

Литература

1. Лейко С. Г. *P*-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика – 1992. – № 2. – С. 62–71.
2. Лейко С. Г. *P*-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика – 1998. – № 6. – С. 35–45.
3. Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: Учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 480 с.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, Т.1, М.:Наука, 1981. – 344 с.
5. Yano K. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry* New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.
6. Ishihara S. *On infinitesimal concircular transformations* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1960. – Vol. 12. – № 2. – P. 45–56.

THE FLATTENING INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS OF THE TANGENT BUNDLE WITH THE HORIZONTAL LIFT CONNECTION GENERATED BY THE INFINITESIMAL CONCIRCULAR TRANSFORMATION OF BASIS

K.M. Zubrilin

In this work the flattening properties of the complete lift of infinitesimal concircular transformation are studied. The tangent bundle is considered as the affinely connected space with the horizontal lift connection. The concept of the E-lift for a tensor field of any type is introduced. It necessary is used in the covariant differentiation concerning of the horizontal lift connection.

Keywords: The flattening, the order of flattening, the *p*-geodesic curve, the flattening curve, the *p*-geodesic map, the flattening map, the *p*-geodesic infinitesimal transformation.

УДК 514.822

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ

М.О. Катанаев¹

¹ katanaev@mi.ras.ru; Математический институт им. В. А. Стеклова, Казанский федеральный университет

Мы описываем дефекты – дислокации и дисклинации – в рамках геометрии Римана–Картана. Тензоры кривизны и кручения интерпретируются как поверхностные плотности векторов Френка и Бюргера соответственно. Мы предлагаем новое выражение для свободной энергии, описывающее статическое распределение дефектов. Для фиксации системы координат используются уравнения нелинейной теории упругости. Калибровка Лоренца даёт уравнения для главного кирального $SO(3)$ -поля. Когда дефекты отсутствуют, геометрическая модель сводится к теории упругости для векторного поля смещения и к главной киральной модели $SO(3)$ для спиновой структуры. Пример клиновой дислокации показывает, что теория упругости воспроизводит только линейную аппроксимацию геометрической теории дефектов. Мы также показываем, что уравнения асимметричной теории упругости для среды Коссера (Cosserat) естественно вкладываются в геометрическую теорию дефектов как

калибровочные условия. Рассеяние фононов на клиновой дислокации описывается как применение геометрической теории дефектов. Рассматривается также проблема энергетического спектра примеси в области клиновой дислокации.

Ключевые слова: Дефекты, дислокации, дисклинации, геометрия Римана–Картана.

Введение

Многие твердые тела обладают кристаллической структурой. Однако в природе идеальных кристаллов нет, и большинство их физических свойств, таких как пластичность, плавление, рост и др., определяется дефектами кристаллической структуры. Поэтому изучение дефектов является актуальной научной проблемой, важной, в первую очередь, для приложений. Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования дефектов в кристаллах начались в 30-е годы прошлого века и продолжают по сей день. Несмотря на десятки монографий и тысячи статей, фундаментальная теория дефектов в настоящее время отсутствует.

Один из перспективных подходов к созданию теории дефектов основан на геометрии Римана–Картана, которая задается нетривиальной метрикой и кручением. В этом подходе кристалл рассматривается, как непрерывная упругая среда со спиновой структурой. Если векторное поле смещений является гладкой функцией, то в кристалле присутствуют только упругие напряжения, которые соответствуют диффеоморфизмам плоского евклидова пространства. Если поле смещений имеет разрывы, то мы говорим, что в среде есть дефекты упругой структуры. Дефекты упругой структуры называются дислокациями и приводят к возникновению нетривиальной геометрии. А именно, они соответствуют отличному от нуля тензору кручения, который равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

Идея связать кручение с дислокациями возникла в пятидесятые годы [1–4]. Этот подход успешно развивается до сих пор (отметим обзоры [5–11]) и часто называется калибровочной теорией дислокаций. Аналогичный подход развивается также в гравитации [12]. Интересно отметить, что Э. Картан ввел понятие кручения в геометрию [13], проводя аналогию с механикой упругой среды.

Параллельно с изучением дислокаций шло интенсивное изучение другого типа дефектов. Дело в том, что многие тела обладают не только упругими свойствами, но и спиновой структурой. Например, ферромагнетики, жидкие кристаллы, спиновые стекла и др. В этом случае существуют дефекты в спиновой структуре, которые называются дисклинациями [14]. Они возникают тогда, когда поле директора имеет разрывы. Наличие дисклинаций также связано с нетривиальной геометрией. А именно, тензор кривизны равен поверхностной плотности вектора Франка. К описанию дисклинаций также применялся калибровочный подход, основанный на группе вращений $S\mathbb{O}(3)$ [15]. $S\mathbb{O}(3)$ -калибровочные модели спиновых стекол с дефектами рассматривались в [16, 17].

Геометрическая теория статического распределения дефектов, которая с единой точки зрения описывает оба типа дефектов – дислокации и дисклинации, была предложена в [18]. В отличие от других подходов единственными независимыми переменными у нас являются репер и $S\mathbb{O}(3)$ -связность. Тензоры кручения и кри-

визны имеют прямой физический смысл поверхностной плотности соответственно дислокаций и дисклинаций. Для репера и $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности постулируются ковариантные уравнения равновесия, такие же, как и в модели гравитации с кручением. Поскольку любое решение уравнений равновесия определено с точностью до общих преобразований координат и локальных $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -вращений, то для однозначного определения решения необходимо задать систему координат (зафиксировать калибровку). Недавно для этой цели была предложена упругая калибровка для репера [19] и лоренцева калибровка для $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности [20]. Подчеркнем, что в нашем подходе понятие вектора смещений и угла поворота полностью отсутствует. Эти понятия могут быть введены только в тех областях среды, в которых дефекты отсутствуют. В этом случае уравнения для репера и $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности тождественно удовлетворяются, упругая калибровка сводится к уравнениям нелинейной теории упругости для вектора смещений, а лоренцева калибровка – к уравнениям главного кирального $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -поля. Другими словами, для фиксирования системы координат мы выбираем две фундаментальные модели: теорию упругости и модель главного кирального поля.

Упругие деформации

Рассмотрим трехмерную бесконечную упругую среду. Мы предполагаем, что в отсутствие дефектов недеформированная среда инвариантна относительно трансляций и вращений в некоторой системе координат. Тогда в этой системе координат $y^i, i = 1, 2, 3$, среда описывается евклидовой метрикой $\delta_{ij} = \text{diag}(+++)$, а система координат называется декартовой. Таким образом, в недеформированном состоянии мы имеем евклидово пространство \mathbb{R}^3 с заданной декартовой системой координат. Мы также предполагаем, что кручение в среде равно нулю.

Пусть некоторая точка среды имеет в основном состоянии координаты y^i . После деформации данная точка в исходной системе будет иметь координаты,

$$y^i \rightarrow x^i(y) = y^i + u^i(x) \quad (1)$$

В теории упругости приняты обратные обозначения. Обычно пишут $x^i \rightarrow y^i = x^i + u^i(x)$. Это эквивалентные записи, поскольку обе системы координат x^i и y^i покрывают все \mathbb{R}^3 . Однако в теории дефектов, которая рассматривается в следующих разделах, ситуация другая. В общем случае, только в конечном состоянии упругая среда заполняет все евклидово пространство. Здесь и в дальнейшем поля предполагаются зависящими от координат x , которые являются координатами точек среды после деформации и по предположению покрывают все евклидово пространство \mathbb{R}^3 . При наличии дислокаций координаты y^i в общем случае не покрывают все \mathbb{R}^3 , так как часть среды может быть удалена или, наоборот, добавлена. Поэтому предпочтительнее является система координат, связанная с точками среды после упругой деформации и образования дефектов.

В отсутствие дефектов мы полагаем поле смещений гладким векторным полем в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Наличие у поля смещений разрывов и сингулярностей интерпретируется, как наличие дефектов в упругой среде.

В дальнейшем мы будем рассматривать только статические деформации, когда поле смещений u^i не зависит от времени. Тогда основные уравнения равновесия

упругой среды для малых деформаций имеют вид (см., например, [21])

$$\partial_j \sigma^{ji} + f^i = 0, \quad (2)$$

$$\sigma^{ij} = \lambda \delta^{ij} \epsilon_k^k + 2\mu \epsilon^{ij}, \quad (3)$$

где σ^{ij} – тензор напряжений, который предполагается симметричным. Тензор малых деформаций ϵ_{ij} задается симметризованной частной производной от вектора смещений

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (4)$$

Опускание и подъем латинских индексов проводится с помощью евклидовой метрики δ_{ij} и ее обратной δ^{ij} . Буквы λ и μ обозначают постоянные, характеризующие упругие свойства среды, и называются коэффициентами Ламе. Функции $f^i(x)$ описывают суммарную плотность неупругих сил внутри среды. В дальнейшем мы предполагаем, что такие силы отсутствуют: $f^i(x) = 0$. Уравнение (2) есть закон Ньютона, а (3) представляет собой закон Гука, связывающий напряжения и деформации.

В линейной теории упругости основной задачей является решение уравнений второго порядка для вектора смещений, которое возникает после подстановки (3) в (2), при некоторых граничных условиях. Множество известных решений находится в прекрасном согласии с экспериментом. Поэтому можно сказать, что уравнения (3), (2) имеют хорошую экспериментальную основу.

Посмотрим на упругие деформации с точки зрения дифференциальной геометрии. С математической точки зрения отображение (1) представляет собой диффеоморфизм евклидова пространства \mathbb{R}^3 . При этом евклидова метрика δ_{ij} индуцирована отображением $y^i \rightarrow x^i$. Это значит, что в деформированном состоянии метрика в линейном приближении имеет вид

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl} \approx \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i = \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij}, \quad (5)$$

т.е. определяется тензором малых деформаций (4). Заметим, что в линейном приближении $\epsilon_{ij}(x) = \epsilon_{ij}(y)$ и $\partial u_j / \partial x^i = \partial u_j / \partial y^i$.

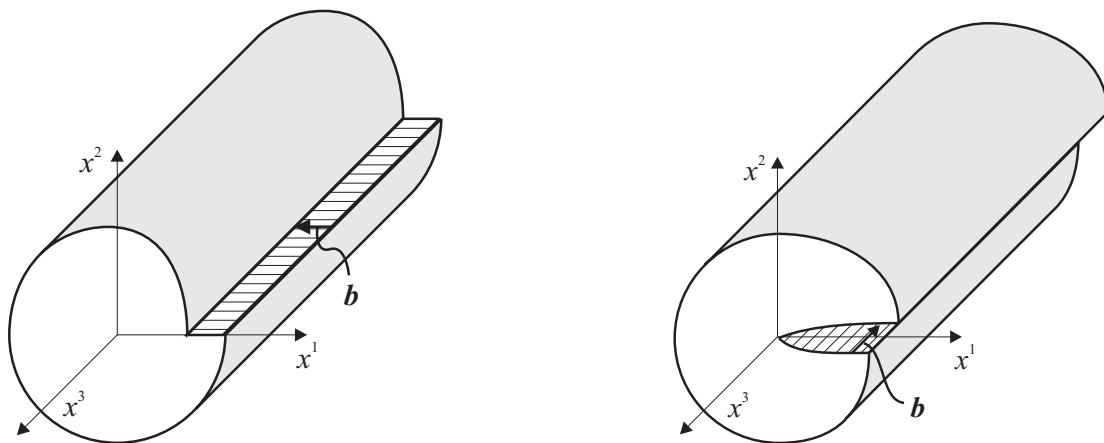
В римановой геометрии метрика однозначно определяет связность Леви-Чевиты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x)$ (символы Кристоффеля). По этим символам можно вычислить тензор кривизны, который тождественно равен нулю, $\tilde{R}_{ijk}^l(x) = 0$, так как кривизна евклидова пространства равна нулю, а отображение $y^i \rightarrow x^i$ – диффеоморфизм. По этой же причине равен нулю и тензор кручения. Таким образом, упругая деформация среды соответствует тривиальной геометрии Римана–Картана, так как тензоры кривизны и кручения равны нулю.

Дислокации

Начнем с описания линейных дислокаций в упругой среде (см., например, [21]). Простейшие и наиболее распространенные примеры прямолинейных дислокаций изображены на рис. 1. Разрежем среду по полуплоскости $x^2 = 0$, $x^1 > 0$. Сдвинем верхнюю часть среды, расположенную над разрезом $x^2 > 0$, $x^1 > 0$, на вектор \mathbf{b} по направлению к оси дислокации x^3 и склеим берега разреза. Вектор \mathbf{b} называется

вектором Бюргера. В общем случае вектор Бюргера может быть не постоянен на разрезе. Для краевой дислокации он меняется от нуля до некоторого постоянно-го значения \mathbf{b} по мере удаления от оси дислокации. После склейки среда придет в равновесное состояние, которое называется краевой дислокацией, изображенной на рис. 1,а. Если вектор Бюргера параллелен линии дислокации, то она называется винтовой, рис. 1,б.

Одну и ту же дислокацию можно получить разными способами. Например, если в рассмотренных примерах вектор Бюргера перпендикулярен плоскости разреза и направлен от него, то перед склейкой образовавшуюся полость необходимо заполнить веществом. В результате, как нетрудно представить, также возникает краевая дислокация, только повернутая вокруг оси x^3 на угол $\pi/2$. Этот пример показывает, что характеристикой дислокации является не поверхность разреза, а линия дисло-



(а) Краевая дислокация. Вектор Бюргера \mathbf{b} перпендикулярен оси дислокации.

(б) Винтовая дислокация. Вектор Бюргера \mathbf{b} параллелен оси дислокации.

Рис. 1. Прямолинейные дислокации.

кации и вектор Бюргера.

С топологической точки зрения среда, содержащая дислокации, которых может быть несколько или даже бесконечное число, представляет собой евклидово пространство \mathbb{R}^3 . В отличие от упругих деформаций при наличии дислокаций вектор смещений перестает быть гладкой функцией, так как имеются поверхности разреза. В то же время мы предполагаем, что частные производные от вектора смещений $\partial_j u^i$ (тензор дисторсии) являются гладкими функциями на поверхности разреза. С физической точки зрения такое предположение оправдано тем, что эти производные определяют тензор деформаций (4). В свою очередь частные производные от тензора деформаций должны существовать и быть непрерывными функциями в равновесном состоянии везде, за исключением, может быть, оси дислокации, так как в противном случае уравнение равновесия (2) не имеет смысла. Поскольку тензор деформаций определяет индуцированную метрику (5), то мы предполагаем, что метрика и репер в \mathbb{R}^3 , за исключением, возможно, осей дислокаций, являются гладкими функциями.

Основная идея геометрического подхода сводится к следующему. Для описа-

ния отдельных дислокаций в рамках теории упругости необходимо решить уравнения для вектора смещений с определенными граничными условиями на разрезах. Для небольшого числа дислокаций это возможно. Однако с увеличением количества дислокаций граничные условия настолько усложняются, что решение задачи представляется нереальным. Кроме того, одну и ту же дислокацию можно создать с помощью различных разрезов, что приводит к неоднозначности для векторного поля смещений. Другим недостатком этого подхода является его непригодность для описания непрерывного распределения дислокаций, так как в этом случае векторное поле смещений просто не существует, так как должно иметь разрывы в каждой точке. В геометрическом подходе основная переменная – репер, который, по предположению, является гладкой функцией везде за исключением, возможно, осей дислокаций. В геометрическом подходе переход от конечного числа дислокаций к их непрерывному распределению происходит просто и естественно. При этом происходит сглаживание сингулярностей на осях дислокаций аналогично тому, как сглаживается распределение массы для точечных частиц при переходе к непрерывной среде.

Перейдем к построению формализма геометрического подхода. Поскольку при наличии дефектов в равновесном состоянии в общем случае у нас нет никакой симметрии, то отсутствует понятие выделенной декартовой системы координат. Поэтому рассмотрим произвольную систему координат x^μ , $\mu = 1, 2, 3$, в \mathbb{R}^3 . Для нумерации координат мы используем теперь греческие буквы, поскольку допускаем произвольные преобразования координат. Тогда вектор Бюргерса можно выразить в виде интеграла от вектора смещения

$$\oint_C dx^\mu \partial_\mu u^i(x) = - \oint_C dx^\mu \partial_\mu y^i(x) = -b^i, \quad (6)$$

где C – замкнутый контур, охватывающий ось дислокации, рис. 2. Этот интеграл

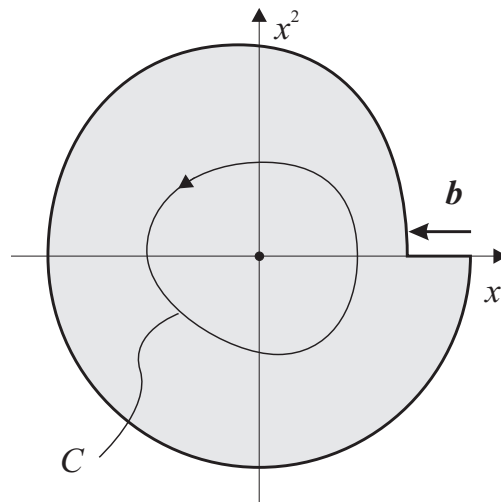


Рис. 2. Сечение среды с краевой дислокацией. C – контур интегрирования для вектора Бюргерса b .

инвариантен относительно произвольных преобразований координат $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$ и ковариантен относительно глобальных $\mathbb{SO}(3)$ -вращений y^i . Здесь компоненты век-

торного поля $u^i(x)$ рассматриваются относительно ортонормального базиса касательного пространства $u = u^i e_i$. Если бы мы рассматривали компоненты векторного поля смещений относительно координатного базиса $u = u^\mu \partial_\mu$, то инвариантность интеграла (6) относительно общих преобразований координат была бы нарушена.

В геометрическом подходе вместо частных производных от векторного поля смещений $\partial_\mu u^i$ мы вводим новую независимую переменную – репер

$$e_\mu^i(x) = \begin{cases} \partial_\mu y^i, & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu y^i, & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (7)$$

По построению, репер является гладкой функцией на разрезе. Отметим, что, если бы мы просто определили репер, как частную производную $\partial_\mu y^i$, то у репера была бы δ -образная особенность на разрезе, так как функции $y^i(x)$ испытывают скачок. Тогда вектор Бюргерса можно представить в виде интеграла по поверхности S , натянутой на контур C ,

$$\oint_C dx^\mu e_\mu^i = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i) = b^i, \quad (8)$$

где $dx^\mu \wedge dx^\nu$ – элемент площади поверхности. Из определения репера (7) следует, что подынтегральное выражение равно нулю всюду, за исключением оси дислокации. Для краевой дислокации с постоянным вектором Бюргерса подынтегральное выражение имеет δ -образную особенность в начале координат. Критерием наличия дислокации является нарушение условия интегрируемости системы уравнений $\partial_\mu y^i = e_\mu^i$:

$$\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i \neq 0. \quad (9)$$

Если дислокаций нет, то функции $y^i(x)$ существуют и определяют переход к декартовой системе координат.

В геометрической теории дефектов поле e_μ^i отождествляется с репером. Далее, сравним подынтегральное выражение в (8) с выражением для тензора кручения в переменных Картана. Они отличаются только слагаемыми, содержащими $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связность. Это дает основание ввести следующий постулат. В геометрической теории дефектов вектор Бюргерса, соответствующий некоторой поверхности S , определяется интегралом от тензора кручения

$$b^i = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^i.$$

Это определение инвариантно относительно общих преобразований координат x^μ и ковариантно относительно глобальных вращений. Таким образом, в геометрической теории дефектов тензор кручения имеет прямой физический смысл: он равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

Физический смысл $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности будет дан в разделе 1, а сейчас мы покажем, каким образом данное определение сводится к выражению для вектора Бюргерса (8), полученному в рамках теории упругости. Если тензор кривизны $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности равен нулю, то связность локально тривиальна, и существует такое $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ вращение, что $\omega_{\mu i}^j = 0$. В этом случае мы возвращаемся к выражению (8).

Дисклинации

В предыдущем разделе мы связали дислокации в упругой среде с тензором кручения. При этом была введена $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связность. Здесь мы покажем, что кривизна $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности определяет поверхностную плотность вектора Франка, характеризующего другие хорошо известные дефекты – дисклинации в спиновой структуре среды [21].

Пусть в каждой точке среды задано единичное векторное поле $n^i(x)$, ($n^i n_i = 1$). Например, для ферромагнетиков n^i имеет смысл магнитного момента, связанного с каждой точкой среды. Зафиксируем некоторое направление в среде n_0^i . Тогда поле $n^i(x)$ в точке x может быть однозначно задано полем $\omega^{ij}(x) = -\omega^{ji}(x)$, принимающим значения в алгебре вращений $\mathfrak{so}(3)$ (угол вращения):

$$n^i = n_0^j S_j^i(\omega),$$

где $S_j^i \in \mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ – матрица вращений, соответствующая элементу алгебры ω^{ij} . Здесь мы используем следующую параметризацию группы вращений элементами ее алгебры (см., например, [20]),

$$S_i^j = (e^{(\omega\varepsilon)})_i^j = \cos \omega \delta_i^j + \frac{(\omega\varepsilon)_i^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (1 - \cos \omega) \in \mathbb{S}\mathbb{O}(3), \quad (10)$$

где $(\omega\varepsilon)_i^j = \omega^k \varepsilon_{ki}^j$ и $\omega = \sqrt{\omega^i \omega_i}$ – модуль вектора ω^i . Псевдовектор $\omega^k = \omega_{ij} \varepsilon^{ijk} / 2$, где ε^{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon^{123} = 1$, направлен вдоль оси вращения, а его длина равна углу поворота. Поле $\omega^{ij}(x)$ мы будем называть спиновой структурой вещества.

Если среда обладает спиновой структурой, то в ней возможны дефекты, которые называются дисклинациями. Для линейных дисклинаций, параллельных оси x^3 , векторное поле n лежит в перпендикулярной плоскости x^1, x^2 . Простейшие примеры линейных дисклинаций показаны на рис. 3. Каждая линейная дисклинация

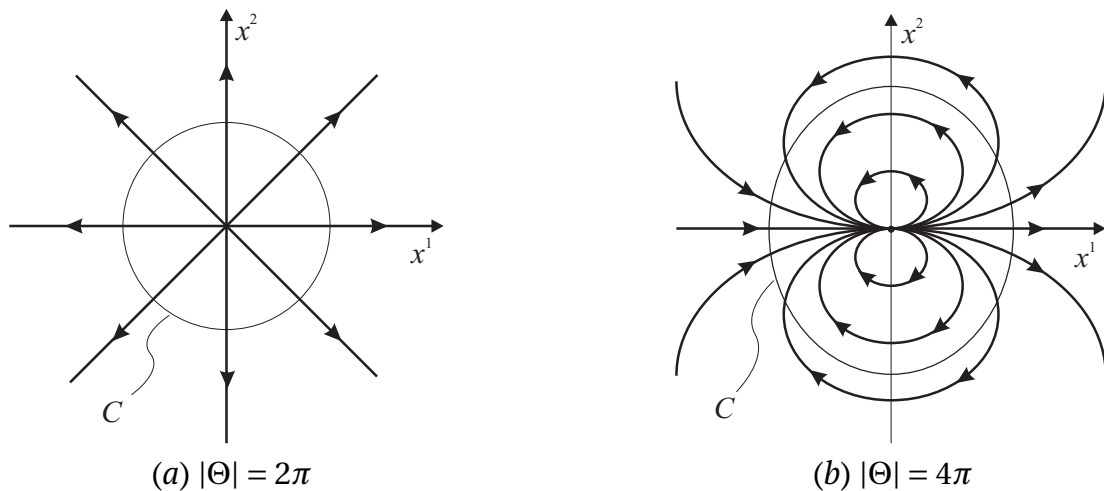


Рис. 3. Распределение векторного поля в плоскости x^1, x^2 для линейных дисклинаций, параллельных оси x^3 .

характеризуется вектором Франка

$$\Theta_i = \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}, \quad (11)$$

где

$$\Omega^{ij} = \oint_C dx^\mu \partial_\mu \omega^{ij}, \quad (12)$$

и интеграл берется по замкнутому контуру C , охватывающему ось дисклинации. Длина вектора Франка равна полному углу поворота поля n^i при обходе вокруг дисклинации.

Векторное поле n^i задает отображение евклидова пространства в сферу $n: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Для линейных дисклинаций, параллельных оси x^3 , это отображение ограничено до отображения плоскости \mathbb{R}^2 в окружность \mathbb{S}^1 . Ясно, что в этом случае полный угол поворота должен быть кратен 2π .

Как и в случае поля смещений для дислокаций, поле $\omega^{ij}(x)$, принимающее значения в алгебре $\mathfrak{so}(3)$, при наличии дисклинаций не является непрерывной функцией в \mathbb{R}^3 . Сделаем разрез в \mathbb{R}^3 , ограниченный осью дисклинации. Тогда можно считать поле $\omega^{ij}(x)$ гладким во всем пространстве за исключением разреза. Предположим, что все частные производные от $\omega^{ij}(x)$ имеют одинаковый предел при приближении к разрезу с обеих сторон. Тогда определим новое поле

$$\omega_\mu^{ij} = \begin{cases} \partial_\mu \omega^{ij}, & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu \omega^{ij}, & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (13)$$

По построению функции ω_μ^{ij} являются гладкими везде, за исключением, возможно, оси дисклинации. Тогда вектор Франка можно представить поверхностным интегралом

$$\Omega^{ij} = \oint_C dx^\mu \omega_\mu^{ij} = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij}), \quad (14)$$

где S – произвольная поверхность с границей C . Если поле ω_μ^{ij} задано, то условием интегрируемости системы уравнений $\partial_\mu \omega^{ij} = \omega_\mu^{ij}$ является равенство

$$\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij} = 0. \quad (15)$$

Это нековариантное равенство дает критерий отсутствия дисклинаций.

В геометрической теории дефектов мы отождествляем поле ω_μ^{ij} с $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ связностью. В выражении для кривизны слагаемые с производными совпадают с (15) поэтому мы постулируем ковариантный критерий отсутствия дисклинаций в виде равенства нулю тензора кривизны $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности:

$$R_{\mu\nu}{}^{ij} = 0.$$

Одновременно мы даем физическую интерпретацию тензору кривизны как поверхностной плотности вектора Франка:

$$\Omega^{ij} = \iint dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}{}^{ij}. \quad (16)$$

Это определение приводит к предыдущему выражению для вектора Франка (14) в случае, когда вращение вектора n происходит в фиксированной плоскости. В этом

случае вращения ограничены подгруппой $\mathbb{S}\mathbb{O}(2) \subset \mathbb{S}\mathbb{O}(3)$. Поскольку группа вращений плоскости $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ является абелевой, то квадратичные слагаемые в выражении для кривизны исчезают и мы получаем прежнее выражение для вектора Франка (14).

Таким образом, мы описали среду с дислокациями (дефекты упругой среды) и дисклинациями (дефекты спиновой структуры) в рамках геометрии Римана–Картана. При этом мы отождествили тензор кручения с поверхностной плотностью дислокаций, а тензор кривизны – с поверхностной плотностью дисклинаций. Соответствие между физическим и геометрическим объектами подытожено в Таблице 1.

Упругие деформации	$R_{\mu\nu}{}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}{}^i = 0$
Дислокации	$R_{\mu\nu}{}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}{}^i \neq 0$
Дисклинации	$R_{\mu\nu}{}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}{}^i = 0$
Дислокации и дисклинации	$R_{\mu\nu}{}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}{}^i \neq 0$

Таблица 1. Соответствие между физическими и геометрическими объектами в геометрической теории дефектов.

Литература

1. K. Kondo. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. In *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Applied Mechanics*, pages 41–47, Tokyo, 1952.
2. J. F. Nye. Some geometrical relations in dislocated media. *Acta Metallurgica*, 1:153, 1953.
3. B. A. Bilby, R. Bullough, and E. Smith. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London*, A231:263–273, 1955.
4. E. Kröner. *Kontinums Theories der Versetzungen und Eigenspanungen*. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg, 1958.
5. L. I. Sedov and V. L. Berditchevski. A dynamical theory of dislocations. In E. Kröner, editor, *Mechanics of Generalized Continua, UITAM symposium*, pages 214–238, 1967.
6. M. Kléman. The general theory of dislocations. In Nabarro F. R. N., editor, *Dislocations In Solids, Vol. 5*, pages 243–297, Amsterdam, 1980. North-Holland Publishing Company.
7. E. Kröner. Continuum theory of defects. In R. Balian et al., editor, *Less Houches, Session XXXV, 1980 – Physics of Defects*, pages 282–315. North-Holland Publishing Company, 1981.
8. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovik. *Ann. Phys.*, 125:67, 1988.
9. A. Kadić and D. G. B. Edelen. *A gauge theory of dislocations and disclinations*. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg, 1983. Перевод: Кадич А., Эделен Д. *Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций*. М.: Мир, 1987.
10. I. A. Kunin and B. I. Kunin. Gauge theories in mechanics. In *Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics. Lecture Notes in Physics, V.249.*, pages 246–249, Berlin – Heidelberg, 1986. Springer–Verlag.
11. H. Kleinert. *Gauge fields in condensed matter*, volume 2. World Scientific, Singapore, 1990.
12. F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman. Metric-affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilaton invariance. *Phys. Rep.*, 258(1&2):1–171, 1995.

13. E. Cartan. Sur une generalisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion. *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, 174:593–595, 1922. Перевод: Э. Картан. Об обобщении понятия римановой кривизны и о пространствах с кручением. В сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, М.: Мир, 1979, с. 535–537.
14. F. C. Frank. On the theory of liquid crystals. *Discussions Farad. Soc.*, 25:19–28, 1958.
15. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovik. On the concept of local invariance in the theory of spin glasses. *J. Physique*, 39(6):693–700, 1978.
16. J. A. Hertz. Gauge model for spin-glasses. *Phys. Rev.*, B18(9):4875–4885, 1978.
17. N. Rivier and D. M. Duffy. Line defects and tunneling modes in glasses. *J. Physique*, 43(2):293–306, 1982.
18. M. O. Katanaev and I. V. Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Ann. Phys.*, 216(1):1–28, 1992.
19. М. О. Катанаев. Клиновья дислокация в геометрической теории дефектов. *ТМФ*, 135(2):338–352, 2003.
20. М. О. Катанаев. Топологически нетривиальные одномерные решения в модели Скирма. *ТМФ*, 138(2):193–208, 2004.
21. Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. *Теория упругости*. М.: Наука, 1987.

GEOMETRIC THEORY OF DEFECTS

M.O. Katanaev

We describe defects – dislocations and disclinations – in the framework of the Riemann–Cartan geometry. Curvature and torsion tensors are interpreted as surface densities of Frank and Burgers vectors, respectively. We propose new expression for the free energy describing static distribution of defects. Equations of nonlinear elasticity theory are used to fix the coordinate system. The Lorentz gauge yields equations for the principal chiral $SO(3)$ -field. When defects are absent the geometric model reduces to the elasticity theory for the displacement vector field and to the principal chiral $SO(3)$ -field model for the spin structure. The example of the wedge dislocation shows that the elasticity theory reproduces only the linear approximation of the geometric theory of defects. We show also that the equations of asymmetric elasticity theory for the Cosserat media are naturally embedded in the geometric theory of defects as the gauge conditions. Scattering of phonons on the wedge dislocation is described as an application of the geometric theory of defects. We consider also the problem of the energy spectrum of impurity in the field of the wedge dislocation.

Keywords: Defects, dislocations, disclinations, Riemann–Cartan geometry.