6. Макоха А.Н. *Линейные операторы, связанные с тривектором типа (887; 520), и основная группа автоморфизмов этого тривектора.* // Изв. вузов. Матем. 1981. – №7 – С. 46–53.

7. Макоха А.Н. *Группа автоморфизмов линейного комплекса плоскостей типа* À$_3$ *и особые прямые этого комплекса.* // Изв. вузов. Матем. 1986. – №8 – С. 40–46.

8. Макоха А.Н. *Группа линейных преобразований, сохраняющих тривектор типа (888; 852).* // Изв. вузов. Матем. 1986. – №2 – С. 45–49.

9. Макоха А.Н. *Об одном способе построения группы автоморфизмов тривектора типа (884; 400).* // Проблемы естественных наук: Материалы научной конференции ”Университетская наука - региону”. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1996.

10. Makoha A. N., Tyshlyar T.E. *Construction of neural networks for determination of singular points of linear complexes of planes of category B* // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. Mathematiques, Informatique. 2012 – T. 65. – No 6. – P. 751–758.

GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF A LINEAR COMPLEX OF PLANES ASSOCIATED WITH A TRIVECTOR OF TYPE (884, 400)

A.N. Makokha

A theorem on necessary and sufficient conditions for determining all planes of a linear complex associated with a trivector of a given type is formulated and proved accurate to linear transformations of its automorphism group. All kinds of singular lines are found during the process of proving the theorem. For their nonsingular lines their polar hyperplanes are constructed.

Keywords: Trivector, singulars points of the first and second kinds, singulars and non-singulars directs, singulars subspaces, polar hyperplane, automorphism group of a trivector.

УДК 514.76

ПСЕВДОГРУППА ГОЛОНОМИИ $\mathbb{D}$-ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ И СТРУКТУРЫ $\mathbb{D}$-ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ НА ТОРЕ

А.А. Малюгина[1], В.В. Шурыгин[2]

1 *alexandra.malyugina@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *vadim.shurygin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Псевдогруппы голономии гладких многообразий над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ применяются для решения вопроса о $\mathbb{D}$-диффеоморфности двумерных торов, снабженных некоторыми структурами $\mathbb{D}$-гладких многообразий.

Ключевые слова: Гладкое многообразие над алгеброй дуальных чисел, интегрируемая почти касательная структура, касательное многообразие, псевдогруппа голономии.

Алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ называется двумерная алгебра над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1,\varepsilon\}$ и умножением, определяемым формулой $(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon) = ac+(ad+cb)\varepsilon$.

Отображение $F : U \subset \mathbb{D}^n \ni \{X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon\} \mapsto \{Y^k = y^k + \dot{y}^k\varepsilon\} \in \mathbb{D}^m$ из открытого подмножества $U \subset \mathbb{D}^n$ модуля $\mathbb{D}^n$ в модуль $\mathbb{D}^m$ называется $\mathbb{D}$-*гладким*, если его дифференциал dF является $\mathbb{D}$-линейным отображением в каждой точке из U. В некоторой окрестности каждой точки из U $\mathbb{D}$-гладкое отображение имеет следующий вид

[1]

$$y^k + \dot{y}^k \varepsilon = f^k(x^i) + (\dot{x}^j \partial_j f^k + g^k(x^i))\varepsilon. \tag{1}$$

Структура n-мерного $\mathbb{D}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$ на вещественном $2n$-мерном многообразии M_{2n} задается атласом, карты которого принимают значения в модуле $\mathbb{D}^n$, а функции перехода являются $\mathbb{D}$-гладкими диффеоморфизмами ($\mathbb{D}$-диффеоморфизмами). Отметим работы [2], [3], в которых $\mathbb{D}$-гладкие многообразия изучались под другими названиями.

Локальные $\mathbb{D}$-значные координаты на $M_n^{\mathbb{D}}$ имеют вид $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon$ и преобразуются на пересечении областей определения карт по формулам, локально имеющим вид (1). Уравнениями $x^i = const$ на $M_n^{\mathbb{D}}$ определяется каноническое слоение $\mathscr{F}$. Слои слоения $\mathscr{F}$ несут на себе естественные структуры аффинных многообразий. Если все слои слоения $\mathscr{F}$ являются (геодезически) полными аффинными многообразиями, многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ называется полным.

Пусть $M_n^{\mathbb{D}}$ — полное многообразие, а $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbb{D}}$ — погружение полной трансверсали, т. е. трансверсали, пересекающей все слои слоения $\mathscr{F}$. Скольжение локальных трансверсалей вдоль слоевых путей на $M_n^{\mathbb{D}}$ определяет диффеоморфизмы $\psi : U \to V$ между областями трансверсали W_n и $\mathbb{D}_n$-диффеоморфизмы между областями TU и TV касательного расслоения TW_n, образующие соответственно псевдогруппу голономии слоения $\mathscr{F}$ и псевдогруппу голономии $\Gamma(\varphi)$ многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$ [2]. В этом случае многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ является $\mathbb{D}$-диффеоморфным многообразию $TW_n/\Gamma(W_n)$ [4]. Отсюда, в частности, следует, что если $F : M_n^{\mathbb{D}} \to M'^{\mathbb{D}}_n$ — диффеоморфизм, являющийся изоморфизмом в категории слоений, а $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbb{D}}$ — погружение полной трансверсали, то F является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда псевдогруппы голономии $\Gamma(\varphi)$ и $\Gamma(F \circ \varphi)$ совпадают.

Далее псевдогруппы голономии применяются к исследованию некоторых структур
$\mathbb{D}$-гладких многообразий на торе. Отметим, что взаимодействие слоений на торе и структур $\mathbb{D}$-гладких многообразий исследовалось в работе [5].

Векторное поле $w : \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1$ на окружности, не обращающееся в нуль, индуцирует $\mathbb{D}$-диффеоморфизм касательного расслоения $w^{\mathbb{D}} : T\mathbb{S}^1 \ni v_x \mapsto v_x + w(x) \in T\mathbb{S}^1$. Фактормногообразие касательного расслоения по действию группы целых чисел, порождаемому диффеоморфизмом $w^{\mathbb{D}}$, является тором $T(w)$ со структурой $\mathbb{D}$-гладкого многообразия.

Теорема 1. *Всякий тор $T(w)$ $\mathbb{D}$-диффеоморфен некоторому тору $T(w_1)$, где w_1 — постоянное векторное поле.*

Если w_1 и w_2 — различные постоянные векторные поля, то торы $T(w_1)$ и $T(w_2)$ не $\mathbb{D}$-диффеоморфны.

Пусть L — решетка в алгебре $\mathbb{D}$, порождаемая линейно независимыми над $\mathbb{R}$ элементами $a + \dot{a}\varepsilon$ и $b + \dot{b}\varepsilon$. Фактормногообразие $\mathbb{D}/L$ представляет собой тор со структурой $\mathbb{D}$-гладкого многообразия. Аналогично случаю алгебры комплексных чисел [6] имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть L и L' — две решетки в алгебре $\mathbb{D}$. Торы $\mathbb{D}/L$ и $\mathbb{D}/L'$ $\mathbb{D}$-диффеоморфны тогда и только тогда, когда решетка L' получается из решетки L умножением на некоторое дуальной число.*

Литература

1. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ). М. – 1979. – Т. 9. С. 5–246.

2. Thompson G., Schwardmann U. *Almost tangent and cotangent structures in the large* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – 327. – no. 1. P. 313–327.

3. Vaisman I. *Lagrange geometry on tangent manifolds* // Int. J. of Math. and Math. Sci. – 2003. – 51. P. 3241-3266.

4. Шурыгин В. В. *О строении полных многообразий над алгебрами Вейля* // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 11. С. 88–97.

5. Малахальцев М. А. *Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе* // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994 – вып. 22. С. 47–62.

6. Diamond F., Shurman J. *A first course in modular forms* // Springer, 2005. 447 p.

HOLONOMY PSEUDOGROUP OF A $\mathbb{D}$-SMOOTH MANIFOLD AND STRUCTURES OF $\mathbb{D}$-SMOOTH MANIFOLDS ON THE TORUS

A.A. Malyugina, V.V. Shurygin

Holonomy pseudogroups of $\mathbb{D}$-smooth manifolds are applied to the question on existence of a $\mathbb{D}$-diffeomorphism between two-dimensional tori endowed with some structures of $\mathbb{D}$-smooth manifolds.

Keywords: Smooth manifold over the algebra of dual numbers, integrable almost tangent structure, tangent manifold, holonomy pseudogroup.

УДК 514.7

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Й. Микеш[1], В.Е. Березовский[2], И. Гинтерлейтнер[3]

1 *josef.mikes@upol.cz*; Palacky University Olomouc
2 *berez.volod@rambler.ru*; Уманский национальный университет садоводства
3 *hinterleitner.i@fce.vutbr.cz*; Brno University of Technology

В статье обсуждаются различные типы основных уравнений геодезических отображений (псевдо-) римановых и аффинносвязных пространств.

Ключевые слова: геодезические отображения, основные уравнения, (псевдо-) римановы пространства, аффинносвязные пространства.

Как известно, диффеоморфизм называют геодезическим отображением, если при нем все геодезические одного пространства переходят в геодезические второго пространства.

В частности, геодезическими отображениями и их обобщениями в разных аспектах, занимались многие казанские геометры начиная с П.А. Широкова, который решил задачу о нахождении двухмерных псевдоримановых метрик, допускающих геодезические отображения. Затем этими задачами и их обобщениями занимались В.И. Шуликовский, А.З. Петров, А.П. Широков, Н.В. Талантова, А.В. Аминова, В.Е. Фомин и др.