Литература

1. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ). М. – 1979. – Т. 9. С. 5–246.

2. Thompson G., Schwardmann U. *Almost tangent and cotangent structures in the large* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – 327. – no. 1. P. 313–327.

3. Vaisman I. *Lagrange geometry on tangent manifolds* // Int. J. of Math. and Math. Sci. – 2003. – 51. P. 3241-3266.

4. Шурыгин В. В. *О строении полных многообразий над алгебрами Вейля* // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 11. С. 88–97.

5. Малахальцев М. А. *Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе* // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994 – вып. 22. С. 47–62.

6. Diamond F., Shurman J. *A first course in modular forms* // Springer, 2005. 447 p.

HOLONOMY PSEUDOGROUP OF A $\mathbb{D}$-SMOOTH MANIFOLD AND STRUCTURES OF $\mathbb{D}$-SMOOTH MANIFOLDS ON THE TORUS

A.A. Malyugina, V.V. Shurygin

Holonomy pseudogroups of $\mathbb{D}$-smooth manifolds are applied to the question on existence of a $\mathbb{D}$-diffeomorphism between two-dimensional tori endowed with some structures of $\mathbb{D}$-smooth manifolds.

Keywords: Smooth manifold over the algebra of dual numbers, integrable almost tangent structure, tangent manifold, holonomy pseudogroup.

УДК 514.7

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Й. Микеш[1], В.Е. Березовский[2], И. Гинтерлейтнер[3]

1 *josef.mikes@upol.cz*; Palacky University Olomouc
2 *berez.volod@rambler.ru*; Уманский национальный университет садоводства
3 *hinterleitner.i@fce.vutbr.cz*; Brno University of Technology

В статье обсуждаются различные типы основных уравнений геодезических отображений (псевдо-) римановых и аффинносвязных пространств.

Ключевые слова: геодезические отображения, основные уравнения, (псевдо-) римановы пространства, аффинносвязные пространства.

Как известно, диффеоморфизм называют геодезическим отображением, если при нем все геодезические одного пространства переходят в геодезические второго пространства.

В частности, геодезическими отображениями и их обобщениями в разных аспектах, занимались многие казанские геометры начиная с П.А. Широкова, который решил задачу о нахождении двухмерных псевдоримановых метрик, допускающих геодезические отображения. Затем этими задачами и их обобщениями занимались В.И. Шуликовский, А.З. Петров, А.П. Широков, Н.В. Талантова, А.В. Аминова, В.Е. Фомин и др.

Усилием многих поколений математиков появились новые виды основных уравнений теории геодезических отображений. В настоящей работе представлен обзор основных уравнений геодезических отображений римановых, псевдоримановых и аффинносвязных пространств. Этим вопросам посвящены, например, работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 2, 1].

Самыми известными являются *уравнения Леви-Чивита*, который получил их для римановых пространств, а затем Г. Вейль, для случая аффинносвязных пространств. Пространства аффинной связности A_n и $\bar{A}_n$ находятся в геодезическом соответсвии тогда и только тогда, когда в общей по отображения системе координат x компоненты аффинной связности удовлетворяют уравнениям Леви-Чивита

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \delta^h_i \psi_j(x) + \delta^h_j \psi_i(x), \tag{1}$$

где $\psi_i(x)$ – компоненты некоторого ковектора ψ и δ^h_i – символы Кронекера.

Уравнения (1) в бескоординатной записи мы можем записать следующим образом

$$(\bar{\nabla} - \nabla)_X X = \psi(X) \cdot Y + \psi(Y) \cdot X,$$

где X, Y проивольные касательные векторные поля, ∇ и $\bar{\nabla}$ – аффинные связности пространств A_n и $\bar{A}_n$. Более кратко, эти уравнения было бы можно записать следующим образом

$$(\bar{\nabla} - \nabla)_X X = 2\psi(X) \cdot X.$$

В случае, когда $\psi \equiv 0$, геодезические отображения называются *тривиальными* или *аффинными*.

Заметим, что из уравнений (1) следует, что геодезические отображения обладают свойством *эквивалентности*, т.е. тождественное отображение является геодезическим, обратное отображение к геодезическому является также геодезическим и композиция геодезических отображений также является геодезическим отображением.

Как известно, необходимым и достаточным условием геодезического отображения (или *проективного соответствия*) является равенство компонент *проективной связности* в общей системе координат x:

$$\bar{\mathcal{T}}^h_{ij}(x) = \mathcal{T}^h_{ij}(x).$$

Объект проективной связности в аффинносвязных пространствах называется *объектом Томаса*, который их построил:

$$\mathcal{T}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{n+1}\,(\delta^h_i \Gamma^\alpha_{j\alpha}(x) + \delta^h_j \Gamma^\alpha_{i\alpha}(x)).$$

Т. Леви-Чивита [2] доказал, что уравнения (1) при геодезических отображениях римановых пространств V_n и $\bar{V}_n$ эквивалентны уравнениям

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}, \tag{2}$$

где $\bar{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства $\bar{V}_n$ и запятая обозначает ковариантное дифференцирование в V_n.

Эти уравнения справедливыми и для геодезических отображений псевдоримановых пространств, а также для отображений аффинносвязных пространств на (псевдо-) римановы. Выше приведенные уравнения были дополнены до замкнутой системы дифференциальных уравнений типа Коши в работе [11], см. [1], с. 276.

В 1963г. Н.С. Синюков [1] доказал, что уравнения (2) для геодезических отображений между (псевдо-) римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ эквивалентны линейным уравнениям

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}$$

относительно неизвестных тензоров $a_{ij}(x)$ и $\lambda_i(x)$. Здесь g_{ij} – метрический тензор V_n.

Им была построена замкнутая система уравнений типа Коши:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & a_{ij,k} & = & \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}; \\
(b) & n\lambda_{i,j} & = & \mu g_{ij} - a_{i\alpha} R^{\alpha}_{j} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{ij}{}^{\beta}; \\
(c) & (n-1)\mu_{,i} & = & 2(n+1)\lambda_\alpha R^{\alpha}_{i} + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha}{}_{i,}{}^{\beta} - R^{\alpha\beta}{}_{,i}).
\end{array}$$

В работе Й. Микеша и В.Е. Березовского [11], см. [1], с. 280, эти результаты обобщены на случай геодезического отображения эквиаффинного аффинносвязного пространства A_n на (псевдо-) римановы пространства $\bar{V}_n$. В этом случае уравнения (2) эквивалентны следующим линейным уравнениям

$$a^{ij}_{\ ,k} = \delta^i_k \lambda^j + \delta^j_k \lambda^i \qquad (3)$$

относительно неизвестных невырожденного симметрического тензора $a^{ij}(x)$ и вектора λ^i. В области, где тензор проективной кривизны Вейля ненулевой, вектор λ^i линейно выражается через компоненты тензора a^{ij} (при $n > 2$). Нами доказано [12], что если $A_n \in C^{r-1}$ (т.е. $\Gamma^h_{ij}(x) \in C^{r-1}$) при $r \geq 3$ и $\bar{V}_n \in C^1$ ($\bar{g}_{ij}(x) \in C^1$), то по необходимости $\bar{V}_n \in C^r$.

Напомним, что пространство аффинной связности называется *эквиаффинным*, если в нем существует некоторая система координат x и некоторая функция $f(x)$, для которой выполняется $\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}(x) = \partial f(x)/\partial x^i$. Заметим, что эквиаффинные пространства характеризуются симметричностью тензора Риччи. См. [5], сс. 150–151, [1], с. 85.

Ранее (в 20-х годах прошлого века) было доказано, что любое пространство аффинной связности локально проективно некоторому эквиаффинному пространству с нормальной связностью. Аффинная связность $\tilde{\mathscr{T}}^h_{ij}(x)$ называется *нормальной*, если в некоторой системе координат x построена аналогичным образом как объекты Томаса (см. [13], [2, p. 105], [1, p. 282]; эта конструкция была еще раз построена в работе [14]):

$$\tilde{\mathscr{T}}^h_{ij}(x) = \tilde{\Gamma}^h_{ij}(x) - \frac{1}{n+1}(\delta^h_i \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{j\alpha}(x) + \delta^h_j \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha}(x)).$$

Эквиаффинность следует из очевидного свойства $\tilde{\mathscr{T}}^{\alpha}_{i\alpha}(x) = 0$.

В работе [15] показано, что в любом аффинносвязном пространстве можно “*в целом*” построить проективно эквивалентную эквиаффинную связность и, таким образом, любое пространство аффинной связности проективно “*в целом*” некоторому эквиаффинному пространству.

Поэтому уравнения (3) являются основными уравнениями для геодезических отображений пространств аффинной связности на (псевдо-) римановы пространства. Ковариантное дифференцирование в этом случае осуществляется при помощи нормальной связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта IGA 2017012 Университета Палацкого в г. Оломоуце и проекта No. LO1408, AdMas UP Технологического университета в г. Брно.

Литература

1. Аминова А. В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 2(290). – С. 107–164

2. Levi-Civita T. *Sulle transformationi delle equazioni dinamiche* // Ann. Mat. Milano. – 1896. – T. 24. – № 2. – C. 255–300.

3. Eisenhart L. P. *Riemannian geometry.* Princeton Univ. Press. 1926.

4. Eisenhart L. P. *Non-Riemannian geometry. Princeton Univ. Press.* 1926. AMS Colloq. Publ. 8, 2000.

5. Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

6. Петров А. З. *Новые методы в теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.

7. Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.

8. Mikeš J. *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces* // Geometry, 2. J. Math. Sci. – 1996. – T. 78. – № 3. – C. 311–333.

9. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. *Geodesic mappings and some generalizations.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009. – 304 c.

10. Mikeš J. et al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566 c.

11. Mikeš J., Berezovski V. *Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces* // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 56. Diff. Geom., Eger (Hung.). – 1989. – C. 491–494.

12. Hinterleitner I, Mikeš J. *Geodesic mappings onto Riemannian manifolds and differentiability* // Geometry, integrability and quantization XVIII, 183–190. – Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 2017.

13. Cartan É. *Sur les variété á connexion projective* // S. M. F. Bull. – 1924. – T. 52. – C. 205–241.

14. Mikeš J., Hinterleitner I, Kiosak V. *On geodesic mappings of spaces with affine connection* // Acta Physica Debrecina. – 2008. – T. 42. – C. 19–28.

15. Hinterleitner I, Mikeš J. *Projective equivalence and spaces with equi-affine connection* // J. Math. Sci. – 2011. – T. 177. – C. 546–550.

ON FUNDAMENTAL EQUATIONS OF GEODESIC MAPPINGS

J. Mikeš, V.E. Berezovskii, I. Hinterleitner

Here different types of fundamental equations of geodesic mappings (pseudo-) Riemannian spaces and spaces with affine connection.

Keywords: Geodesic mappings, fundamental equations, (pseudo-) Riemannian spaces, spaces with affine connection.