Литература

1. Громол Д. *Риманова геометрия в целом. Пер. с нем. Ю.Д. Бураго. Под ред. и с добавлением В.А. Топоногова.* – М.: Мир, 1971. – 344 с.

2. Кобаяси Ш. *Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Перевод с англ. Л.В.Сабинина.* — М.: Наука, 1981. – 344 с.

3. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности* – Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965. — С. 5-179.

AFFINE TRANSFORMATIONS ONE TYPE OF LINEAR CONNECTION

A.Ya. Sultanov

In this note we establish the maximal dimension of the Lie algebras $g(\nabla)$ of infinitesimal affine transformations of a manifold M of dimension n, equipped with a linear connection ∇. It is assumed that the manifold M is connected and having the smoothness class C^∞, and the linear connection ∇ is not having torsion, that is, with a zero tensor torsion field T.

Keywords: Differential manifold, linear connection, infinitesimal affine transformation, the maximal dimension, algebra of Lie.

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА НАД ДВУМЕРНЫМИ МАКСИМАЛЬНО-ПОДВИЖНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Г.А. Султанова[1]

1 *sultgaliya@yandex.ru*;

В работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM_2 со связностью $\nabla^{(0)}$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇).

Ключевые слова: Касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, максимально-подвижное пространство.

Пусть M – связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, TM – касательное расслоение над многообразием M. Приведем определения лифтов функций, векторных полей и линейных связностей с базы в касательное расслоение. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ – полным лифтом функции f с многообразия M в его касательное расслоение TM.

Пусть $X \in \Im_0^1(M)$, где $\Im_0^1(M)$ – модуль векторных полей над алгеброй $C^\infty(M)$ на M. Векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ называются вертикальным и полным лифтами векторного поля X, соответственно, в локальных координатах определяемые соотношениями $X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1$, $X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$ [6].

Если на многообразии M задана линейная связность ∇, то на многообразии TM существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)},$$

$$\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)},$$

$$\nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0,$$

где $X, Y \in \Im^1_0(M)$ [3].

Определение [1]. *Векторное поле $\tilde{X}$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием касательного расслоения TM, снабженного связностью $\nabla^{(0)}$, если $L_{\tilde{X}}\nabla^{(0)} = 0$.*

Определение [1]. *Многообразие M, снабженное линейной связностью ∇, называется максимально-подвижным пространством, если его группы аффинных преобразований имеют наибольшую размерность.*

И.П. Егоровым [1] установлено существование трех типов двумерных пространств линейной связности (M_2, ∇), группы аффинных преобразований которых имеют максимальную размерность 4.

Коэффициенты Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1, 2)$ связностей этих пространств в специальной системе координат (x^i) в M_2 имеют вид:

$$\Gamma^1_{11} = f(x^1), \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g(x^1), \tag{1}$$

другие $\Gamma^i_{jk} = 0$.

В двух типах функции f и g являются постоянными.

Тензорное поле R кривизны этих пространств имеет следующие компоненты: $R^2_{112} = -R^2_{121} = \partial_1 g + g(g - f)$, другие $R^i_{jkl} = 0$.

Тензорное поле Риччи имеет ранг 1 и только одну компоненту, отличную от нуля:

$$R_{11} \neq 0,\ R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0.$$

В работе [4] было показано, что инфинитезимальные аффинные преобразования $\tilde{X}$ пространств $(TM, \nabla^{(0)})$ над двумерными максимально-подвижными пространствами линейной связности имеют вид:

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma}, \tag{2}$$

где X, Y – векторные поля, G – тензорное поле типа $(1,1)$ на многообразии M, удовлетворяющие соотношениям:

$$L_X\nabla = 0, L_Y\nabla = 0, \nabla G = 0, R^i_{jml}G^m_k - R^m_{jkl}G^i_m = 0.$$

Векторное поле $G^{V\gamma}$ определяется условием: $G^{V\gamma} = (G^j_i)_{(0)} x^i_1 \partial^1_j$.

Пусть $\tilde{L}$ – алгебра Ли векторных полей вида (2) , а $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2)$ – ее подалгеры Ли векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}, G^{V\gamma}$, соответственно. Имеет место

Теорема. *Если пространство* (M_2, ∇) *обладает группой аффинных преобразований максимальной размерности, то группа аффинных преобразований пространства* $(TM_2, \nabla^{(0)})$ *имеет размерность*

$$\tilde{r} = 8 + \dim L^2.$$

Относительно алгебры Ли L^2 имеет место

Теорема [4]. *Совокупность решений дифференциального уравнения* $\nabla G = 0$ *для двумерных максимально подвижных пространств линейной связности ненулевой кривизны является двумерной алгеброй Ли.*

Так как векторное поле $G^{V\gamma}$ входит в каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования, то аффинор G удовлетворяет еще следующим алгебраическим соотношениям

$$G_j^s R_{ksl}^i - G_s^i R_{kjl}^s = 0.$$

Следовательно, базис алгебры Ли L^2 состоит из одного векторного поля Лиувилля

$$K = x_1^j \partial_j^1. \tag{3}$$

Таким образом,

Теорема. *Алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения* TM_2*, снабженного полным лифтом максимально-подвижной линейной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.*

Учитывая, что размерность группы Ли преобразований многообразия равна размерности алгебры Ли инфинитезимальных преобразований [2], то

Следствие. *Группа аффинных преобразований касательного расслоения* TM_2*, снабженного полным лифтом максимально-подвижной линейной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.*

Литература

1. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности.* – Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965. — С. 5-179.

2. Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.* – М.:Наука, Физматлит, 1973. – 527 с.

3. Султанов А Я. *Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта* // Тр. геом. сем. – 1994. – №22.– С. 78-–88.

4. Султанова Г. А. *О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности* // Диф. геом. многообразий фигур. – 2015. – Вып.46. – С. 153-161.

5. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry.* – New York, Marcel Dekker, 1973. – 423 p.

ABOUT ALGEBRAS OF LIE OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS OF THE TANGENT BUNDLES WITH THE CONNECTION OF THE COMPLETE LIFT OVER THE MAXIMALLY MOVABLE TWO-DIMENSIONAL SPACE

G.A. Sultanova

In this the paper we study the maximal dimensions of the algebras of Lie of infinitesimal affine transformations of the tangent bundle TM_2 *with the connection of the complete lift* $\nabla^{(0)}$ *over the maximally*

movable two-dimensional space (M_2, ∇).

Keywords: The tangent bundle, infinitesimal affine transformation, algebra of Lie, maximally movable space.

УДК 514.17

СОСТАВЛЕННЫЕ НЕ БОЛЕЕ, ЧЕМ ИЗ 16 ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ПИРАМИД ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА С ТАКИМИ КАК У ПИРАМИД ИЛИ ВДВОЕ БОЛЬШИМИ РЁБРАМИ

А.В. Тимофеенко[1], Д.Н. Судак[2], А.А. Черепухина[3]

1 *a.v.timofeenko62@mail.ru*; Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева

2 *dashe4ka-93@mail.ru*; АО Информационные спутниковые системы им. академика М. Ф. Решетнёва

3 *krutelevaalenka@mail.ru*; Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение “Зыковская Средняя Общеобразовательная школа”

Обсуждается вопрос: “Каковы все выпуклые многогранники с равносторонними паркетными гранями?” Построены указанные в названии тела и найдены группы их симметрий.

Ключевые слова: Правильногранная пирамида, паркетный многоугольник, выпуклый многогранник, группа симметрий.

В настоящей работе паркетный многоугольник, определяемый в [1] как выпуклый и составленный из равноугольных, рассматривается составленным только из правильных многоугольников. Если вершины этих многоугольников служат и вершинами выпуклого многогранника, то он является призмой, антипризмой, либо каким-нибудь из 186 тел, опубликованных в [2], см. также в этой работе ссылки на электронные атласы многогранников. Хотя с точностью до подобия существует всего 9 паркетных равносторонних многоугольников, остаётся открытым вопрос: “Каковы все выпуклые многогранники с равносторонними паркетными гранями?” В докладе планируется рассказать о продвижении к ответу и на более общий вопрос: “Каковы все типы выпуклых многогранников с паркетными гранями?” В неявном виде эта проблема появилась после завершения классификации выпуклых правильногранных тел, [3], и тел с паркетными гранями без фиктивных вершин, [2].

Известно, что ответ содержит конечное число типов, если не считать четыре бесконечные серии призм, антипризм и тел, отсекаемых от антипризм плоскостями, параллельными их основаниям. Самостоятельный интерес имеют составленные из правильногранных пирамид выпуклые тела, в алгоритм составления которых заложены группы симметрий синтезируемых многогранников. Появившиеся в трудах Г. С. М. Коксетера обозначения этих групп можно найти в публикации [4].

Теорема. *Составленный из не более 16 правильногранных пирамид выпуклый многогранник с паркетными гранями и равными или вдвое отличающимися по длине рёбрами является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:*

1) $M_1, [3,3]$, $M_2, [4]$, $M_3, [5]$;