УДК 514.132

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ ОСНОВ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО СТУДЕНТАМ МЛАДШИХ КУРСОВ И ШКОЛЬНИКАМ

В.В. Шурыгин[1], В.В. Шурыгин (мл.)[2]

Казанский федеральный университет, Казань

[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Аннотация

Группа движений плоскости Лобачевского, как и группа движений евклидовой плоскости, порождается симметриями относительно прямых линий. Это позволяет развить подход к построению модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, основанный на свойствах инверсий и пучков окружностей на евклидовой плоскости.

Ключевые слова: *абсолютная геометрия, инверсия, орицикл, Пуанкаре модель, пучок окружностей, эквидистанта*

Пространство и время по Канту являются формами восприятия нами внешнего мира. Геометрия этого мира поэтому нам интуитивно понятна еще до какого-либо знакомства с геометрией как разделом математики, и пятый постулат Евклида, утверждающий, что на плоскости через точку A, не лежащую на прямой l, можно провести только одну прямую, не пересекающую l, вполне согласуется с нашей интуицией. Постулат же Лобачевского, утверждающий, что таких прямых можно провести более одной, нашей интуиции противоречит, и тем более противоречат следствия, вытекающие из этого постулата. Однако эти следствия образуют целостную стройную систему, в которой не обнаруживается противоречий. Эта система была названа Лобачевским «воображаемой геометрией». Идеи Лобачевского не сразу были восприняты научным сообществом, и окончательное признание геометрия Лобачевского получила только после того, как Э. Бельтрами ([2], с. 180−212) показал, что геометрия Лобачевского возникает локально на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трехмерном геометрическом пространстве и может быть реализована внутри круга на евклидовой плоскости.

Открытие Лобачевского не только разрешило проблему пятого постулата Евклида, остававшуюся неприступной более двух тысячелетий, но и привело к новому взгляду на математические теории как системы утверждений, основывающиеся на наборе аксиом, на которые накладывается только требование непротиворечивости. Что касается геометрии, то такой системой аксиом является, например, система аксиом Евклида без пятого постулата. Эта система аксиом определяет так называемую *абсолютную геометрию*. Первые 28 теорем в книге Евклида «Начала» [1], в число которых входят признаки равенства треугольников, являются теоремами абсолютной геометрии. В абсолютной геометрии существуют непересекающиеся прямые (два перпендикуляра к одной прямой), но нельзя найти ответ на вопрос о том, сколько существует прямых, одна или больше, которые проходят через точку A, не лежащую на прямой l, и при этом не пересекают прямую l. Одной из теорем абсолютной геометрии является утверждение, что сумма углов треугольника не может быть больше 2π [6] (см. также [7]).

Изложение геометрии Лобачевского на плоскости для аудитории, указанной в заглавии работы, естественно начать именно с рассмотрения начального этапа построения геометрии плоскости, не использующего постулата о параллельных, а затем, следуя книге П.А. Широкова [6] (см. также [7]), вывести следствия из постулата Лобачевского, противоречащие интуитивным представлениям о свойствах геометрической плоскости, такие, например, как: для любого $\varepsilon>0$ существует треугольник, сумма углов которого меньше ε; каким бы малым ни был острый угол, всегда существует прямая, перпендикулярная одной его стороне и параллельная другой; геометрическое место точек, лежащих по одну сторону от прямой и удаленных от нее на расстояние $d>0$ не является прямой линией.

Для обоснования непротиворечивости геометрии Лобачевского достаточно построить конкретную модель этой геометрии в рамках уже имеющегося здания евклидовой геометрии. Наиболее естественной в этом отношении является модель А. Пуанкаре в круге евклидовой плоскости. Можно использовать следующий подход к построению этой модели, основанный на использовании группы движений, устроенной аналогично группе движений евклидовой плоскости. Аксиомы абсолютной геометрии утверждают однородность плоскости, вытекающую из наличия группы движений, состоящей из вращений плоскости вокруг любой ее точки A и наложений плоскости на себя, при которых произвольную точку A плоскости можно совместить с любой другой ее точкой B. Эта группа движений очевидным образом порождается симметриями относительно прямых линий. При этом определение симметрии относительно прямой можно сформулировать следующим образом: точка A' симметрична точке A относительно прямой l тогда и только тогда, когда всякая окружность, проходящая через точку A и ортогональная l, проходит и через точку A'.

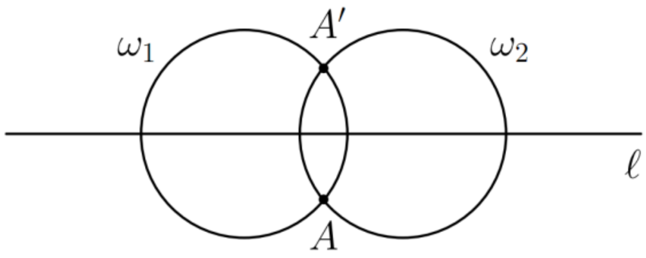

Рисунок 1

Сформулированное выше определение симметрии относительно прямой в абсолютной геометрии может быть использовано для определения симметрии точек относительно окружности ω на евклидовой плоскости (см. рис. 2).

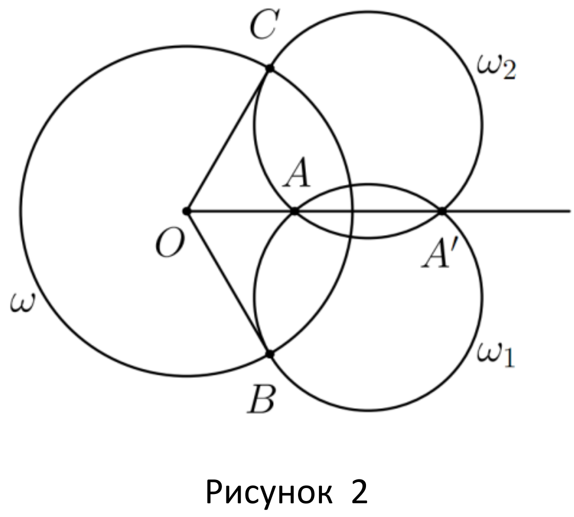

Рисунок 2

Отображение i_ω плоскости (с выколотым центром окружности ω) на себя, относящее произвольной точке A точку A', симметричную относительно окружности ω, называется инверсией относительно ω. Аналитически инверсия записывается уравнением

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}, \tag{1}$$

где R — это радиус окружности инверсии ω. Инверсия i_ω является инволютивным преобразованием, то есть $i_\omega = i_\omega^{-1}$, и все точки окружности инверсии инвариантны относительно инверсии. Из уравнения (1) следует, что композиция двух инверсий i_1 и i_2 относительно окружностей с одним и тем же центром O и разными радиусами R_1, R_2 является преобразованием гомотетии h с центром O и коэффициентом, равным отношению квадратов радиусов R_2^2/R_1^2. Отсюда следует, что две инверсии относительно окружностей с одним центром отличаются на гомотетию. Как показывает рис. 2, окружности, ортогональные окружности инверсии ω, инвариантны относительно инверсии i_ω, а поскольку углы между окружностями ω_1 и ω_2 в точках A и A' равны, то инверсия i_ω является конформным преобразованием, то есть преобразованием, сохраняющим углы между кривыми.

Используя отмеченные свойства инверсии, легко показать, что при инверсии i_ω окружность, не проходящая через центр инверсии O, переходит снова в окружность (см., например, [7]), а окружность, проходящая через центр инверсии (окружность ω_1 на рис. 3), переходит в прямую линию.

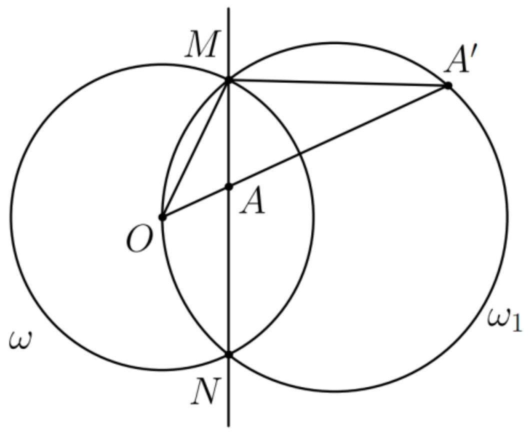

Рисунок 3

Для построения модели Пуанкаре выберем некоторую окружность Ω на евклидовой плоскости, которую будем называть *абсолютом*. Точками плоскости Лобачевского назовем точки евклидовой плоскости, лежащие внутри абсолюта, прямыми плоскости Лобачевского (L-прямыми) назовем дуги окружностей, пересекающих абсолют под прямым углом, и диаметры абсолюта. Движениями построенной плоскости Лобачевского назовем ее преобразования, являющиеся композициями инверсий относительно окружностей, пересекающих абсолют под прямым углом, и симметрий относительно диаметров абсолюта (симметрий относительно *L*-прямых). Как показывает рис. 4, для любой точки *A* плоскости Лобачевского существует *L*-прямая (окружность ω на рисунке), симметрия относительно которой переводит эту точку в центр *C* абсолюта (поскольку OA:OB=OB:OC). Отсюда следует, что определенная группа движений действует транзитивно на плоскости Лобачевского. Угловую меру на плоскости Лобачевского введем следующим образом: углом между двумя пересекающимися *L*-прямыми назовем угол (в смысле евклидовой геометрии) между содержащими их окружностями (или прямыми). Поскольку инверсия является конформным преобразованием, углы между *L*-прямыми сохраняются при движениях плоскости Лобачевского.

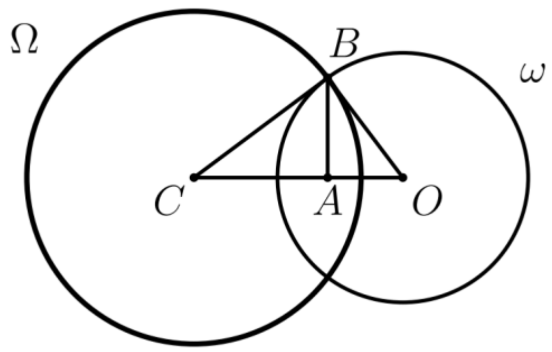

Рисунок 4

Семейство *S* окружностей, проходящих через две фиксированные точки *A* и *B*, в которое включается и прямая *AB* (радикальная ось пучка), называется эллиптическим пучком окружностей. Окружности, пересекающие все окружности эллиптического пучка под прямым углом, образуют взаимный гиперболический пучок *S*′, также содержащий одну прямую [7, 3], см. рис. 5.

Из рассмотренных выше свойств инверсии следует, что инверсия i_ω относительно окружности ω гиперболического пучка *S*′ переводит в себя каждую окружность из взаимного эллиптического пучка *S*. Кроме того, эта инверсия i_ω переводит всякую окружность из пучка *S*′ в окружность, принадлежащую этому же пучку. Это свойство пучков окружностей позволяет следующим образом определить расстояние между точками плоскости Лобачевского.

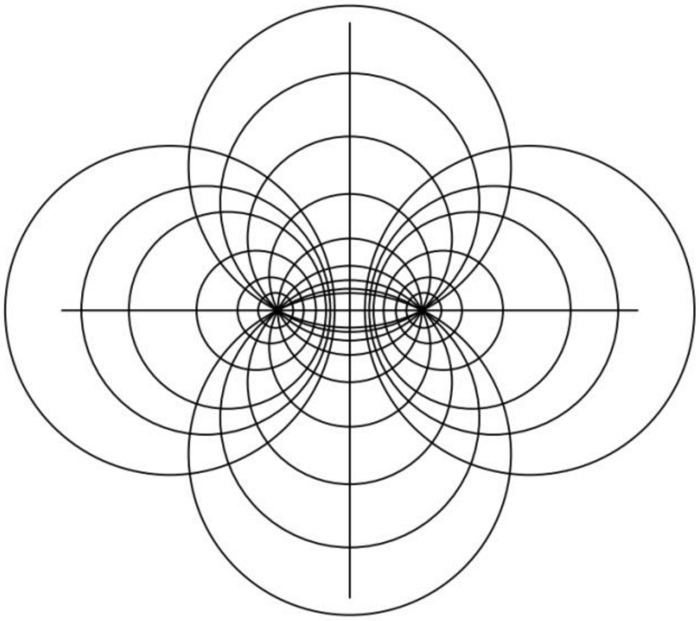

Рисунок 5

В случае, когда точки A и B лежат на диаметре MN абсолюта и вместе с концами диаметра образуют последовательность M, A, B, N, расстояние dist(A,B) между точками A и B определим формулой

$$\mathrm{dist}(A,B)=\ln|(MNAB)|, \tag{2}$$

где $(MNAB)=(MNA)/(MNB)$ — сложное отношение четырех точек. При этом, если точка B лежит на отрезке AC диаметра, то

$$\mathrm{dist}(A,B) + \mathrm{dist}(B,C) = \mathrm{dist}(A,C).$$

Используя формулу (1), легко проверить, что сложное отношение четырех точек, лежащих на прямой, проходящей через центр некоторой окружности, сохраняется при инверсиях относительно этой окружности. Отсюда следует, что расстояние (2) между точками, лежащими на диаметре абсолюта, сохраняется при симметриях относительно L-прямых, ортогональных этому диаметру. Кроме того, очевидно, что расстояние между точками, определенное формулой (2), сохраняется при поворотах плоскости Лобачевского вокруг центра абсолюта.

Определим теперь расстояние между точками A и B, лежащими на L-прямой l, не являющейся диаметром абсолюта. Для этого проведем L-прямую a через точку A, ортогонально l. Пусть E и F — точки пересечения a с абсолютом, l'

— диаметр, ортогональный прямой *a*, а ω — окружность, проходящая через точки *B*, *E* и *F* (см. рис. 6). Пусть далее *S* — эллиптический пучок окружностей,

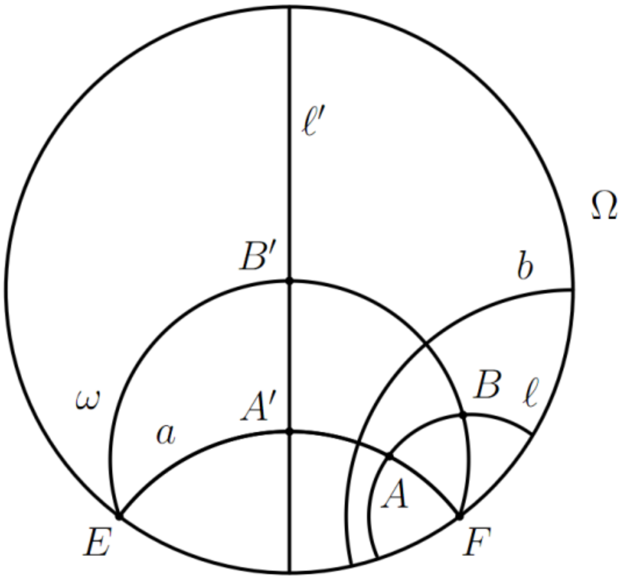

Рисунок 6

проходящих через точки *E* и *F*. *L*-прямые *l* и *l*′ принадлежат взаимному гиперболическому пучку *S*′. В пучке *S*′ найдется *L*-прямая *b*, симметрия относительно которой переводит *l* в *l*′, *A* в $A' \in l'$, *B* в $B' \in l'$. Полагаем dist(*A*,*B*)=dist(*A*′,*B*′). В соответствии с построением так определенное расстояние между точками в плоскости Лобачевского сохраняется при движениях.

L-прямые, не имеющие общих точек, называются расходящимися, а имеющие общую точку, принадлежащую абсолюту, параллельными по Лобачевскому.

Выберем в качестве абсолюта некоторую окружность эллиптического пучка (см. рис. 5). В этом случае окружности из взаимного гиперболического пучка образуют пучок расходящихся *L*-прямых. В эллиптическом пучке имеется окружность, ортогональная абсолюту. Эта окружность представляет *L*-прямую. Все остальные окружности эллиптического пучка (точнее, соответствующие дуги окружностей), как это следует из рис. 6, являются эквидистантами этой *L*-прямой.

Выберем теперь в качестве абсолюта некоторую окружность гиперболического пучка *S*′ (см. рис. 5). В этом случае окружности из взаимного эллиптического пучка *S*′ образуют пучок пересекающихся *L*-прямых. Окружности из пучка *S*′, как ортогональные траектории пучка пересекающихся *L*-прямых, являются концентрическими окружностями плоскости Лобачевского, а предельная точка гиперболического пучка (окружность нулевого радиуса — точка, в которой пересекаются окружности эллиптического пучка) является общим центром этих концентрических окружностей.

Если выбрать в качестве абсолюта некоторую окружность параболического пучка окружностей *S*, то окружности взаимного параболического пучка *S′* будут образовывать пучок параллельных *L*-прямых. В этом случае окружности пучка *S*, как ортогональные траектории пучка параллельных *L*-прямых, будут представлять собой орициклы (предельные линии).

Для того чтобы иметь возможность осуществлять вычисления в геометрии Лобачевского, удобно в качестве абсолюта *Ω* выбрать единичную окружность на комплексной плоскости. В этом случае точки плоскости Лобачевского можно отождествить с комплексными числами, модуль которых строго меньше единицы. Всякое собственное движение плоскости Лобачевского можно представить в виде [5]

$$z \mapsto e^{i\varphi}\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \tag{3}$$

где *a* — точка, которую движение переводит в 0. Инверсии относительно окружностей, ортогональных *Ω*, и композиции таких инверсий сохраняют сложное отношение четырех точек на комплексной плоскости, что позволяет вычислять расстояние между точками $A(z_1)$ и $B(z_2)$ по формуле

$$\operatorname{dist}(z_1,z_2)=\ln(w_1,w_2,z_1,z_2)=\frac{(z_2-w_1)(z_1-w_2)}{(z_2-w_2)(z_1-w_1)}, \tag{4}$$

где $M(w_1)$ и $N(w_2)$ — точки пересечения *L*-прямой *AB* с абсолютом и $M(w_1)$, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $N(w_2)$ — порядок, в котором точки расположены на прямой *AB*. Применяя формулу (4) к точкам 0 и *x*, где *x* — вещественное положительное число, получим

$$\operatorname{dist}(0,x)=\ln\frac{1+x}{1-x} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{dist}(0,z)=\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{5}$$

Для нахождения расстояния между точками z_1 и z_2 теперь достаточно применить движение

$$z \mapsto \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}; \quad z_1 \mapsto 0; \quad z_2 \mapsto \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}, \tag{6}$$

определенное значениями $\varphi = 0$, $a = z_1$ в формуле (3). Используя формулы (5) и (6), можно теперь доказать неравенство треугольника ([5], с. 60)

$$\operatorname{dist}(z_1, z_2) + \operatorname{dist}(z_2, z_3) \geq \operatorname{dist}(z_1, z_3).$$

Сравнение длин сторон прямоугольного треугольника с вершинами $A(iy)$, $B(x)$, $C(0)$ (см. рис. 7), позволяет доказать теорему Пифагора для плоскости Лобачевского:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c. \tag{7}$$

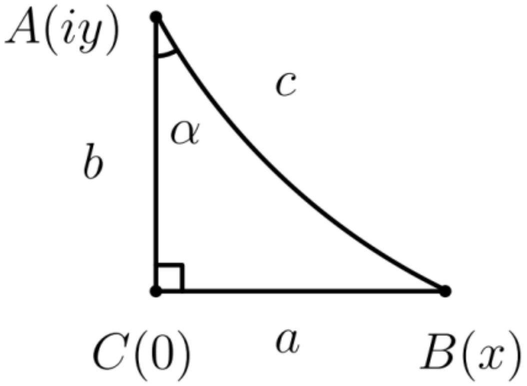

Рисунок 7

Применяя простейшие методы аналитической геометрии, можно также вывести формулу

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha \tag{8}$$

и другие формулы [4], связывающие углы и стороны прямоугольного треугольника *ABC*. Использование затем формул (7) и (8), а также стандартных тождеств для тригонометрических и гиперболических функций, позволяет доказать теоремы косинусов и синусов для произвольного треугольника на плоскости Лобачевского:

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} c \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} b \cos A, \qquad \frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C}.$$

Далее изучение геометрии Лобачевского можно продолжить, следуя, например, книге [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Начала Евклида. Книги I−VI. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956.
3. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. М.: МЦНМО, 2004. Том 1, 312 с.
4. *Прасолов В.В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004, 89 с.
5. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Часть I. М.: Наука, 1976, 320 с.
6. *Широков П.А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М.: Наука, 1983, 80 с.
7. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* От геометрии Евклида к геометрии Лобачевского. В кн.: «Николай Иванович Лобачевский. Историко-биографический сборник». Казань: Издательство «Жиен», С. 517–591.

AN APPROACH TO PRESENTATION OF THE LOBACHEVSKII GEOMETRY TO SECONDARY SCHOOL AND FIRST YEAR UNIVERSITY STUDENTS

Vadim Shurygin[1], Vadim Shurygin, jr. [2]

Kazan Federal University, Kazan

[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Abstract

The group of motions of the Lobachevskii plane, as well as that of the Euclidean plane, is generated by reflections in straight lines.This allows ones to develop an approach to constructing the Poincaré model of Lobachevskii plane based on the properties of inversions and pencils of circles in the Euclidean plane.

Keywords: *absolute geometry, inversion, Lobachevskii geometry, horocycle, Poincaré model, pencil of circles, equidistant curve*

REFERENCES

1. Nachala Evklida. Knigi I–VI. M.-L.: GITTL, 1950.
2. Ob osnovaniyax geometrii. Sbornik klassicheskix rabot po geometrii Lobachevskogo i razvitiyu ee idej. M.: Gostexizdat, 1956.
3. *Ponarin Ya.P.* E`lementarnaya geometriya. M.: MCzNMO, 2004. Tom 1, 312 s.
4. *Prasolov V.V.* Geometriya Lobachevskogo. M.: MCzNMO, 2004. 89 s.
5. *Shabat B.V.* Vvedenie v kompleksny`j analiz. Chast` I. M.: Nauka, 1976, 320 s.
6. *Shirokov P.A.* Kratkij ocherk osnov geometrii Lobachevskogo. M.: Nauka, 1983, 80 s.
7. *Shury`gin V.V., Shury`gin V.V. (ml.)* Ot geometrii Evklida k geometrii Lobachevskogo. V kn.: “Nikolaj Ivanovich Lobachevskij. Istoriko-biograficheskij sbornik”. Kazan`: Izdatel`stvo “Zhien”, S. 517–591.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУРЫГИН Вадим Васильевич – профессор, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет, Казань.

Vadim Vasilievich SHURYGIN – Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

email: Vadim.Shurygin@kpfu.ru

ШУРЫГИН Вадим Вадимович – доцент, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет.

Vadim Vadimovich SHURYGIN – Associate Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

email: 1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Материал поступил в редакцию 28 августа 2019 года