**На правах рукописи**

Биткина Виктория Васильевна

# Автоморфизмы дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны

**01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**Екатеринбург - 2018**

Работа выполнена в отделе алгебры и топологии ИММ УрО РАН

**Научный руководитель:** Махнев Александр Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
зав. отделом

**Официальные оппоненты:** Зюляркина Наталья Дмитриевна,
доктор физ.-мат. наук,
Южно-Уральский госуниверситет, профессор

Альпин Юрий Абдуллович,
кандидат физ.-мат. наук,
Казанский федеральный университет, доцент

**Ведущая организация:** ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого
Президента России Б.Н. Ельцина»

Защита состоится 5 апреля 2018 г. в 14 ч. 30 м. на заседании диссертационного совета Д 212.081.35 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35 (ауд. 1011).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте КФУ http://www.kpfu.ru/

Автореферат разослан __ января 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук Еникеев А.И.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В связи с завершением классификации конечных простых групп возникла задача единого представления конечных простых групп автоморфизмами конечных геометрий. Позднее в этом направлении возникли задачи, не связанные с групповым действием, в частности, такой является задача исследования дистанционно регулярных графов [1].

Если вершины $u, w$ находятся на расстоянии $i$ в $\Gamma$, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф $\Gamma$ диаметра $d$ называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин $u, w$ на расстоянии $i$ в $\Gamma$ для любого $i = 0, ..., d$.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

Граф $\Gamma$ называется сильно регулярным графом с параметрами $(v, k, \lambda, \mu)$, если $\Gamma$ содержит $v$ вершин, является регулярным степени $k$, каждое ребро $\Gamma$ лежит точно в $\lambda$ треугольниках и для любых двух несмежных вершин $a, b$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно $\mu$ вершин.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим $t$ для данного натурального числа $t$. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, ....$

В работе Махнева А.А., Падучих Д.В. [2] были найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $t$, $2 < t \leq 3$. Задача Кулена для $t = 4$ была решена Махневым А.А. и Падучих Д.В. в [3].

В диссертации рассмотрены некоторые дистанционно регулярные графы, окрестности вершин которых являются сильно регулярными графами со вторым собственным значением 3 или 4 и найдены их автоморфизмы.

Система инцидентности $(X, \mathcal{B})$ с множеством точек $X$ и множеством блоков $\mathcal{B}$ называется $t$-$(V, K, \Lambda)$ *схемой*, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно $K$ точек и любые $t$ точек лежат ровно в $\Lambda$ блоках. Любая 2-схема является $(V, B, R, K, \Lambda)$ схемой, где $B$ — число блоков, каждая точка инцидентна $R$ блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V-1)\Lambda = R(K-1)$. Схема называется симметричной, если $B = V$. Схема называется квазисимметричной, если для любых двух блоков $B, B' \in \mathcal{B}$ имеем $|B \cap B'| \in \{x, y\}$. Числа $x, y$ называются числами пересечений квазисимметричной схемы, и предполагается, что $x < y$.

Блочный граф квазисимметричной схемы $(X, \mathcal{B})$ в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathcal{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$.

Блочный граф квазисимметричной $(V, B, R, K, \Lambda)$ схемы сильно регулярен с собственными значениями $k = ((R-1)K - xB + x)/(y-x)$ кратности 1, $(R-K-\Lambda+x)/(y-x)$ кратности $V-1$ и $-(K-x)/(y-x)$ кратности $B-V$.

Производной схемой для $t$-$(V, K, \Lambda)$ схемы $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ в точке $x \in X$ называется схема $\mathcal{D}_x$ с множеством точек $X_x = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathcal{B}_x = \{B - \{x\} \mid x \in B \in \mathcal{B}\}$. Схема $\mathcal{E}$ называется расширением схемы $\mathcal{D}$, если производная схемы $\mathcal{E}$ в некоторой точке изоморфна $\mathcal{D}$.

П. Камерон [4, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем:

Пусть 3-$(V, K, \Lambda)$ схема $\mathcal{E} = (X, \mathcal{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $\mathcal{E}$ является адамаровой 3-$(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ схемой;

(2) $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ и $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$;

(3) $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$.

В случае (3) имеем $R = 495$, $B = 6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры (6138,1197,156,252). Дополнительный граф к блочному графу 3-(496,40,3) схемы был назван А.А. Махневым монстром Камерона. Окрестность любой вершины в монстре Камерона — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$.

В диссертации найдены автоморфизмы монстра Камерона и сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21).

**Цель работы.**

Найти автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$ и $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$. Найти автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21) и монстра Камерона с параметрами (6138,1197,156,252).

**Методы исследований.** Основными методами исследования являются теоретико-графовые методы и методы теории конечных групп, в частности, метод Г. Хигмена (см. [5]) приложения теории характеров к выяснению порядков автоморфизмов дистанционно регулярных графов.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми:

- найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, определены композиционные факторы группы автоморфизмов графа;

- найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, доказано, что сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ не является вершинно симметричным;

- найдены автоморфизмы монстра Камерона с параметрами (6138,1197,156,252), определены композиционные факторы группы автоморфизмов графа и доказано, что граф не является реберно симметричным;

- найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, доказано, что вершинно симметричный граф является реберно симметричным графом с цоколем группы автоморфизмов, изоморфным $L_2(3^5)$;

- найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, доказано, что граф не является вершинно симметричным.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в геометрии и теории графов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, а также были представлены на следующих конференциях: международная конференция "Алгебра и приложения" , посвященная 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина, Нальчик, 2014 г., всероссийская научная конференция "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования" , посвященная 60-летию В.А. Койбаева, Владикавказ, 2015 г., международная конференция "Группы и графы, алгоритмы и автоматы" , посвященная 80-летию В.А. Белоногова и 70-летию В.А. Баранского, Екатеинбург, 2015 г., международная конференция "Мальцевские чтения" , Новосибирск, 2016 г.

**Публикации.** По теме диссертации имеется 9 публикаций [12–20] (5 статей опубликованы в журналах из списка ВАК). Из пяти статей две написаны тремя авторами (соавторы Гутнова А.К., Махнев А.А.), одна в соавторстве с Махневым А.А. и две без соавторов. В работах трех авторов Гутнова А.К. и Махнев А.А. улучшали некоторые моменты доказательства, предложенного Биткиной В.В. В статье Биткиной В.В. и Махнева А.А. второму автору принадлежат постановки задач и идеи доказательств, сами доказательства принадлежат Биткиной В.В.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из списка сокращений, введения, 5 глав и списка литературы, содержащего 20 наименований. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даны основные определения и обозначения, используемые в диссертации, обсуждается общая мотивировка решаемых задач, сформулированы основные результаты. В главе 1 найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. В главе 2 найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21). В главе 3 найдены автоморфизмы монстра Камерона с параметрами (6138,1197,156,252). В главах 4–5 найдены автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ и $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$ соответственно.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если $a, b$ — вершины графа $\Gamma$, то через $d(a, b)$ обозначается *расстояние* между $a$ и $b$, а через $\Gamma_i(a)$ — *подграф графа* $\Gamma$, индуцированный множеством вершин, которые находятся в $\Gamma$ на расстоянии $i$ от вершины $a$. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* $a$ и обозначается через $[a]$. Через $a^{\perp}$ обозначается *подграф, являющийся шаром радиуса* 1 с центром $a$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *$\alpha$-частичной геометрией* порядка $(s, t)$, если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки $a$, не лежащей на прямой $L$, найдется точно $\alpha$ прямых, проходящих через $a$ и пересекающих $L$ (обозначение $pG_{\alpha}(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой (коллинеарны). Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_{\alpha}(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел $\alpha, s, t$ называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_{\alpha}(s, t)$.

Изучение автоморфизмов дистанционно регулярных графов опирается на метод Хигмена приложения теории характеров конечных групп, представленный в третьей главе монографии Камерона [5].

При этом граф $\Gamma$ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с $d$ классами, где $X$ — множество вершин графа, $R_0$ — отношение равенства на $X$ и для $i \geq 1$ класс $R_i$ состоит из пар $(u, w)$ таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу $R_i$ отвечает граф $\Gamma_i$ на множестве вершин $X$, в котором вершины $u, w$ смежны, если $d(u, w) = i$. Пусть $A_i$ — матрица смежности графа $\Gamma_i$ для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для подходящих неотрицательных целых $p^l_{ij}$, называемых *числами пересечений* графа $\Gamma$.

Пусть $P_i$ — матрица, в которой на месте $(j, l)$ стоит $p^l_{ij}$. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы $P_1$ являются собственными значениями графа $\Gamma$ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы $P$ и $Q$, у которых на месте $(i, j)$ стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Пусть $u_j$ и $w_j$ — левый и правый собственные векторы матрицы $P_1$, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность $m_j$ собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbf{C}^{d+1}$). Фактически, $w_j$ являются столбцами матрицы $P$ и $m_j u_j$ являются строками матрицы $Q$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа $\Gamma$ обычным образом дает матричное представление $\psi$ группы $G$ в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа $\Gamma$. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с $A$, поэтому подпространство $W_i$ является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть $\chi_i$ — характер представления $\psi_{W_i}$. Тогда для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек $x$ из $X$ таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

В работе [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $t$, $2 < t \leq 3$. В главе 1 изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(4, 6)$. Следующие результаты являются основными в главе 1.

**Теорема 1** [12]. *Пусть* $\Gamma$ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — *элемент простого порядка* $p$ *из* $G$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.
*Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\Omega$ — *пустой граф и либо*

(*i*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 60t - 6$ *и* $\alpha_2(g) = 384 - 60t$;

(*ii*) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 9l$, $\alpha_1(g) = 90t + 36 - 3l$ *и* $\alpha_2(g) = 342 - 90t - 6l$;

(*iii*) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) \in \{126, 336\}$ *и* $\alpha_2(g) \in \{252, 42\}$;

(2) $\Omega$ *содержит по* $s$ *вершин в* $t$ *антиподальных классах и либо*

(*i*) $p = 11$ *и* $\Omega$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{15, 8, 1; 1, 4, 15\}$, *либо*

(*ii*) $p = 7$ *и* $\Omega$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 12, 1; 1, 6, 13\}$, *либо*

(*iii*) $p = 5$ *и* $\Omega$ — *антиподальный класс или* $\Omega$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 12, 1; 1, 6, 13\}$, *либо*

(*iv*) $p = 3$, $\Omega$ — *объединение трех изолированных* 3-*клик или* $\Omega$ *является объединением трех изолированных* 6-*клик,* $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 360$, *или* $\Omega$ — *регулярный граф степени* 35, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 270$, *либо*

(*v*) $p = 2$, $s = 1$ *и* $\Omega$ *является* 6-*кликой или* $s = 3$, $t \in \{4, 14, 24\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 20w - 12 + 9t$ *и* $\alpha_2(g) = 390 - 20w - 12t$.

**Следствие 1.** *Пусть* $\Gamma$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $F$ — *антиподальный класс и группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* $\Gamma$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $S(G) = 1$, *то группа* $F^*(G)$ *изоморфна* $U_3(3)$, $U_3(5)$ *или* $A_9$;

(2) *если* $G$ *действует транзитивно на множестве дуг графа* $\Gamma$, *то* $\Gamma$ — *единственный граф с* $F^*(G) = SU_3(5)$ *и группой* $G_{\{F\}}$, *изоморфной расширению экстраспециальной группы порядка* 125 *с помощью циклической группы порядка* 24.

Махнев А.А. [6] (см. также [7]) доказал, что для монстра Камерона $\Gamma$ выполняются следующие утверждения:

(1) окрестность любой вершины в графе $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и спектром $156^1, 9^{741}, -15^{455}$, причем порядок коклики в этом графе не больше 105;

(2) множество блоков $C_x$, содержащих точку $x$ схемы $\mathcal{E}$,является 495-кокликой графа $\Gamma$, для которой достигается равенство в границах Хофмана и Цветковича;

(3) подграф $\Gamma - C_x$ сильно регулярен с параметрами $(5643, 1092, 141, 228)$ и спектром $1092^1, 9^{5148}, -96^{494}$;

(4) для различных точек $x, y$ схемы $\mathcal{E}$ имеем $|C_x \cap C_y| = 39$, причем для коклики $C_x - C_y$ графа $\Gamma - C_y$ достигается равенство в границе Хофмана.

В главе 2 изучены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21).

Основными результатами главы 2 являются:

**Теорема 2** [13]. *Пусть $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \le 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

*(1) $\Omega$ — пустой граф, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l$, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$, либо $p = 19$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$;*

*(2) $\Omega$ является $n$-кликой, либо*

*(i) $p = 13$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$, либо*

*(ii) $p = 2$, $n = 9$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$ или $n = 11$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$, либо*

*(iii) $p = 5$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$;*

*(3) $\Omega$ является $3t + 1$-кокликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;*

*(4) $\Omega$ содержит геодезический 2-путь и $p \le 13$.*

**Следствие 2.** *Сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$ *не является вершинно симметричным.*

В главе 3 с помощью теоремы 2 найдены автоморфизмы монстра Камерона.

**Теорема 3** [14]. *Пусть $\Gamma$ — монстр Камерона с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \le 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\Omega$ — *пустой граф, либо* $p=31$ *и* $\alpha_1(g)=31\cdot 78$, *либо* $p=11$ *и* $\alpha_1(g)=11(114l-6)$, *либо* $p=3$ *и* $\alpha_1(g)=3(114l+54)$, *либо* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=2(114l-33)$;

(2) $\Omega$ *является* $n$*-кликой, либо*

($i$) $p=19$, $n=1$ *и* $\alpha_1(g)=19(6l+3)$, *либо*

($i$) $p=13$, $n=2$ *и* $\alpha_1(g)=6\cdot 13(19l-5)$, *либо*

($iii$) $p=5$, $n=3$ *и* $\alpha_1(g)=3(190l+25)$ *или* $n=8$ *и* $\alpha_1(g)=6(95l+20)$, *либо*

($iv$) $p=2$, $n=10$ *и* $\alpha_1(g)=6(38l+4)$ *или* $n=12$ *и* $\alpha_1(g)=6(38l-21)$;

(3) $\Omega$ *является* $m$*-кокликой,* $p=3$, $m=3t$, $t\leq 70$ *и* $\alpha_1(g)=9(38l+10+3t)$ *или* $p=7$, $m=7t-1$, $t\leq 70$ *и* $\alpha_1(g)=63(38l+8+t)$;

(4) $\Omega$ *содержит ребро и является объединением* $m$ ($m\geq 2$) *изолированных клик,* $p=2$ *и порядки изолированных клик в* $\Omega$ *равны* 10 *или* 12;

(5) $\Omega$ *содержит геодезический* 2*-путь и* $p\leq 13$.

**Следствие 3.** *Пусть* $\Gamma$ – *сильно регулярный граф с параметрами* $(6138,1197,156,252)$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(1197,156,15,21)$ *(в частности,* $\Gamma$ – *монстр Камерона), и группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* $\Gamma$. *Тогда* $S(G)=O_{2,3}(G)$, *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G}=G/S(G)$ *изоморфен* $L_2(32)$ *и либо*

(1) $\bar{T}_a$ – *подгруппа порядка* 16, $V=S(G)$ *является абелевой* 3*-группой,* $|V:V_a|=3$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $V$, *либо*

(2) $\bar{T}_a$ – *подгруппа порядка* 32, $S(G)=VW$, *где* $V$ *является силовской* 3*-подгруппой из* $S(G)$, $|V:V_a|=3$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $V$, $W$ *является силовской* 2*-подгруппой из* $S(G)$, $|W:W_a|=2$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $W$.

*В частности,* $|G|$ *не делится на* 19 *и* $\Gamma$ *не является реберно симметричным графом.*

В работе [3] завершена классификация дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими графами со вторым собственным значением 4. Дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (243,22,1,2), имеет массив пересечений $\{243,220,1;1,22,243\}$ или $\{243,220,1;1,4,243\}$.

В главе 4 изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243,220,1;1,22,243\}$. Следующие результаты являются основными.

**Теорема 4** [15]. *Пусть* $\Gamma$ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ *— элемент простого порядка* $p$ *из* $G$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* $t$ *антиподальных классов по* $s$ *вершинам.*
*Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 61\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\Omega$ *— пустой граф, либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244$, *либо* $p = 11$, $\alpha_3(g) = 11(11l + 2)$, $\alpha_1(g) = 594m + 242 - 11l$, *либо* $p = 61$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244$*;*

(2) $t = 1$, $p = 3$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 243$*;*

(3) $p = 11$, *либо* $t = 2$, *либо* $t = 13$ *и каждая связная компонента графа* $\Omega$ *является* 13*-кликой или графом* $K_{13,13}$ *с удаленным максимальным паросочетанием;*

(4) $p = 7$, *либо* $s = 11$, $t = 13, 20$, *причем в случае* $t = 13$ *подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, *либо* $s = 4$, $t = 13, 20, ..., 55$*;*

(5) $p = 5$, $s = 6$, $t = 14, 19, ..., 39$, *причем в случае* $t = 14$ *подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$*;*

(6) $p = 3$ *и либо*

(*i*) $s = 11$, $t = 13, 16, 19, 22$, *в случае* $t = 13$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{12, 10, 1; 1, 1, 12\}$, *либо*

(*ii*) $s = 8$, $t = 13, 16, ..., 28$, *либо*

(*iii*) $s = 5$, $t = 7, 10, ..., 46$, *причем в случае* $t = 7$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$, *либо*

(*iv*) $s = 2$, $t = 10, 13, ..., 46$, *причем в случае* $t = 46$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{45, 22, 1; 1, 22, 45\}$*;*

(7) $p = 2$ *и либо*

(*i*) $s = 9$, $t = 20, 22, ..., 26$, *причем в случае* $t = 20$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{19, 16, 1; 1, 2, 19\}$, *либо*

(*ii*) $s = 7$, $t = 16, 18, ..., 34$, *причем в случае* $t = 16$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, *либо*

(*iii*) $s = 5$, $t = 12, 14, ..., 48$, *причем в случае* $t = 12$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$, *либо* *(iv)* $s=3$, $t=8,10,...,68$, *причем в случае* $t=8$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{7,4,1;1,2,7\}$, *а в случае* $t=68$ *подграф* $\Omega$ *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{67,44,1;1,22,67\}$.

Результаты теоремы 4 уточняются далее в теореме 6 с помощью описания автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(243,22,1,2)$.

**Теорема 5** [15]. *Пусть* $\Gamma$ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(243,22,1,2)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ *— элемент простого порядка* $p$ *из* $G$ *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,11\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\Omega$ *— пустой граф,* $p=3$ *и* $\alpha_1(g)=27l$;

(2) $\Omega$ *является* $n$*-кликой, либо* $n=1$, $p=11$, $\alpha_1(g)=99l+22$, *либо* $p=5$, $n=3$, $\alpha_1(g)=45l-15$, *либо* $p=2$, $n=3$, $\alpha_1(g)=18l-6$;

(3) $\Omega$ *является* $m$*-кокликой,* $p=2$, $m=2t+1$, $t\leq 13$, $\alpha_1(g)=18l+4-10t$;

(4) *если* $\Omega$ *является объединением изолированных клик, то либо* $\Omega$ *— клика или коклика, либо* $p=2$, $\Omega$ *является объединением* $m$ *изолированных вершин и* $n$ *треугольников;*

(5) $\Omega$ *содержит геодезический 2-путь и либо*

*(i)* $p=3$, $\Omega$ *— сильно регулярный подграф с параметрами* $(9,4,1,2)$ *и* $\alpha_1(g)=27l+9\leq 72$, *либо*

*(ii)* $p=2$, $|\Omega|=2l+1\leq 27$, *каждая связная компонента графа* $\Omega$ *является треугольником, сильно регулярным графом с параметрами* $(9,4,1,2)$ *или графом диаметра 3 степени 6 и с не менее чем 21 вершиной.*

**Теорема 6** [15]. *Пусть* $\Gamma$ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243,220,1;1,22,243\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(243,22,1,2)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ *— элемент простого порядка* $p$ *из* $G$ *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *— непустой граф, пересекающий* $t$ *антиподальных классов по* $s$ *вершинам. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,61\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $t=1$, $p=3$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=243$;

(2) $p=7$, $s=4$, $t=34,41,48,55$, *причем в случае* $t=34$ *подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{33,24,1;1,8,33\}$;

(3) $p=5$, $s=6,t=39$ *и подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{38,35,1;1,7,38\}$;

(4) $p=3$ *и либо*

*$(i)$ $s = 5$, $t = 22, 25, ..., 46$, причем в случае $t = 22$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{21, 16, 1; 1, 4, 21\}$, либо*

*$(ii)$ $s = 2$, $t = 10, 13, ..., 46$, причем в случае $t = 10$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{9, 4, 1; 1, 4, 9\}$, а в случае $t = 46$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{45, 22, 1; 1, 22, 45\}$;*

(5) *$p = 2$ и либо*

*$(i)$ $s = 7$, $t = 28, 30, 32, 34$, причем в случае $t = 28$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 4, 27\}$, либо*

*$(ii)$ $s = 5$, $t = 20, 22, ..., 48$, причем в случае $t = 20$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{19, 16, 1; 1, 4, 19\}$, либо*

*$(iii)$ $s = 3$, $t = 12, 14, ..., 68$, причем в случае $t = 12$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{11, 8, 1; 1, 4, 11\}$, а в случае $t = 68$ подграф $\Omega$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{67, 44, 1; 1, 22, 67\}$.*

**Следствие 4.** *Пусть $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа $\Gamma$ и 11 делит $|G/S(G)|$. Тогда $G$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка 243 и группы $M_{11}$.*

**Следствие 5.** *Пусть $\Gamma$ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, $F$ — антиподальный класс и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа $\Gamma$. Тогда $S(G) = 1$, группа $T = F^*(G)$ изоморфна $L_2(3^5)$, $T_{\{F\}}$ расширение элементарной абелевой группы порядка 243 с помощью циклической группы порядка 121.*

В главе 5 изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$.

Следующие результаты являются основными в главе 5.

**Теорема 7** [16]. *Пусть $\Gamma$ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает $t$ антиподальных классов по $s$ вершинам.*
*Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 61\}$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\Omega$ — *пустой граф, либо* $p=2$, $\alpha_3(g)=112l$ *и* $\alpha_1(g)=16l+72m-8$, *либо* $p=7$, $\alpha_3(g)=56l<13664, l\equiv 6(mod\ 7)$, $\alpha_1(g)=252m+8l+64$, *либо* $p=61$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=244+2196l$, $l\le 6$;

(2) $s=1$, *либо* $p=5$, $t\in\{4,9,14,19,24\}$, $\alpha_1(g)=180m-t+64$, *либо* $p=11$, $t\in\{2,13,24\}$, $\alpha_1(g)=396m-t+244$;

(3) $t=1$, $p=3$, $\alpha_0(g)=s$ *сравнимо с* 2 *по модулю* 3, *и* $\alpha_1(g)=108m-9s+72t=1$;

(4) $p=3$, $t=4,7,...,121$, $s=2,5,...,56$, $st$ *не больше* 224 *и* $\alpha_1(g)=108m-9st+8t+64$, *в случае* $\mu_\Omega=4$ *подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{9,4,1;1,4,9\}$ *или* $\{t-1,16,1;1,4,t-1\}$, $t=22,28$, *либо*

(5) $p=2$, $t=2,4,...,120$, $s=2,4,...,56$, $st$ *не больше* 224 *и* $\alpha_1(g)=8t-9st+72l-8$, *в случае* $\mu_\Omega=4$ *подграф* $\Omega$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{t-1,4(s-1),1;1,4,t-1\}$, *где* $s=2$ *и* $t=10$ *или* $s=4$ *и* $t=16$, *или* $s=6$ *и* $t=22,26$, *в случае* $\mu_\Omega=2$ *подграф* $\Omega$ *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{t-1,2(s-1),1;1,2,t-1\}$, *где* $s=2$ *и* $t=6$ *или* $s=4$ *и* $t=10$, *или* $s=6$ *и* $t=14,16$, *или* $s=8$ *и* $t=16,18$, *или* $s=10$ *и* $t=22$.

**Следствие 6.** *Пусть* $\Gamma$ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243,220,1;1,4,243\}$. *Тогда группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве вершин графа* $\Gamma$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

2. *Махнев А.А., Падучих Д.В.* Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Доклады академии наук 2015. Т. 464, N 4. С. 396-400.

3. *Махнев А.А., Падучих Д.В.* Графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 4 // Мальцевские чтения. Тез. докл. Новосибирск 2016. С. 96.

4. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts, N 22, Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981, 240 p.

5. *Cameron P.J.* Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts №45, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

6. *Makhnev A.A.* On extensions of some block-designes // Proceedings of Intern. Russian – Chinese Conf. 2015, Nalchik, P. 123-124.

7. *Махнев А.А.* О расширениях некоторых блок-схем // Доклады академии наук 2016. Т. 470, № 5. С. 508-510.

8. *Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Доклады академии наук 2010, т. 432, N 5, 512-515.

9. *Zavarnitsine A.V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean electr. Math. Reports 2009. V. 6. P. 1-12.

10. *Brouwer A.E., Haemers W.H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. V. 14. P. 397-407.

11. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math. 2011. V. 311, N 2-3. P. 132-144.


## Работы автора по теме диссертации


12. *Биткина В.В., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ // Ученые записки Казанского университета, Сер. Физ.-матем. науки 2017. Т.159, кн. 1. С.13-20.

13. *Биткина В.В., Гутнова А.К., Махнев А.А.* Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21) // Владик. матем. журнал 2015. Т. 17, № 2. С. 5-11.

14. *Биткина В.В.* Автоморфизмы монстра Камерона с параметрами (6138,1197,156,252) // Владикавказский математический журнал 2017, Т. 19, № 1. С. 11-17.

15. *Махнев А.А., Гутнова А.К., Биткина В.В.* Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ // Сибирские электрон. матем. известия 2016, т. 13, С. 1040-1051.

16. *Биткина В.В.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$ // Сибирские электрон. матем. известия 2017, т. 14. С. 26-32.

17. *Биткина В.В., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ // "Алгебра и приложения". Тез. докл. Межд. конф., Нальчик 2014, С. 17-19.

18. *Биткина В.В., Гутнова А.К., Махнев А.А.* Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1197,156,15,21) // "Группы и графы, алгоритмы и автоматы". Тез. докл. Межд. конф., Екатеринбург 2015, С. 36-37.

19. *Биткина В.В., Махнев А.А.* Об автоморфизмах графа, являющегося 3-накрытием 126-клики // "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования". Тез. докл Всерос. конф., Владикавказ 2015, С. 31-33.

20. *Биткина В.В.* Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$ // "Мальцевские чтения". Тез. докл Межд. конф., Новосибирск 2016, С. 72.