А. Н. Абызов, Ч. К. Куинь, А. А. Туганбаев, Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 159, 3–45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 3–45

УДК 512.55

МОДУЛИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АВТОМОРФИЗМОВ И ИДЕМПОТЕНТНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОИХ ОБОЛОЧЕК И НАКРЫТИЙ

© 2019 г. **А. Н. АБЫЗОВ, Ч. К. КУИНЬ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Статья содержит как известные, так и новые результаты об автоморфизм-инвариантных модулях, автоморфизм-коинвариантных модулях, а также модулях, инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. Основные результаты приведены с доказательствами.

Ключевые слова: квазиинъективный модуль, квазипроективный модуль, автоморфизм-инвариантный модуль, автоморфизм-поднимаемый модуль, автоморфизм-коинвариантный модуль, оболочка, накрытие.

MODULES THAT ARE INVARIANT WITH RESPECT TO AUTOMORPHISMS AND IDEMPOTENT ENDOMORPHISMS OF THEIR HULLS AND COVERS

© 2019 **A. N. ABYZOV, T. C. QUYNH, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. The paper contains both previously known and new results on automorphism-invariant modules, automorphism-coinvariant modules, and modules that are invariant or coinvariant with respect to idempotent endomorphisms of their hulls and their covers, respectively. The main results are given with proofs.

Keywords and phrases: quasi-injective module, quasi-projective module, automorphism-invariant module, automorphism-liftable module, automorphism-coinvariant module, hull, cover.

AMS Subject Classification: 16D40, 16D50, 16W20

СОДЕРЖАНИЕ

Работа А. Н. Абызова выполнена при поддержке субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.1515.2017/4.6). Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

1. Введение

Инъективные и проективные объекты играют очень важную роль во многих математических категориях. В данной статье изучаются модули, близкие к проективным и инъективным. Все изучаемые в настоящей работе модули, близкие к инъективным, являются расширением понятия квазиинъективного модуля. Впервые квазиинъективные модули были введены в [46] как модули, инвариантные относительно эндоморфизмов своих инъективных оболочек. В этой же работе было показано, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда каждый гомоморфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Квазиинъективные модули и их различные обобщения изучались во многих работах. В [42] было введено понятие псевдоинъективного модуля, т.е. модуля, в котором каждый мономорфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Модуль, инвариантный относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки, называется автоморфизм-инвариантным. Впервые автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными алгебрами были изучены С. Диксоном и К. Фуллером в [27]. В последние годы был получен ряд важных результатов об автоморфизм-инвариантных модулях над произвольными кольцами. В [31] было показано, что модуль M является псевдоинъективным в точности тогда, когда M — автоморфизм-инвариантный модуль. Условия, при которых автоморфизм-инвариантные модули являются квазиинъективными, были рассмотрены в [38, 50]. Двойственное понятие к автоморфизм-инвариантным модулям под названием автоморфизм-коинвариантные (или дуально автоморфизм-инвариантные) модули было недавно изучено в [1, 35, 60]. Общая теория модулей инвариантных и коинвариантных относительно автоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия была в последнее время развита в [34, 38, 39].

В серии работ [55–57] Дж. фон Нейман развил теорию непрерывных геометрий и их реализации с помощью решеток главных правых идеалов непрерывных регулярных колец. Непрерывные регулярные кольца продолжил изучать Утуми в [68, 69, 71]. Им было показано, что регулярное кольцо R является непрерывным в точности тогда, когда каждый замкнутый правый подмодуль модуля R_R является прямым слагаемым R_R. Непрерывные модули и их обобщения — квазинепрерывные модули — были введены в [44, 45, 52, 61] как модульные аналоги непрерывных и квазинепрерывных колец, изученных Утуми в [70]. В [33] было показано, что модуль M является квазинепрерывным в точности тогда, когда модуль M инвариантен относительно идемпотентных эндоморфизмов своей инъективной оболочки. Многие важные свойства непрерывных, квазинепрерывных модулей и их дуальных аналогов были отражены в монографиях [15,24,26,29,41,51,54].

В настоящей работе представлены известные и новые результаты об автоморфизм-коинвариантных модулях и модулях, инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. В первой части дан обзор результатов, связанных с автоморфизм-инвариантными модулями, изучены автоморфизм-коинвариантные модули, рассмотрены условия, при которых автоморфизм-коинвариантные модули являются квазипроективными. Во второй части работы изложена общая теория модулей инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. Из полученных результатов в качестве следствий следуют известные важные свойства квазидискретных и квазинепрерывных модулей.

Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$. Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, малым подмодулем, существенным подмодулем) модуля M будем обозначать $N \leqslant M$ (соответственно, $N \ll M$, $N \leqslant_e M$). Радикал Джекобсона правого R-модуля M обозначается через $J(M)$.

2. Автоморфизм-инвариантные и автоморфизм-коинвариантные модули

2.1. Автоморфизм-инвариантные модули. Модуль M называется *квазиинъективным* (соответственно, *псевдоинъективным*), если для каждого подмодуля N модуля M каждый гомоморфизм (соответственно, мономорфизм) $f : N \to M$ продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$.

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным*, если он удовлетворяет одному из эквивалентных условий следующей теоремы.

Теорема 2.1 (см. [50, теорема 2]). *Пусть M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $f(M) \subseteq M$ *для каждого* $f \in \operatorname{Aut} E(M)$;
(2) *каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M*;
(3) *каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до изоморфизма модуля M.*

Теорема 2.2 (см. [31, теорема 16]). *Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — псевдоинъективный модуль.*

С. Диксон и К. Фуллер в [27] впервые изучили автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными P-алгебрами, у которых поле P состоит из более чем двух элементов. В частности, ими было доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть R — конечномерная алгебра над полем P. Если $\mid P \mid > 2$, то для неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны*:

(1) M — *автоморфизм-инвариантный модуль*;
(2) M — *квазиинъективный модуль.*

Автоморфизм-инвариантные модули над произвольными кольцами были изучены в [31, 36–39, 48, 50, 59]. Следующие результаты показывают, что ряд хорошо известных и важных свойств квазиинъективных модулей выполнен также и для автоморфизм-инвариантных модулей.

Теорема 2.4 (см. [37, предложение 1]). *Пусть M — автоморфизм-инвариантный модуль и $S = \operatorname{End} M$. Тогда $J(S) = \{f \in S \mid \operatorname{Ker}(f) \leqslant_e M\}$ и S — полурегулярное кольцо.*

Теорема 2.5 (см. [37, следствие 4]). *Если M — автоморфизм-инвариантный модуль, то* $\operatorname{End} M$ — *чистое кольцо.*

Теорема 2.6 (см. [37, теорема 3]). *Если M — автоморфизм-инвариантный модуль, то M — заменяемый модуль.*

В следующих утверждениях рассматриваются условия, при которых автоморфизм-инвариантный модуль является квазиинъективным.

Теорема 2.7 (см. [50, предложение 3]). *Если 2 — обратимый элемент в кольце R, то всякий автоморфизм-инвариантный правый R-модуль является квазиинъективным.*

Теорема 2.8 (см. [50, следствие 13]). *Модуль M является квазиинъективным в точности тогда, когда модуль M является одновременно автоморфизм-инвариантным модулем и CS-модулем.*

Теорема 2.9 (см. [38, теорема 4.9]). *Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. Конечно порожденный R-модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — квазиинъективный модуль.*

Теорема 2.10 (см. [38, теорема 4.13]). *Пусть R — коммутативное артиново кольцо. R-Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — квазиинъективный модуль.*

Модуль M называется *автоморфизм-продолжаемым* (соответственно, *эндоморфизм-продолжаемым*), если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. Если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M, то модуль M называется *строго автоморфизм-продолжаемым.* Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули были изучены в [4–14, 16–22, 63–67].

Теорема 2.11 (см. [63, предложение 10.22(1)]). *Для полуартинового модуля следующие условия равносильны*:

(1) *M — эндоморфизм-продолжаемый модуль*;

(2) *M — квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, S — цоколь модуля Q и f — эндоморфизм модуля Q. Достаточно доказать, что $f(M) \subseteq M$. Заметим, что $f(S) \subseteq S$. Кроме того, $S \subseteq M$, поскольку M — существенный подмодуль в Q.

Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X' в M, что $f(X') \subseteq X'$. Тогда $f(X) \subseteq X$, $S \subseteq X$ и X — существенный подмодуль в M. Если $X = M$, то $f(M) \subseteq M$. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $f(X) \subseteq X$ и M — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то существует такой эндоморфизм g модуля M, что $(f-g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(f-g)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Так как $g(X) \subseteq X$, то g индуцирует эндоморфизм $\overline{g}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Поскольку Y/X — цоколь модуля M/X, то $\overline{g}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому $g(Y) \subseteq Y$. Следовательно, $f(Y) \subseteq (f-g)(Y) + g(Y) \subseteq Y$. Кроме того, Y строго содержит X, что противоречит выбору X. □

Теорема 2.12 (см. [66, теорема 1]). *Для полуартинова модуля M равносильны условия*:

(1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;

(2) *M — строго автоморфизм-продолжаемый модуль*;

(3) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(3) вытекает из теоремы 2.1.

(3)⇒(2). Пусть X_1 — подмодуль в M и f_1 — его автоморфизм. Надо доказать, что f_1 продолжается до автоморфизма модуля M. Можно считать, что X_1 — существенный подмодуль в M.

Обозначим через W множество всех таких пар (X', f'), что X' — подмодуль в M, $X_1 \subseteq X'$, f' — автоморфизм модуля X' и f' совпадает с f_1 на X_1. Определим такой частичный порядок на W, что $(X', f') \leqslant (X'', f'') \Leftrightarrow X' \subseteq X''$ и f'' совпадает с f' на X'. Непосредственно проверяется, что объединение любой возрастающей цепи пар из W принадлежит W. По лемме Цорна существует максимальная пара (X, f). Тогда $X = X_2$ для любой такой пары $(X_2, f_2) \in W$, что $X \subseteq X_2$ и f_2 совпадает с f на X.

Если $X = M$, то f — автоморфизм модуля M, что и требовалось. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где X — собственный подмодуль модуля $Y \subseteq M$. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизмы f и f^{-1} модуля X продолжаются до эндоморфизмов g и h модуля M соответственно. Тогда

$$(1 - gh)(X) = 0 = (1 - hg)(X).$$

Так как $X \cap \operatorname{Ker} g = X \cap \operatorname{Ker} f = 0$ и X — существенный подмодуль в M, то g — мономорфизм. Кроме того, сужение g на X является автоморфизмом модуля X. Поэтому g индуцирует мономорфизм $\overline{g} : M/X \to M/X$. Так как цоколь Y/X модуля M/X является вполне инвариантным подмодулем в M/X, то $\overline{g}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому $g(Y) \subseteq Y$, причем $X = g(X) \subsetneq g(Y)$. Аналогично получаем, что $h(Y) \subseteq Y$, причем $X = h(X) \subsetneq h(Y)$.

Так как M — полуартинов модуль, то M — существенное расширение своего ненулевого цоколя S. Тогда $S \subseteq X$, поскольку X — существенный подмодуль в M и S — полупростой подмодуль в M. Кроме того,

$$(1 - gh)(X) = (1 - ff^{-1})(X) = 0$$

и Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(1 - gh)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Тогда

$$Y \subseteq (1 - gh)(Y) + gh(Y) \subseteq X + g(Y) = g(Y).$$

Поэтому сужение g_Y мономорфизма g на Y является автоморфизмом модуля Y и g_Y — продолжение автоморфизма f модуля X. Это противоречит выбору X.

(2)⇒(1). Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, u — автоморфизм модуля Q и S — цоколь модуля Q. Надо доказать, что $u(M) \subseteq M$.

Так как M — существенный полуартинов подмодуль в Q, то S содержится в M и является существенным подмодулем в M. Так как S — цоколь модуля Q, то $u(S) = S = u^{-1}(S)$. Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X' в M, что $u(X') = X' = u^{-1}(X')$. Тогда $u(X) = X = u^{-1}(X)$, $S \subseteq X$, X — существенный подмодуль в M.

Если $X = M$, то $u(M) = M$, что и требовалось. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $u(X) = X = u^{-1}(X)$ и M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то существуют такие автоморфизмы f и g модуля M, что $(u - f)(X) = 0$ и $(u^{-1} - g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому

$$(u - f)(Y) \subseteq S \subseteq X, \quad (u^{-1} - g)(Y) \subseteq S \subseteq X.$$

Так как f и g — автоморфизмы модуля M и $f(X) = X = g(X)$, то f и g индуцируют автоморфизмы $\overline{f}$ и $\overline{g}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Так как Y/X — цоколь модуля M/X, то $\overline{f}(Y/X) = Y/X = \overline{g}(Y/X)$, причем $f(X) = X = g(X)$. Поэтому $f(Y) = Y = g(Y)$. Кроме того, $(u - f)(Y) \subseteq Y$ и $(u^{-1} - g)(Y) \subseteq Y$. Тогда

$$u(Y) \subseteq (u - f)(Y) + f(Y) \subseteq Y, \quad u^{-1}(Y) \subseteq (u^{-1} - g)(Y) + g(Y) \subseteq Y.$$

Поэтому $u(Y) = Y = u^{-1}(Y)$ и Y строго содержит X, что противоречит выбору X. □

Следствие 2.13 (см. [16,21]). *Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Если M — артинов модуль или A — полупримарное кольцо, то следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
(2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
(3) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Теорема 2.14 (см. [10, теорема 2]). *Для регулярного кольца R следующие условия равносильны*:

(1) *R_R — эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
(2) *R — самоинъективное справа кольцо.*

Теорема 2.15 (см. [2, теорема 3]). *Для кольца R без делителей нуля следующие условия равносильны*:

(1) *R_R — эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
(2) *кольцо R обладает классическим двусторонним кольцом частных T и вполне целозамкнуто справа в T.*

Пример 2.16. Каждый квазиинъективный модуль является эндоморфизм-продолжаемым. Непосредственно проверяется, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$ является эндоморфизм-продолжаемым. Инъективной оболочкой $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}$ является аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Так как отображение $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, действующее по правилу $q \to q/2$, является автоморфизмом $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$ и $\alpha\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$, то $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$ не является квазиинъективным.

Пример 2.17. Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное множество экземпляров поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и R — подкольцо прямого произведения всех F_i, состоящее из всех последовательностей, стабилизирующихся на конечном шаге. Ясно, что R — регулярное полуартиново кольцо, которое не является самоинъективным. Тогда согласно теореме 2.12 модуль R_R не является эндоморфизм-продолжаемым. Так как $E = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ — инъективная оболочка модуля $R_R, U(R) = \{1\}$ и $\operatorname{End}_R E = \{1\}$, то R_R — автоморфизм-продолжаемый и автоморфизм-инвариантный модуль.

Пример 2.18. Пусть F — поле нулевой характеристики и A — алгебра Вейля над F с двумя образующими x, y и одним определяющим соотношением $xy - yx = 1$. Докажем, что A_A и ${}_AA$ — автоморфизм-продолжаемые модули, причем модули A_A и ${}_AA$ не являются эндоморфизм-продолжаемыми. Хорошо известно, что A — простая область главных правых (левых) идеалов, A — не тело, и группа обратимых элементов $U(A)$ области A совпадает с $F \setminus 0$. В частности, $U(A)$ лежит в центре области A.

Пусть a — ненулевой необратимый элемент области A. Достаточно доказать следующие два утверждения:

(a) для каждого автоморфизма α модуля aA_A существует такой обратимый элемент $u \in U(A)$, что $\alpha(ab) = uab$ для всех $b \in A$;

(b) существует эндоморфизм f модуля aA, который не продолжается до эндоморфизма модуля A_A.

(a) Так как $\alpha(aA) = aA$, то $\alpha(a) = au$ и $a = auv$ для некоторых элементов $u, v \in A$. Тогда $uv = 1$. Поскольку A — область, то $vu = 1$ и $u \in U(A) \subset F$. Тогда $uab = aub = \alpha(ab)$ для всех $b \in A$.

(b) Так как A — простая область и a — ненулевой необратимый элемент, то $AaA = A \neq Aa$. Поэтому $ab \nsubseteq Aa$ для некоторого элемента $b \in A$. Так как A — нетерова область, то A имеет классическое тело частных, содержащее элемент a^{-1}. Тогда $aba^{-1}aA \subseteq aA$ и соотношение $f(ac) = aba^{-1}c$ задает эндоморфизм f подмодуля aA_A в A_A. Допустим, что f продолжается до эндоморфизма φ модуля A_A. Обозначим $d = \varphi(a)$. Тогда

$$ab = aba^{-1}a = f(a)a = \varphi(a)a = da \in Aa,$$

Противоречие.

Открытый вопрос 2.19. Пусть M — автоморфизм-продолжаемый правый R-модуль. Верно ли, что в этом случае модуль M является строго автоморфизм-продолжаемым?

Открытый вопрос 2.20. Является ли эндоморфизм-продолжаемый модуль с существенным цоколем квазиинъективным?

Открытый вопрос 2.21. Описать эндоморфизм-продолжаемые справа и автоморфизм-продолжаемые справа групповые кольца. Пример групповой алгебры бесконечной циклической группы над полем показывает, что в таком случае, в отличие от инъективного случая, группа не обязана быть периодической.

2.2. Автоморфизм-коинвариантные модули. Модуль M называется *квазипроективным* (соответственно, *псевдопроективным*), если для каждого подмодуля N модуля M каждый гомоморфизм (соответственно, эпиморфизм) $f : M \to M/N$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$.

Модуль M называется *автоморфизм-коинвариантным,* если для каждых малых подмодулей K_1, K_2 модуля M всякий малый эпиморфизм $\nu : M/K_1 \to M/K_2$ поднимается до эндоморфизма θ модуля M:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "\nu"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

Очевидно, что каждый квазипроективный модуль является псевдопроективным и каждый псевдопроективый модуль является автоморфизм-коинвариантным.

Теорема 2.22 (см. [60, теорема 27]). *Пусть $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда M — автоморфизм-коинвариантный модуль в точности тогда, когда $f(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$ для каждого $f \in \mathrm{Aut}\, P$.*

Следующее утверждение является двойственным аналогом теоремы 2.2.

Теорема 2.23 (см. [35, теорема 2.3]). *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда правый R-модуль M является автоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда M — псевдопроективный модуль.*

Модуль M называется *строго автоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизма f' модуля M. Если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M, то M называется *автоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *эндоморфизм-поднимаемым*) модулем.

Теорема 2.24 (см. [5]). *Если R — совершенное справа кольцо, то для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть $\alpha : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\mathrm{Ker}(\alpha)$. Пусть f — произвольный эндоморфизм модуля P. Пусть

$$X = \mathrm{Ker}(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(\mathrm{Ker}(\alpha))$$

и $\alpha' : P/\mathrm{Ker}(\alpha) \to P/X$ — канонический гомоморфизм. Так как, очевидно, $f(X) \leqslant X$, то для некоторого гомоморфизма $f' : P/X \to P/X$ выполнено равенство $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$. Так как модуль M является эндоморфизм-поднимаемым, то для некоторого гомоморфизма $f'' : P/\mathrm{Ker}(\alpha) \to P/\mathrm{Ker}(\alpha)$ имеем $f'\alpha' = \alpha' f''$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого эндоморфизма $g : P \to P$ выполнено равенство $\alpha g = f''\alpha$. Так как

$$\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha, \quad \alpha'\alpha g = f'\alpha'\alpha,$$

то $(f - g)(P) \leqslant X$. Для любого натурального числа n введем обозначения

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}(f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha)), \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Докажем по индукции, что $X_n = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_n$. Пусть $n = 1$. Так как $g(\mathrm{Ker}(\alpha)) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$, то

$$\begin{aligned} X_1 = \mathrm{Ker}(\alpha) + f(\mathrm{Ker}(\alpha)) + g(\mathrm{Ker}(\alpha)) \supseteq \mathrm{Ker}(\alpha) + (f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \\ = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_1 \supseteq \mathrm{Ker}(\alpha) + g(\mathrm{Ker}(\alpha)) + (f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) \supseteq X_1. \end{aligned}$$

Теперь допустим, что $X_n = \operatorname{Ker}(\alpha) + Y_n$. Тогда

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_n + f^{n+1}(\operatorname{Ker}(\alpha)) = X_n + f^n(f(\operatorname{Ker}(\alpha))) + f^n(g(\operatorname{Ker}(\alpha))) \supseteq \\ \supseteq \operatorname{Ker}(\alpha) + Y_n + f^n(f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha)) = \operatorname{Ker}(\alpha) + Y_{n+1} \supseteq \\ \supseteq X_n + f^n g(\operatorname{Ker}(\alpha)) + f^n(f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha)) \supseteq X_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как $(f-g)(P) \subseteq X$ и $\operatorname{Ker}(\alpha)$ — малый подмодуль в P, то $(f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha))$ — малый подмодуль в X. Поэтому $f^n(f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha))$ — малый подмодуль в X для всех n, так как $f^n(X) \subseteq X$. Поэтому Y_n — малый подмодуль в X для всех n и $Y \subseteq J(X)$. Так как $X = \operatorname{Ker}(\alpha) + Y$ и $Y \subseteq J(X)$, то $X = \operatorname{Ker}(\alpha) + J(X)$. Поскольку кольцо R совершенно справа, то $X = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Следовательно, $\operatorname{Ker}(\alpha)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и согласно [72, 18.2] M — квазипроективный модуль. □

Пример 2.25. Легко видеть, что прюферова группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является автоморфизм-продолжаемой, но не является квазипроективной.

Пример 2.26. Пусть $M = \mathbb{Z} \oplus C$, где C — конечная циклическая группа порядка 2. Тогда непосредственно проверяется, что M — автоморфизм-коинвариантный и неквазипроективный модуль.

Пример 2.27. Пусть R — кольцо из п. (2) замечания **??**. Так как R — V-кольцо, то над кольцом R каждый модуль является автоморфизм-коинвариантным. Из предложения 2.50 следует, что модуль $R \oplus R/\operatorname{Soc}(R)$ не является автоморфизм-поднимаемым.

В теоремах 2.3, 2.8 и 2.9 приведены условия для автоморфизм-инвариантного модуля M, при которых модуль M является квазиинъективным. Естественно возникает задача о нахождении условий для автоморфизм-коинвариантного модуля M, при которых модуль M является квазипроективным. В настоящем разделе иэта задача изучается для автоморфизм-коинвариантных модулей над совершенными справа кольцами.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 2.22 и [72, 41.15].

Предложение 2.28. *Пусть R — совершенное справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — модуль со свойством подъема, который является автоморфизм-коинвариантным*;
(2) *M — квазидискретный модуль и автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(3) *M — π-проективный модуль и автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(4) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль и для каждых подмодулей A, B модуля M из равенства $A + B = M$ следует существование идемпотента $\pi \in \operatorname{End} M$, для которого выполнены условия $\pi(M) \subseteq A$, $(1-\pi)(M) \subseteq B$*;
(5) *M — квазипроективный модуль.*

Лемма 2.29. *Пусть $M_1 \oplus M_2$ — автоморфизм-коинвариантный модуль и $p_1 : P_1 \to M_1$, $p_2 : P_2 \to M_2$ — проективные оболочки. Если $P_1 \simeq P_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. По предположению существуют такие подмодули K_1, K_2 модуля P_1, что

$$K_1, K_2 \ll P_1, \quad M_1 \simeq P_1/K_1, \quad M_2 \simeq P_1/K_2.$$

Тогда гомоморфизм

$$\pi : P_1 \times P_1 \to P_1/K_1 \times P_1/K_2, \quad \pi(x,y) = (x + K_1, y + K_2), \quad x, y \in P_1,$$

является проективной оболочкой модуля $P_1/K_1 \times P_1/K_2$. Рассмотрим автоморфизм φ модуля $P_1 \times P_1$, действующий по правилу $\varphi(x,y) = (y,x)$ для каждых $x, y \in P_1$. Так как $P_1/K_1 \times P_1/K_2 \simeq M_1 \oplus M_2$ — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следует равенство $\varphi(K_1 \times K_2) = K_1 \times K_2$. Таким образом, $K_1 = K_2$. □

Лемма 2.30. *Пусть* $\pi : P \to M$ *— проективное накрытие автоморфизм-коинвариантного модуля* M *и* $P = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$*. Если* $P_1 \simeq P_2$*, то*
(1) $\mathrm{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \mathrm{Ker}(\pi))$;
(2) $M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$*, где*

$$M_1 = \frac{P_1 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_2 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)} = M_2, \quad M_3 = \frac{P_3 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)}.$$

Доказательство. Согласно условию леммы существует изоморфизм $f : P_1 \to P_2$. Пусть $\pi_i : P \to P_i$, $i = 1, 2, 3,$ — канонические проекции. Рассмотрим отображения

$$\phi_1 : P \to P, \quad x_1 + x_2 + x_3 \mapsto x_1 + (x_2 + f(x_1)) + x_3, \qquad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3,$$
$$\phi_2 : P \to P, \quad x_1 + x_2 + x_3 \mapsto (x_1 + f^{-1}(x_2)) + x_2 + x_3, \quad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3.$$

Очевидно, ϕ_1 и ϕ_2 — автоморфизмы модуля P. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следует, что

$$\phi_1(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi), \quad \phi_2(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi).$$

Пусть $m \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Для некоторых элементов $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ и $x_3 \in P_3$ имеет место равенство $m = x_1 + x_2 + x_3$. Так как

$$f(x_1) = \phi_1(m) - m, \quad f^{-1}(x_2) = \phi_2(m) - m \in \mathrm{Ker}(\pi),$$

то

$$x_1 = \phi_2(f(x_1)) - f(x_1), \quad x_2 = \phi_1(f^{-1}(x_2)) - f^{-1}(x_2) \in \mathrm{Ker}(\pi).$$

Следовательно, $x_3 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$\mathrm{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \mathrm{Ker}(\pi)),$$

и

$$M \simeq \frac{P}{\mathrm{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_1 \oplus P_2 \oplus P_3}{(P_1 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \mathrm{Ker}(\pi))} \simeq$$
$$\simeq \frac{P_1}{P_1 \cap \mathrm{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_2}{P_2 \cap \mathrm{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_3}{P_3 \cap \mathrm{Ker}(\pi)} \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

где

$$M_1 = \frac{P_1 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)}, \quad M_2 = \frac{P_2 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)}, \quad M_3 = \frac{P_3 + \mathrm{Ker}(\pi)}{\mathrm{Ker}(\pi)}.$$

Поскольку M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно [60, предложение 11] $M_1 \oplus M_2$ также является автоморфизм-коинвариантным модулем. Так как P_1 — проективная оболочка модуля M_1 и P_2 — проективное накрытие модуля M_2, то из леммы 2.29 следует изоморфизм $M_1 \simeq M_2$. □

Предложение 2.31. *Пусть* R *— совершенное справа кольцо,* M *— автоморфизм-коинвариантный правый* R*-модуль и* $\pi : P \to M$ *— проективное накрытие модуля* M*. Если* P *— прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то* M *— квазипроективный модуль.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [25, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \mathrm{End}_R(P)$ — идемпотент и $g \in \mathrm{Aut}\, P$. Согласно [32, теорема 3.10] имеют место равенства

$$eP = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad (1 - e)P = \bigoplus_{i \in I'} B_i,$$

где A_i, B_j — локальные проективные модули для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Пусть

$$\pi_i : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to A_i, \quad \pi'_j : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to B_j$$

— естественные проекции для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Так как модули из множества $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{B_i\}_{i\in I'}$ попарно изоморфны, то из леммы 2.30 следует, что

$$\pi_i(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi), \quad \pi_j'(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$$

для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Следовательно, $e(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $g(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [72, 18.2] M — квазипроективный модуль. □

Кольцо R называется *примарным*, если $R/J(R)$ — кольцо матриц над некоторым телом.

Следствие 2.32. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Если R — прямое произведение примарных колец, то каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Кольцо, в котором каждый идемпотентный элемент является центральным, называется *нормальным.*

Следствие 2.33. *Пусть R — нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Лемма 2.34. *Пусть M — автоморфизм-коинвариантный модуль и $\pi : P \to M$ — его проективное накрытие. Если $P = P_1 \oplus P_2$ — разложение модуля P и α, $1-\alpha$ — автоморфизмы модуля P_1 для некоторого $\alpha \in \operatorname{End} P_1$, то $\operatorname{Ker}(\pi) = (\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_2)$.*

Доказательство. Пусть $P = P_1 \oplus P_2$ и существует такой автоморфизм α модуля P_1, что $1-\alpha$ также является автоморфизмом модуля P_1. Тогда $\alpha \oplus 1_{P_2}$, $(1-\alpha)\oplus 1_{P_2}$ — автоморфизмы модуля P. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следуют равенства

$$(\alpha \oplus 1_{P_2})(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi), \quad [(1-\alpha) \oplus 1_{P_2}](\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi).$$

Пусть m — произвольный элемент из подмодуля $\operatorname{Ker}(\pi)$ и $m = p_1 + p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi)$, где $p_1 \in P_1$ и $p_2 \in P_2$. Тогда

$$\alpha(p_1) + p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi), \quad p_1 - \alpha(p_1) + p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi).$$

Следовательно, $p_1 + 2p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Тогда $p_1 = 2m - (p_1 + 2p_2) \in \operatorname{Ker}(\pi)$ и $p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$m = p_1 + p_2 \in (\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Лемма доказана. □

Предложение 2.35. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если для каждого прямого слагаемого P' модуля P существует такой гомоморфизм $\alpha \in \operatorname{End} P'$, что $\alpha, 1-\alpha \in \operatorname{Aut} P'$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Покажем, что $\operatorname{Ker}(\pi)$ является вполне инвариантным подмодулем модуля P. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [25, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \operatorname{End}_R P$ — идемпотент и $g \in \operatorname{End}_R P$ — автоморфизм. Предположим, что $e \neq 0$. Из условия исходного предложения следует, что $\alpha, 1-\alpha \in \operatorname{Aut} eP$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{End}_R P$. Тогда из леммы 2.34 следует равенство

$$\operatorname{Ker}(\pi) = [e(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi)] \oplus [(1-e)(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi)].$$

Следовательно, $e(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$. Если $e = 0$, то включение $e(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ очевидно. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $g(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [72, 18.2], M — квазипроективный модуль. □

Следствие 2.36. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. В таком случае если* $\mathrm{Aut}(eP/eJ(P))$ *— неединичная группа для каждого локального идемпотента $e \in \mathrm{End}_R P$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть P' — ненулевое прямое слагаемое модуля P. Согласно [32, теорема 3.10] имеет место изоморфизм

$$P' \cong e_1 R^{(A_1)} \oplus \ldots \oplus e_n R^{(A_n)},$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональные примитивные идемпотенты кольца R, в сумме дающие единицу. Из [72, 22.2] следуют изоморфизмы

$$\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P') \cong \mathrm{End}_R(P'/J(P')) \cong \mathrm{End}_R((e_1R/e_1J(R))^{(A_1)} \oplus \ldots \oplus (e_nR/e_nJ(R)^{(A_n)}).$$

Следовательно, для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P') \cong \mathrm{End}_{T_1}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_{T_k}(V_k),$$

где $V_1, \ldots, V_k$ — ненулевые векторные пространства соответственно над телами $T_1, \ldots, T_k$. Из условия следствия 2.36 вытекает, что $|T_i| > 2$ для каждого i. Тогда, очевидно, существует такой элемент

$$\overline{\alpha} = \alpha + J(\mathrm{End}_R P') \in \mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P'),$$

что $1 - \overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$ обратимы в кольце $\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P')$. Следовательно, $\alpha, 1 - \alpha \in Aut(P')$ и по предложению 2.35 M — квазипроективный модуль. □

Следствие 2.37. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Доказательство. Если кольцо R удовлетворяет условию следствия 2.37, то $\mathrm{End}_R(eR/eJ(R)) \not\cong \mathbb{Z}_2$ для каждого локального идемпотента e из кольца R. Тогда из следствия 2.36 следует, что каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным. □

Следствие 2.38. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого двойка обратима. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Следствие 2.39. *Пусть R — полусовершенное кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый конечно порожденный автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.37.

Предложение 2.40. *Пусть M — автоморфизм-коинвариантный неразложимый модуль. Предположим, что модуль M и каждый его простой фактор-модуль обладают проективной оболочкой. Тогда либо M — локальный квазипроективный модуль, либо для каждого максимального подмодуля N модуля M группа* $\mathrm{Aut}(M/N)$ *является единичной.*

Доказательство. Предположим, что существует такой максимальный подмодуль N модуля M, что группа $\mathrm{Aut}(M/N)$ не является единичной. Пусть $S = M/N$ и $\pi : P \to M$ и $\pi_1 : P_1 \to S$ — проективные оболочки. Так как модуль P_1 изоморфен прямому слагаемому модуля P, то без ограничения общности можно считать, что P_1 — прямое слагаемое модуля P и $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_2 \leqslant P$. Заметим, что согласно [47, 11.4.1], P_1 — локальный модуль. Так как $|\mathrm{End}_R S| > 2$, то существует такой гомоморфизм $\sigma \in \mathrm{End}_R S$, что $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$. Тогда σ и $1 - \sigma$ — автоморфизмы модуля S. Так как P_1 — проективный локальный модуль, то существует автоморфизм σ_1 модуля P_1, для которого выполнено равенство $\sigma \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \sigma_1$. Тогда $(1 - \sigma) \circ \pi_1 = \pi_1 \circ (1 - \sigma_1)$ и, следовательно, $1 - \sigma_1$ — автоморфизм модуля P_1. По лемме 2.34 имеет место равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Тогда
$$M \simeq \frac{P}{\operatorname{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_1}{\operatorname{Ker}(\pi)\cap P_1} \oplus \frac{P_2}{\operatorname{Ker}(\pi)\cap P_2}.$$
Так как M — неразложимый модуль и $\operatorname{Ker}(\pi)\cap P_1 \ll P_1$, то $P_2 = \operatorname{Ker}(\pi)\cap P_2$. Поскольку $\operatorname{Ker}(\pi)\cap P_2 \ll P_2$, то $P_2 = 0$. Таким образом, $P = P_1$. Покажем, что $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Пусть α — произвольный эндоморфизм модуля P. Так как $\operatorname{End} P$ — локальное кольцо, то $\alpha = e + \beta$, где β — автоморфизм модуля P и либо $e = 0$, либо $e = 1$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $\beta(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi)$. Следовательно, $\alpha(\operatorname{Ker}(\pi)) \leqslant \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Следовательно, согласно [72, 18.2], $M \cong P/\operatorname{Ker}(\pi)$ — квазипроективный модуль. □

Теорема 2.41. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — неразложимый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если модуль M не является квазипроективным, то $P = \bigoplus_{i\in I} P$, где $\{P_i\}_{i\in I}$ — попарно неизоморфные неразложимые проективные модули и $\operatorname{End} P_i/J(\operatorname{End} P_i) \cong \mathbb{Z}_2$ для каждого $i \in I$.*

Теорема 2.41 вытекает из леммы 2.30 и предложения 2.40.

Следствие 2.42. *Пусть R — конечномерная алгебра над полем P. Если $| P |> 2$, то для неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Следующее утверждение было установлено в [35]. Приведенное ниже доказательство этого утверждения отлично от доказательства, приведенного в [35].

Теорема 2.43. *Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда каждый конечно порожденный автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является псевдопроективным.*

Доказательство. Пусть M — автоморфизм-коинвариантный конечно порожденный правый R-модуль, N — подмодуль модуля M, $\pi : M \to M/N$ — естественный гомоморфизм и $f : M \to M/N$ — эпиморфизм правых R-модулей. Согласно [72, 42.6], модуль M обладает проективной оболочкой $\alpha : P \to M$. Из [72, 41.15, 42.6] следует, что для некоторых подмодулей P_1, P_2, P'_1, P'_2 модуля P выполнены условия
$$P = P_1 \oplus P_2, \quad P_1 \leqslant \operatorname{Ker}(\pi\alpha), \quad P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi\alpha) \ll P_2,$$
$$P = P'_1 \oplus P'_2, \quad P'_1 \leqslant \operatorname{Ker}(f\alpha), \quad P'_2 \cap \operatorname{Ker}(f\alpha) \ll P'_2.$$
Ясно, что $\pi\alpha_{|P_2}$, $f\alpha_{|P'_2}$ — проективные оболочки модуля M/N. Следовательно, существует изоморфизм $h_1 : P'_2 \to P_2$, для которого выполнено равенство $\pi\alpha_{|P_2}h_1 = f\alpha_{|P'_2}$. Так как согласно [47, 11.4.2], P — конечная прямая сумма модулей, у которых кольца эндоморфизмов являются локальными, то из теоремы Крулля—Ремака—Шмидта следует существование изоморфизма $h_2 : P'_1 \to P_1$. Тогда $h_1 \oplus h_2$ — автоморфизм модуля P, и из теоремы 2.22 следует равенство
$$h_1 \oplus h_2(\operatorname{Ker}(\alpha)) = \operatorname{Ker}(\alpha).$$
Следовательно, для некоторого гомоморфизма $h : M \to M$ имеет место равенство $\alpha(h_1 \oplus h_2) = h\alpha$. Так как $\pi\alpha_{|P_2}h_1 = f\alpha_{|P'_2}$ и $0 = \pi\alpha h_2(P'_1) = f\alpha(P'_1)$, то $\pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = f\alpha$. Тогда
$$f\alpha = \pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = \pi h\alpha.$$
Поскольку α — сюръективный гомоморфизм, то $f = \pi h$. □

Замечание 2.44. Изложение настоящего раздела основывается на [1, 5].

2.3. Автоморфизм-поднимаемые модули. Напомним некоторые понятия, которые будут использованы в дальнейшем. Подмодуль B модуля M называется аддитивным дополнением для A в M, если $A + B = M$ и B — наименьший элемент в множестве всех подмодулей $X \leqslant M$, для которых выполнено равенство $A + X = M$.

Модуль M называется *дополняемым*, если каждый его подмодуль обладает аддитивным дополнением в M. Если для каждых подмодулей A, B модуля M, для которых выполнено равенство $A + B = M$, существует такое аддитивное дополнение C для A в M, что $C \subseteq B$, то модуль M называется *строго дополняемым*. Модуль M называется *слабо дополняемым*, если для каждого его подмодуля A существует такой подмодуль B модуля M, что $A + B = M$ и $A \cap B \ll M$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 2.45. *Пусть M — автоморфизм-поднимаемый модуль. Если подмодуль X модуля M является вполне инвариантным, то фактор-модуль M/X является автоморфизм-поднимаемым.*

Пример 2.46. Для каждого простого числа p и каждого собственного подмодуля A $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ фактор-модуль $\mathbb{Z}_{p^\infty}/A$ является автоморфизм-поднимаемым.

Лемма 2.47. *Каждое прямое слагаемое автоморфизм-поднимаемого модуля является автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Пусть $M = N \oplus H$ — автоморфизм-поднимаемый модуль. Покажем, что модуль N является автоморфизм-поднимаемым. Пусть K — произвольный подмодуль модуля N и θ — автоморфизм модуля N/K. Существует естественный изоморфизм $\phi : N/K \to M/(K+H)$. Тогда $\theta' = \phi \circ \theta \circ \phi^{-1}$ — автоморфизм модуля $M/(K + H)$. Так как модуль M автоморфизм-поднимаем, то существует эндоморфизм α' модуля M, для которого выполнено равенство $p_2 \circ \alpha' = \theta' \circ p_2$, где $p_2 : M \to M/(K + N')$ — естественный гомоморфизм. Пусть $p_1 : N \to N/K$ — естественный гомоморфизм, $\iota : N \to M$ — включение и $\pi : M \to N$ — каноническая проекция. Таким образом, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p_1"'] & M \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_2"'] & N \arrow[d, "p_1"'] \\
N/K \arrow[r, "\phi"] & M/(K+N') \arrow[r, "\theta'"] & M/(K+N') \arrow[r, "\phi^{-1}"] & N/K
\end{tikzcd}$$

Пусть $\alpha = \pi \circ \alpha' \circ \iota : N \to N$. Тогда $\theta \circ p_1 = p_1 \circ \alpha$. Таким образом, модуль N является автоморфизм-поднимаемым. $\square$

Лемма 2.48. *Для дополняемого модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;

(2) *для каждого малого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм фактор-модуля M/X поднимается до сюръективного эндоморфизма M.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) очевидна.

(2)⇒(1). Пусть X — произвольный подмодуль модуля M. По предположению существует такой подмодуль Y модуля M, что $M = X + Y$ и $X \cap Y \ll M$. Тогда

$$M/X \simeq Y/(X \cap Y), \quad M/(X \cap Y) = X/(X \cap Y) \oplus Y/(X \cap Y).$$

Покажем, что каждый автоморфизм модуля M/X поднимается до эндоморфизма M. Так как модули M/X и $Y/(X \cap Y)$ естественно изоморфны, то достаточно показать, что для каждого автоморфизма α модуля $Y/(X \cap Y)$ существует эндоморфизм $\bar{\alpha}$ модуля M, для которого выполнено равенство $\alpha \circ \pi = \pi \circ \bar{\alpha}$, где эпиморфизм $\pi : M \to Y/(X \cap Y)$ задан согласно правилу $\pi(x + y) = y + (X \cap Y)$ для всех $x \in X, y \in Y$. Пусть φ — произвольный автоморфизм модуля

$Y/(X \cap Y)$. Положим $\phi = 1_{X/(X\cap Y)} \oplus \varphi : M/(X \cap Y) \to M/(X \cap Y)$. Согласно предположению существует такой эндоморфизм $\psi : M \to M$, что $\phi \circ p = p \circ \psi$, где $p : M \to M/(X \cap Y)$ — естественная проекция. Тогда $\varphi \circ \pi = \pi \circ \psi$. □

Следствие 2.49. *Пусть M — дополняемый модуль и для каждого эндоморфизма φ модуля M, у которого* $\mathrm{Ker}(\varphi) \ll M$, $1-\varphi$ *— автоморфизм M. Тогда для модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;

(2) *для каждого малого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм фактор-модуля M/X поднимается до автоморфизма M.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из леммы 2.48.

(2)⇒(1). Пусть M — автоморфизм-поднимаемый модуль, $X \ll M$ и $\alpha : M/X \to M/X$ — изоморфизм. Тогда для некоторых гомоморфизмов $h_1, h_2 : M \to M$ выполнены равенства

$$\alpha \circ p = p \circ h_1, \quad \alpha^{-1} \circ p = p \circ h_2,$$

где $p : M \to M/X$ — естественный гомоморфизм. Так как $X \ll M$, то h_1, h_2 — эпиморфизмы, у которых ядра являются малыми подмодулями модуля M. Несложно заметить, что

$$\mathrm{Ker}(h_1 \circ h_2) \ll M, \quad \mathrm{Ker}(h_2 \circ h_1) \ll M.$$

Если либо $h_1 \circ h_2 \neq 1$, либо $h_2 \circ h_1 \neq 1$, то соответственно либо $1 - h_1 \circ h_2$, либо $1 - h_2 \circ h_1$ изоморфизм. Поскольку

$$p \circ (1 - h_1 \circ h_2) = 0, \quad p \circ (1 - h_2 \circ h_1) = 0,$$

то $p = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $h_1 \circ h_2 = 1$ и $h_2 \circ h_1 = 1$. □

Модуль M называется *нильпотентно-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый нильпотентный эндоморфизм f модуля M/N может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M. Ясно, что каждый автоморфизм-поднимаемый модуль является нильпотентно-поднимаемым.

Предложение 2.50. *Если $M = X \oplus Y$ — нильпотентно-поднимаемый модуль, то X является Y-проективным и Y является X-проективным.*

Доказательство. Пусть N — подмодуль модуля M, для которого выполнено равенство $N + Y = M$, и $A = N \cap Y$. Тогда для некоторого гомоморфизма $f : X \to Y/A$ имеем

$$N = \{x + y \mid x \in X,\ y \in f(x) + A\}.$$

Пусть $\pi : M \to M/A$ — естественный гомоморфизм, $\overline{M} = M/A$ и $\overline{S} = (S + A)/A$ для каждого $S \leqslant M$. Тогда $\overline{M} = \overline{X} \oplus \overline{Y}$. Пусть $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f. Тогда отображение $g : \overline{M} \to \overline{M}$, действующее по правилу $g(x + y) = \overline{f}(x)$ $(x \in \overline{X},\ y \in \overline{Y})$, является нильпотентным эндоморфизмом модуля $\overline{M}$, который согласно условию поднимается до некоторого эндоморфизма h модуля M. Тогда $h(x) + A = f(x)$ $(x \in X)$. Следовательно, $\langle h \rangle \subseteq N$ и $\langle h \rangle \oplus Y = M$. Таким образом, согласно [26, 4.12] модуль X проективен относительно модуля Y. X-Проективность модуля Y доказывается аналогично. □

Следствие 2.51. *Каждый нильпотентно-поднимаемый модуль является $D3$-модулем. В частности, каждый автоморфизм-поднимаемый модуль является $D3$-модулем.*

Пример 2.52. $\mathbb{Z}$-Модули $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}$ являются автоморфизм-поднимаемыми. Согласно предложению 2.50, $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ не является автоморфизм-поднимаемым.

Следствие 2.53. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

(1) *R — классически полупростое кольцо*;

(2) *каждый конечно порожденный правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым*;

(3) *всякая прямая сумма двух автоморфизм-поднимаемых правых R-модулей является автоморфизм-поднимаемым модулем.*

Если модуль M обладает проективным накрытием $p : P \to M$ и для каждого нильпотентного эндоморфизма $f \in \operatorname{End} P$ выполнено условие $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha)$, то модуль M называется *нильпотентно-коинвариантным.*

Теорема 2.54. *Пусть M — нильпотентно-поднимаемый модуль, обладающий проективной оболочкой. Тогда модуль M является нильпотентно-коинвариантным.*

Доказательство. Пусть $\alpha : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть f — нильпотентный эндоморфизм модуля P. Покажем, что $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Так как эндоморфизм f нильпотентен, то для некоторого натурального числа n имеем $f^n = 0$.

Тот факт, что $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$, докажем с помощью индукции по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что доказываемое утверждение верно для $n-1$. Так как $(f^2)^{n-1} = 0$, то по предположению индукции $f^2(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть $N = \operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha))$ и $\alpha' : P/\operatorname{Ker}(\alpha) \to P/N$ — канонический гомоморфизм. Согласно предположению индукции имеем

$$f(\operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha))) = f(\operatorname{Ker}(\alpha)) + f^2(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha)).$$

Тогда для некоторого гомоморфизма $f' : P/N \to P/N$ выполнено равенство $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$. Так как модуль M является нильпотентно-поднимаемым, то для некоторого гомоморфизма $f'' : P/\operatorname{Ker}(\alpha) \to P/\operatorname{Ker}(\alpha)$ имеем $f'\alpha' = \alpha' f''$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого эндоморфизма $g : P \to P$ выполнено равенство $\alpha g = f''\alpha$. Так как $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$ и $\alpha'\alpha g = f'\alpha'\alpha$, то $(f-g)(P) \leqslant N$. Для произвольного элемента $p \in P$ существуют такие элементы $p_1, p_2 \in \operatorname{Ker}(\alpha)$, что $f(p) - g(p) = f(p_1) + p_2$. Так как

$$\alpha(f-g)(p-p_1) = \alpha(p_2 + g(p_1)) = 0,$$

то $p \in \operatorname{Ker}(\alpha(f-g)) + \operatorname{Ker}(\alpha)$. Тогда

$$P = \operatorname{Ker}(\alpha(f-g)) + \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha(f-g))$$

и, следовательно, $(f-g)(P) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Поскольку $g(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$, то

$$f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant (f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha)) + g(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha).$$

Теорема 2.54 доказана. □

Теорема 2.55. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — конечно порожденный нильпотентно-коинвариантный правый R-модуль. Если $M/J(M) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, где $S_1, \ldots, S_n$ — попарно изоморфные простые правые R-модули и $n > 1$, то модуль M квазипроективен.*

Доказательство. Пусть $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M и $e = e^2 \in \operatorname{End} P$. Для некоторого $1 \leqslant n_0 \leqslant n$ имеют место разложения

$$eP = P_1 \oplus \ldots \oplus P_{n_0}, \quad (1-e)P = P_{n_0+1} \oplus \ldots \oplus P_n,$$

где P_i — локальные модули для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и $P_i \cong P_j$ для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Пусть $\pi_i : P_1 \oplus \ldots \oplus P_n \to P_i$ — естественная проекция для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим произвольные различные индексы i, j из множества $\{1, \ldots, n\}$. С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства леммы 2.30, можно показать, что имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(\pi) = (P_i \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_j \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus \Big(\Big(\bigoplus_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}} P_k\Big) \cap \operatorname{Ker}(\pi)\Big).$$

Следовательно, $\pi_i(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$, $\pi_j(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$. Таким образом, $\pi_i(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$ для каждого $i \in \{1, \ldots n\}$. Следовательно, $e(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Поскольку

$$\operatorname{End} P/J(\operatorname{End} P) \cong \operatorname{End}(P/J(P)) \cong M_n(\operatorname{End}(S_1))$$

и $n > 1$, то согласно [40, следствие 1.5]

$$f + J(\operatorname{End} P) = F(e_1, \ldots, e_m),$$

где $e_1, \ldots, e_m \in \operatorname{End} P/J(\operatorname{End} P)$ — идемпотенты и $F \in \mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$. Поскольку $J(\operatorname{End} P)$ — ниль-идеал, то

$$e_1 = f_1 + J(\operatorname{End} P), \quad \ldots, \quad e_m = f_m + J(\operatorname{End} P)$$

для некоторых идемпотентов $f_1, \ldots, f_m \in \operatorname{End} P$. Тогда

$$f = F(f_1, \ldots, f_m) + n,$$

где $n \in \operatorname{End} P$ — нильпотентный элемент. Поскольку M — нильпотентно-коинвариантный модуль и $F(f_1, \ldots, f_m)(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$, то $f(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\pi$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [**?**][18.2]W91 модуль M квазипроективен. $\square$

Модуль M называется *бесквадратным*, если M не имеет таких ненулевых подмодулей $X \oplus Y$, что $X \cong Y$. Следующее утверждение непосредственно следует из доказательства предыдущей теоремы.

Теорема 2.56. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — нильпотентно-коинвариантный неразложимый правый R-модуль. Тогда фактор-модуль $M/J(M)$ является бесквадратным.*

Теорема 2.57 (см. [60, теорема 20])**.** *Следующие условия равносильны для абелевой группы G:*
(1) *группа G автоморфизм-инвариантна*;
(2) *группа G квазипроективна*;
(3) *группа G дискретна.*

В качестве приложения результатов, изложенных выше, докажем следующую теорему, описывающую периодические автоморфизм-поднимаемые абелевы группы, которая впервые была установлена в [3].

Теорема 2.58 (см. [3])**.** *Пусть M — периодическая абелева группа. Тогда следующие условия равносильны*:
(1) *M — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа*;
(2) *M — автоморфизм-поднимаемая абелева группа*;
(3) *имеет место разложение*

$$M = \Big(\bigoplus_{p\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in I'} \Big(\bigoplus \mathbb{Z}_{p^{m_p}}\Big)\Big),$$

где I, I' — множества простых чисел, пересечение которых пусто.

Доказательство. Импликации (1)⇒(2) и (3)⇒(1) проверяются непосредственно.

(2)⇒(3). Предположим, что M — автоморфизм-поднимаемая периодическая абелева группа. Абелева группа M представима в виде прямой суммы делимой группы и редуцированной группы. Из предложения 2.50 следует, что $M = (\bigoplus_{p\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}) \oplus K$, где K — редуцированная группа и I — некоторое множество простых чисел. Покажем, что каждая p-компонента K_p группы K является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n. Пусть B — базисная подгруппа p-компоненты K_p группы K. Для некоторого подмножества L группы K_p имеет место разложение $B = \bigoplus_{x\in L} x\mathbb{Z}$. Если элементы $x, y \in L (x \neq y)$ имеют различные порядки p^{k_1} и p^{k_2} соответственно, то $\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}}$ — автоморфизм-поднимаемая группа. Тогда группы $\mathbb{Z}_{p^{k_1}}$ и $\mathbb{Z}_{p^{k_2}}$ взаимно проективны, что невозможно. Таким образом, все элементы L имеют один и тот же порядок p^n. Следовательно, поскольку группа K редуцированна, то $B = K_p$. В результате получаем разложение $K = \bigoplus_{p \in I'} (\oplus \mathbb{Z}_{p^{m_i}})$, где I' — некоторое множество простых чисел. Поскольку группа $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ не является автоморфизм-поднимаемой для каждого простого p, то $I \cap I' = \varnothing$. $\square$

Следующее утверждение является широким обобщением предыдущей теоремы.

Теорема 2.59 (см. [14, теорема 2.1])**.** *Пусть M — периодический модуль над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *M — π-проективный модуль;*

(2) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль;*

(3) *каждая примарная компонента модуля M является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца R по аннулятору этой примарной компоненты.*

Теорема 2.60. *Следующие условия равносильны для кольца R:*

(1) *R — совершенное справа кольцо;*

(2) *для каждого правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и* $\mathrm{Ker}(f) \ll N$;

(3) *каждый плоский правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Импликации (1)⇒(2) и (1)⇒(3) очевидны.

(2)⇒(1). Пусть M — правый R-модуль. Для некоторого свободного модуля F имеет место эпиморфизм $\psi : F \to M$. Согласно условию (2) существует такой эпиморфизм $\phi : S \to F \oplus M$, что S — автоморфизм-поднимаемый модуль и $\mathrm{Ker}(\phi) \ll S$. Пусть $p_1 : F \oplus M \to F$ — естественная проекция. Тогда $S = \mathrm{Ker}(p_1 \circ \phi) \oplus T$, где $T \leqslant S$. Пусть $M' = \mathrm{Ker}(p_1 \phi)$. Несложно заметить, что $f = \phi|_{M'} : M' \to M$ — эпиморфизм и $\mathrm{Ker}(f) \ll M'$.

Существует гомоморфизм $\overline{\psi} : F \to M'$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dotted, "\overline{\psi}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \ll M'$, то $\overline{\psi}$ — эпиморфизм. Так как модуль $M' \oplus F$ автоморфизм-поднимаем, то согласно предложению 2.50, M' является F-проективным модулем. Таким образом, эпиморфизм $\overline{\psi}$ является расщепляющимся и, следовательно, модуль M' проективен.

(3)⇒(1). Пусть M — плоский правый R-модуль и $\varphi : F \to M$ — эпиморфизм, где F — свободный модуль. Так как согласно условию (3) модуль $F \oplus M$ автоморфизм-поднимаем, то модуль M F-проективен. Следовательно, эпиморфизм φ является расщепляющимся. Таким образом, модуль M проективен. $\square$

Доказательство следующих двух утверждений аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 2.61. *Следующие условия равносильны для кольца R:*

(1) *R — полусовершенное кольцо;*

(2) *для каждого конечно порожденного правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и* $\mathrm{Ker}(f) \ll N$.

Теорема 2.62. *Следующие условия равносильны для кольца R:*

(1) *R — полурегулярное кольцо;*

(2) *для каждого конечно представимого правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и* $\mathrm{Ker}(f) \ll N$.

Предложение 2.63. *Каждый автоморфизм-коинвариантный слабо дополняемый модуль является строго автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Пусть X — подмодуль модуля M и $f : M/X \to M/X$ — автоморфизм. Согласно условию существует такой подмодуль Y модуля M, что $X + Y = M$ и $X \cap Y \ll M$. Ясно, что

$$M/Y \cap X = X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y.$$

Пусть

$$\pi : X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to Y/X \cap Y$$

— каноническая проекция и $g : M/X \cap Y \to M/X$ — естественный гомоморфизм. Так как $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(g)$, то существует изоморфизм $\phi : Y/X \cap Y \to M/X$, для которого выполнено равенство $\phi\pi = g$. Рассмотрим отображение

$$h : X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y, \quad h(a + b) = a + \phi^{-1} f \phi(b),$$

где $a \in X/X \cap Y$, $b \in Y/X \cap Y$. Несложно заметить, что h — изоморфизм модулей и $\phi^{-1} f \phi\pi = \pi h$. Таким образом, $fg = gh$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно [60, следствие 2] существует автоморфизм $h' : M \to M$, для которого выполнено равенство $hg' = g'h'$, где $g' : M \to M/X \cap Y$ — естественный гомоморфизм. Таким образом, $fgg' = gg'h'$. □

Радикальным рядом модуля M называется убывающая цепочка

$$M \supseteq J^1(M) = J(M) \supseteq \ldots \supseteq J^\alpha(M) \supseteq J^{\alpha+1}(M) \supseteq \ldots,$$

где $J^\alpha(M) = J(J^{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $J^\alpha(M) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} J^\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α.

Теорема 2.64. *Пусть R — совершенное справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *если M — модуль Хопфа, то следующие условия равносильны:*
  (a) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль;*
  (b) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль;*

(2) *для модуля M следующие условия равносильны:*
  (a) *M — строго автоморфизм-поднимаемый модуль;*
  (b) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль;*

(3) *для модуля M следующие условия равносильны:*
  (a) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль;*
  (b) *для всяких малых подмодулей K_1 и K_2 модуля M каждый автоморфизм $\phi : M/K_1 \to M/K_2$ поднимается до автоморфизма модуля M;*
  (c) *для каждого малого подмодуля K модуля M каждый автоморфизм $\phi : M/K \to M/K$ поднимается до автоморфизма модуля M.*

Доказательство. (1) Импликация (b)⇒(a) следует из предложения 2.63 и того факта, что каждый правый модуль над совершенным справа кольцом является строго дополняемым.

(a)⇒(b). Пусть P — проективный модуль, $K \ll P$ и $M = P/K$. Предположим, что $f : P \to P$ — автоморфизм. Покажем, что $f(K) = K$. Обозначим через $\varphi : P \to P/K$ естественный гомоморфизм. С помощью трансфинитной индукции покажем, что

$$f(\varphi^{-1}(J^\alpha(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\alpha(P/K)) \quad \text{для каждого ординала } \alpha.$$

Поскольку $K \ll P$ и f — автоморфизм, то

$$f(\varphi^{-1}(J(P/K))) = f(J(P)) = J(P) = \varphi^{-1}(J(P/K)).$$

Предположим, что для каждого ординала $\beta < \alpha$ выполнено равенство

$$f(\varphi^{-1}(J^\beta(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\beta(P/K)).$$

Если α — предельный ординал, то, очевидно,

$$f(\varphi^{-1}(J^\alpha(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\alpha(P/K)).$$

Предположим, что α — непредельный ординал. Обозначим через $\varphi' : P/K \to P/\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$ естественный гомоморфизм. Согласно индуктивному предположению

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)).$$

Следовательно, существует изоморфизм

$$f' : P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \to P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)),$$

для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[d, "\varphi"] \\
P/K \arrow[d, "\varphi'"] & P/K \arrow[d, "\varphi'"] \\
P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \arrow[r, "f'"] & P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$f' \circ \varphi' \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi \circ f.$$

Поскольку P/K — автоморфизм-поднимаемый модуль, то существует эндоморфизм $g : P/K \to P/K$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P/K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi'"] & P/K \arrow[d, "\varphi'"] \\
P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \arrow[r, "f'"] & P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))
\end{tikzcd} .$$

Из проективности модуля P следует существование гомоморфизма $g' : P \to P$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[d, "\varphi"] \\
P/K \arrow[r, "g"] & P/K
\end{tikzcd}$$

Из коммутативности последних двух диаграмм следует, что

$$(f - g')(P) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \leqslant J(P) \ll P.$$

Так как модуль P проективен, то $f - g' \in J(\operatorname{End} P)$. Тогда g' — автоморфизм модуля P. Следовательно, g является эпиморфизмом. Так как P/K — модуль Хопфа, то g является автоморфизмом модуля P/K. Тогда $g'(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Поскольку для каждого ординала γ выполнено равенство

$$g(J^{\gamma}(P/K)) = J^{\gamma}(P/K),$$

то

$$g'(\varphi^{-1}(J^{\gamma}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\gamma}(P/K)).$$

Так как

$$(f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) \leqslant (f-g')(J(P)) \leqslant J(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))),$$
$$\varphi(J(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)))) \leqslant J(J^{\alpha-1}(P/K)) = J^{\alpha}(P/K),$$

то

$$(f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Следовательно,

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \leqslant (f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) + g'(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Предположим, что

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \neq \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Так как

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)),$$

то существует такой элемент $m \in \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))$, что

$$m \notin \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)), \quad f(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Поскольку $f(m) = (f-g')(m) + g'(m)$ и $f(m)$, $(f-g')(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$, то

$$g'(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

С другой стороны, g' является автоморфизмом и

$$g'(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K));$$

следовательно, $m \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$. Получили противоречие. Таким образом,

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Так как R — совершенное справа кольцо, то $K = \varphi^{-1}(J^{\alpha_0}(P/K))$ для некоторого ординала α_0. Следовательно, $f(K) = K$ и модуль M является автоморфизм-коинвариантным.

(2) Импликация (b)⇒(a) следует из предложения 2.63. Доказательство импликации (a)⇒(b) аналогично доказательству импликации (a)⇒(b) из п. (1).

(3) Импликация (a)⇒(b) следует из [60, следствие 2]. Импликация (b)⇒(c) очевидна. Доказательство импликации (c)⇒(a) аналогично доказательству импликации (a)⇒(b) из п. (1). □

Следствие 2.65. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *модуль M является автоморфизм-коинвариантным;*
(2) *модуль M является автоморфизм-поднимаемым;*
(3) *модуль M является строго автоморфизм-поднимаемым.*

Кольцо R называется *инвариантным справа*, если каждый правый идеал кольца R является идеалом.

Предложение 2.66. *Пусть R — нормальное артиново справа кольцо. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-коинвариантным;*
(2) *каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым;*
(3) *каждый циклический правый R-модуль является квазипроективным;*
(4) *R — инвариантное справа кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(2) вытекает следует из следствия 2.65. Импликация (4)⇒(3) следует из [41, теорема 10.13]. Импликация (3)⇒(2) очевидна.

(1)⇒(4). Без ограничения общности можно считать, что кольцо R является локальным. Пусть A — собственный правый идеал кольца R. Поскольку кольцо R локально, то либо r, либо $1-r$ обратимый элемент кольца R. Тогда согласно [60, теорема 27], либо $rA \subseteq A$, либо $(1-r)A \subseteq A$. Следовательно, $rA \subseteq A$ и A левый идеал кольца R. Таким образом, R — инвариантное справа кольцо. □

Согласно теореме 2.24 каждый эндоморфизм-поднимаемый правый R-модуль над совершенным справа кольцом R является квазипроективным. В связи с этим результатом естественной является задача о нахождение условий, при которых автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль M является квазипроективным.

Теорема 2.67. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — квазипроективный модуль*;
(2) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль, для которого выполнено равенство $M = \bigoplus_I M_i$, где M_i — полый модуль для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из [49, теорема 3.4].

(2)⇒(1). Предположим, что $M = \bigoplus_I M_i$ — автоморфизм-поднимаемый модуль и M_i — полый модуль для каждого $i \in I$. Из леммы 2.47 следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i является полым и автоморфизм-поднимаемым. Несложно заметить, что для каждого $i \in I$ M_i — локальный модуль. Из следствия 2.65 следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i является автоморфизм-коинвариантным. Тогда из [60, теорема 30] следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i квазипроективен. Из предложения 2.50 следует, что модули M_i и M_j взаимно проективны для каждых $i \neq j$ из I. Тогда согласно [51, предложение 4.35] модуль M_j является M-проективным для каждого $j \in I$. Таким образом, согласно [51, предложение 4.32] модуль M квазипроективен. □

Замечание 2.68. Заметим, что условие артиновости справа для кольца R из предыдущей теоремы не может быть опущено. Действительно, например, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является неквазипроективным, полым и автоморфизм-поднимаемым $\mathbb{Z}$-модулем.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 2.67 и [49, теорема 3.4].

Следствие 2.69. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль, который является модулем со свойством подъема*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Следствие 2.70. *Пусть R — артиново полуцепное кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль*;
(3) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль.*

Теорема 2.71. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — конечно порожденный автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если P — прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то модуль M является квазипроективным.*

Доказательство. Согласно следствию 2.65 модуль M является автоморфизм-коинвариантным. Тогда квазипроективность модуля M следует из предложения 2.31. □

Следствие 2.72. *Пусть R — нормальное артиново справа кольцо и M — конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль*;
(3) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль.*

Открытый вопрос 2.73. Пусть M — автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль и R — совершенное справа кольцо. Верно ли, что в этом случае модуль M является строго автоморфизм-поднимаемым?

Открытый вопрос 2.74. Описать кольца, над которыми каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-коинвариантным (автоморфизм-поднимаемым).

Замечание 2.75. Этот раздел основан на результатах, полученных совместно А. Н. Абызовым и Ч. К. Куинем.

3. $\mathcal{X}$-Идемпотентно коинвариантные и $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантные модули

3.1. Относительно инъективные и относительно проективные модули. Пусть A, B — правые R-модули. Модуль A называется *B-инъективным* (или *инъективным относительно B*), если всякая диаграмма в Mod-R с точной строкой

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "\overline{g}"'] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Как показывает следующее утверждение, относительную инъективность модулей можно определить с помощью инъективных оболочек.

Теорема 3.1. *Пусть R — кольцо, M, N — правые R-модули и $\iota_1 : M \to E(M)$, $\iota_2 : N \to E(N)$ — инъективные оболочки соответственно модулей M и N. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *модуль M — N-инъективен*;
(2) *для каждого гомоморфизма $f : E(N) \to E(M)$ существует гомоморфизм $g : N \to M$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "g"'] & E(N) \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\iota_1"] & E(M) \end{tikzcd}$$

В частности, модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является вполне инвариантным подмодулем в своей инъективной оболочке.

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $f : E(N) \to E(M)$ — гомоморфизм модулей и

$$N_0 = \{n \in N \mid f(n) \in M\}.$$

Согласно условию п. (1) существует такой гомоморфизм $f' : N \to M$, что $f'(n) = f(n)$ для каждого $n \in N_0$. Предположим, что $(f - f')N \neq 0$. Тогда для некоторых $n \in N$ и $r \in R$ имеем

$$(f - f')(nr) \in M, \quad (f - f')(nr) \neq 0.$$

Следовательно, $nr \in N_0$ и $f(nr) \neq f'(nr)$, что невозможно. Таким образом, $(f - f')N = 0$.

(2)⇒(1). Пусть $N_0 \leqslant N$ и $f : N_0 \to M$ — гомоморфизм модулей. Так как $E(M)$ — инъективный модуль, то гомоморфизм f продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : E(N) \to E(M)$. Согласно условию п. (2) $f'(N) \subseteq M$. Таким образом, гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма $f'_{|N} : N \to M$. □

Пусть A, B — правые R-модули. Модуль A называется *B-проективным* (или *проективным относительно* B), если всякая диаграмма в Mod-R с точной строкой

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r] & 0 \\ & A \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r] & 0 \\ & A \arrow[u, "g"] \arrow[ul, "\overline{g}"] & \end{tikzcd}$$

Как показывает следующее утверждение, если правые R-модули M и N обладают проективными накрытиями, то проективность модуля M относительно модуля N можно определить с помощью проективных накрытий.

Теорема 3.2. *Пусть R — кольцо, M, N — правые R-модули и $\pi_1 : P \to M$, $\pi_2 : P' \to N$ — проективные накрытия модулей M и N соответственно. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *модуль M — N-проективен;*

(2) *для каждого гомоморфизма $f : P \to P'$ существует гомоморфизм $g : M \to N$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "g"] \\ P' \arrow[r, "\pi_2"] & N \end{tikzcd}$$

В частности, если $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M, то модуль M квазипроективен в точности тогда, когда $\operatorname{Ker}(\phi)$ *является вполне инвариантным подмодулем модуля P.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $f : P \to P'$ — гомоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $N = P'/\operatorname{Ker}(\pi_2)$ и $\pi_2 : P' \to P'/\operatorname{Ker}(\pi_2)$ — естественный гомоморфизм. Положим

$$N_0 = \operatorname{Ker}(\pi_2) + f(\operatorname{Ker}(\pi_1)).$$

Так как $f(\operatorname{Ker}(\pi_1)) \subseteq N_0$, то для некоторого гомоморфизма $f_1 : M \to P'/N_0$ имеет место равенство

$$\pi\pi_2 f = f_1\pi_1,$$

где $\pi : P'/\operatorname{Ker}(\pi_2) \to P'/N_0$ — естественный гомоморфизм. Согласно условию п. (1) для некоторого гомоморфизма $f_2 : M \to N$ имеем $\pi f_2 = f_1$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого гомоморфизма $g : P \to P'$ выполнено равенство

$$\pi_2 g = f_2\pi_1.$$

Тогда для произвольного элемента $p \in P$ существуют такие элементы $p_1 \in \operatorname{Ker}(\pi_1)$, $p_2 \in \operatorname{Ker}(\pi_2)$, что

$$(f-g)(p) = p_2 + f(p_1).$$

Поскольку

$$\pi_2(f-g)(p-p_1) = \pi_2(p_2 + f(p_1)) - \pi_2 f(p_1) = 0,$$

то $p \in \operatorname{Ker}(\pi_1) + \operatorname{Ker}(\pi_2(f-g))$. Таким образом,

$$P = \operatorname{Ker}(\pi_1) + \operatorname{Ker}(\pi_2(f-g)) = \operatorname{Ker}(\pi_2(f-g)).$$

Следовательно,

$$(f-g)(P) \subseteq \operatorname{Ker}(p_2)$$

и поскольку $g(\operatorname{Ker}(p_1)) \leqslant \operatorname{Ker}(p_2)$, то $f(\operatorname{Ker}(p_1)) \leqslant \operatorname{Ker}(p_2)$. Тогда для некоторого гомоморфизма $f' : M \to N$ выполнено равенство $\pi_2 f = f'\pi_1$.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть $N_0 \leqslant N$ и $h : M \to N/N_0$ — гомоморфизм модулей. Так как модуль P проективен, то для некоторого гомоморфизма $f : P \to P'$ имеет место равенство $\pi\pi_2 f = h\pi_1$, где $\pi : N \to N/N_0$ — естественный гомоморфизм. Согласно условию п. (2) для некоторого гомоморфизма g выполнено равенство $\pi_2 f = g\pi_1$. Тогда

$$h\pi_1 = \pi\pi_2 f = \pi g \pi_1.$$

Поскольку π_1 — эпиморфизм, то $\pi g = h$. $\square$

Пусть R — кольцо и Ω — некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*оболочкой* правого R-модуля M, если

1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \\ E' & \end{tikzcd},$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E' & \end{tikzcd};$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E & \end{tikzcd}$$

следует, что h — автоморфизм.

Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*накрытием* правого R-модуля M, если

(1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"] \end{tikzcd},$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd};$$

(2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

следует, что h — автоморфизм.

Если Ω — класс проективных (соответственно, инъективных) правых R-модулей, то Ω-накрытие (соответственно, Ω-оболочка) правого R-модуля M называется *проективным накрытием* (соответственно, *инъективной оболочкой*) модуля M.

Модуль M называется *$\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным*, если существует $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$ и для любого эндоморфизма g модуля X существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого выполнено равенство $uf = gu$.

Пусть M_1, M_2 — правые R-модули. Модуль M_2 называется $\mathcal{X}$-M_1-инъективным, если существуют $\mathcal{X}$-оболочки $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$ и для любого гомоморфизма $g : X_1 \to X_2$ существует гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, для которого выполнено равенство $gu_1 = u_2 f$:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[d, "g"] \\ M_2 \arrow[r, "u_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Ясно, что модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм инвариантным в точности тогда, когда M — $\mathcal{X}$-M-инъективный модуль. Два модуля M_1, M_2 называются *взаимно $\mathcal{X}$-инъективными*, если M_1 является $\mathcal{X}$-M_2-инъективным, аM_2 — $\mathcal{X}$-M_1-инъективным.

Лемма 3.3. *Пусть M_1, M_2 — взаимно $\mathcal{X}$-инъективные модули, $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Если $X_1 \simeq X_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. Предположим, что $g : X_1 \to X_2$ — изоморфизм модулей. Существуют гомоморфизмы $f_1 : M_1 \to M_2$ и $f_2 : M_2 \to M_1$, для которых выполнены равенства

$$u_2 f_1 = g u_1, \quad u_1 f_2 = g^{-1} u_2.$$

Тогда $u_1 f_2 f_1 = u_1$ и $u_2 f_1 f_2 = u_2$. Следовательно, $f_1 f_2 = id_{M_2}$ и $f_2 f_1 = id_{M_1}$. □

Теорема 3.4 (см. [62]). *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — правый R-модуль и $u_i : M_i \to X_i$ — $\mathcal{X}$-оболочка для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм инвариантный модуль*;
(2) *модуль M_i является $\mathcal{X}$-M_j-инъективным для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Докажем в случае, когда $n = 2$. Общий случай доказывается аналогично.

(1)⇒(2). Пусть $g : X_i \to X_j$ — гомоморфизм. Обозначим через

$$\pi_i : X_1 \oplus X_2 \to X_i, \quad \iota_j : X_j \to X_1 \oplus X_2$$

соответственно проекцию и вложение. Согласно п. (1) существует гомоморфизм

$$f : M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2,$$

для которого выполнено равенство

$$(u_1 \oplus u_2)f = \iota_j g \pi_i (u_1 \oplus u_2).$$

Пусть $k = q_j f v_i$, где $q_j : M_1 \oplus M_2 \to M_j$ — проекция и $v_i : M_i \to M_1 \oplus M_2$ — вложение. Тогда $u_j k = g u_i$.

(2)⇒(1). Предположим, что модуль M_i является $\mathcal{X}$-M_j-инъективным для каждых $i, j \in \{1, 2\}$ и

$$u_1 \oplus u_2 : M_1 \oplus M_2 \to X_1 \oplus X_2$$

— $\mathcal{X}$-оболочка. Пусть g — эндоморфизм модуля $X_1 \oplus X_2$,

$$\iota_1 : X_1 \to X_1 \oplus X_2, \quad \iota_2 : X_2 \to X_1 \oplus X_2$$

— вложения и

$$\pi_1 : X_1 \oplus X_2 \to X_1, \quad \pi_2 : X_1 \oplus X_2 \to X_2$$

— проекции. Для каждых $i, j \in \{1, 2\}$ существует такой гомоморфизм $f_{ij} : M_i \to M_j$, что

$$\pi_j g \iota_i u_i = u_j f_{ij}.$$

Пусть $f : M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2$ — эндоморфизм, действующий согласно правилу

$$f(m_1 + m_2) = f_{11}(m_1) + f_{21}(m_1) + f_{12}(m_2) + f_{22}(m_2).$$

Тогда $g(u_1 \oplus u_2) = (u_1 \oplus u_2)f$. Таким образом, модуль $M = M_1 \oplus M_2$ является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным. □

Следствие 3.5. *Модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M^n — $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантный модуль.*

Следствие 3.6 (см. [24, предложение 2.2.2])**.** *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — правые R-модули. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ — *квазиинъективный модуль*;

(2) M_i — M_j-*инъективный модуль для каждых* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие 3.7 (см. [24, предложение 2.2.3])**.** *Пусть M — модуль и $n \in \mathbb{N}$. Тогда модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M^n — квазиинъективный модуль.*

Пусть M_1, M_2 — правые R-модули. Модуль M_1 называется *$\mathcal{X}$-M_2-проективным*, если существуют такие $\mathcal{X}$-накрытия $p_1 : X_1 \to M_1$, $p_2 : X_2 \to M_2$, что для любого гомоморфизма $g : X_1 \to X_2$ существует гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"'] & M_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "p_2"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Если модуль M $\mathcal{X}$-M-проективен, то M называется *$\mathcal{X}$-эндоморфизм-коинвариантным.* Два правых R-модуля M_1 и M_2 называются *взаимно $\mathcal{X}$-проективными*, если M_1 — $\mathcal{X}$-M_2-проективен и M_2 — $\mathcal{X}$-M_1-проективен.

Лемма 3.8. *Пусть $p_1 : X_1 \to M_1$, $p_2 : X_2 \to M_2$ — $\mathcal{X}$-эпиморфные накрытия правых R-модулей. Следующие условия равносильны*:

(1) M_1 — M_2-$\mathcal{X}$-*проективный модуль*;

(2) $g(\operatorname{Ker} p_1) \leqslant \operatorname{Ker} p_2$ *для каждого* $g \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$.

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что M_1 является M_2-$\mathcal{X}$-проективным модулем и $g \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$. Существует такой гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, что $p_2 g = f p_1$. Для любого $x \in \mathrm{Ker}(p_1)$ имеет место равенство $p_1(x) = 0$ и, следовательно, $p_2 g(x) = f p_1(x) = 0$. Тогда $g(x) \in \mathrm{Ker}(p_2)$. Таким образом, $g(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$.

(2)⇒(1). Пусть $g : X_1 \to X_2$ — гомоморфизм правых R-модулей. Тогда $g(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi : X_2/g(\mathrm{Ker}(p_1)) \to M_2, \quad \psi(x + g(\mathrm{Ker}(p_1)) = p_2(x) \text{ для всех } x \in X_2.$$

Так как p_1 — эпиморфизм, то для каждого $m \in M_1$ существует такой элемент $x \in X_1$, что $m = p_1(x)$. Рассмотрим следующее отображение:

$$\phi : M_1 \to X_2/g(\mathrm{Ker}(p_1)), \quad m \mapsto g(x) + g(\mathrm{Ker}(p_1)).$$

Ясно, что ϕ — гомоморфизм правых R-модулей. Пусть $f = \psi \circ \phi : M_1 \to M_2$. Для каждого $x \in X_1$ имеем

$$f p_1(x) = \psi \circ \phi(p_1(x)) = \psi(g(x) + g(\mathrm{Ker}\, p_1)) = p_2 g(x).$$

Тогда $f p_1 = p_2 g$. Следовательно, модуль M_1 является M_2-$\mathcal{X}$-проективным. □

Лемма 3.9. *Пусть M_1, M_2 — взаимно $\mathcal{X}$-проективные правые R-модули и $p_i : X_i \to M_i$ — эпиморфные $\mathcal{X}$-накрытия. Если $X_1 \simeq X_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. Пусть $g : X_1 \to X_2$ — изоморфизм. По предположению существуют такие гомоморфизмы $f_1 : M_1 \to M_2$ и $f_2 : M_2 \to M_1$, что

$$f_1 \circ p_1 = p_2 \circ g, \quad f_2 \circ p_2 = p_1 \circ g^{-1}.$$

Тогда $f_1 \circ f_2 \circ p_2 = p_2$ и $f_2 \circ f_1 \circ p_1 = p_1$. Следовательно, $f_1 \circ f_2 = id_{M_2}$ и $f_2 \circ f_1 = id_{M_1}$. □

Следующее утверждения является двойственным аналогом теоремы 3.4.

Теорема 3.10. *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — модуль и для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ модуль M_i обладает $\mathcal{X}$-накрытием. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм коинвариантный модуль;*
(2) *модули M_i и M_j взаимно $\mathcal{X}$-проективны для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Следствие 3.11. *Если модуль M обладает $\mathcal{X}$-накрытием, то M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда $M \oplus M$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм-коинвариантный модуль.*

Следствие 3.12. *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — квазипроективный модуль;*
(2) *модули M_i и M_j взаимно проективны для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Следствие 3.13. *Если M — правый модуль над совершенным справа кольцом, то M является квазипроективным модулем в точности тогда, когда $M \oplus M$ — квазипроективный модуль.*

3.2. $\mathcal{X}$-Идемпотентно-инвариантные модули.

Лемма 3.14. *Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, α — эндоморфизм модуля Q, $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$ и $f = \alpha|_X : X \to M$ — сужение эндоморфизма α на модуль X. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *если гомоморфизм $f : X \to M$ продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$;*
(2) *если $f(X) \subseteq X$ и эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$;*

(3) *если* $\alpha = \alpha^2$ *и каждый идемпотентный эндоморфизм модуля* X *продолжается до некоторого эндоморфизма модуля* M, *то* $\alpha(M) \subseteq M$.

Доказательство. (1). Так как Q — инъективный модуль, то эндоморфизм g модуля M продолжается до некоторого эндоморфизма β модуля Q.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) = 0$. Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$, что и требовалось доказать.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) \neq 0$. Так как Q — существенное расширение модуля M и $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$, то X — существенный подмодуль в Q. Тогда $X \cap (\alpha - \beta)(M)$ — ненулевой подмодуль в M, поскольку Q — существенное расширение модуля X. Пусть

$$0 \neq x = (\alpha - \beta)(m) \in X \cap (\alpha - \beta)(M),$$

где $m \in M$. Так как

$$\alpha(m) = (\alpha - \beta)(m) + \beta(m) = x + \beta(m) \in M,$$

то $m \in X$. Поэтому $(\alpha - \beta)(m) = 0$ и $x = 0$. Получено противоречие.

(2) вытекает из (1).

(3). Так как $\alpha = \alpha^2$, то $f = f^2$ и $f^2(x) = f(x) \in X$ для любого элемента $x \in X$. Поэтому f — идемпотентный эндоморфизм модуля X. По условию f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. Согласно (2) имеем $\alpha(M) \subseteq M$. $\square$

Модуль M называется CS-*модулем* или $C1$-*модулем*, если каждый подмодуль в M является существенным подмодулем некоторого прямого слагаемого модуля M.

Модуль M называется $C3$-*модулем*, если $X \oplus Y$ — прямое слагаемое в M для любых таких прямых слагаемых X и Y в M, что $X \cap Y = 0$.

Модуль M называется *квазинепрерывным* (см. [44]) или π-*инъективным*, если выполнены эквивалентные условия следующего утверждения.

Предложение 3.15. *Для модуля* M *следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в* M *продолжается до эндоморфизма модуля* M;

(2) *каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в* M *продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля* M;

(3) M — *идемпотент-инвариантный модуль, т.е.* $\alpha(M) \subseteq M$ *для каждого идемпотентного эндоморфизма* α *инъективной оболочки модуля* M;

(4) M — CS-*модуль и* C_3-*модуль*;

(5) $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap Q_i)$ *для любого прямого разложения* $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ *инъективной оболочки* Q *модуля* M;

(6) *для любого подмодуля* $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ *модуля* M *существует такое прямое разложение* $M = M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_n \oplus Y$ *модуля* M, *что* M_i — *существенное расширение модуля* X_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Доказательство. Эквивалентности (2)⇔(3)⇔(4) доказаны в [44] (см. также [63]). Эквивалентности (3)⇔(5) и (4)⇔(6) проверяются непосредственно (см. также [63]). Импликация (2)⇒(1) очевидна. Импликация (1)⇒(3) вытекает из леммы 3.14. $\square$

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется $\mathcal{X}$-*идемпотентно инвариантным*, если существует такая $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$, что для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{u} & X \end{array}.$$

В настоящем пункте излагается общая теория $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантных модулей. Изложение основано на [62].

Лемма 3.16. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — модуль и $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$, $u_1 \oplus u_2 : M \to X_1 \oplus X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Если модуль M является $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантным, то M_i — $\mathcal{X}$-M_j-инъективный модуль для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть $g' : X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ — гомоморфизм, заданный согласно правилу $g'(x_1 + x_2) = x_1 + g(x_1)$. Так как $g'^2 = g'$ и модуль M $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантен, то для некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$ имеет место равенство $uf' = g'u$. Для каждого $m_1 \in M_1$ существуют такие элементы $m_1' \in M_1$, $m_2 \in M_2$, что $f'(m_1) = m_1' + m_2$. Определим гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$ согласно правилу $f(m_1) = m_2$. Тогда для каждого $m_1 \in M_1$ имеют место равенства

$$g'u(m_1) = g'(u_1(m_1)) = u_1(m_1) + gu_1(m_1),$$
$$uf'(m_1) = u(m_1' + m_2) = u_1(m_1') + u_2(m_2) = u_1(m_1') + u_2 f(m_1).$$

Следовательно, $gu_1(m_1) = u_2 f(m_1)$ и $gu_1 = u_2 f$. □

Следствие 3.17. *Модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда $M \oplus M$ — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.*

Следствие 3.17 вытекает из леммы 3.16 и следствия 3.11.

Следствие 3.18. *Модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда $M \oplus M$ — квазинепрерывный модуль.*

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-CS-модулем,* если существует такая $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$, что для любого идемпотента $g \in \operatorname{End}(X)$ существует идемпотент $f \in \operatorname{End} M$, для которого выполнено равенство $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. В этом случае, очевидно, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "uf"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}.$$

Предложение 3.19. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль, то M — $\mathcal{X}$-CS-модуль.*

Доказательство. Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и $g^2 = g \in \operatorname{End}(X)$. Поскольку M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль, то для некоторых эндоморфизмов $f, f' \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $uf = gu$, $uf' = (1-g)u$. Тогда $uf'f = 0$ и, следовательно, $f'f = 0$. Так как $u = gu + (1-g)u = uf + uf' = u(f + f')$, то $f + f' = id$. Таким образом, $f^2 = f$ и $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. □

Лемма 3.20. *Пусть M — модуль и N — прямое слагаемое M. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль и N имеет $\mathcal{X}$-оболочку, то модуль N является $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантным.*
(2) *Если M — $\mathcal{X}$-CS-модуль, модуль N имеет $\mathcal{X}$-оболочку и инвариантен относительно всех идемпотентов из кольца $\operatorname{End} M$, то N — $\mathcal{X}$-CS-модуль.*

Доказательство. (1). Пусть $u : M \to X$ и $u_1 : N \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочки, $\pi : M \to N$ — проекция и $\iota : N \to M$ — вложение. Рассмотрим идемпотентный эндоморфизм g_2 модуля X_1. Покажем, что для некоторого гомоморфизма $f_2 : N \to N$ имеет место равенство $u_1 f_2 = g_2 u_1$.

Существуют такие гомоморфизмы $h_1 : X \to X_1$ и $h_2 : X_1 \to X$, что $h_1 u = u_1 \pi$ и $h_2 u_1 = u\iota$. Тогда $h_1 h_2 u_1 = u_1$ и, следовательно, $h_1 h_2$ — изоморфизм. Существует такой гомоморфизм $h : X_1 \to X_1$, что $(h_1 h_2)h = id_{X_1}$. Пусть $g_1 = h_2(hg_2)h_1 : X \to X$. Несложно заметить, что g_1 — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Так как модуль M является $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантным, то существует такой гомоморфизм $f_1 : M \to M$, что $uf_1 = g_1 u$. Пусть $f_2 = \pi f_1 \iota$. Тогда
$$u_1 f_2 = u_1 \pi f_1 \iota = h_1 u f_1 \iota = h_1 g_1 u \iota = h_1 h_2 h g_2 h_1 u \iota = g_2 h_1 u \iota = g_2 u_1 \pi \iota = g_2 u_1$$
Таким образом, N — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.

(2) Пусть $u : M \to X$, $u_1 : N \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочки, $\pi : M \to N$ — проекция и $\iota : N \to M$ — включение. Рассмотрим идемпотентный эндоморфизм g_2 модуля X_1. Покажем, что существует идемпотент $f_2 \in \operatorname{End}(N)$, для которого выполнено равенство $g_2(X_1) \cap u_1(N) = u_1 f_2(M)$. Существуют такие гомоморфизмы $h_1 : X \to X_1$ и $h_2 : X_1 \to X$, что $h_1 u = u_1 \pi$ и $h_2 u_1 = u\iota$. Тогда $h_1 h_2 u_1 = u_1$ и, следовательно, $h_1 h_2$ — изоморфизм. Для некоторого гомоморфизма $h : X_1 \to X_1$ имеет место равенство $h(h_1 h_2) = id_{X_1}$. Тогда мономорфизм h_2 является расщепляющимся. Следовательно, X_1 изоморфен прямому слагаемому модуля X. Поэтому без ограничения общности можно считать, что X_1 является прямым слагаемым модуля X и $u_1 = u\iota$. Рассмотрим гомоморфизм $g_1 = \iota_0 g_2 \pi_0 : X \to X$, где $\pi_0 : X \to X_1$ — каноническая проекция и $\iota_0 : X_1 \to X$ — вложение. Тогда g_1 — идемпотент кольца $\operatorname{End}(X)$. Так как M является $\mathcal{X}$-CS-модулем, то существует идемпотент $f_1 \in \operatorname{End} M$, для которого выполнено равенство $g_1(X) \cap u(M) = uf_1(M)$. Поскольку N инвариантен относительно всех идемпотентов из кольца эндоморфизмов модуля M, то $f_1(N) \leqslant N$. Пусть $f_2 = f_1|_N : N \to N$. Тогда f_2 — идемпотентный эндоморфизм модуля N и $g_2(X_1) \cap u_1(N) = u_1 f_2(N)$. Таким образом, N — $\mathcal{X}$-CS-модуль. □

Теорема 3.21. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль*;
(2) *если $X = \oplus_I X_i$, то $M = \bigoplus_I (u^{-1}(X_i) \cap M)$*;
(3) *если $X = X_1 \oplus X_2$, то $M = (u^{-1}(X_1) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_2) \cap M)$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $X = \bigoplus_I X_i$. Для каждого $m \in M$ существуют такие конечное подмножество $F \subseteq I$ и семейство ортогональных идемпотентов $\{g_k : k \in F\}$ из кольца $\operatorname{End}(X)$, что $u(m) \in \bigoplus_F X_k$ и $g_k(X) = X_k$. Так как M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль, то для некоторого семейства идемпотентов $\{f_k : k \in F\} \subseteq \operatorname{End} M$ выполнено равенство $uf_k = g_k u$ для каждого $k \in F$. Так как
$$u(m) = \sum_F g_k u(m) = \sum_F u f_k(m),$$
то
$$m = \sum_F f_k(m).$$
Поскольку $f_k(m) \in M \cap u^{-1}(X_k)$ для каждого $k \in F$, то
$$m \in \sum_F (M \cap u^{-1}(X_i)).$$
Таким образом,
$$M = \bigoplus_I (u^{-1}(X_i) \cap M).$$

(2)⇒(3) очевидно.

(3)⇒(1). Пусть g — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Так как $X = g(X) \oplus (1-g)(X)$, то согласно условию п. (3)
$$M = (M \cap u^{-1}(g(X)) \oplus u^{-1}((1-g)(X)).$$

Пусть $f : M \to M \cap u^{-1}(g(X))$ — проекция. Тогда для каждого

$$m = x + y \in M, \quad x \in M \cap u^{-1}(g(X)), \quad y \in M \cap u^{-1}((1-g)(X)),$$

имеет место равенство $uf(m) = u(x)$. Поскольку $x \in M \cap u^{-1}(g(X))$, то $u(x) = g(m_0)$ для некоторого $m_0 \in M$. Имеют место равенства

$$gu(m) = gu(x+y) = gu(x) + gu(y) = g(g(m_0)) + gu(y) = g(m_0) + gu(y).$$

Так как $y \in M \cap u^{-1}((1-g)(X))$, то $gu(y) = 0$. Следовательно, $uf(m) = gu(m)$. Таким образом, $uf = gu$. □

Предложение 3.22. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и $u(M)$ — существенный подмодуль в X. Рассмотрим следующие условия:*

(1) *если U — д.п. V в M и V — д.п. U в M, то $M = U \oplus V$;*

(2) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.*

Тогда имеет место импликация (1) $\Rightarrow$ (2). *Если X является квазинепрерывным модулем, то верна импликация* (2) $\Rightarrow$ (1).

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть g — идемпотентный эндоморфизм модуля X,

$$A_1 = M \cap u^{-1}(g(X)), \quad A_2 = M \cap u^{-1}((1-g)(X)).$$

Рассмотрим дополнение по пересечению B_1 для A_2 в M, которое содержит A_1. Пусть B_2 — дополнение по пересечению для B_1 в M, которое содержит A_2. Тогда B_1 — д.п. B_2 в M и B_2 — д.п. B_1 в M. По предположению п. (1) имеет место равенство $M = B_1 \oplus B_2$. Пусть $\pi : B_1 \oplus B_2 \to B_1$ — проекция. Покажем, что имеет место равенство $u\pi = gu$. Предположим, что $u\pi \neq gu$. Так как $u(M) \leqslant^e X$, то для некоторых элементов $m = b_1 + b_2 \in M$, где $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$, и $m_0 \in M$, имеет место равенство $u(m_0) = (u\pi - gu)(m) \neq 0$. Следовательно,

$$u(-m_0 + \pi(m)) = gu(m), \quad -m_0 + \pi(m) \in A_1.$$

Так как $gu(-m_0 + \pi(m)) = gu(m)$, то $-m_0 + \pi(m) - m \in A_2$. Тогда

$$-m_0 + \pi(m) - b_1 - b_2 \in A_2, \quad m_0 + \pi(m) - b_1 \in B_1 \cap B_2 = 0.$$

Поскольку $\pi(m) - b_1 = 0$, то $m_0 = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $u\pi = gu$.

(2)$\Rightarrow$(1). Предположим, что X является квазинепрерывным модулем. Пусть $A \leqslant M$. Существует такой подмодуль $H \leqslant X$, что $X = H \oplus K$ и $u(A) \leqslant^e H$. Тогда $A \leqslant^e u^{-1}(H) \cap M$. Согласно п. (3)

$$M = (u^{-1}(H) \cap M) \oplus (u^{-1}(K) \cap M).$$

Таким образом, M — $C1$-модуль.

Покажем, что M — $C3$-модуль. Пусть U, V — прямые слагаемые модуля M, для которых выполнено равенство $U \cap V = 0$. Существуют такие разложения $X = X_1 \oplus Y_1 = X_2 \oplus Y_2$, что $u(U) \leqslant^e X_1$ и $u(V) \leqslant^e X_2$. Так как $U \cap V = 0$, то $X_1 \cap X_2 = 0$. Поскольку X — $C3$-модуль, то $X = (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3$ для некоторого подмодуля X_3 модуля X. Тогда

$$M = (u^{-1}(X_1) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_2) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_3) \cap M).$$

Так как U, V — прямые слагаемые модуля M, $U \leqslant^e u^{-1}(X_1) \cap M$ и $V \leqslant^e u^{-1}(X_2) \cap M$, то

$$U = u^{-1}(X_1) \cap M, V = u^{-1}(X_2) \cap M.$$

Таким образом,

$$M = (U \oplus V) \oplus (u^{-1}(X_3) \cap M).$$

Предложение 3.22 доказано. □

Несложно заметить, что всякий замкнутый подмодуль X модуля M имеет вид $X' \cap M$, где X' — некоторое прямое слагаемое модуля $E(M)$. Это наблюдение мотивирует следующие определение. Пусть $u : M \to X$ — $\mathcal{X}$-оболочка. Подмодуль A модуля M называется *$\mathcal{X}$-замкнутым* в M, если для некоторого идемпотентного гомоморфизма g модуля X выполнено равенство $A = u^{-1}(g(X)) \cap M$.

Теорема 3.23. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *M — $\mathcal{X}$-CS-модуль;*

(2) *каждый $\mathcal{X}$-замкнутый подмодуль модуля M является прямым слагаемым M.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $U = g(X)$, где $g = g^2 \in \operatorname{End}(X)$. Существует такой идемпотент $f \in \operatorname{End} M$, что $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. Тогда $u^{-1}(U) \cap M = f(M)$ — прямое слагаемое модуля M.

(2)⇒(1). Пусть $g = g^2 \in \operatorname{End}(X)$. Согласно п. (2), $u^{-1}(g(X)) \cap M$ — прямое слагаемое модуля M. Пусть $\pi : M \to u^{-1}(g(X)) \cap M$ — проекция. Тогда $g(X) \cap u(M) = u\pi(M)$. Таким образом, M — $\mathcal{X}$-CS-модуль. □

Модуль M называется *чисто бесконечным*, если $M = M \oplus M$. Если модуль M не изоморфен собственному прямому слагаемому, то он называется *прямо конечным.*

Предложение 3.24. *Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль и каждое прямое слагаемое модуля M обладает $\mathcal{X}$-оболочкой. Если $u : M \to X$ мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка, то*

(1) *модуль M чисто бесконечен в точности тогда, когда X — чисто бесконечный модуль;*

(2) *модуль M прямо конечен в точности тогда, когда X — прямо конечный модуль.*

Доказательство. (1). Предположим, что M — чисто бесконечный модуль. Тогда существует такое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \simeq M_2 \simeq M$. Пусть $u_1 : M_1 \to X_1$ и $u_2 : M_2 \to X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Тогда $X \simeq X_1 \oplus X_2$ и $X \simeq X_1 \simeq X_2$. Таким образом, X — чисто бесконечный модуль.

Предположим, что $X = X_1 \oplus X_2$ и $X_1 \simeq X_2 \simeq X$. По теореме 3.21 имеет место разложение

$$M = [M \cap u^{-1}(X_1)] \oplus [M \cap u^{-1}(X_2)].$$

Тогда модули $M \cap u^{-1}(X_1)$ и $M \cap u^{-1}(X_2)$ взаимно $\mathcal{X}$-инъективны. Пусть $M_1 = M \cap u^{-1}(X_1)$ и $M_2 = M \cap u^{-1}(X_2)$. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$ и

$$u_1 = u|_{M_1} : M \cap u^{-1}(X_1) \to X_1, \quad u_2 = u|_{X_2} : M \cap u^{-1}(X_2) \to X_2$$

— $\mathcal{X}$-оболочки. Действительно, $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$. Пусть $f : M_1 \to U$ — гомоморфизм и $U \in \mathcal{X}$. Существует гомоморфизм $h : X \to U$, для которого выполнено равенство $hu = f\pi_1$, где $\pi_1 : M \to M_1$ — каноническая проекция. Пусть $\pi_{X_1} : X \to X_1$ — каноническая проекция, $\iota_1 : X_1 \to X$ — каноническое вложение и $k = h\iota_1$. Тогда $ku_1 = f$. С другой стороны, предположим, что имеет место равенство $\alpha u_1 = u_1$, где $\alpha : X_1 \to X_1$. Положим

$$\beta = \alpha \oplus id_{X_2} : X \to X.$$

Тогда $\beta u = u$ и, следовательно, β — изоморфизм. Тогда α является изоморфизмом. Таким образом, $u_1 : M_1 \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочка. Аналогично показывается, что $u_2 : M_2 \to X_2$ является $\mathcal{X}$-оболочкой. Несложно заметить, что M_i — $\mathcal{X}$-M-инъективный модуль. Тогда, согласно лемме 3.3, $M_1 \simeq M_2 \simeq M$. Таким образом, модуль M чисто бесконечен.

(2). Предположим, что модуль M не является прямо конечным. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$ и $M_1 \simeq M$. Тогда $X \simeq X_1 \oplus X_2$ и $X_1 \simeq X$. Таким образом, модуль X не является прямо конечным.

Предположим, что модуль X не является прямо конечным. Тогда существуют такие подмодули X_1 и X_2 модуля X, что $X = X_1 \oplus X_2$ и $X \simeq X_1$. Следовательно,

$$M = (M \cap u^{-1}(X_1)) \oplus (M \cap u^{-1}(X_2)).$$

Из доказательства п. (1) следует, что $u_1 = u|_{M_1} : M \cap u^{-1}(X_1) \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочка и $M \simeq M_1$. Тогда модуль M не является прямо конечным. □

Следствие 3.25. *Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль и каждое прямое слагаемое модуля M обладает $\mathcal{X}$-оболочкой. Если $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и X является прямой суммой чисто бесконечного модуля и прямо конечного модуля, то модуль M обладает разложением $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — прямо конечный модуль, M_2 — чисто бесконечный модуль, и модули M_1, M_2 взаимно $\mathcal{X}$-инъективны.*

Лемма 3.26. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов, M — правый R-модуль, $A \leqslant M$, $u_A : A \to X_A$ и $u : M \to X$ — мономорфные $\mathcal{X}$-оболочки. Если $u_A(A) \leqslant^e X_A$, то существует такая мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка $v : A \to Y$, что $u|_A = v$.*

Доказательство. Так как u_A — $\mathcal{X}$-оболочка, то существует гомоморфизм $h : X_A \to X$, для которого выполнено равенство $hu_A = u|_A$. Гомоморфизм h может быть представлен в виде $h = w \circ p$, где $p : X_A \to Y$ — эпиморфизм и $w : Y \to X$ — мономорфизм. Так как u_A — существенный мономорфизм, то $p : X_A \to Y$ является изоморфизмом. Таким образом, $v = pu_A : A \to Y$ — $\mathcal{X}$-оболочка. □

До конца настоящего пункта будем предполагать, что все рассматриваемые модули M обладают $\mathcal{C}$-оболочками $p : M \to X$, где $\mathcal{C}$ — некоторый класс модулей, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно изоморфизмов и конечных прямых сумм;
(2) каждый подмодуль A модуля M обладает $\mathcal{C}$-оболочкой $u_A : A \to X_A$, где u_A — существенный мономорфизм;
(3) если $A \leqslant B \leqslant M$ и $u_1 : A \to X_1$, $u_2 : B \to X_2$ — $\mathcal{C}$-оболочки, то X_1 является прямым слагаемым модуля X_2.

Теорема 3.27. *Следующие условия для модуля M равносильны:*

(1) *M — $\mathcal{C}$-идемпотентно-инвариантный модуль;*
(2) *M — $\mathcal{C}$-CS-модуль и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модуля M подмодули M_1 и M_2 взаимно $\mathcal{C}$-инъективны.*

Доказательство. (1)⇒(2). Следует из лемм 3.20(1) и 3.16.

(2)⇒(1). Пусть $u : M \to X$ — $\mathcal{C}$-оболочка и $g \in I(X)$. Поскольку модуль M является $\mathcal{C}$-CS-модулем, то, по теореме 3.23, $u^{-1}((1-g)(X)) \cap M$ — прямое слагаемое M. Пусть

$$A_1 = u^{-1}(g(X)) \cap M, \quad B_1 = u^{-1}((1-g)(X)) \cap M.$$

Тогда $A_1 \cap B_1 = 0$ и $M = B_1 \oplus B_2$ для некоторого $B_2 \leqslant M$.

Покажем, что существует такой подмодуль M' модуля M, что $M = B_1 \oplus M'$ и $A_1 \leqslant M'$.

Пусть $\pi_1 : M \to B_1$, $\pi_2 : M \to B_2$ — проекции. Тогда $A_1' := \pi_2(A_1) \simeq A_1$ и отображение $\pi_1' : \pi_2(A_1) \to B_1$, действующее по правилу $\pi_1'(\pi_2(a_1)) = \pi_1(a_1)$ для каждого $a_1 \in A_1$, является гомоморфизмом. Пусть $u|_{A_1'} : A_1' \to X_1'$ — $\mathcal{C}$-оболочка и $X = X_1' \oplus X_2'$. Обозначим через $\pi_{X_1'} : X_1' \oplus X_2' \to X_1'$ естественную проекцию. Тогда для некоторого гомоморфизма $h : X_1' \to X_1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1' \arrow[r, "u|_{A_1'}"] \arrow[d, "\pi_1'"'] & X_1' \arrow[ddl, dashed, "h"'] & X \arrow[l, "\pi_{X_1'}"'] & X_2 \arrow[l] \text{ ,} \\
B_1 \arrow[d, "u|_{B_1}"'] & & & \\
X_1 & & &
\end{tikzcd}$$

где $u|_{B_1} : B_1 \to X_1$, $u|_{B_2} : B_2 \to X_2$ — $\mathcal{C}$-оболочки и X_1, X_2 — прямые слагаемые модуля X.

Пусть $k = (h\pi_{X_1'})|_{X_2}$. Поскольку модуль B_2 — $\mathcal{C}$-B_1-инъективен, то для некоторого гомоморфизма $v : B_2 \to B_1$ коммутативна диаграмма

$$\begin{CD} B_2 @>{u|_{B_2}}>> X_2 \\ @V{v}VV @V{k}VV \\ B_1 @>{u|_{B_1}}>> X_1 \end{CD}\quad .$$

Пусть $M' = \{b_2 + v(b_2) \mid b_2 \in B_2\}$. Для каждого $a_1 \in A_1$ имеют место равенства

$$a_1 = \pi_1(a_1) + \pi_2(a_1),$$
$$uv(\pi_2(a_1)) = ku(\pi_2(a_1)) = h\pi_{X_1'}u(\pi_2(a_1)) = hu(\pi_2(a_1)) = u\pi_1'(\pi_2(a_1)) = u(\pi_1(a_1)).$$

Тогда $v(\pi_2(a_1)) = \pi_1(a_1)$ и, следовательно, $a_1 \in M'$. Таким образом, $A_1 \leqslant M'$ и $M = B_1 \oplus M'$.

Покажем, что для некоторого гомоморфизма $f^2 = f \in \operatorname{End} M$ имеет место равенство $uf = gu$. Существует такой гомоморфизм $\pi : M \to M$, что $\pi = \pi^2$, $\pi(B_1) = 0$ и $\pi(M) = M'$. Пусть $u(m_1) = u\pi(m_2) - gu(m_2) \in u(M) \cap (u\pi - gu)(M)$, где $m_1, m_2 \in M$. Тогда

$$\pi(m_2) - m_1 \in A_1 \leqslant M' \tag{$*$}$$
$$u(m_1 - \pi(m_2) + m_2) = (1 - g)u(m_2).$$

Следовательно,

$$m_1 - \pi(m_2) + m_2 \in B_1.$$

Тогда

$$0 = \pi(m_1 - \pi(m_2) + m_2) = \pi(m_1) - \pi(m_2) + \pi(m_2) = \pi(m_1).$$

Поэтому

$$m_1 \in B_1. \tag{$**$}$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует равенство $m_1 = 0$. Следовательно, $u(M) \cap (u\pi - gu)(M) = 0$. Так как $u(M) \leqslant^e X$, то $u\pi = gu$. Таким образом, модуль M является $\mathcal{C}$-идемпотентно инвариантным. □

Следствие 3.28. *Следующие условия равносильны для правого R-модуля M:*

(1) *M — квазинепрерывный модуль;*

(2) *M — CS-модуль и для всякого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модуля M подмодули M_1 и M_2 взаимно инъективны.*

Доказательство. Следствие 3.28 вытекает из теоремы 3.27, если в ней в качестве $\mathcal{C}$ взять класс всех инъективных правых R-модулей. □

3.3. $\mathcal{X}$-Идемпотентно коинвариантные модули. Модуль M называется *модулем со свойством подъема,* если для каждого подмодуля N модуля M существуют такие подмодули M_1, M_2 модуля M, что выполнены условия

$$M = M_1 \oplus M_2, \quad M_1 \leqslant N, \quad M_2 \cap N \ll M_2.$$

Модуль M называется *$D3$-модулем,* если $X \cap Y$ — прямое слагаемое в M для любых таких прямых слагаемых X и Y в M, что $X + Y = M$. Модуль M называется *квазидискретным,* если он является одновременно модулем со свойством подъема и $D3$-модулем.

Предложение 3.29 (см. [51, предложение 4.45])**.** *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *M — квазидискретный модуль;*

(2) *M — идемпотентно-коинвариантный модуль, т.е. $e(\operatorname{Ker}(\pi)) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ для каждого идемпотентного эндоморфизма e модуля P.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть e — идемпотентный эндоморфизм модуля P. Тогда

$$P = e(P) + (1-e)(P), \quad M = \pi e(P) + \pi(1-e)(P).$$

Так как модуль M является квазидискретным, то для некоторого идемпотентного эндоморфизма $f \in \operatorname{End} M$ имеем

$$f(M) \leqslant \pi e(P), \quad (1-f)(M) \leqslant \pi(1-e)(P).$$

Тогда

$$\pi^{-1}(f(M)) = e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + \operatorname{Ker}(\pi),$$
$$\pi^{-1}((1-f)(M)) = (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) + \operatorname{Ker}(\pi),$$

$$\begin{aligned} P &= \pi^{-1}(f(M)) + \pi^{-1}((1-f)(M)) = \\ &= e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) + \operatorname{Ker}(\pi) = \\ &= e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) = e(P),$$
$$(1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) = (1-e)(P).$$

Тогда

$$f(M) = \pi e(P), \quad (1-f)(M) = \pi(1-e)(P)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Ker}(\pi) = e(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi) + (1-e)(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi).$$

(2)⇒(1). Пусть M_0 — подмодуль модуля M. Хорошо известно, что всякий проективный модуль над совершенным справа кольцом является квазидискретным модулем. Следовательно, для некоторого идемпотента $e \in \operatorname{End} P$ имеем

$$e(P) \leqslant \pi^{-1}(M_0), \quad (1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0) \ll P.$$

Так как

$$\operatorname{Ker}(\pi) = e(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi) + (1-e)(P) \cap \operatorname{Ker}(\pi),$$

то $M = \pi e(P) \oplus \pi(1-e)(P)$. Несложно заметить, что

$$\pi e(P) \leqslant M_0, \quad \pi((1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0)) \ll M$$

и имеет место равенство

$$M_0 = \pi e(P) + \pi((1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0)).$$

Таким образом, модуль M является модулем со свойством подъема.

Пусть M_1, M_2 — прямые слагаемые модуля M, для которых имеет место равенство $M = M_1 + M_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что каждое прямое слагаемое модуля M является образом некоторого прямого слагаемого модуля P. Следовательно, для некоторых прямых слагаемых P_1 и P_2 модуля P имеют место равенства $\pi(P_1) = M_1$, $\pi(P_2) = M_2$. Так как P — квазидискретный модуль, то для некоторых подмодулей P_1' и P_2' модуля P имеют место равенства

$$P_1 = P_1' \oplus P_1 \cap P_2, P_2 = P_2' \oplus P_1 \cap P_2.$$

Тогда

$$P = P_1 + P_2 = P_1' \oplus P_2' \oplus P_1 \cap P_2.$$

Из п. (2) следует равенство

$$M = \pi(P) = \pi(P_1') \oplus \pi(P_2') \oplus \pi(P_1 \cap P_2).$$

Поскольку

$$M_1 = \pi(P_1) = \pi(P_1') \oplus \pi(P_1 \cap P_2), \quad M_2 = \pi(P_2) = \pi(P_2') \oplus \pi(P_1 \cap P_2),$$

то $M_1 \cap M_2 = \pi(P_1 \cap P_2)$. Таким образом, модуль M является $D3$-модулем и, следовательно, M — квазидискретный модуль. □

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-идемпотентно-коинвариантным*, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $u : X \to M$, что для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

Лемма 3.30. *Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс правых R-модулей, M — правый R-модуль и $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует такой однозначно определенный гомоморфизм $f \in \mathrm{End}\, M$, что $fp = pg$ и $f^2 = f$.*

Доказательство. Существуют гомоморфизмы $f, f' \in \mathrm{End}\, M$, для которых выполнены равенства

$$fp = pg, \quad f'p = p(1-g).$$

Тогда $f'fp = f'pg = 0$. Поскольку p — эпиморфизм, то $f'f = 0$. Так как

$$p = pg + p(1-g) = f'p + fp = (f' + f)p,$$

то $id = f' + f$. Таким образом, $f = f^2 \in \mathrm{End}\, M$. Причем, поскольку p — эпиморфизм, то гомоморфизм f однозначно определен. □

Лемма 3.31. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль в точности тогда, когда $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$ для каждого идемпотентного эндоморфизма модуля X.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль и g — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Существует такой эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(M)$, что $p \circ g = f \circ p$. Для каждого элемента $x \in \mathrm{Ker}\, p$ имеем $p(x) = 0$ и $pg(x) = fp(x) = 0$. Следовательно, $g(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Таким образом, $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$.

($\Leftarrow$) Предположим, что $g = g^2 \in \mathrm{End}(X)$. Тогда $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : X/g(\mathrm{Ker}(p)) \to M$, определенный согласно правилу $\psi(x + g(\mathrm{Ker}(p)) = p(x)$ для всех $x \in X$. Поскольку p — эпиморфизм, то для каждого $m \in M$ существует такой элемент $x \in X$, что $m = p(x)$. Рассмотрим отображение

$$\phi : M \to X/g(\mathrm{Ker}(p)), \quad m \mapsto g(x) + g(\mathrm{Ker}(p)).$$

Легко видеть, что ϕ — гомоморфизм. Пусть $f = \psi \circ \phi : M \to M$. Тогда для каждого $x \in X$ имеем

$$fp(x) = \psi \circ \phi(p(x)) = \psi(g(x) + g(\mathrm{Ker}(p)) = pg(x).$$

Следовательно, $f \circ p = p \circ g$. □

Следствие 3.32. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль*;
(2) *если $X = \oplus_I X_i$, то $\mathrm{Ker}(p) = \oplus_I (X_i \cap \mathrm{Ker}(p))$*;
(3) *если $X = X_1 \oplus X_2$, то $\mathrm{Ker}(p) = (X_1 \cap \mathrm{Ker}(p)) \oplus (X_2 \cap \mathrm{Ker}(p))$*;
(4) *если $e \in \mathrm{End}(X)$ — идемпотент, то $\mathrm{Ker}(p) = e(\mathrm{Ker}(p)) \oplus (1-e)(\mathrm{Ker}(p))$.*

Теорема 3.33. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — модуль и модули M_1, M_2 и M обладают $\mathcal{X}$-накрытиями. Если модуль M является $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантным, то M_i — $\mathcal{X}$-M_j-проективен для каждого $i \neq j$.*

Следствие 3.34. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — правый модуль над совершенным справа кольцом. Если модуль M является квазидискретным, то модули M_1 и M_2 взаимно проективны.*

Теорема 3.35. *Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль и $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Следующие условия равносильны*:

(1) *модуль M чисто бесконечен в точности тогда, когда X — чисто бесконечный модуль*;
(2) *если X — прямо конечный модуль, то модуль M является прямо конечным*;
(3) *если $\mathcal{X}$ — класс проективных модулей и модуль M не является прямо конечным, то для модуля M имеет место разложение $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, где $M_1 \cong M_2 \neq 0$.*

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема*, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $p : X \to M$ модуля M, что для любого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ найдется идемпотент $f : M \to M$, для которого выполнено равенство $g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M))$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 3.36. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие. Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль, то M — $\mathcal{X}$-модуль со свойством подъема.*

Предложение 3.37. *Пусть N — прямое слагаемое модуля M. Если модуль M является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема, обладающим эпиморфным $\mathcal{X}$-накрытием, и модуль N обладает $\mathcal{X}$-накрытием, то N-- $\mathcal{X}$-модуль со свойством подъема.*

Доказательство. Пусть $p_1 : X_1 \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие. Легко видеть, что X_1 изоморфно такому прямому слагаемому K модуля X, что $p|_K : K \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие N. Таким образом, мы можем предполагать, что $p_1 = p|_{X_1} : X_1 \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие N и X_1 — прямое слагаемое модуля X. Пусть $g : X_1 \to X_1$ — идемпотентный эндоморфизм модуля X_1. Рассмотрим гомоморфизм $g' = \iota \circ g \circ \pi : X \to X$, где $\iota : X_1 \to X$ — вложение и $\pi : X \to X_1$ — вложение. Тогда $g'^2 = g'$. Так как модуль M является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема, то существует такой гомоморфизм $f'^2 = f' : M \to M$, что

$$g'(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f'(M)).$$

Тогда $f'(M) = p(g(X_1)) = p_1(g(X_1)) \leqslant N$ и, следовательно, $f'(M)$ — прямое слагаемое модуля N. Существует такой идемпотентный гомоморфизм $f : N \to N$, что $p_1(g(X_1)) = f'(M) = f(N)$. Тогда

$$g(X_1) + \mathrm{Ker}(p_1) = p_1^{-1}(f(N)).$$

Таким образом, модуль N является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема. □

Пусть $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M и A — подмодуль модуля M. Подмодуль A называется *$\mathcal{X}$-козамкнутым* в M, если для некоторого идемпотентного эндоморфизма $g \in \mathrm{End}(X)$ выполнено равенство $A = p(g(X))$.

Теорема 3.38. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие. Следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-модуль со свойством подъема*;
(2) *каждый $\mathcal{X}$-козамкнутый подмодуль модуля M является прямым слагаемым M.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $U = p(g(X))$, где $g^2 = g \in \mathrm{End}(X)$. Тогда существует такой эндоморфизм $f^2 = f \in \mathrm{End}\, M$, что

$$g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M)).$$

Следовательно, $U = p(g(X)) = f(M)$ — прямое слагаемое M.

(2)⇒(1). Пусть g — идемпотентный элемент из кольца $\mathrm{End}(X)$. Согласно предположению $U = p(g(X))$ — прямое слагаемое модуля M. Существует гомоморфизм $f^2 = f \in \mathrm{End}\, M$, для которого выполнено равенство $p(g(X)) = f(M)$. Тогда

$$g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M)).$$

Таким образом, модуль M является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема. □

До конца настоящего пункта будем предполагать, что все рассматриваемые модули M обладают $\mathcal{C}$-накрытиями $p : X \to M$, где $\mathcal{C}$ — некоторый класс модулей, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) класс модулей $\mathcal{C}$ замкнут относительно изоморфизмов;
(2) каждый фактор-модуль M/A модуля M обладает эпиморфным $\mathcal{C}$-накрытием $p_{M/A} : X_{M/A} \to M/A$, у которого $\mathrm{Ker}(p_{M/A}) \ll X_{M/A}$;
(3) для каждого прямого слагаемого N модуля M и каждого естественного гомоморфизма $\pi : N \to N/A$ существует расщепляющийся эпиморфизм $\psi : X_N \to X_{N/A}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p_N"] & X_{N/A} \arrow[d, "p_{N/A}"] \\ N \arrow[r, "\pi"] & N/A \end{tikzcd}$$

Предложение 3.39. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — модуль. Если модуль M_2 является M_1-$\mathcal{C}$-проективным, то M_2 является M_1-проективным.*

Теорема 3.40. *Следующие условия эквивалентны для модуля M:*

(1) *M — $\mathcal{C}$-идемпотентно коинвариантный модуль*;
(2) *M — $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно $\mathcal{C}$-проективны*;
(3) *M — $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно проективны.*

Следствие 3.41. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — квазидискретный модуль*;
(2) *M — модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно проективны.*

3.4. $\mathcal{X}$-Дискретные и $\mathcal{X}$-непрерывные модули. Пусть M — правый R-модуль, $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M, $S = \mathrm{End}(X)$ и f — произвольный элемент из S. Если для некоторых гомоморфизмов $g_1, g_2 \in S$, $f \in \mathrm{End}\, M$ имеет место равенство $pg_1 = fp = pg_2$, то для каждого $h \in S$ имеем $p(g_1 - g_2)h = 0$ и, следовательно, $p = p(1 - (g_1 - g_2)h)$. Тогда из определения накрытия следует, что $1 - (g_1 - g_2)h$ — автоморфизм. Таким образом, $g_1 - g_2 \in J(S)$ и, следовательно, определен кольцевой гомоморфизм $\Phi : \mathrm{End}\, M \to S/J(S)$, действующий по правилу $\Phi(f) = f' + J(S)$, где $f' : X \to X$ — гомоморфизм, для которого выполнено равенство $p \circ f' = f \circ p$. Пусть $\nabla(M) = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Тогда имеет место вложение $\bar{\Phi} : M/\nabla(M) \to S/J(S)$. Отождествляя кольцо $\mathrm{End}\, M/\nabla(M)$ с кольцом $\mathrm{Im}(\Phi)$, мы можем считать, что $\mathrm{End}\, M/\nabla(M)$ является подкольцом кольца $S/J(S)$.

Модуль M называется *дискретным*, если M — квазидискретный модуль и каждый подмодуль X модуля M, для которого фактор-модуль M/X изоморфен прямому слагаемому модуля M, — прямое слагаемое в M.

Лемма 3.42. *Пусть M — квазидискретный модуль и $p : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *M — дискретный модуль;*

(2) *всякий малый эпиморфизм $f : M \to M$ является изоморфизмом;*

(3) *если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End} P$, $e'_1, e'_2 \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $pe_i = e'_i p$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} e_1(P) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & e_2(P) \arrow[d, "p"'] \\ e'_1(M) \arrow[r, "\alpha'"] & e'_2(M) \end{tikzcd}$$

и α является изоморфизмом, то α' — изоморфизм.

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(3) проверяется непосредственно. Эквивалентность (1)⇔(2) следует из [51, лемма 5.1]. □

Пусть $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-дискретным*, если выполнены следующие условия:

(1) M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль;

(2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End} P$, $e'_1, e'_2 \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $pe_i = e'_i p$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} e_1(P) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & e_2(P) \arrow[d, "p"'] \\ e'_1(M) \arrow[r, "\alpha'"] & e'_2(M) \end{tikzcd}$$

и α является изоморфизмом, то α' — изоморфизм.

Далее будем предполагать, что $\mathcal{X}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых, $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие правого R-модуля M и $\operatorname{End}(X)$ — полурегулярное кольцо.

Теорема 3.43. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то кольцо $\operatorname{End} M$ является полурегулярным и $J(\operatorname{End} M) = \nabla(M)$.*

Следствие 3.44. *У каждого неразложимого $\mathcal{X}$-дискретного модуля кольцо эндоморфизмов является локальным.*

Следствие 3.44 непосредственно вытекает из теоремы 3.43.

Теорема 3.45. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то M является конечно заменяемым модулем.*

Теорема 3.45 непосредственно следует из теоремы 3.43 и [53, предложение 1.6].

Теорема 3.46. *Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-коинвариантный модуль, то модуль M является $\mathcal{X}$-дискретным в точности тогда, когда $\nabla(M) = J(\operatorname{End} M)$ и $\operatorname{End} M/\nabla(M)$ — регулярное кольцо.*

Кольцо R называется *чистым*, если каждый элемент r из R представим в виде $r = e + u$, где $e^2 = e \in R$ и u — обратимый элемент из R. Модуль M называется *чистым*, если $\operatorname{End} M$ — чистое кольцо.

Теорема 3.47. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль и $\operatorname{End}(X)$ — чистое кольцо, то кольцо $\operatorname{End} M$ является чистым.*

Лемма 3.48. *Пусть M — квазинепрерывный модуль и $u : M \to E(M)$ — инъективная оболочка модуля M. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *M — непрерывный модуль;*

(2) *каждый существенный мономорфизм $M \to M$ является изоморфизмом;*

(3) *если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End}(E)$, $e_1', e_2' \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $e_i u = u e_i'$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} e_1'(M) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u"] & e_2'(M) \arrow[d, "u"] \\ e_1(E) \arrow[r, "\alpha"] & e_2(E) \end{tikzcd}$$

и α — изоморфизм, то α' — изоморфизм.

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(3) проверяется непосредственно. Эквивалентность (1)⇔(2) следует из [51, лемма 3.14]. □

Модуль M называется *непрерывным*, если M — квазинепрерывный модуль и каждый подмодуль модуля M, изоморфный замкнутому подмодулю в M, — прямое слагаемое в M.

Пусть $u : M \to Y$ — $\mathcal{Y}$-оболочка модуля M. Модуль M называется *$\mathcal{Y}$-непрерывным*, если выполнены следующие условия:

(1) M — $\mathcal{Y}$-идемпотентно-инвариантный модуль;

(2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End}(E)$, $e_1', e_2' \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $e_i u = u e_i'$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} e_1'(M) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u"] & e_2'(M) \arrow[d, "u"] \\ e_1(E) \arrow[r, "\alpha"] & e_2(E) \end{tikzcd}$$

и α — изоморфизм, то α' — изоморфизм.

До конца настоящего пункта будем предполагать, что $\mathcal{Y}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых, $u : M \to Y$ — мономорфная $\mathcal{Y}$-оболочка правого R-модуля M и $\operatorname{End}_R Y$ — полурегулярное кольцо. Имеет место кольцевой гомоморфизм $\Phi : \operatorname{End} M \to S/J(S)$, определенный согласно правилу $\Phi(f) = \bar{f} + J(S)$, где $\bar{f} : Y \to Y$ — гомоморфизм, для которого выполнено равенство $\bar{f} \circ u = u \circ f$. Пусть $\Delta(M) = \operatorname{Ker}(\Phi)$. Тогда имеем мономорфизм колец $\bar{\Phi} : M/\Delta(M) \to S/J(S)$.

Следующие четыре утверждения являются двойственными аналогами соответственно теорем 3.43, 3.45, 3.46 и 3.47.

Теорема 3.49. *Пусть M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль. Тогда кольцо $\operatorname{End} M$ является полурегулярным и $J(\operatorname{End} M) = \Delta(M)$.*

Теорема 3.50. *Если M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль, то модуль M является конечно заменяемым.*

Теорема 3.51. *Пусть M — $\mathcal{Y}$-идемпотентно-инвариантный модуль. Модуль M является $\mathcal{Y}$-непрерывным в точности тогда, когда $\Delta(M) = J(\operatorname{End} M)$ и кольцо $\operatorname{End} M/\Delta(M)$ регулярно.*

Теорема 3.52. *Если M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль и* $\operatorname{End}(Y)$ *— чистое кольцо, то кольцо* $\operatorname{End} M$ *является чистым.*

Из приведенных выше результатов следуют следующие хорошо известные свойства дискретных и непрерывных модулей.

Следствие 3.53. *Пусть M — правый R-модуль. Имеют место следующие утверждения*:
(1) *если M — непрерывный модуль, то*
 (a) $\operatorname{End} M$ *— полурегулярное кольцо*;
 (b) M *— конечно заменяемый модуль*;
 (c) $\operatorname{End} M$ *— чистое кольцо*;
(2) *если M — дискретный модуль и R — совершенное справа кольцо, то*
 (a) $\operatorname{End} M$ *— полурегулярное кольцо*;
 (b) M *— конечно заменяемый модуль*;
 (c) $\operatorname{End} M$ *— чистое кольцо*;
(3) *если M — конечно порожденный дискретный модуль и R — полусовершенное кольцо, то*
 (a) $\operatorname{End} M$ *— полурегулярное кольцо*;
 (b) M *— конечно заменяемый модуль*;
 (c) $\operatorname{End} M$ *— чистое кольцо.*

Доказательство. (1) следует из теорем 3.49, 3.50 и 3.52, если в этих теоремах положить $\mathcal{Y}$ равным классу всех инъективных правых R-модулей.

Пункты (2) и (3) следуют из теорем 3.43, 3.45 и 3.47, если в этих теоремах положить $\mathcal{X}$ равным классу всех проективных правых R-модулей. □

Замечание 3.54. Изложение последних двух пунктов основано на неопубликованных результатах, полученых А. Н. Абызовым, П. А. Гиль Асенсио, Ч. К. Куинем и Р. Х. Тином.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Куинь Ч. К., Тай Д. Д.* Дуально автоморфизм-инвариантные модули над совершенными кольцами// Сиб. мат. ж., **58**, № 5. — 2017. — С. 959–971.
2. *Говоров В. Е.* Малоинъективные модули// Алгебра и логика, **2**, № 6. — 1963. — С. 21–49.
3. *Мишина А. П.* Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., № 1. — С. 62–66.
4. *Туганбаев А. А.* Строение модулей, близких к инъективным// Сиб. мат. ж., **18**, № 4. — 1977. — С. 890–898.
5. *Туганбаев А. А.* Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., № 3. — С. 48–51.
6. *Туганбаев А. А.* О самоинъективных кольцах// Изв. вузов. Мат., № 12. — С. 71–74.
7. *Туганбаев А. А.* Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны// Тр. семин. им. И. Г. Петровского, **6**. — 1981. — С. 257–262.
8. *Туганбаев А. А.* Целозамкнутые кольца// Мат. сб., **115 (157)**, № 4 (8). — 1981. — С. 544–559.
9. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные кольца// Изв. вузов. Мат., № 9. — С. 50–53.
10. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные кольца// Усп. мат. наук, **37**, № 5. — 1982. — С. 201–202.
11. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные модули// Мат. заметки, **31**, № 3. — 1982. — С. 447–456.
12. *Туганбаев А. А.* Кольца с малоинъективными циклическими модулями// в сб.: Абелевы группы и модули. — Томск: ТГУ, 1986. — С. 151–158.
13. *Туганбаев А. А.* Кольца с малоинъективными фактор-кольцами// Изв. вузов. Мат., № 1. — С. 80–88.
14. *Туганбаев А. А.* Строение модулей над наследственными кольцами// Мат. заметки, **68**, № 5. — 2000. — С. 739–755.
15. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
16. *Туганбаев А. А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжение// Дискр. мат., **25**, № 1. — 2013. — С. 144–151.

17. *Туганбаев А. А.* Характеристические подмодули инъективных модулей// Дискр. мат., **25**, № 2. — 2013. — С. 85–90.
18. *Туганбаев А. А.* Продолжения автоморфизмов подмодулей// Фундам. прикл. мат., **18**, № 3. — 2013. — С. 179–198.
19. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-инвариантные модули// Фундам. прикл. мат., **18**, № 4. — 2013. — С. 129–135.
20. *Туганбаев А. А.* Характеристические подмодули инъективных модулей над строго первичными кольцами// Дискр. мат., **26**, № 3. — 2014. — С. 121–126.
21. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-продолжаемые модули// Дискр. мат., **27**, № 2. — 2015. — С. 106–111.
22. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули// Фундам. прикл. мат., **21**, № 4. — 2016. — С. 175–246.
23. *Alahmadi A., Er N., Jain S. K.* Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls// J. Austr. Math. Soc., **79**, № 3. — 2005. — P. 349–360.
24. *Birkenmeier G. F. Park J. K., Rizvi S. T.* Extensions of Rings and Modules. — New York: Birkhäuser, Springer, 2013.
25. *Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y.* Continuous modules are clean// J. Algebra, **304**, № 1. — 2006. — P. 94–111.
26. *Clark J., Lomp C., Vanaj N., Wisbauer R.* Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. — Basel: Birkhäuser, 2006.
27. *Dickson S. E., Fuller K. R.* Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope// Pac. J. Math., **31**, № 3. — 1969. — P. 655–658.
28. *Dinh H. Q.* A note on pseudo-injective modules// Commun. Algebra, **33**. — 2005. — P. 361–369.
29. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending Modules/ Pitman Res. Notes Math, **313**. — Longman, 1994.
30. *Enochs E. E., Jenda O. M. G.* Relative Homological Algebra. — Berlin: Walter de Gruyter, 2011.
31. *Er N., Singh S., Srivastava A.* Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls// J. Algebra, **379**. — 2013. — P. 223–229.
32. *Facchini A.* Module Theory. Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules. — Basel: Birkhäuser, 1998.
33. *Goel V. K., Jain S. K.* π-Injective modules and rings whose cyclics are π-injective// Commun. Algebra, **6**. — 1978. — P. 59–72.
34. *Guil Asensio P. A., Kalebogaz B., Srivastava A. K.* The Schroeder–Bernstein problem for modules// J. Algebra, **498**. — 2018. — P. 153–164.
35. *Guil Asensio P. A., Keskin D. T., Kalebogaz B., Srivastava A. K.* Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers// J. Algebra, **466**, № 15. — 2016. — P. 147–152.
36. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K.* Automorphism-invariant modules, noncommutative rings and their applications// Contemp. Math., **634**. — 2015. — P. 19–30.
37. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K.* Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property// J. Algebra, **388**. — 2013. — P. 101–106.
38. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K., Quynh T. C.* Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules// Bull. Math. Sci., **7**, № 2. — 2017. — P. 229–246.
39. *Guil Asensio P. A., Keskin Tütüncü D., Srivastava A. K.* Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes// Isr. J. Math., **206**, № 1. — 2015. — P. 457–482.
40. *Hannah J., Meara K. C. O.* Products of idempotents in regular rings, II// J. Algebra, **123**. — 1989. — P. 223–239.
41. *Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A.* Cyclic modules and the structures of rings. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2012.
42. *Jain S. K., Singh S.* On pseudo-injective modules and self pseudo injective rings// J. Math. Sci., **2**. — 1967. — P. 23–31.
43. *Jain S. K., Singh S.* Quasi-injective and pseudo-injective modules// Can. Math. Bull., **18**, № 3. — 1975. — P. 359–365.
44. *Jeremy L.* Sur les modules et anneaux quasi-continus// C. R. Acad. Sci. Paris, **273**. — 1971. — P. 80–83.
45. *Jeremy L.* Modules et anneaux quasi-continus// Can. Math. Bull., **17**. — 1974. — P. 217–228.
46. *Johnson R. E., Wong E. T.* Quasi-injective modules and irreducible rings// J. London Math. Soc., **36**. — 1961. — P. 260–268.

47. *Kasch F.* Modules and Rings. — London: Academic Press, 1982.
48. *Koşan M. T., Quynh T. C., Srivastava A. K.* Rings with each right ideal automorphism-invariant// J. Pure Appl. Algebra, **220**, № 4. — 2016. — P. 1525–1537.
49. *Kuratomi K., Chang C.* Lifting modules over right perfect rings// Commun. Algebra, **35**, № 10. — 2007. — P. 3103–3109.
50. *Lee T. K., Zhou Y.* Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls// J. Algebra Appl., **12**, № 2. — 2013. — 1250159..
51. *Mohammed S. H., Müller B. J.* Continuous and Discrete Modules. — Cambridge Univ. Press, 1990.
52. *Mohammed S., Bouhy T.* Continuous modules// Arab. J. Sci. Eng., **2**. — 1977. — P. 107–122.
53. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings// Trans. Am. Math. Soc., **229**. — 1977. — P. 269–278.
54. *Nicholson W. K., Yousif M. F.* Quasi-Frobenius Rings//.
55. *von Neumann J.* Continuous geometry// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 92–100.
56. *von Neumann J.* Examples of continuous geometries// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 101–108.
57. *von Neumann J.* On regular rings// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 707–713.
58. *Quynh T. C., Koşan M. T.* On automorphism-invariant modules// J. Algebra Appl., **14**, № 5. — 2015. — 1550074..
59. *Singh S., Srivastava A. K.* Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules// Contemp. Math., **609**. — 2014. — P. 299–311.
60. *Singh S., Srivastava A. K.* Dual automorphism-invariant modules// J. Algebra, **371**. — 2012. — P. 262–275.
61. *Takeuchi T.* On direct modules// Hokkaido Math. J., **1**. — 1972. — P. 168–177.
62. *Thuyet L. V., Dan P., Quynh T. C.* Modules which are invariant under idempotents of their envelopes// Colloq. Math., **143**, № 2. — 2016. — P. 237–250.
63. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1998.
64. *Tuganbaev A. A.* Rings over which all cyclic modules are completely integrally closed// Discrete Math. Appl., **23**, № 3. — 2011. — P. 477–497.
65. *Tuganbaev A. A.* Modules over strongly prime rings// J. Algebra Appl., **14**, № 5. — 2015. — 1550076.
66. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-invariant semi-Artinian modules// J. Algebra Appl., **16**, № 1. — 2017. — 1750029.
67. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-invariant non-singular rings and modules// J. Algebra, **485**. — 2017. — P. 247–253.
68. *Utumi Y.* On continuous regular rings and semisimple self-injective rings// Can. J. Math., **12**. — 1960. — P. 597–605.
69. *Utumi Y.* On continuous regular rings// Can. Math. Bull., **4**. — 1961. — P. 63–69.
70. *Utumi Y.* On continuous rings and self-injective rings// Trans. Am. Math. Soc., **118**. — 1965. — P. 158–173.
71. *Utumi Y.* On the continuity and self injectivity of a complete regular ring// Can. J. Math., **18**. — 1966. — P. 404–412.
72. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

Абызов Адель Наилевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `aabyzov@kpfu.ru`

Куинь Чюонг Конг
Данангский университет, Вьетнам
E-mail: `tcquynh@dce.udn.vn`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`