УДК 517.972.5

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Р.Г. Салахудинов[1]

1 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе дан краткий обзор изопериметрических неравенств, связывающих жесткость кручения и геометрические характеристики области. Также приводится ряд новых утверждений и формулируются старые и новые гипотезы.

Ключевые слова: жесткость кручения, изопериметрические неравенства, евклидовы моменты области относительно границы, экстремальные области.

Изучение изопериметрических неравенств, содержащие различные функционалы области, — это одно из классических направлений математической физики. История вопроса об оценках жесткости кручения показывает преобладание неравенств, дающих оценку жесткости кручения сверху. Эти неравенства связаны с именами Кулона, Коши, Сен–Венана, Полиа, Пейна [1] и других учёных. Среди этих неравенств отметим особую роль неравенства Сен–Венана — Полиа

$$\mathbf{P}(G) \le \frac{\mathbf{A}(G)^2}{2\pi},$$

имеющего важные приложения в теории кручения; здесь G — односвязная область, $\mathbf{P}(G)$ — жесткость кручения G и $\mathbf{A}(G)$ — площадь G. Многие известные неравенства можно получить с применением методов симметризации. Отметим, что несмотря на достаточно большое число изопериметрических неравенств, в том числе точных, остается достаточно большое количество открытых проблем.

Оценки жесткости кручения снизу также связаны с неравенствами, принадлежащие Пейну, Полиа, Сегё [2,3] и др. Отметим, что и при дополнительных ограничениях на область, например, выпуклости, известно не так много результатов. Наиболее простая и вместе с тем красивая оценка

$$\mathbf{P}(G) \ge \frac{1}{2}\mathbf{A}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^2$$

была доказана в 1951 г. Полиа и Сегё; здесь G — выпуклая область с конечной площадью и

$$\boldsymbol{\rho}(G) := \sup_{x\in G} \rho(x,G),$$

где $\rho(x,G)$ — функция расстояния от точки x до границы области G. Следующее утверждение имеет непосредственное отношение к последнему неравенству.

Теорема. *Пусть G — выпуклая область с ограниченной жесткость кручения, тогда справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \ge 2\mathbf{I}_2(G) + \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^2}{6\pi},$$

где $\mathbf{I}_2(G)$ *— евклидовый момент инерции области относительно своей границы. Равенство достигается в случае круга. Более того, если* $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) \neq 0$*, то неравенство обращается в строгое, здесь* $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ *— длина границы множества, отстоящего на расстоянии* $\boldsymbol{\rho}(G)$ *от границы* ∂G*.*

Будем называть выпуклую область G_0 сжатием выпуклой области G, если область G_0 можно получить из G путем вырезания прямоугольного фрагмента и соединения оставшихся частей. Немного более сложным образом операцию сжатия можно определить и для невыпуклых областей.

Гипотеза. *Утверждение теоремы остаётся справедливым и для односвязных областей, причём экстремальные области в неравенстве является несжимаемыми.*

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02433 р_поволжье_а).

Литература

1. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. – Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

2. Pólya G., Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. – Annals of Mathematical Studies. V. 27. Princeton: Princeton University Press, 1951.

3. Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. – 1967. – V. 9, № 3. – P. 453–488.

ON LOWER BOUNDS OF TORSIONAL RIGIDITY OF SIMPLY CONNECTED DOMAIN

R.G. Salakhudinov

In this paper we give a brief survey of isoperimetric inequalities connecting the torsional rigidity and geometric characteristics of a plane domain. A number of new statements are also stated, some old and new hypotheses are formulated.

Keywords: isoperimetric inequality, torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to the boundary, extremal domain.

УДК 517.54

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ЛУЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НОВЫМ МЕТОДОМ

Р.Б. Салимов[1], А.З. Сулейманов[2]

1 *salimov.rsb@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *ayaz-suleymanov-91@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на положительной действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении