



## ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

© 2018 г. В. В. ШУРЫГИН (мл.)

**Аннотация.** В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых два уравнения Абеля с коэффициентами, зависящими от управляющего параметра, локально эквивалентны относительно одной псевдогруппы преобразований обратной связи. Эти условия сформулированы в терминах дифференциальных инвариантов.

**Ключевые слова:** уравнения Абеля, дифференциальные инварианты, преобразования обратной связи, управляющий параметр.

**AMS Subject Classification:** 53A55, 34C14

**1. Введение.** Проблема эквивалентности некоторых дифференциальных уравнений или систем уравнений относительно преобразований обратной связи рассматривалась в ряде работ. Существует несколько подходов к ее решению. В настоящей работе мы применяем подход, основанный на геометрии пространств джетов и теории дифференциальных инвариантов псевдогрупп Ли, ранее использованной в работах В. В. Лычагина [8, 9], А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина [3], П. В. Бибикова [1], Д. С. Гриценко и О. М. Кирюхина [6].

Напомним, что уравнение Абеля — это дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x).$$

Легко видеть, что псевдогруппа точечных преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad y \mapsto g(x) \cdot y + h(x), \quad f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

сохраняет класс таких уравнений (и, вообще, уравнений вида  $y' = P(x, y)$ , где  $P$  — многочлен от  $y$ ). Проблема эквивалентности уравнений Абеля относительно действия этой псевдогруппы рассматривалась в ряде работ. Например, в работе П. Апеля [5] были найдены инварианты этого действия.

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о локальной эквивалентности уравнений Абеля первого порядка

$$y' = a(x, u)y^3 + b(x, u)y^2 + c(x, u)y + d(x, u), \quad (1)$$

коэффициенты которых зависят от одномерного управляющего параметра  $u$ , относительно действия псевдогруппы  $G$  преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad u \mapsto w(x, u), \quad y \mapsto g(x) \cdot y + h(x).$$

Здесь функции  $f, g, h, w$  предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Также будем предполагать, что коэффициент  $a(x, u)$  зависит от  $u$ , т.е. что производная  $a_u$  не равна нулю тождественно. Преобразования уравнений Абеля (1), определяемые действием псевдогруппы  $G$ , будем называть *преобразованиями обратной связи*.

Действие псевдогруппы  $G$  продолжается до действия на пространстве джетов расслоения  $\pi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\pi : (x, u, a, b, c, d) \mapsto (x, u)$ . Каждое уравнение Абеля  $\mathcal{E}$  можно рассматривать как

сечение такого расслоения. Алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  псевдогруппы  $G$  состоит из векторных полей вида

$$X = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \omega(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + (\eta(x) \cdot y + \zeta(x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Представление алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в алгебре Ли векторных полей на расслоении  $\pi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial u} - (2\eta + \xi') a \frac{\partial}{\partial a} - (\xi' b + 3\zeta a + \eta b) \frac{\partial}{\partial b} + \\ + (\eta' - \xi' c - 2\zeta b) \frac{\partial}{\partial c} + (\zeta' - \zeta c + \eta d - \xi' d) \frac{\partial}{\partial d}. \end{aligned}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функций  $\xi, \eta, \zeta$  по  $x$ .

Пусть  $J^k(\pi)$  — пространство  $k$ -джетов сечений расслоения  $\pi$ . Канонические координаты на этом пространстве будем обозначать  $(x, u, a, b, c, d, a_x, a_u, b_x, b_u, \dots)$ . Действие псевдогруппы  $G$  на пространстве 0-джетов  $J^0(\pi)$  поднимается до действия на всех пространствах  $J^k(\pi)$ .

**Определение 1.** Дифференциальным инвариантом порядка  $\leq k$  будем называть функцию  $I \in C^\infty(J^k \pi)$ , рациональную относительно аргументов  $a_x, a_u, \dots, a_{xx}, a_{xu}, a_{uu}, \dots$  и постоянную вдоль орбит действия продолженной псевдогруппы  $G$ .

Дифференциальные инварианты удовлетворяют равенству

$$\widehat{X}^{(k)}(I) = 0$$

для всех  $X \in \mathfrak{g}$ . Здесь  $\widehat{X}^{(k)}$  обозначает  $k$ -е продолжение поля  $\widehat{X}$  на  $J^k(\pi)$ . Множество всех дифференциальных инвариантов образует алгебру.

Будем обозначать символами  $d/dx, d/du$  операторы полной производной по соответствующей переменной (см. [2]).

**Определение 2.** Инвариантным дифференцированием будем называть комбинацию полных производных

$$\nabla = A \frac{d}{dx} + B \frac{d}{du}, \quad A, B \in C^\infty(J^\infty(\pi)),$$

инвариантную по отношению к действию продолженной псевдогруппы  $G$ , т.е. удовлетворяющую равенству

$$[\nabla, \widehat{X}] = 0$$

для всех  $X \in \mathfrak{g}$ .

Для любого дифференциального инварианта  $I$  функция  $\nabla(I)$  также является дифференциальным инвариантом. Это обстоятельство позволяет получать новые инварианты из уже имеющихся путем применения инвариантных дифференцирований. Коэффициенты  $A, B$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (см. [9]):

$$\widehat{X}(A) - \xi' A = 0, \quad \widehat{X}(B) - \frac{\partial w}{\partial x} A - \frac{\partial w}{\partial u} B = 0. \quad (2)$$

Вычисления дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований выполнены в системе компьютерной алгебры `Maple` с использованием пакетов `DifferentialGeometry` и `JetCalculus` (автор Я. Андерсон).

**2. Регулярный случай.** Заметим, что множество  $\{ab_u - ba_u = 0\}$  является сингулярной орбитой действия  $G$  на  $J^1(\pi)$ . Назовем точку  $x \in J^k(\pi)$  *регулярной*, если в этой точке  $ab_u - ba_u \neq 0$ . В этом разделе рассмотрим орбиты регулярных точек.

**Теорема 1.** Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы  $G$  в окрестности регулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка

$$I_1 = \frac{a^2(3a_u c_u - b_u^2)}{(ab_u - ba_u)^2}, \quad I_2 = \frac{(2b_u^3 - 9a_u b_u c_u + 27a_u^2 d_u) a^3}{(ab_u - ba_u)^3},$$

двумя инвариантами второго порядка

$$J_1 = \frac{a^2(a_u b_{uu} - b_u a_{uu})}{a_u^2(ab_u - ba_u)^2}, \quad J_2 = \frac{a_u M_2}{(ab_u - ba_u)^4},$$

где

$$M_2 = a^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)(a_u b_{uu} - b_u a_{uu}) + 9a^2(b_u a - a_u b)(b_u a_{xu} - a_u b_{xu}) - \\ - a_u(b_u a - a_u b)(-9a^2cb_u + 27a^2da_u + 3ab^2b_u - b^3a_u),$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 = \frac{9aa_u^2}{(ab_u - ba_u)^2} \frac{d}{dx} - \frac{aa_u^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)}{(ab_u - ba_u)^3} \frac{d}{du}, \quad \nabla_2 = \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}.$$

Эта алгебра разделяет регулярные орбиты.

*Доказательство.* Из формулы для продолжения векторного поля (см., например, [2, 4]), следует, что  $k$ -е продолжение поля  $\hat{X}$  зависит от джетов порядка  $(k+1)$  функций  $\xi(x)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\zeta(x)$  и от джетов порядка  $k$  функции  $\omega(x, u)$ . Обозначим символами  $\Xi_i^k$ ,  $H_i^k$ ,  $Z_i^k$ ,  $\Omega_{ij}^k$  компоненты разложения

$$\hat{X}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k+1} \left( \xi^{(i)}(x) \Xi_i^k + \eta^{(i)}(x) H_i^k + \zeta^{(i)}(x) Z_i^k \right) + \sum_{i+j=0}^k \frac{\partial^{i+j} \omega(x, u)}{\partial x^i \partial u^j} \Omega_{ij}^k.$$

Векторные поля  $\Xi_i^k$ ,  $H_i^k$ ,  $Z_i^k$ ,  $i = 0, \dots, k+1$ , и  $\Omega_{ij}^k$ ,  $0 \leq i+j \leq k$ , порождают вполне интегрируемое распределение на пространстве  $J^k(\pi)$ . Интегральные подмногообразия этого распределения являются орбитами действия группы  $G$ .

Заметим, что  $\dim J^k(\pi) = 2k^2 + 6k + 6$ . Обозначим символом  $\mathcal{O}_k$  орбиту действия группы  $G$  в пространстве  $J^k(\pi)$ . Проекция

$$\mathcal{O}_{k-1} = \pi_{k,k-1}(\mathcal{O}_k) \subset J^{k-1}(\pi)$$

является орбитой в  $J^{k-1}(\pi)$ . Рассмотрим такую точку  $z_{k-1} \in J^{k-1}(\pi)$ , что  $\hat{X}^{(k-1)} = 0$  в этой точке. Тогда поле  $\hat{X}^{(k)}$  является вертикальным относительно проекции  $\pi_{k,k-1}$  над этой точкой. Старшие производные, от которых зависят компоненты этого поля  $\hat{X}^{(k)}$ , — это  $\xi^{(k+1)}$ ,  $\eta^{(k+1)}$ ,  $\zeta^{(k+1)}$  и  $\partial^{i+j} \omega / \partial x^i \partial u^j$ , где  $i+j = k$ . Отсюда следует, что слои расслоения  $\pi_{k,k-1} : \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_{k-1}$  имеют размерность  $k+4$  при  $k \geq 2$ .

Орбиты в пространстве 1-джетов находятся интегрированием 12-мерного вполне интегрируемого распределения, натянутого на поля  $\Xi_i^k$ ,  $H_i^k$ ,  $Z_i^k$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и  $\Omega_{ij}^k$ ,  $0 \leq i+j \leq 1$ . Поэтому первые инварианты появляются в пространстве  $J^1(\pi)$ , и их должно быть два: это  $I_1$  и  $I_2$ . Кроме того, это означает, что

$$\dim \mathcal{O}_k = 12 + \sum_{i=2}^k (i+4) = \frac{1}{2}(k^2 + 9k) + 7.$$

В [7] доказано, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не более  $k$  равна коразмерности орбиты общего положения (регулярной орбиты). Это означает, что при  $k \geq 2$  имеется  $\frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 2)$  независимых инвариантов порядка не выше  $k$  (из них  $3k$  инвариантов порядка ровно  $k$ ).

Решая систему (2), находим два дифференцирования  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$ . Инварианты второго порядка  $\nabla_i I_k$ ,  $i, k = 1, 2$ , независимы, следовательно, в пространстве  $J^2(\pi)$  есть еще два инварианта: это  $J_1$  и  $J_2$ .

Отметим, что все полученные 6 инвариантов второго порядка линейны по вторым производным, а компоненты дифференцирований  $\nabla_1$ ,  $\nabla_2$  зависят только от координат в  $J^1(\pi)$ . Это означает, что все инварианты, получаемые дифференцированиями из уже найденных, будут линейны по старшим производным. В пространстве 3-джетов имеется 9 инвариантов порядка 3. Применяя дифференцирования  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$  к шести инвариантам порядка 2, получим 12 инвариантов порядка 3. Следовательно, между этими инвариантами существует 3 сизигии.

Чтобы получить все инварианты порядка  $k$ , достаточно применить дифференцирования  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$  ко всем уже найденным инвариантам порядка  $k - 1$ . Тот факт, что алгебра дифференциальных инвариантов разделяет регулярные орбиты, также следует из [7].  $\square$

**Замечание 1.** Инвариантные дифференцирования удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\nabla_1, \nabla_2] = (2J_1 - 1)\nabla_1 + (9J_2 + I_2 + 3I_1 + 1)\nabla_2. \quad (3)$$

Две из трех сизигий среди инвариантов порядка 3 получаются из формулы (3). Третья имеет вид

$$9\nabla_2(J_2) - \nabla_1(J_1) + 9J_2(3J_1 - 2) + J_1(I_2 + 3I_1 + 1) - I_2 + 2 = 0.$$

Рассмотрим пространства  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(x, u)$  и  $\mathbb{R}^{17}$  с координатами

$$(i_1, i_2, j_1, j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}, i_{111}, i_{121}, i_{122}, i_{211}, i_{221}, i_{222}, j_{11}, j_{12}, j_{21}).$$

Каждое уравнение Абеля  $\mathcal{E}$  определяет отображение  $\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{17}$  по формулам

$$i_k = I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_k = J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{kl} = \nabla_{\ell} I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_{kl} = \nabla_{\ell} J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{klm} = \nabla_{\ell} \nabla_m I_k^{\mathcal{E}},$$

где верхний индекс  $\mathcal{E}$  означает, что дифференциальные инварианты вычисляются для коэффициентов уравнения  $\mathcal{E}$ . Образ  $\Sigma_{\mathcal{E}} = \text{im } \sigma_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{R}^{17}$  зависит только от класса эквивалентности уравнения  $\mathcal{E}$  относительно действия  $G$ .

**Определение 3.** Будем говорить, что уравнение  $\mathcal{E}$  *регулярно* в области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , если

- 1) 3-джеты коэффициентов уравнения  $\mathcal{E}$  принадлежат регулярным орбитам;
- 2)  $\sigma_{\mathcal{E}}(D)$  — гладкое двумерное подмногообразие в  $\mathbb{R}^{17}$ ;
- 3) какие-либо две из функций  $i_1, i_2, j_1, j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}$  могут быть выбраны в качестве локальных координат на  $\Sigma_{\mathcal{E}}$ .

**Теорема 2.** Два регулярных уравнения Абеля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  эквивалентны относительно действия псевдогруппы  $G$  тогда и только тогда, когда  $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$ .

*Доказательство.* Ясно, что если уравнения эквивалентны, то  $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$ .

Наоборот, пусть  $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$ . Пусть, например, функции  $i_1$  и  $i_2$  задают координаты на  $\Sigma_{\mathcal{E}}$ . Заметим, что

$$\nabla_i = C_{i1} \frac{d}{dI_1} + C_{i2} \frac{d}{dI_2},$$

где  $d/dI_1, d/dI_2$  — производные Трессе по инвариантам  $I_k$  (см. [7, 8]), а  $C_{ij}, i, j = 1, 2$ , — инварианты 2 порядка. Условие совпадения многообразий  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  означает, что ограничения инвариантов вплоть до 3 порядка на это многообразие совпадают. Все производные этих инвариантов по  $i_1, i_2$  определяют ограничения инвариантов всех порядков. Это означает, что совпадают также ограничения на  $\Sigma_{\mathcal{E}}$  всех дифференциальных инвариантов. Поскольку алгебра инвариантов разделяет регулярные орбиты, отсюда следует, что уравнения  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  эквивалентны.  $\square$

**3. Сингулярные случаи.** Рассмотрим уравнения (1), для которых  $ab_u - ba_u = 0$ . Легко видеть, что это равенство равносильно условию

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b}{a} \right) = 0,$$

т.е.,  $b(x, u) = k(x) \cdot a(x, u)$ . Таким образом, сингулярная орбита состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u)y^2(y + k(x)) + c(x, u)y + d(x, u). \quad (4)$$

В ней, в свою очередь уравнением  $k^2 a_u - 3c_u = 0$  выделяется еще одна сингулярная орбита.

Будем говорить, что уравнения (4), для которых  $k^2 a_u - 3c_u \neq 0$ , образуют первую сингулярную орбиту.

**Теорема 3.** Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы  $G$  в окрестности первой сингулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка

$$K_1 = \frac{a_u(2k^3a_u - 9kc_u + 27d_u)^2}{(k^2a_u - 3c_u)^3}, \quad K_2 = \frac{a_u^3(2ak^3 + 9k_x + 27d - 9kc)^2}{a^2(k^2a_u - 3c_u)^3}.$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\begin{aligned} \nabla'_1 &= \frac{a_u c_{uu} - a_{uu} c_u}{a_u(k^2 a_u - 3c_u)^2} \frac{d}{dx} + \frac{9c_u a_{xu} - 9a_u c_{xu} + 2ka_u^2(k^3 a - 3kc + 3k_x) + 6a_u c_u(3c - k^2 a)}{9a_u(k^2 a_u - 3c_u)^2} \frac{d}{du}, \\ \nabla'_2 &= \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Всего при каждом  $k \geq 1$  имеется  $k^2 + k$  независимых инвариантов порядка не выше  $k$ , из них  $2k$  инвариантов порядка ровно  $k$ .

Теорема эквивалентности таких уравнений формулируется аналогично теореме 2, только отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \rightarrow \mathbb{R}^6(k_1, k_2, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})$$

строится по формулам

$$k_i = K_i^{\mathcal{E}}, \quad k_{j\ell} = \nabla'_\ell K_j^{\mathcal{E}}.$$

**Замечание 2.** Инвариант второго порядка, выражающийся простой формулой

$$J = \frac{a(a_u c_{uu} - a_{uu} c_u)}{a_u^2(k^2 a_u - 3c_u)},$$

удовлетворяет равенству

$$\nabla'_2 K_2 - 9K_2 J + 2K_2 - 2\sqrt{|K_1 K_2|} = 0.$$

Равенство  $k^2 a_u - 3c_u = 0$  означает, что

$$\frac{\partial}{\partial u}(3c - k^2 a) = 0, \quad \text{т.е.} \quad c(x, u) = \frac{1}{3}k^2(x) \cdot a(x, u) + \ell(x).$$

Этим условием выделяется вторая сингулярная орбита. Она состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u)y \left( y^2 + k(x)y + \frac{1}{3}k^2(x) \right) + \ell(x)y + d(x, u),$$

для которых  $k^3 a_u - 27d_u \neq 0$ .

**Теорема 4.** Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы  $G$  в окрестности второй сингулярной орбиты порождена одним инвариантом первого порядка

$$M = \frac{(k_x + 3d - k\ell)a_u - 3ad_u}{a(k^3 a_u - 27d_u)}$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\begin{aligned} \nabla''_1 &= \frac{a_u d_{uu} - d_u a_{uu}}{a_u^{4/3}(k^3 a_u - 27d_u)^{5/3}} \frac{d}{dx} + \frac{k^2 a_u^2(k_x - k\ell) + 27\ell a_u d_u + 9d_u a_{xu} - 9a_u d_{xu}}{9a_u^{4/3}(k^3 a_u - 27d_u)^{5/3}} \frac{d}{du}, \\ \nabla''_2 &= \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}. \end{aligned}$$

При каждом  $k \geq 1$  имеется  $\frac{1}{2}(k^2 + k)$  независимых инвариантов порядка не выше  $k$ , из них  $k$  инвариантов порядка ровно  $k$ . Отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \rightarrow \mathbb{R}^3(m, m_1, m_2)$$

в теореме эквивалентности строится по формулам

$$m = M^{\mathcal{E}}, \quad m_\ell = \nabla''_\ell M^{\mathcal{E}}.$$

Наконец, условие  $k^3 a_u - 27d_u = 0$  равносильно тому, что

$$d(x, u) = \frac{1}{27}k(x)^3 \cdot a(x, u) + m(x).$$

Уравнения вида

$$y' = a(x, u) \left( y + \frac{1}{3}k(x) \right)^3 + \ell(x)y + m(x)$$

образуют третью сингулярную орбиту. На ней нет ни одного инварианта, все уравнения эквивалентны друг другу.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бибиков П. В.*, Классификация управляемых ансамблей проективных точек// Изв. вузов. Сер. мат. — 2015. — 3. — С. 28–34.
2. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
3. *Кушнер А. Г., Лычагин В. В.* Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром// Автомат. телемех. — 2013. — 3. — С. 83–102.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
5. *Appell P.* Sur les invariants de quelques équations différentielles// J. Math. — 1889. — 5. — С. 361–423.
6. *Gritsenko D. S., Kiriukhin O. M.* Differential invariants of feedback transformations for quasi-harmonic oscillation equations// J. Geom. Phys. — 2017. — 113. — С. 65–72.
7. *Kruglikov B. S., Lychagin V. V.*, Global Lie–Tresse theorem/ Preprint [arXiv:1111.5480v1](https://arxiv.org/abs/1111.5480v1) [math.DG]. — Cornell Univ. Library, 2011.
8. *Lychagin V.* Feedback equivalence of 1-dimensional control systems of the first order// В сб.: «Geometry, Topology, and Their Applications»/ Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, — 2009. — 6, № 2. — С. 288–302.
9. *Lychagin V.* Feedback differential invariants// Acta Appl. Math. — 2010. — 109, №. 1. — С. 211–222.

В. В. Шурыгин (мл.)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [vshjr@yandex.ru](mailto:vshjr@yandex.ru), [1vshuryg@kpfu.ru](mailto:1vshuryg@kpfu.ru)