоками константы  $q$  и  $\alpha$  связаны со скоростями прямого и обратного переходов между состояниями  $A$  и  $K$  через состояние  $C$ .

В параграфе 1 диссертации проведено доказательство данного утверждения.

При замене переменных  $W' = T', W_+ = T_+, W_- = T_-$  в отличие от Самарского А. А. для данного случая автором найдены выражения для констант  $q$  и  $\alpha$  через константы прямых и обратных реакций  $k_i$  ( $i=1,2,3,4$ ):

$$\alpha \equiv k_3, \quad q = \frac{(k_2)^2}{3k_3} W_+^2 - k_1. \quad (2)$$

В отличие от Самарского А. А., автором в рассмотрение дополнительно введена двухподрешётчатая тепловая система (например, топливо–окислитель), которая учитывает анизотропию процессов теплопереноса. Она будет характеризоваться двумя температурными подрешётками с температурами  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Этот подход, заключающийся в рассмотрении двухкомпонентной системы, распространён на все решаемые в диссертации задачи.

**Определение.** Процесс переноса называется анизотропным, если нарушается коллинеарность векторов потока и силы, его вызывающей, т.е. если в силу каких-либо условий появляются выделенные минимаксные направления переноса.

**Гипотеза.** Неограниченный/ограниченный рост переменных связан как с наличием нелинейной положительной обратной связи (ПОС), так и с анизотропией процессов переноса (наличием выделенных направлений).

В этом случае система уравнений для двух подрешёток может быть записана в виде единственного уравнения с комплексной переменной  $T = T_1 + iT_2$ , которое при переходе к безразмерному виду и замене  $T^* = \Phi$  переходит в уравнение (6).

**Метод пробных термодинамических функций.** Введение в математическую модель оригинального термодинамического подхода позволяет определить выражения для нахождения основных термодинамических функций.

В отличие от оригинального термодинамического подхода, предложенного в работе [7], исходя из закона изменения свободной энергии, может быть записано выражение для скорости её изменения. Данное выражение через внутренние векторные термодинамические потоки и силы и функцию внешнего потока энтропии при фиксированном уровне внутренней энергии для плоского слоя постоянного объема при

полном отсутствии неформализуемых энергетических потерь ( $\sigma \equiv 0$ ) и постоянной температуре  $T = T_0$  приведено ниже:

$$\frac{dF}{dt} = -T_0(\sigma^e + \vec{J}^i \vec{X}^i). \quad (3)$$

Здесь  $T_0 \sigma^e \geq 0$  – функция внешних источников,  $S$  – удельная энтропия ( $[S] = \text{Дж}/\text{К} \cdot \text{м}^3$ ),  $\vec{J}^i \vec{X}^i$  – скалярное произведение внутренних потоков и сил,  $F$  – свободная энергия  $[F] = \text{Дж}/\text{м}^3$ .

В задачах с обострением можно ввести метод пробных термодинамических потенциалов, которые описывая самоорганизацию, могут служить удобным математическим методом проверки достоверности результатов математического и численного моделирования.

В параграфе 2 предлагается рассмотрение оригинальной математической модели переноса импульса в атмосфере в режиме с обострением, построенной автором совместно с Быстрым Г. П. и Охотниковым С. А.

**Моделирование режима с большими скоростями движения.** Предполагается, что в случае больших скоростей движения, которые имеют место в торнадо, при учёте наличия выделенных направлений и ПОС реализуется режим с обострением. А это согласно теории А. Самарского требует представления второго слагаемого в уравнении Навье-Стокса в виде суммы линейных источников и нелинейных стоков, что формализуется в следующем виде:

$$\frac{T_0}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma^e}{\partial \vec{\vartheta}} \right) = q \vec{\vartheta} - \alpha |\vec{\vartheta}|^2 \vec{\vartheta}, \quad (4)$$

где константы  $q$  и  $\alpha$  определяются также выражением (2) для двух выделенных значений скоростей. Предположение о несжимаемости атмосферы ( $\text{div} \vec{\vartheta} = 0$ ) для больших скоростей движения воздуха связано с тем, что при их наличии для его сжатия необходимо огромное давление, которое при обычных условиях не наблюдается. Это предположение позволяет произвести численную оценку вертикальной компоненты скорости движения воздуха в торнадо  $\vartheta_z$ , что выполнено в Главе III.

Была выдвинута гипотеза об анизотропии течения в торнадо, введение которой позволяло объяснить эффект усиления любых флуктуаций в круговом атмосферном воздушном течении: в область вращения с увеличенными скоростями попадают из внешней области лишь наиболее быстрые частицы воздуха, а наиболее медленные – удаляться из неё на периферию.

Конкуренция процессов приращения и распространения импульса с учетом вязкости среды может приводить к появлению новой характеристики среды – некоторого линейного размера – пространственного диаметра торнадо, на котором эти процессы «уравновешивают» друг друга.

В результате получаем систему уравнений для компонент вектора скорости в приведённом виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial t} = v_1^* \left( h^* \left( \frac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial y^2} \right) - v_2^* \left( h^* \left( \frac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial y^2} \right) + q^* \vartheta_x^* - (\alpha_1^* |\vec{\vartheta}^*|^2 \vartheta_x^* - \alpha_2^* |\vec{\vartheta}^*|^2 \vartheta_y^*) \right) \right. \\ \left. \frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial t} = v_1^* \left( h^* \left( \frac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial y^2} \right) + v_2^* \left( h^* \left( \frac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial y^2} \right) + q^* \vartheta_y^* - (\alpha_1^* |\vec{\vartheta}^*|^2 \vartheta_x^* + \alpha_2^* |\vec{\vartheta}^*|^2 \vartheta_y^*) \right) \right) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } v_i^*(h) = \frac{v_i(h) t_0}{t_0^2}, \sigma^*(h^*) = \sigma^*(h) \frac{T_0 t_0}{\rho_c g_c^2}, \rho^*(h^*) = \frac{\rho(h)}{\rho_c}, h^* = \frac{h}{h_0} = \frac{\mu g h}{RT_0}, q^* = q t_0, \dot{\alpha}^* = \dot{\alpha} t_0 g_c^2.$$

Систему уравнений (5) можно записать в более компактном виде, если умножить второе уравнение на  $i$  и сложить правые и левые части уравнений. В этом случае, делая замену  $\vartheta_x^* + i \vartheta_y^* = \Phi$ , получаем обобщённое уравнение Курамото-Цузуки:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = k_1^* (1 + i c_1) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^{*2}} \right) + q^* \Phi - \alpha_1^* (1 + i c_2) |\Phi|^2 \Phi. \quad (6)$$

Здесь  $c_1$  – константа, характеризующая перекрёстное взаимодействие свойств переноса импульса. Константа  $c_2$  характеризует перекрёстные эффекты взаимодействия нелинейных стоков импульса и отвечает за сложную нелинейную ПОС, приводящую к режиму с обострением.

**Метод пробных термодинамических функций.** За счёт введения внутренних потоков и сил, связанных с силами вязкого трения и учёта сильных потоков импульса через границы плоского атмосферного слоя автором получены математические выражения для термодинамических характеристик: производства энтропии, внешнего потока энтропии и других функций.

**Определение.** Производством энтропии будем называть неотрицательную функцию  $\sigma'$ , являющуюся функцией Ляпунова  $\sigma' \geq 0$ ,  $\dot{\sigma}' \leq 0$ .

Функции **производства и внешних потоков энтропии** следуя методу, изложенному в работе [7], могут быть записаны в виде:

$$\sigma' = \vec{J} \cdot \vec{X} = \frac{\eta_i(h)}{T_0} \left( \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right)^2 \right) + c_1 \left( \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right)^2 \right) - (1 + c_1) \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{\rho(h)}{T_0} g^2 \left( \frac{q}{2} - \alpha_1 \left( \frac{1}{4} g^2 - \frac{c_2}{3} g_x g_y \right) \right)$$

Последнее позволило автору в рассматриваемой нелинейной задаче переноса импульса в случае рассмотрения векторных потоков и сил записать выражения для полной скорости изменения энтропии и свободной энергии. Выражение для **скорости изменения энтропии** в двухкомпонентной среде в зависимости от высоты  $h$  выглядит следующим образом:

$$\frac{dS(h)}{dt} = \frac{d_0 S}{dt} + \frac{d_1 S}{dt} = \sigma^*(h) + \sigma'(h) = \frac{\rho(h)}{T_0} g^2 \left( \frac{q}{2} - \alpha_1 \left( \frac{1}{4} g^2 - \frac{c_2}{3} g_x g_y \right) \right) + \frac{\eta_i(h)}{T_0} \left( \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right)^2 \right) + c_1 \left( \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right)^2 \right) - (1 + c_1) \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Данное выражение служит основой метода пробных термодинамических функций, т.к. позволяет установить критерии самоорганизации.

**Критерии самоорганизации (следствие).** Поиск критериев самоорганизации основан на следующих предположениях, которые развёрнуто представлены в диссертационной работе.

**Утверждение.** На основе метода пробных термодинамических функций могут быть получены термодинамические и гидродинамические критерии самоорганизации.

**Определение.** Имея в виду выражение (8), основным термодинамическим критерием самоорганизации будем называть математическое выражение  $dS/dt < 0$ , ко-

торое говорит о том, что при самоорганизации энтропия, как функция состояния системы, уменьшается.

Данное условие с учётом неотрицательности функции производства энтропии  $\sigma^i \geq 0$  достижимо лишь при  $\sigma^* < 0, |\sigma^*| > \sigma^i$ . Эти неравенства являются глобальными условиями самоорганизации и использованы автором совместно с Быстраем Г. П. и Охотниковым С. А. для вывода критериев самоорганизации в задачах с обострением в виде математических неравенств для констант и переменных нелинейных уравнений.

**Гидродинамические критерии самоорганизации** в торнадо соответствуют рассмотрению термодинамических характеристик для торнадо, как нелинейной вихревой системы. Условие отрицательности внешних потоков энтропии соответствуют следующие ограничение на константу  $c_2$  уравнения (6) и ограничение на модуль вектора скорости:

$$g^2 \geq \frac{4q^*}{\alpha_1^*(1 - 4c_2^2/9)}, \quad c_2^2 < \frac{9}{4}. \quad (9)$$

Данные неравенства и являются необходимыми условиями самоорганизации для модели переноса импульса в атмосфере при возникновении торнадо.

В параграфе 3 в рамках задач с обострением рассматривается газовый разряд в атмосфере в условиях конкуренции переноса основного заряда и скин-эффекта на некотором пространственном диаметре. Рассмотрена нелинейная положительная обратная связь, приводящая к ускоренному изменению модуля обобщенного потенциала по всему пространству среды и обеспечивающая сверхбыстрое нарастание электрического тока, имеющее место в действительности [14]. Такой газовый разряд может быть идентифицирован с атмосферным электричеством в ограниченном пространстве – молнией.

Введено описание рассматриваемой области тонкого поперечного слоя молнии через рассмотрение обобщённого потенциала в виде  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , где присутствуют две компоненты по пространственным координатам и времени:  $\varphi_1(x, y, t), \varphi_2(x, y, t)$ , отвечающие за чистую проводимость и скин-эффект. Разделение потенциала на действительную  $\varphi_1$  и мнимую  $\varphi_2$  части указывает на то, что происходит два процесса: 1) перенос заряда в молнии, описываемый реальной частью потенциала  $\varphi_1$ ; 2) скин-эффект, описываемый мнимой частью потенциала  $\varphi_2$ .

Согласно приведённым утверждениям и аналогично рассмотрению в предыдущих параграфах введена анизотропная функция источников и стоков заряда.

В этом случае для двух компонент потенциала получена система двух нелинейных параболических уравнений диффузионного типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} = \gamma_1^* \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial y^2} \right) - \gamma_2^* \left( \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial y^2} \right) + q^* \varphi_1^* - \left( \alpha_1^* |\varphi^*|^2 \varphi_1^* - \alpha_2^* |\varphi^*|^2 \varphi_2^* \right) \\ \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t} = \gamma_1^* \left( \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial y^2} \right) + \gamma_2^* \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial y^2} \right) + q^* \varphi_2^* - \left( \alpha_1^* |\varphi^*|^2 \varphi_2^* + \alpha_2^* |\varphi^*|^2 \varphi_1^* \right) \end{cases} \quad (10)$$

где  $\gamma_1^* = \frac{\gamma_1 l_0}{C \ell_0^2}$ ,  $\gamma_2^* = \frac{\gamma_2 l_0}{C \ell_0^2}$ ,  $q^* = q t_0$ ,  $\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} l_0 \varphi_c^2 \cdot t \equiv t / t_0$ ,  $\varphi^* = \varphi / \varphi_c$ , где  $l_0, t_0, \varphi_c$  – нормировочные параметры масштаба области самоорганизации молнии ( $m$ ), времени ( $s$ ) и потенциала ( $B$ ), которая при переходе к безразмерному виду и замене  $\varphi^* = \Phi$  даёт уравнение (6).

В параграфе 4 приведено обобщённое уравнение Курамото-Цузуки, некоторые его свойства и формулируется краевая задача.

Все рассмотренные задачи переноса в атмосфере в режиме с обострением могут быть описаны обобщённым уравнением Курамото-Цузуки (6), в котором  $c_1$  – константа, характеризующая перекрёстное взаимодействие свойств теплопереноса в системе топливо-окислитель, переноса компонент импульса, токов основной проводимости и скин-эффекта. Константа  $c_2$  характеризует перекрестные эффекты взаимодействия нелинейных стоков тепла, импульса и заряда и отвечает за сложную нелинейную положительную обратную связь, приводящую к режиму с обострением и за счёт конкуренции с процессами распространения и приращения к образованию пространственно-локализованных структур.

Уравнение (6) является нелинейным дифференциальным уравнением диффузионного типа и описывает анизотропный перенос в режиме с обострением, являясь, таким образом, объединяющим для трёх рассмотренных моделей переноса тепла, импульса и заряда. Уравнение (6) является уравнением параболического типа с комплексной переменной и в частном случае при  $k_1^* = 1, q^* = 1$  и  $\alpha_1^* = 1$  переходит в известное комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау, описанное подробно в работе [8], или уравнение Курамото-Цузуки [9], многие свойства которого описаны ещё Самарским А. А. с коллегами в работах [1, 2].

Решение систем уравнений (5) и (10) искалось в виде «спиральной волны», для которой начальные условия для функции  $\Phi(x^*, y^*, t)$  задавались в виде небольшой начальной закрутки следующим образом:

$$\Phi(x^*, y^*, 0) = \begin{cases} S(r) \exp \left( i \cdot \left( M_0 \sqrt{(x^* - x_c^*)^2 + (y^* - y_c^*)^2} + m\varphi \right) \right), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (11)$$

здесь  $S(r) = \Phi_0$  – амплитуда,  $M_0$  – модуль волнового вектора вдоль радиус-вектора, на который в задаче переноса импульса могла влиять влажность,  $x_c, y_c$  – координаты центра спиральной волны,  $m$  – топологический заряд,  $x^* = x/\ell_0, y^* = y/\ell_0, x_c^* = x_c/\ell_0, y_c^* = y_c/\ell_0, r_0$  – диаметр области начальной закрутки. Спиральные волны с топологическим зарядом  $|m| > 0$ , являются одними из автомодельных решений уравнения (6). Однако ввиду наличия дополнительных параметров в этом уравнении форма спиральной волны может быть отличной от представленной в работах А. Самарского ( $S(r) \neq \Phi_0$ ).

Граничные условия в краевой задаче для уравнения (6) задавались в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, y^*, t^*) &= 0 & \Phi^*(1, y^*, t^*) &= 0 \\ \Phi^*(x^*, 0, t^*) &= 0 & \Phi^*(x^*, 1, t^*) &= 0 \end{aligned}$$

Уравнение (6) в безразмерном виде совместно с начальными и граничными условиями представляют краевую задачу для горизонтального атмосферного слоя единичного объема. В задачу входит отыскание решений уравнения с определением двух компонент функции  $\Phi$  и определение всех функций, зависящих от них.

Остальные параметры выбирались из условия получения численных решений, соответствующих наблюдаемым явлениям в торнадо и молнии. Однако впоследствии для задачи нелинейного переноса заряда исследовался переход и к решениям, соот-

ветствующим самоподдерживающемуся разряду, получение которого в режиме с обострением является актуальной задачей современного этапа развития физики плазмы [15].

В параграфе 5 представлено совместное рассмотрение переноса импульса и заряда в атмосфере. Представленные выше математические модели переноса импульса и заряда в режиме с обострением позволяют провести совместное рассмотрение данных процессов переноса, которое было предпринято автором.

По аналогии с переносом импульса с учётом переноса заряда для совместной модели можно ввести термодинамические потоки и силы, как для импульсной, так и для электромагнитной составляющей. Поэтому в диссертации рассмотрен также и общий случай, включающий взаимовлияние компонент вектора скорости друг на друга через коэффициент вязкости, наряду с влиянием электромагнитного поля, и функцию стоков в каждом слое, а также учитывающий анизотропию и обострение электромагнитного поля. В случае постоянства  $z$ -компоненты вектора магнитной индукции  $B_z = \text{const}$  записана взаимозависимая система уравнений для проекций скорости для несжимаемой жидкости, а также для электромагнитного поля.

Начальные условия могут быть заданы аналогично моделям переноса импульса и заряда в атмосфере, но вопрос об их корректном выборе остается открытым. Граничные условия для электромагнитного поля могут определять его отсутствие на границе, аналогично граничным условиям для компонент скорости § 2 Главы I.

При решении полученной общей системы уравнений необходимо учитывать возникновение следующих проблем. В первую очередь проблемы, появляющиеся при составлении разностной схемы для системы из 14 уравнений из-за трудности аналитического решения. Необходимо определить соотношения масштабов электрических и гидродинамических явлений (структур) и выполнить переход к общим масштабам. Затруднён анализ устойчивости и сходимости разностной схемы. Необходим учет перекрёстных электро-гидродинамических эффектов, коэффициенты для которых сложно получить из эксперимента. В общем случае, неизвестными являются начальные и граничные условия. На основании отсутствия возможности получения из эксперимента необходимых для модели параметров затруднено сравнение результатов моделирования с экспериментом. Некоторым ограничением является двумерность модели. Это вызывает необходимость перехода к 3D модели и рассмотрения, тем самым, третьего уравнения в системе (5).

Рассмотренная совместная модель переноса импульса и заряда является постановочной и указывает направление дальнейших исследований.

*Вторая глава посвящена численным методам решения неявной разностной схемы для полученной в первой главе системы двух нелинейных параболических уравнений диффузионного типа. Во введении приведено обоснование выбора разностной схемы. В параграфе 1 дано её описание, показаны отличия от аналогичных, и доказано существование метода прогонки. В параграфе 2 описаны основные принципы построения соответствующего программного обеспечения для ЭВМ, принципы впервые применённого оригинального алгоритма для многопроцессорных систем. Особенностью разработки численных методов, в отличие от классических подходов, является использование вспомогательных функций – термодинамических потенциалов, которые ограничивают область физически непротиворечивых численных решений. Это учитывалось автором при разработке алгоритмов и создании программных продуктов. В параграфе 3 определён эффективный набор методов нелинейной динамики, и подробно представлены методы, модернизированные автором для количественной и*

качественной оценки по хаотическим временным рядам основных параметров нелинейных систем. Это сделано в рамках перехода к трёхмерным задачам переноса в атмосфере в режиме с обострением, и на этой основе создан и зарегистрирован программный продукт по изучению хаотических режимов в атмосфере по временным рядам.

Для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа (7) и (11), которые могут быть сведены к уравнению (6), автором предлагается использование одной из экономичных разностных схем, теория для которых развита, например, в работе [13], с расщеплением пространственных операторов дифференцирования по направлениям координат (пространственным направлениям). Автором рассмотрено расщепление, основанное на методе переменных направлений. Такая схема демонстрирует высокую точность и обладает большим запасом устойчивости даже в нелинейных задачах в двумерном случае.

**Определение.** Конечно-разностную схему будем называть экономичной, если число выполняемых арифметических операций при её реализации является пропорциональным числу узлов выбранной расчётной сетки.

В качестве метода численного решения полученной системы уравнений автором предложен аналог метода переменных направлений, имеющего абсолютную устойчивость в двумерных задачах. Для него автором составлена двухслойная по времени разностная схема с весовыми коэффициентами. Её вид с расщеплением пространственных дифференциальных операторов по направлению  $x$  приведён ниже:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{r}_{i,j} - r_{i,j}) &= \frac{v_1 \kappa}{h_x^2} (\hat{r}_{i-1,j} - 2\hat{r}_{i,j} + \hat{r}_{i+1,j}) + \frac{v_1(1-\kappa)}{h_x^2} (r_{i-1,j} - 2r_{i,j} + r_{i+1,j}) + \frac{v_1}{h_y^2} (r_{i,j-1} - 2r_{i,j} + r_{i,j+1}) - \\ &- \frac{v_2 \kappa}{h_x^2} (\hat{z}_{i-1,j} - 2\hat{z}_{i,j} + \hat{z}_{i+1,j}) - \frac{v_2(1-\kappa)}{h_x^2} (z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}) - \frac{v_2}{h_y^2} (z_{i,j-1} - 2z_{i,j} + z_{i,j+1}) + (f_1)_{i,j} \\ \frac{1}{\tau} (\hat{z}_{i,j} - z_{i,j}) &= \frac{v_1 \kappa}{h_x^2} (\hat{z}_{i-1,j} - 2\hat{z}_{i,j} + \hat{z}_{i+1,j}) + \frac{v_1(1-\kappa)}{h_x^2} (z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}) + \frac{v_1}{h_y^2} (z_{i,j-1} - 2z_{i,j} + z_{i,j+1}) + \\ &+ \frac{v_2 \kappa}{h_x^2} (\hat{r}_{i-1,j} - 2\hat{r}_{i,j} + \hat{r}_{i+1,j}) + \frac{v_2(1-\kappa)}{h_x^2} (r_{i-1,j} - 2r_{i,j} + r_{i+1,j}) + \frac{v_2}{h_y^2} (r_{i,j-1} - 2r_{i,j} + r_{i,j+1}) + (f_2)_{i,j} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Здесь  $\tau$  – дробный шаг по времени, индексы  $i \in [0, N]$ ,  $j \in [0, M]$  обозначают положение точки решения на пространственной сетке,  $h_x = l_x / N$ ,  $h_y = l_y / M$ ,  $r \equiv Re(\Phi)$  – действительная и  $z \equiv Im(\Phi)$  – мнимая компоненты уравнения (6). Функции  $f_1, f_2$  – составляющие функции нелинейных источников и стоков согласно их введению выражениями для функции внешних источников и стоков, например (1) и (4).

**Утверждение.** Для составленной конечно-разностной экономичной схемы с изменяемыми весовыми коэффициентами (12) осуществим алгоритм прогонки, и могут быть однозначно определены его коэффициенты.

В параграфе 1 выполнено доказательство данного утверждения. Доказательство построено на выполнении последовательных преобразований разностной схемы к матричному виду неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) с последующим исключением двух из шести неизвестных. Преобладание элементов главной диагонали полученной матрицы НСЛАУ создаёт возможность однозначного определения коэффициентов  $k, q, l, p, m, s$  через коэффициенты разностной схемы и, таким образом, доказывает осуществимость прогонки для схемы (12).

Автором предложен поиск решений в виде:

$$\begin{cases} \bar{z}_{i,j} = k_{i+1} z_{i+1,j} + l_{i+1} + q_{i+1} r_{i+1,j}, \\ r_{i,j} = p_{i+1} r_{i+1,j} + m_{i+1} + s_{i+1} z_{i+1,j}, \end{cases} \quad (13)$$

который позволил определять коэффициенты  $k, q, l, p, m, s$  через коэффициенты разностной схемы в виде выражений (14).

Таким образом, в параграфе 1 был применён метод прогонки для рассматриваемой нелинейной задачи. Метод отличается от характеризующегося большим количеством необходимых арифметических операций  $Op \sim N^3$  метода Гаусса в  $N^2$  раз меньшим количеством операций, где  $N$  – размер пространственной сетки.

$$\begin{aligned} k_{i+1,j} &= \frac{-a_2(a_2 p_{i,j} + a_3)}{\det}, q_{i+1,j} = \frac{a_2(a_1 + a_2 q_{i,j})}{\det}, \\ l_{i+1,j} &= \frac{(a_2 l_{i,j} - d_{i,j}^3)(a_2 p_{i,j} + a_3) - (a_2 m_{i,j} + d_{i,j}^4)(a_2 q_{i,j} + a_1)}{\det}, \\ p_{i+1,j} &= \frac{-a_2(a_2 k_{i,j} + a_3)}{\det}, s_{i+1,j} = \frac{a_2(a_2 s_{i,j} - a_1)}{\det}, \\ m_{i+1,j} &= \frac{(a_2 m_{i,j} + d_{i,j}^4)(a_2 k_{i,j} + a_3) - (a_2 l_{i,j} - d_{i,j}^3)(a_2 s_{i,j} - a_1)}{\det}, \\ \det &= (a_2 p_{i,j} + a_3)(a_2 k_{i,j} + a_3) - (a_2 s_{i,j} - a_1)(a_2 q_{i,j} + a_1) \end{aligned} \quad (14)$$

В параграфе 2 в рамках построения соответствующего программного обеспечения для ЭВМ представлен эффективный алгоритм распараллеливания для многопроцессорных систем. Выполнены исследования на эффективность распараллеливания. Показаны возникающие при таком подходе проблемы. Описаны применённые в программном продукте технологии сокращения необходимого количества используемой оперативной памяти.

В параграфе 3 рассмотрены последствия перехода к трёхмерной задаче переноса в атмосфере в режиме с обострением: появление хаотических режимов, эффективная оценка достоверности численного моделирования которых возможна лишь методами нелинейной динамики. В рамках перехода к трёхмерной задаче переноса в атмосфере в режиме с обострением представлен эффективный набор методов нелинейной динамики для анализа временных рядов, модернизация классического метода Хёрста и метода восстановления потенциальной функции нелинейной системы. На созданный программный продукт по изучению хаотических режимов в атмосфере в составе программного комплекса получено свидетельство ФГБУ ФИПС (Роспатент).

Автор хотел бы отметить, что все вычисления, приведённые в главе 3, выполнялись с помощью специализированных программных продуктов собственной совместной разработки.

В третьей главе представлены результаты выполненного автором численного моделирования явлений переноса тепла, импульса и заряда в режиме с обострением согласно математическим моделям и краевым задачам, сформулированным в Главе I, с помощью созданного автором программного комплекса, описанного в Главе II. На основе метода пробных термодинамических функций показана непротиворечивость построенных моделей самоорганизации пространственно локализованных структур. Для переноса импульса подтверждены гидродинамические и термодинамические условия самоорганизации, показано образование вихревого бассейна и ядра

*торнадо и подтверждены условия его существования. Для переноса заряда в молнии подтверждено условие распада шнура с образованием боковых отведений, выполнено численное исследование неустойчивости шнура молнии на основе получаемых электрофизических и термодинамических характеристик. На основе полученных результатов созданы предпосылки для построения совместной модели переноса импульса и заряда в атмосфере в режиме с обострением.*

**В параграфе 1** представлены результаты численного моделирования режима с обострением при анизотропном переносе тепла в задачах горения. Таким образом, развита нелинейная модель режима с обострением Самарского А. А.

Полученные автором результаты численного моделирования имеют отлѣчия от результатов численного моделирования задач горения, рассмотренных А. А. Самарским [3,4]:

1. Присутствует термодинамическое описание для выявления и дополнительного описания возникающих процессов самоорганизации.
2. Представлены результаты для двухподрешѣточной модели среды горения с введением описания через температуры  $T_1$  и  $T_2$ .
3. При численном моделировании важен учѣт анизотропии процессов теплопереноса при горении в режиме с обострением.
4. Метод пробных термодинамических функций позволил проверить достоверность полученных численных рѣшений за сѣт подтверждения возникновения самоорганизации.

Результатами численного моделирования подтверждены полученные в 90-х годах экспериментальные результаты возникновения устойчивых тепловых структур при горении в камерах сгорания топливных агрегатов при радиальном истечении топлива. Приведѣнные результаты также указывают на ограниченность полученных тепловых структур в пространстве, что объясняется наличием самоорганизации в нелинейной среде горения [Частное сообщение Култышева А. Ю.]. Тем самым подтверждено, что представленная автором модель является обобщением рѣшения задач типа реакция-диффузия на основе классического уравнения Курамото-Сузуки и задач с обострением А. А. Самарского. Она обеспечивает возможность описания пространственных эффектов теплопереноса при горении в режиме с обострением в топках топливных агрегатов, при действии метасоматических процессов в физике земных недр, в высокотемпературной плазме, при лазерном термоядерном синтезе и в низкотемпературной плазме галактического пространства.

**В параграфе 2** представлены результаты численного моделирования переноса импульса в атмосфере в режиме с обострением при существовании торнадо. Вычислены основные гидродинамические и термодинамические характеристики на основе результатов численного моделирования краевой задачи переноса импульса в режиме с обострением в атмосфере. Рассмотрены два случая: непотенциальное течение и частное приближение потенциальных течений, соответствующее уравнению Бернулли. Для данных типов течений в торнадо приведены основные гидродинамические характеристики торнадо, такие как: модуль горизонтальной скорости движения воздушных масс в атмосферном слое, градиент давления в области торнадо, и некоторые пространственные характеристики возникающих структур. Для приближения потенциальных течений дополнительно может быть восстановлен профиль атмосферного давления в воздушном слое при наличии там торнадо.

Самым близким к результатам исследования автора является результат работ Николаевского В. Н. [5]. Выделены отлѣчия результатов математического и числен-

ного моделирования, выполненного автором, от результатов, полученных по модели Николаевского:

1. Причиной образования торнадо в режиме с обострением может служить самоорганизация теплового движения в условиях анизотропии течения.

2. Получено длительное существование торнадо (стационарный режим) при численном моделировании прямоугольной области с соответствующими граничными условиями.

3. Показан резкий рост скоростей вращения в ядре торнадо и длительное существование ядра, выполнено четкое выявление размеров ядра (воронки, хобота).

4. Использован метод пробных термодинамических функций, численно подтверждены условия самоорганизации.

Произведена оценка пространственных характеристик и приведены результаты сравнения случаев непотенциального и потенциального течения.

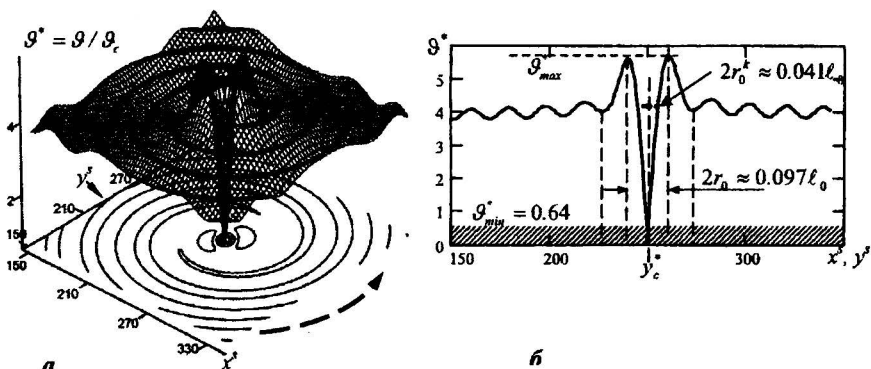


Рис. 1. Центральная часть плоского слоя торнадо вблизи земли. Модуль горизонтальной скорости  $G^*$  (случай непотенциального течения). Вид сверху, его проекция (в виде изолиний) модуля скорости (а), и диагональный профиль (б). Стрелкой отмечено направление закрутки. Штриховая зона отмечает несоответствующие критериям самоорганизации (9) значения скорости.

Определены пространственные характеристики образующегося вихревого ядра (рис. 1), диаметр зоны самоорганизации  $d_0$ , которая также соответствует зоне пониженного давления, ширина кольца выравнивания давления до атмосферного по окраине бассейна, а также характеристики давления, включая градиенты давления, как следствие режима с обострением. Выполнено сравнение полученных характеристик с многочисленными данными наблюдений за торнадо на территории США. Подтверждено появление новой характеристики среды – некоторого линейного размера – пространственного диаметра хобота торнадо, на котором процессы приращения и переноса импульса «уравновешивают» друг друга.

По результатам численного моделирования выполнена оценка вертикальной компоненты скорости  $\Theta_z$ , т.е. пространственного положения восходящих и нисходящих потоков воздуха в торнадо. Подтверждено наличие сильной связи между слоями торнадо, в том числе благодаря присутствию вертикальных потоков воздуха вблизи ядра. Показано, что предположение о несжимаемости атмосферы в торнадо позволяет объяснить эффект локализации нижней части ядра или хобота торнадо в малой ограниченной области.

Приведённые результаты численного эксперимента позволяют провести комплексную оценку как вклада функции источников и стоков в гидродинамические характеристики, так и сравнение пространственных характеристик торнадо, полученных несколькими методами, обобщение которого приведено в таблице 1. В ней же приводятся и сравнительные данные наблюдений за подобными торнадо, что позволяет сделать вывод об адекватности построенной модели для описания пространственных и гидродинамических характеристик наблюдаемых на территории США торнадо.

На рис. 2 представлено поведение скорости изменения энтропии в плоскости воздушного слоя на высоте 1000 м, иллюстрирующее наличие и расположение наблюдаемых в вихревом бассейне торнадо зон самоорганизации (рис. 2а). Видно, что существует граница области диаметром  $d_0$ , на которой перестают выполняться термодинамические условия самоорганизации ( $dS/dt < 0$ ), что приводит к развалу всех вихрей за пределами бассейна торнадо. В вихревом ядре торнадо наблюдаются четыре черные точки в центре на рис. 2а, локализующие наивысшие отрицательные значения скорости изменения энтропии, что подтверждает образование самых устойчивых и сильных вихрей именно в ядре торнадо. Впервые получены значения скорости изменения энтропии внутри самоорганизующейся структуры и вне её, подтверждено возникновение и исчезновение области самоорганизации.

Таким образом, методом пробных термодинамических функций подтверждена достоверность математического и численного моделирования.

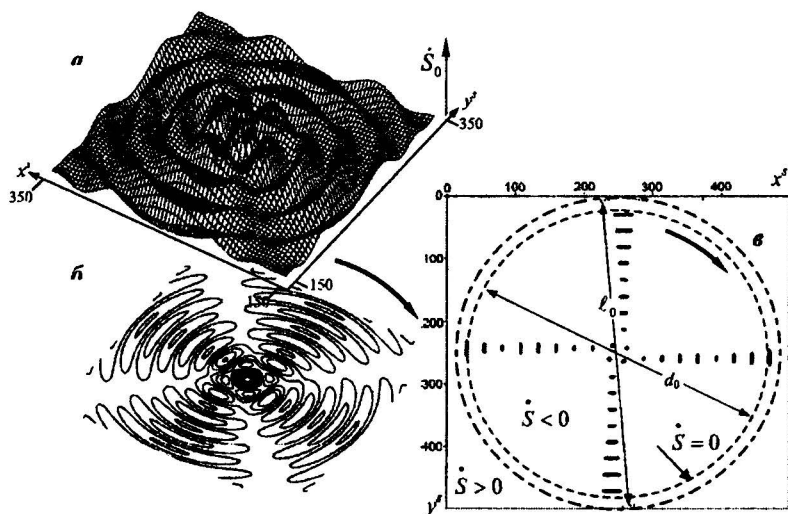


Рис. 2. Полное изменение энтропии в поперечном слое в стационарном режиме возникшего торнадо как функция пространственных координат  $x'$ ,  $y'$  для торнадо (а), его проекция в виде изолиний (б) (вид сверху) и области самоорганизации  $dS/dt < 0$ , выделенные черным цветом (в). Параметры:  $h=1000$  м, где  $\rho=1.087 \text{ кг/м}^3$ ,  $v=1.589 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho^*=0.887$ ,  $v_1^*=1.182$ ,  $v_2^*=1.182$ ,  $q^*=1$ ,  $\alpha_1^*=10$ ,  $\alpha_2^*=1$ .  $\dot{S}_0=4 \cdot 10^4$ ,  $y_0^*=200$ .

**Таблица 1**

**Определение пространственных характеристик вихревых структур  
торнадо при,  $R_0 = 60$   $\ell_0 = 10$  км,  $|m|=1$ , сравнение с данными наблюдений.**

| Характеристика                                                                           |                   | Непотенциальное течение |                   | Потенциальное течение | Данные реальных наблюдений |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-----------------------|----------------------------|
|                                                                                          |                   | по скорости             | по град. давления | по давлению           |                            |
| Диаметр бассейна, км                                                                     | $l_0$             | 10                      |                   |                       | 10-15 [16,18]              |
| Зона пониженного давления и самоорганизации, км                                          | $d_0$             | 8.8                     | 9.2               | 8.5                   | -                          |
| Внутренний диаметр ядра, м                                                               | $2r_0^k$          | 220                     | 180               | 180                   | -                          |
| Толщина стенки, м                                                                        | $\Delta r_0$      | 90                      | 110               | 120                   | -                          |
| Внешний диаметр ядра м                                                                   | $2r_0$            | 400                     | 400               | 410                   | 400-800 [16,18]            |
| Ширина кольца по окраине бассейна, на котором давление становится равным атмосферному, м | $\Delta_c$        | 600                     | 400               | 720                   | -                          |
| Скорость ветра в области стенки, м/с                                                     | $\vartheta_{max}$ | 125                     |                   |                       | 100-175 [17]               |
| Скорость ветра на периферии в момент вихреобразования, м/с                               | $\vartheta_c$     | 22                      |                   |                       | 25 [17]                    |
| Максимальная высота вихреобразования, км                                                 | $h_{max}$         | 10                      |                   |                       | 10-11 [18]                 |
| Среднее давление в области вихреобразования, $p_c$                                       | $\bar{p}$         |                         |                   | 0.9                   | 0.89-0.93 [16,17]          |
| Минимальное давление в области воронки, $p_c$                                            | $p_{min}$         |                         |                   | 0.73                  | 0.67 [18]                  |

При увеличении модуля топологического заряда от  $|m|=1$ , что соответствует одному центральному вихрю (торнадо), до  $|m|=5$  (5 вихрей) (см. рис. 3), обнаружена возможность модели описывать ещё один класс атмосферных явлений – циклоны с различным числом вихрей. Модель описывает эволюцию так называемого «глаза» циклона: области спокойного воздуха в центре циклона. Образование ведущего цен-

тра не рассматривалось автором, и вопрос о существовании таких вихрей остаётся открытым.

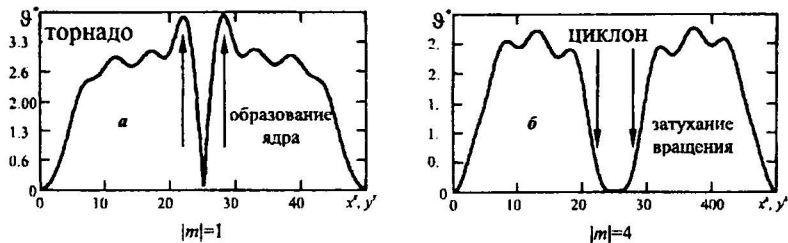


Рис. 3. Диагональный профиль модуля скорости как функция модуля топологического заряда  $m$ , вблизи поверхности земли. Торнадо образуется только при небольшой величине топологического заряда ( $|m| \leq 2$ , (а)), в остальных случаях происходит образование циклона с затуханием вращения в центральной части (образуется «глаз» циклона) (б).

Помимо представленных характеристик проводились исследования влияния модуля волнового вектора в направлении радиус-вектора и величины топологического заряда на результаты численных решений системы уравнений (7). Проводилось определение градиента давления в случае непотенциального и потенциального течения, а также оценка давления в бассейне торнадо.

В параграфе 3 приведены результаты численного моделирования анизотропных процессов переноса заряда при газовом разряде в атмосфере в режиме с обострением. Наиболее близко поставленной задаче численного моделирования процессов переноса заряда в молнии – коротком по длительности газовом разряде – отвечает критерий неустойчивости, соответствующий системе уравнений (10), так как молния – существенно неустойчивый процесс газового разряда в атмосфере.

Приведены основные электрофизические характеристики и результаты применения метода пробных термодинамических функций. Впервые получены значения размеров пространственных структур и показано разрушение шнура с образованием боковых отведений. Анализ численных решений позволяет обнаружить фрактальную структуру не только шнура молнии, но и боковых ответвлений, возникающих после его разрушения молнии спустя определенное время. Описана динамика исчезновения самоорганизации.

Проведено численное исследование устойчивости шнура молнии. Неаналитическое поведение (излом) при критическом значении  $c_1 = \gamma_2^* / \gamma_1^* = 1$ , представленный на рис. 4, аналогичен поведению термодинамических функций при фазовом переходе. Это является следствием выше описанного сильного взаимовлияния скин-эффекта и собственного переноса заряда. В области I ток смещения  $\vec{J}_e = \text{rot } \vec{H}$  незначителен, после излома эти токи становятся значительными, и за счет них возникают области самоорганизации.

Таким образом, показано, что могут быть сформулированы полные условия устойчивости газового разряда в атмосфере для применения в различных технических устройствах.

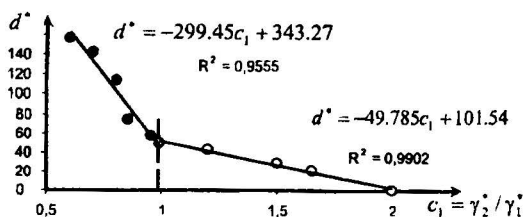


Рис. 4. Зависимость приведенного диаметра шнура молнии  $d^* = d/l_0$  от параметра  $c_1 = \gamma_2^* / \gamma_1^*$ . Параметры, при которых решалась система уравнений (10):  $c_2 = -1$ ,  $q^* = 1$ ,  $\alpha_1^* = 1$ ,  $\alpha_2^* = -1$ .

В параграфе 4 сделано обобщение результатов применения методов нелинейной динамики на примере анализа атмосферы над озером Восток в Антарктике по данным гляциологических исследований. Показано, что нелинейная математическая модель для описания начальной временной эволюции основных атмосферных параметров должна включать как минимум 2 нелинейных уравнения с увеличением их количества до 3-х на последних временных интервалах. Обнаружено наличие странных аттракторов как минимум с 2 зонами притяжения.

На основе построенных моделей с помощью модернизированного метода Хёрста сформулирована и решена задача с обострением хаотической динамики на примере показателя Хёрста для анализа климатических систем.

В заключении сформулированы основные выводы по результатам исследования, приведён список опубликованных работ автора, список использованной для исследования литературы и приложение.

### Основные результаты

Основные результаты диссертации, полученные лично автором, заключаются в следующем:

1. Построена обобщённая математическая модель на основе системы двух нелинейных уравнений диффузионного типа, способная описывать режим с обострением при переносе тепла в двухподрешёточной системе, а также впервые при переносе импульса и заряда в атмосфере. При построении модели выполнен учёт анизотропии процессов переноса в атмосфере, связанный не только с наличием нелинейной положительной обратной связи, но и с наличием выделенных пространственных направлений. Введён метод пробных термодинамических функций, который впервые применён для проверки достоверности результатов математического и численного моделирования. Благодаря данному методу впервые сформулированы основные критерии самоорганизации для построенной модели. Проведено обобщение модели для описания совместного переноса импульса и заряда в режиме с обострением.

2. Составлена конечно-разностная экономичная схема с изменяемыми весовыми коэффициентами для решения систем исследуемых нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа. Для составленной конечно-разностной схемы доказана осуществимость метода прогонки, и однозначно определены её коэффициенты.

3. Создан программный комплекс из нескольких программ с технологией распараллеливания на основе нового оптимизированного алгоритма для решения исследуемых задач.

дуемой системы двух нелинейных диффузионных уравнений. Обеспечена возможность проводить анализ получаемых численных решений.

4. Численным моделированием показано, что развитие режима с обострением нелинейных анизотропных процессов переноса импульса и заряда в атмосфере приводит к появлению новой пространственной характеристики среды – линейного пространственного размера возникающей самоорганизованной структуры. Методом пробных термодинамических функций подтверждена достоверность полученных численных решений. Найдено их соответствие с данными реальных наблюдений. Показано длительное существование торнадо (стационарный режим) и его вихревого ядра, а также разрушение основного шнура молнии, как неустойчивого образования, с возникновением боковых ответвлений.

5. Выявлена возрастающая сложность климатического аттрактора основных параметров атмосферы над озером Восток в Антарктике и как следствие невозможность прогнозирования её на этапе сильного влияния человека. Сформулирована и решена задача с обострением для показателя Хёрста в анализе и прогнозировании изменения основных параметров атмосферы.

### Список цитируемой литературы

1. Самарский А. А. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание / Авт. предисл. А. А. Самарский. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
2. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 544 с.
3. Змитриенко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения // Наука, технология, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1993. – С. 33–62.
4. Змитриенко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ. Т. 26, вып. 9, 1977. – С. 620–.
5. Nikolaevskiy V. N. Angular Momentum in Geophysical Turbulence: Continuum Spatial Averaging Method. Dordrecht: Kluwer; Springer, 2003. 245 p.
6. J. R. Petit, J. Jouzel, D. Raynaud, N. I. Barkov, J.-M. Barnola, I. Basile, M. Bender, J. Chappellaz, M. Davis, G. Delaigle, M. Delmotte, V. M. Kotlyakov, M. Legrand, V. Y. Lipenkov, C. Lorius, L. Pe'pin, C. Ritz, E. Saltzman & M. Stievenard Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica // *Nature* 399, 1999. p. 429–436.
7. Быстров Г. П. Термодинамика необратимых процессов в открытых системах. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск, 2011. – 264 с.
8. Aranson I. S., Kramer I. The complex Ginzburg-Landau equation // *Rev. Mod. Phys.*, 2002. V. 74, No. 1. P. 99–143.
9. Kuramoto Y. and Tsuzuki T., On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems, *Progr. Theor. Phys.*, 54, P. 6870–699 (1975).
10. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1973. – 511 с.
11. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
12. Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs // *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1951. V. 116. P. 770–808.

13. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учебное пособие для вузов.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.- 432 с.
14. Gurevich A. V., Karashtin A. N. Runaway Breakdown and Hydrometeors in Lightning Initiation // *Phys. Rev. Lett.* №111, 185005, 2013.- 5 p.
15. Формов В. Е. Экстремальные состояния вещества. М., 2009.- 304 с.
16. Flora S. D. Tornadoes of the United States. Oklahoma, 1953.- 194 p.
17. Brooks E. M. The tornado-cyclone // *Weatherwise*, 2(2), 1949.- P. 32-33.
18. Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. Геофизические особенности и геологическая деятельность. Л., Наука, 1969.- 487 с.

#### **Основные публикации по теме диссертации**

##### **Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах**

1. G. Bystрай, I. Lykov, S. Okhotnikov The problem with peaking in the atmospheric magnetohydrodynamics. Limiting cases // *Magnetohydrodynamics*, 49 (1) 2013.- P. 3-14.
2. Быстрай Г. П., Лыков И. А., Охотников С. А. Вихреобразование в атмосфере при повышенной влажности с нелинейными стоками и источниками // Вестник кибернетики [Электронный ресурс].-Электрон.журн. – Тюмень: ИПОС СО РАН, 2012. №.11 С. 86-97.- Режим доступа: <http://www.ipdn.ru>, свободный.

##### **Статьи в трудах международных и всероссийских конференций**

3. Лыков И.А., Быстрай Г.П. Постановка задач математического моделирования торнадо и циклонов // Материалы Третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения» под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д.ф.м.н., проф. В. П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2012.- С. 194-196.

##### **Перечень объектов интеллектуальной собственности**

4. Лыков И. А., Быстрай Г. П. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013613091 «Multi-Thread Numerical Solution for Generalized Kuramoto-Tsuzuki Equation». Роспатент. Зарегистрировано 25 марта 2013 г.
5. Быстрай Г.П., Лыков И.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012617322 «Nonlinear & Fractal analysis of Time Series of the Atmosphere». Роспатент. Зарегистрировано 15 августа 2012 г.

##### **Статьи в сборниках и тезисы конференций**

6. Bystрай G.P., Lykov I.A., Okhotnikov S.A. Thermodynamics of nonequilibrium processes in a tornado: synergistic approach // <http://arxiv.org/abs/1109.5019> Submitted on 23 Sep. 2011.
7. Быстрай Г. П., Лыков И. А. Синергетический подход в описании нелинейных неравновесных процессов переноса импульса в атмосфере // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» – 05 февраля – 11 февраля 2012г. Моск. обл. панс. «Звенигородский» РАН – М: Изд. НИИ механики МГУ, 2012,- С. 40-42.
8. Быстрай Г. П., Лыков И. А. Гидродинамические и термодинамические условия устойчивости турбулентности в торнадо. Условия самоорганизации // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» – 05 февраля – 11 февраля 2012г. Моск. обл. панс. «Звенигородский» РАН – М: Изд. НИИ механики МГУ, 2012,- С. 42-44.

9. Быстрай Г.П., Лыков И.А., Охотников С.А. Задачи с обострением в магнитной гидродинамике атмосферы. Предельные случаи // Сборник тезисов докладов «Российской конференции по магнитной гидродинамике». 18-22 июня 2012 г., Пермь. С. 22-24
10. Лыков И.А., Быстрай Г.П. Алгоритм восстановления потенциальной функции по единственной реализации // Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 26-30 июня 2012 года). Тезисы докладов / Под редакцией А.Н.Ширяева, А.В.Лебедева. – М.: ЛЕНАНД, 2012. С. 375.

#### Разделы в монографиях

11. Лыков И.А. Раздел 1.3. Принцип локального неравновесия. Изменение свободной энергии для открытых неравновесных систем / Г.П. Быстрай, И.А. Лыков // Термодинамика необратимых процессов в открытых системах / Быстрай Г.П. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. – 264 с. С. 24-28.
12. Лыков И.А. Раздел 1.4. Основной постулат термодинамики самоорганизующихся систем / Г.П. Быстрай, И.А. Лыков // Термодинамика необратимых процессов в открытых системах / Быстрай Г.П. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 264 с. С. 29-33.
13. Лыков И.А. Глава 3. Термодинамика самоорганизующихся открытых систем / Г.П. Быстрай, И.А. Лыков, С.А. Охотников // Термодинамика необратимых процессов в открытых системах / Быстрай Г.П. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 264 с. С. 63-126.

Подписано в печать 11.11.2013. Формат 60х84 1/16

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,4

Тираж 110 экз. Заказ № 2807.

Отпечатано в типографии ИПЦ УрФУ  
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4