тотической линией и меридианом псевдосферы Бельтрами–Миндинга равен углу параллельности дуги асимптотической от ребра возврата.

Это даёт простой способ охарактеризовать асимптотические направления псевдосферы в рамках внутренней геометрии, который можно перенести на универсальную накрывающую поверхности.Через выбранную точку M на универсальной накрывающей псевдосферы – орикруге – проводится ось граничного орицикла. Пусть a — длина отрезка этой оси до граничного орицикла. Тогда направление чебышёвской сети, накрывающей асимптотическую сеть псевдосферы, образует с направлением оси граничного орицикла угол $arcsin(e^{-a})$. Мнимые асимптотические на псевдоевклидовом продолжении псевдосферы можно интерпретировать как линии вещественных чебышёвских сетей в индефинитной метрике постоянной кривизны. Эти сети накрывают асимптотические сети на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в псевдоевклидовом пространстве. Асимптотические направления на этих псевдосферах пространства Минковского также допускают простую интерпретацию в рамках внутренней геометрии этих поверхностей, аналогичную интерпретации асимптотических направлений на псевдосфере Бельтрами–Миндинга.

ON THE INTERPRETATION OF ASYMPTOTIC DIRECTIONS

A.V. Kostin, N.N. Kostina

In this paper we consider the interpretation of asymptotic directions on the pseudospheres of the Euclidean and pseudo-Euclidean spaces.

Keywords: Asymptotic line, pseudosphere, hyperbolic plane.

УДК 514.763.85

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ МОНЖА–АМПЕРА И ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА

А.Г. Кушнер[1]

1 *kushner@physics.msu.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Для невырожденных уравнений Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными построены тензорные инварианты, обобщающие инваринты Лапласа для линейных гиперболических уравнений и которые используются при каскадном интегрировании линейных гиперболических уравнений методом Дарбу. В терминах этих тензорных инвариантов проведена классификация гиперболических и эллиптических уравнений Монжа–Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.

Ключевые слова: контактные преобразования, дифференциальные инварианты, инварианты Лапласа.

Уравнение Монжа-Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D и E — функции от независимых переменных x, y, неизвестной функции $v = v(x, y)$ и ее первых производных v_x, v_y. Класс уравнений Монжа–Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения. Этот факт был известен еще Софусу Ли, который рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа–Ампера [1]. Сам Ли сформулировал условия приведения гиперболических уравнений Монжа–Ампера к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ при наличии у них двух промежуточных интегралов. Заметим, что не все уравнения Монжа–Ампера обладают промежуточными интегралами, поэтому результаты Ли применимы не ко всем уравнениям Монжа–Ампера. Кроме того, проверка наличия промежуточных интегралов у общего уравнения Монжа–Ампера, а тем более их построение, является не простой задачей. Доказательства полученных результатов Ли так и не опубликовал.

В 1978 году В.В. Лычагин [2] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях [2]. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа–Ампера. Основная идея Лычагина заключается в представлении уравнений Монжа–Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии. Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов вместо пространства 2-джетов, в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа–Ампера. В работе [3] В.В. Лычагин и В.Н. Рубцов определили ассоциированный с уравнениями Монжа–Ампера (1) оператор A, действующий на векторных полях из распределении Картана на пространстве 1-джетов $J^1(\mathbb{R}^2)$. Для гиперболических уравнений этот оператор порождает на подпространстве Картана структуру почти произведения ($A^2 = 1$), а для эллиптических уравнений — комплексную структуру ($A^2 = -1$). В работе [4] показано, что для гиперболических уравнений в каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство к многообразию 1-джетов распадается в прямую сумму трех подпространств:

$$T_a(J^1M) = \mathscr{C}_+(a) \oplus l(a) \oplus \mathscr{C}_-(a).$$

Здесь $\mathscr{C}_\pm(a)$ — двумерные собственные подпространства оператора A_a, а $l(a)$ — одномерное подпространство, трансверсальное подпространству Картана. Поэтому гиперболическое уравнение Монжа–Ампера порождает на пространстве 1-джетов набор из трех распределений $\mathscr{P} = (\mathscr{C}_+, l, \mathscr{C}_-)$. Для эллиптических уравнений соответствующие распределения комплексные. Такие структуры являются частным случаем структур r-кратного почти произведения [5, 6].

Укажем способ построения дифференциальных инвариантов структур r-кратного почти произведения. Пусть N — гладкое многообразие и пусть $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_r)$ — упорядоченный набор (действительных или комплексных) распределений на N. Будем говорить, что на N задана структура *r-кратного почти произведения $\mathscr{P}$*, если в каждой точке a многообразия N касательное пространство (для действительных распределений) или его комплексификация (для комплексных распределений) распадается в прямую сумму подпространств $\mathscr{P}_1(a), \dots, \mathscr{P}_r(a)$. Разложения касательных пространств в прямую сумму подпространств влечет разложение в прямую сумму модуля дифференциальных s-форм на N: $\Omega^s(N) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Omega^{\mathbf{k}}$, где

$$\Omega^{\mathbf{k}} = \left\{ \sum_{j_1+\cdots+j_r=|\mathbf{k}|} \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_r} \;\middle|\; \alpha_{j_i} \in \Omega_i^{k_i} \right\} \subset \bigotimes_{i=1}^{r} \Omega_i^{k_i},$$

а модули $\Omega_i^s = \{\alpha \in \Omega^s(N) |\ X \rfloor \alpha = 0\ \forall\ X \in D_j,\ j \neq i\} \subset \Omega^s(N)$ состоят из внешних дифференциальных s-форм, вырождающихся на векторных полях D_j, $j \neq i$. Здесь $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$— мультииндекс длины r, $|\mathbf{k}| = \sum_{i=1}^r k_i$, а $D_i = D(\mathscr{P}_i)$ — модули векторных полей, лежащих в распределениях $\mathscr{P}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Внешняя алгебра, тем самым, является $\mathbb{N}^r$-градуированной алгеброй и внешний дифференциал распадается в прямую сумму $d = \bigoplus_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}}$, где $d_{\mathbf{t}} : \Omega^{\mathbf{k}} \to \Omega^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}$. Здесь $\mathbf{t}$ — мультииндексы длины r.

Теорема 1. 1) *Операторы $d_{\mathbf{t}}$ являются дифференцированиями*: $d_{\mathbf{t}}(\alpha \wedge \beta) = d_{\mathbf{t}}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d_{\mathbf{t}}\beta$, *где $\alpha \in \Omega^{\mathbf{k}}$ и $\beta \in \Omega^{\mathbf{i}}$.* 2) *Если в мультииндексе* $\mathbf{t}$ *сумма отрицательных компонент меньше, чем -1, то $d_{\mathbf{t}} = 0$.* 3) *Если мультииндекс* $\mathbf{t}$ *содержит одну отрицательную компоненту и она равна -1, то $\mathbf{t} = \mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s$ $(s \neq j, k)$ и оператор $d_{\mathbf{t}}$ является $C^\infty(N)$-гомоморфизмом, то есть $d_{\mathbf{t}}(f\alpha) = f d_{\mathbf{t}}\alpha$ для любой функции f и любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^{\mathbf{k}}$.*

Здесь в мультииндексе $\mathbf{1}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ единица стоит на i-м месте. Таким образом, дифференциал $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ определяет на N тензорное поле типа (2,1), которое мы будем обозначать $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$. Единственная нетривиальная компонента этого тензорного поля — его ограничение на модуль $\Omega^{\mathbf{1}_s}$, причем ограничение $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{\mathbf{1}_s} \to \Omega^{\mathbf{1}_j} \wedge \Omega^{\mathbf{1}_k}$ совпадает с $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$. Тензорные поля $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ позволяют определить дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r-кратного почти произведения. Пусть $A, B \in \Omega^2 \otimes D$ — тензорные поля на N. Здесь $\Omega^2 = \Omega^2(N)$ и $D = D(N)$. В силу естественного вложения $\iota : \Omega^2 \otimes D \otimes \Omega^2 \otimes D \hookrightarrow \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D$ тензорное произведение $A \otimes B$ можно рассматривать как элемент пространства $T = \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D$. Пусть $\mathfrak{C}_j^i$ — операция свертки элемента пространства T по индексам i и j. Определим операцию *косой свертки* двух тензорных полей $A, B \in \Omega^2(N) \otimes D(N)$:

$$\langle A, B \rangle_W = \frac{1}{2} \mathfrak{C}_1^6 \circ \mathfrak{C}_4^3 (\iota(A) \otimes \iota(B) - \iota(B) \otimes \iota(A)).$$

Результатом косой свёртки является дифференциальная 2-форма на N. Определим дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r-кратного почти произведения: $\langle \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}, \tau_{\mathbf{1}_p+\mathbf{1}_q-\mathbf{1}_r} \rangle_W$.

Возвращаясь к гиперболическим уравнениям Монжа–Ампера (1), получаем мы получаем структуру 3-кратного почти произведения $\mathscr{P} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathscr{P}_i$, где $\mathscr{P}_1 = \mathscr{C}_+$ и $\mathscr{P}_3 = \mathscr{C}_-$ — двумерные распределения, а $\mathscr{P}_2 = l$ — распределение прямых. Применяя описанную выше процедуру, мы получаем четыре дифференциальных тензорных инварианта гиперболического уравнения Монжа–Ампера: $\tau_{2,-1,0}, \tau_{0,-1,2}, \tau_{-1,1,1}$ и $\tau_{1,1,-1}$. Построим дифференциальные 2-формы для структуры 3-кратного почти произведения, порожденного гиперболическим уравнением. В нашем случае таких форм две: $\lambda_+ = \langle \tau_{0,-1,2}, \tau_{1,1,-1} \rangle_W$ и $\lambda_- = \langle \tau_{2,-1,0}, \tau_{-1,1,1} \rangle_W$. Заметим, что коэффициенты этих форм, вычисленных для линейных гиперболических уравнений, представляют собой классические инварианты Лапласа [7]. Действительно, при решении проблемы интегрирования линейных гиперболических уравнений

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v \tag{2}$$

Эйлер [8] ввел функции $h = ab + c - a_x$ и $k = ab + c - b_y$. Эти функции являются относительными инвариантами при преобразованиях $(x,y,v) \mapsto (X(x), Y(y), Z(x,y)v)$, которые сохраняют класс уравнений линейных уравнений (2). Функции h и k при таких преобразованиях умножаются на $X'(x)Y'(y)$, то есть ведут себя как коэффициенты некоторой дифференциальной формы. Построенные нами формы λ_+ и λ_- для уравнения (2) имеют вид: $\lambda_- = (ab + c - b_y)dx \wedge dy$ и $\lambda_+ = -(ab + c - a_x)dx \wedge dy$. Поэтому эти формы мы называем *формами Лапласа*. В терминах этих форм можно сформулировать условия контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера и, в частности, указать условия их контактной линеаризации. Подробнее см. в [9, 10] В качестве примера приведём следующий результат.

Теорема 2. *Уравнение Монжа–Ампера* (1) *локально контактно эквивалентно волновому уравнению* $v_{xy} = 0$ *тогда и только тогда, когда обе его формы Лапласа равны нулю.*

Отметим, что эта теорема обобщает известный результат для линейных уравнений, согласно которому линейное уравнение (2) эквивалентно волновому уравнению когда функции h и k тождественно равны нулю. Аналогичная теорема справедлива и для эллиптических уравнений.

Литература

1. Lie S. *Begrundung einer Invarianten-Theorie der Beruhrungs-Transformationen* // Math. Ann. **8**. – P. 215–303 (1874)

2. Лычагин В.В. *Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка* // ДАН СССР **238**(5). – С. 273–276 (1978)

3. Лычагин В.В., Рубцов В.Н. *О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа–Ампера* // ДАН БССР **27**(5). – С. 396–398 (1983)

4. Lychagin V.V. *Lectures on geometry of differential equations*. Vol. 1,2. “La Sapienza”. – Rome. – 1993.

5. Kushner A.G. *Almost product structures and Monge-Ampère equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – **23**. – P. 151–181 (2006)

6. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. *Contact geometry and nonlinear differential equations*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

7. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: “Наука”. – 1978. 399 С.

8. Euler L. *Calcvli integralis*. Vol.3. Petropoli, Impenfis Academiac Imperialis Scientiarium. – 1770.

9. Kushner A.G. *A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants* // Acta Appl. Math. **101**(1–3) P. 177–189 (2008)

10. Kushner A.G. *Classification of Monge-Ampère equations* // In: “Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability”. Proceedings of the Fifth Abel Symposium. – Tromso, Norway. – June 17–22, 2008 (Editors: B. Kruglikov, V. Lychagin, E. Straume) P. 223–256.

CONTACT GEOMETRY OF MONGE–AMPERE EQUATIONS AND LAPLACE INVARIANTS

A.G. Kushner

Tensor invariants for non-degenerated Monge–Ampere equations with two independent variables are constructed. These invariants are generalization of the Laplace invariants of linear hyperbolic equations which are used to solve linear hyperbolic equations by the cascade Darboux method. We use constructed tensor invariants to solve classification problems for hyperbolic and elliptic Monge–Ampere equations with respect to pseudo-group of contact transformations.

Keywords: contact transformations, differential invariants, Laplace invariants.

УДК 514.822

К ПОСТРОЕНИЮ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ ГРАФА КЭЛИ ГРУПЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ

А.И. Макосий[1]

1 *aimakosi@khsu.ru*; Хакасский государственный университет

В некоторых однородных графах Кэли конечных групп, порожденных тремя инволюциями, две из которых перестановочны, рассматривается вопрос об автоматизации построения гамильтонова цикла.

Ключевые слова: Граф Кэли группы, гамильтонов цикл, порождающие тройки инволюций группы.

Напомним, что *гамильтоновым* называется путь в графе, обходящий каждую его вершину точно один раз, а *гамильтоновым циклом* – замкнутый гамильтонов путь. Из многочисленных приложений построения гамильтоновых циклов отметим использование гамильтоновых циклов графов Кэли конечных групп больших порядков в криптографии, а также их применение при работе с алгебраическими моделями выпуклых паркетогранников [1].

Напомним также, что если G – конечная группа и S – порождающее множество для G, то *граф Кэли* $Cay(G,S)$ есть неориентированный граф с вершинами $g \in G$ и ребрами $(g,gs),(g,gs^{-1}) \in G^2$, где $s \in S$. Так, например, гамильтонов цикл в графе $Cay(D_8,\{a,b\})$ группы диэдра восьмого порядка D_8 получается удалением четырех ребер из графа Кэли, рис. 1.

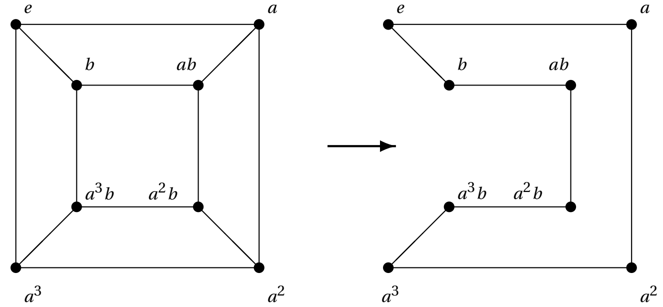

Рис. 1. Гамильтонов цикл в графе $Cay(D_8,\{a,b\})$ группы диэдра D_8.