



ДЖЕТЫ ЛИ И ЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2018 г. В. В. ШУРЫГИН

Аннотация. Изучаются частичные связности высшего порядка. Найдены условия, при которых джет Ли поля геометрического объекта ξ в направлении поля \mathbb{A} -скоростей Вейля Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

Ключевые слова: алгебра Вейля, расслоение Вейля, частичная связность, связность высшего порядка, производная Ли, джет Ли.

AMS Subject Classification: 53C15, 58A20, 58A32

Введение. Джет Ли поля геометрических объектов на гладком многообразии в направлении поля \mathbb{A} -скоростей является обобщением производной Ли поля геометрических объектов в направлении векторного поля. Если $P^r M_n$ — расслоение реперов порядка r на гладком многообразии M_n , а F — многообразие, на котором задано гладкое правое действие дифференциальной группы G_n^r , то поле геометрических объектов типа $(P^r M_n, F)$ представляет собой гладкое эквивариантное отображение $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ (см. [3]). Производная Ли поля ξ в направлении векторного поля v на M_n является полем геометрических объектов типа $(P^r M_n, TF)$, определенным эквивариантным отображением

$$\mathcal{L}_v \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T\xi \circ v^c)(X) \in TF,$$

где v^c — естественный лифт векторного поля v на расслоение $P^r M_n$ (см. [3]). Если в определении производной Ли поля ξ заменить векторное поле v на сечение $Y : M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения \mathbb{A} -скоростей (\mathbb{A} -близких точек) Вейля (см. [14]), определяемое локальной алгеброй \mathbb{A} в смысле Вейля, а касательный функтор T заменить на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, получится поле

$$\mathcal{L}_Y \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T^{\mathbb{A}} \xi \circ Y^c)(X) \in TF$$

геометрических объектов типа $(P^r M_n, T^{\mathbb{A}} F)$, называемое *джетом Ли* поля ξ в направлении поля \mathbb{A} -скоростей Y (см. [13]).

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}} M_n$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй \mathbb{A} (см. [4, 12]), и обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы \mathbb{A} -диффеоморфизм расслоения $T^{\mathbb{A}} M_n$ на себя, порождаемый сечением Y , являлся симметрией поля геометрического объекта $T^{\mathbb{A}} \xi$ (см. [13]).

В. В. Вагнер рассматривал движение геометрического объекта на многообразии под действием однопараметрической группы преобразований, порождаемой векторным полем, как параллельное перенесение этого объекта по отношению к специального типа связности, определенной вдоль траекторий векторного поля, названной им *связностью Ли* (см. [2]). В этой связи с джетами Ли можно ассоциировать частичные связности высших порядков в смысле Эресмана (см. [6]), определенные вдоль сечений расслоений контактных элементов высших порядков. Плоские частичные связности вдоль слоев слоения на M_n естественно возникают в так называемых слоеных главных расслоениях над M_n (см. [7, 10]).

Работа посвящена нахождению условий, при которых джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ поля геометрических объектов ξ в направлении поля \mathbb{A} -скоростей Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

В п. 1 определяется частичная связность порядка q в главном расслоении P и рассматриваются некоторые отображения, ассоциированные с частичной связностью порядка q . В п. 2 рассматриваются частичные связности в расслоении реперов $P^r M_n$, определяется связность, сопряженная с частичной связностью порядка q в расслоении $P^r M_n$. Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ для любого поля геометрического объекта ξ тогда и только тогда, когда обращается в нуль ковариантная производная поля \mathbb{A} -скоростей Y по отношению к сопряженной связности.

1. Связность в главном расслоении вдоль распределения высшего порядка. Расслоение $T^{(m,q)} M_n$ (m, q) -скоростей Эресмана (см. [5]) на гладком n -мерном многообразии M_n образовано q -джетами $j^q \tau$ гладких ростков $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. Поскольку q -джет ростка $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ можно отождествить с многочленом Тейлора степени q ростка f , то на расслоении (m, q) -скоростей $T^{(m,q)} \mathbb{R}$ над полем вещественных чисел \mathbb{R} возникает естественная структура алгебры над \mathbb{R} , изоморфной алгебре $\mathbb{R}(m, q) = \mathbb{R}[t^1, \dots, t^m; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от m переменных. Пусть $p^q : T^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n$ — каноническая проекция. Локальные координаты $\{x^i\}$ на области $U \subset M_n$ индуцируют $\mathbb{R}(m, q)$ -значные координаты $\{X^i\}$ на $(p^q)^{-1}(U)$, в результате чего на расслоении Эресмана $T^{(m,q)} M_n$ возникает структура гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(m, q)$ (см. [12]).

Локальной алгеброй в смысле А. Вейля (*алгеброй Вейля*; см. [8, 14]) называется конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра \mathbb{A} с единицей над \mathbb{R} , обладающая единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathbb{A})$, и такая, что факторалгебра \mathbb{A}/\mathfrak{m} изоморфна \mathbb{R} . Размерность t факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ называется *шириной* алгебры \mathbb{A} . Натуральное число q , определяемое соотношениями $\mathfrak{m}^q \neq 0$, $\mathfrak{m}^{q+1} = 0$, называется *порядком*, или *высотой* алгебры \mathbb{A} . Соответствие, относящее переменным t^1, \dots, t^m элементы $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^m$ идеала \mathfrak{m} , порождающие базис факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, индуцирует эпиморфизм алгебр $\varphi : \mathbb{R}(m, q) \rightarrow \mathbb{A}$, поэтому алгебра Вейля \mathbb{A} ширины t и высоты q изоморфна факторалгебре $\mathbb{R}(m, q)/\mathbb{I}$, где $\mathbb{I} = \ker \varphi$.

Факторизация координат $\mathbb{R}(m, q)$ -значных координат $\{X^i\}$ на $T^{(m,q)} M_n$ по идеалу \mathbb{I} алгебры $\mathbb{R}(m, q)$ расслаивает $T^{(m,q)} M_n$ над многообразием $T^{\mathbb{A}} M_n$, называемым *расслоением \mathbb{A} -скоростей Вейля* (см. [8, 12, 14]). \mathbb{A} -Скорость на M_n , определяемая ростком $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, обозначается $j^{\mathbb{A}} f$.

Всякое гладкое отображение $\psi : M_n \rightarrow W_k$ продолжается до отображения

$$T^{\mathbb{A}} \psi : T^{\mathbb{A}} M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} W_k, \quad j^{\mathbb{A}} f \mapsto j^{\mathbb{A}}(\psi \circ f),$$

и соответствие $M_n \mapsto T^{\mathbb{A}} M_n$, $\psi \mapsto T^{\mathbb{A}} \psi$ представляет собой функтор, называемый *функтором Вейля* (см. [8, 12]). Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}} M_n$ несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над алгеброй \mathbb{A} (см. [12]).

Отметим, что расслоение Эресмана $T^{(m,q)} M_n$ естественно эквивалентно расслоению Вейля $T^{\mathbb{R}(m,q)} M_n$, определяемому алгеброй $\mathbb{R}(m, q)$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от m переменных.

Обозначим символом $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ подрасслоение в $T^{(m,q)} M_n$, образованное q -джетами ростков иммерсий $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. При рассмотрении расслоения $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ предполагаем, что $m < n$. На $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ действует справа дифференциальная группа G_m^q q -джетов ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$. Фактор-многообразие $J^{(m,q)} M_n$ расслоения $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ по действию дифференциальной группы G_m^q является расслоенным многообразием m -мерных контактных элементов порядка q на M_n или q -джетов ростков m -мерных подмногообразий на M_n (см. [1]). Для обозначения q -джета ростка m -мерных подмногообразий на M_n , определяемого q -джетом ростка $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, будем использовать символ $[j^q \tau]$. В [9] расслоение $J^{(m,q)} M_n$ изучалось под названием *m -грасманово продолжение порядка q многообразия M_n* . Каноническая проекция $p^q : T^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n$ индуцирует проекцию

$$p^q : J^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n, \tag{1}$$

для обозначения которой сохраним символ p^q .

Сечение $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ расслоения (1), т.е. поле q -джетов ростков m -мерных подмногообразий на M_n можно рассматривать как распределение порядка q на многообразии M_n .

Проекция

$$p_J : T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n \ni j^q \tau \mapsto [j^q \tau] \in J^{(m,q)} M_n \quad (2)$$

задает на многообразии $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ структуру главного расслоенного пространства над $J^{(m,q)} M_n$ со структурной группой G_m^q .

Рассмотрим теперь главное расслоение $P(M_n, G, \pi)$ над M_n со структурной группой Ли G и проекцией π . Пусть $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ — подрасслоение в $T_{\text{reg}}^{(m,q)} P$, образованное q -джетами горизонтальных ростков иммерсий $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow P$, т.е. иммерсий, композиции которых с проекцией π также являются иммерсиями $\pi \circ \sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. Проекция

$$\pi^q : T_{\text{hor}}^{(m,q)} P \ni j^q \sigma \mapsto j^q(\pi \circ \sigma) \in T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n \quad (3)$$

расслаивает $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ над $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$. Действие группы G на P индуцирует действие G на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ по закону

$$R_g(j^q \sigma) = j^q(R_g \circ \sigma).$$

Обозначим символом $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ фактор-многообразие расслоения $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ по действию группы G_m^q . Многообразии $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ расслоено над P ; его можно также рассматривать как многообразие q -джетов m -мерных подмногообразий расслоения P , трансверсальных слоям расслоения P . Правое действие группы G на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ перестановочно с действием группы G_m^q и поэтому индуцирует правое действие G на $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$.

Проекция (3) индуцирует проекцию (для которой сохраняем обозначение π^q)

$$\pi^q : J_{\text{hor}}^{(m,q)} P \ni [j^q \sigma] \mapsto [j^q(\pi \circ \sigma)] \in J^{(m,q)} M_n. \quad (4)$$

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемое многообразие M_n допускает сечения расслоения (1).

Определение 1. *Связностью порядка q в главном расслоении $P(M_n, G, \pi)$ вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ будем называть правоинвариантное сечение*

$$\Gamma_D : P \rightarrow J_{\text{hor}}^{(m,q)} P, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $\pi^q \circ \Gamma_D(X) = D(\pi(X))$, $X \in P$.

Таким образом, связность порядка q вдоль распределения D представляет собой правоинвариантное распределение m -мерных контактных элементов порядка q на главном расслоенном пространстве P , проектирующихся в распределение D на многообразии M_n . Связность (5) будем называть также *частичной связностью порядка q* .

Обозначим символом

$$p_D^q : P_D^q M_n \rightarrow M_n \quad (6)$$

обратный образ (pull-back) расслоения p_J (см. (2)) относительно сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$. Расслоение (6) является главным расслоением со структурной группой G_m^q . Элементы расслоения $P_D^q M_n$ представляют собой q -джеты $j^q \tau$, классы эквивалентности которых образуют контактные элементы $D(x)$, $x \in M_n$. q -Джет $j^q \tau$ будем называть *q -репером*, принадлежащим $D(x) = [j^q \tau]$.

Пусть, далее,

$$\pi_D^q : P_D^q P \rightarrow P_D^q M_n$$

— обратный образ расслоения π^q (см. (3)) относительно вложения $P_D^q M_n \rightarrow T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ и

$$\pi_P^q : P_D^q P \rightarrow P$$

— ограничение на $P_D^q P$ канонической проекции

$$T_{\text{hor}}^{(m,q)} P \rightarrow P.$$

На многообразии $P_D^q P$ имеются правые действия группы Ли G и дифференциальной группы G_m^q , являющиеся ограничениями действий этих групп на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$. Частичная связность Γ_D определяет отображение

$$\check{\Gamma}_D : P_D^q M_n \times_M P \rightarrow P_D^q P, \quad (7)$$

относящее q -реперу $j_x^q \tau$, принадлежащему $D(x) = [j_x^q \tau]$, и точке $X \in P$ горизонтальный лифт $j_X^q \sigma$ q -репера $j_x^q \tau$ на расслоении P в точке X . Отображение (7) эквивариантно относительно действия групп G и G_m^q , и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\pi_P^q} & P_D^q P \\ \uparrow pr_2 & \nearrow \check{\Gamma}_D & \downarrow \pi_D^q \\ P_D^q M_n \times_M P & \xrightarrow{pr_1} & P_D^q M_n \end{array} \quad (8)$$

где символами pr_1 и pr_2 обозначены проекции расслоенного произведения $P_D^q M_n \times_M P$ на сомножители. Таким образом, отображение $\check{\Gamma}_D$ является сечением расслоения

$$\pi_D^q \times \pi_P^q : P_D^q P \rightarrow P_D^q M_n \times_M P. \quad (9)$$

Сечение (7) расслоения (9), эквивариантное относительно действия групп G и G_m^q , определяет такую связность Γ_D порядка q в главном расслоении P , что

$$\Gamma_D(X) = [\check{\Gamma}_D(j^q \tau, X)], \quad \text{где } D(\pi(X)) = [j^q \tau].$$

Пусть $D(x) = [j^q \tau]$. Будем говорить, что \mathbb{A} -скорость $j_x^{\mathbb{A}} \alpha$ на M_n , где $\alpha : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (M, x)$, принадлежит q -джету $[j^q \tau] = D(x)$, $j_x^{\mathbb{A}} \alpha \in [j^q \tau]$, если существует такая \mathbb{A} -скорость $j^{\mathbb{A}} \alpha'$, где $\alpha' : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, что

$$j^{\mathbb{A}} \alpha = j^q \tau \circ j^{\mathbb{A}} \alpha'.$$

Естественно считать, что $k \leq m$, однако это требование не является обязательным.

Предположим теперь, что в главном расслоении P задана некоторая частичная связность Γ_D порядка q и $\Gamma_D(X) = [j^q \sigma]$, где $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (P, X)$. \mathbb{A} -Скорость $j_X^{\mathbb{A}} \beta$ на P , принадлежащую $\Gamma_D(X)$, будем называть *горизонтальным лифтом* \mathbb{A} -скорости $j_x^{\mathbb{A}} \alpha$, принадлежащей $D(x)$, $x = \pi(X)$, если $j_x^{\mathbb{A}} \alpha = j_x^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$. В соответствии с этим определением \mathbb{A} -скорость $j^{\mathbb{A}} \beta$ ростка $\beta : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (P, X)$ будем называть *горизонтальной* относительно связности Γ_D , если она является горизонтальным лифтом \mathbb{A} -скорости $j^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$.

Будем говорить, что поле \mathbb{A} -скорости $Y : M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} M_n$ на многообразии M_n принадлежит сечению D , если $Y(x)$ принадлежит $D(x)$ для любого $x \in M_n$. Если на многообразии M_n задано поле \mathbb{A} -скорости Y , принадлежащее сечению D , то можно построить поле \mathbb{A} -скорости $Y^h : P \rightarrow T^{\mathbb{A}} P$ на P — горизонтальный лифт поля Y относительно связности Γ_D , относя каждой точке $X \in P$ горизонтальную \mathbb{A} -скорость, являющуюся горизонтальным лифтом \mathbb{A} -скорости $Y(\pi(X))$ относительно связности Γ_D .

Обозначим символом $T_D^{\mathbb{A}} M_n$ подрасслоение в $T^{\mathbb{A}} M_n$, состоящее из \mathbb{A} -скоростей на M_n , принадлежащих сечению D , а символом $T_D^{\mathbb{A}} P$ подрасслоение в расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}} P$, состоящее из таких \mathbb{A} -скоростей $j_X^{\mathbb{A}} \beta$ на P , что $j_{\pi(X)}^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$ принадлежит $D(\pi(X))$. Отображение

$$\pi_D^{\mathbb{A}} : T_D^{\mathbb{A}} P \ni j_X^{\mathbb{A}} \beta \mapsto j_{\pi(X)}^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta) \in T_D^{\mathbb{A}} M_n$$

является локально тривиальным расслоением. Отображение, осуществляющее горизонтальный лифт \mathbb{A} -скоростей, принадлежащих сечению D , на расслоение P относительно связности Γ_D , аналогично (7) задается сечением

$$\check{\Gamma}_D^{\mathbb{A}} : T_D^{\mathbb{A}} M_n \times_M P \rightarrow T_D^{\mathbb{A}} P. \quad (10)$$

Если F — многообразие с заданным на нем правым действием

$$F \times G \ni (z, a) \mapsto R_a(z) \in F \quad (11)$$

группы Ли G , то поле геометрического объекта типа (P, F) на многообразии M_n (см. [3]) задается G -эквивариантным отображением $\xi : P \rightarrow F$. Действие (11) индуцирует правое действие группы Ли G на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}F$, определяемое формулой $R_a(j^{\mathbb{A}}\gamma) = j^{\mathbb{A}}(R_a \circ \gamma)$ для $\gamma : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow F$.

Определение 2. Пусть в главном расслоении $P(M_n, G)$ задана связность Γ_D вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)}M_n$ и пусть $Y : M_n \rightarrow T_D^{\mathbb{A}}M_n$ — поле \mathbb{A} -скоростей на M_n , принадлежащее сечению D . Ковариантной производной поля геометрического объекта ξ по отношению к полю \mathbb{A} -скоростей Y на многообразии M_n называется поле геометрического объекта типа $(P, T^{\mathbb{A}}F)$ на M_n , определяемое формулой

$$\nabla_Y^D \xi : T^{\mathbb{A}}M_n \times_M P \ni (Y_x, X) \mapsto j_x^{\mathbb{A}}\xi \circ \check{\Gamma}_D^{\mathbb{A}}(Y_x, X) \in T^{\mathbb{A}}F. \quad (12)$$

Формула (12) остается справедливой, если \mathbb{A} -скорость $Y_x = j_x^{\mathbb{A}}\alpha$ задана только в одной точке x многообразия M_n . Используя функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, ковариантную производную (12) можно представить в виде

$$\nabla_Y^D \xi = T^{\mathbb{A}}\xi \circ Y_P^h. \quad (13)$$

Поскольку q -реперы, принадлежащие распределению D , могут рассматриваться как $\mathbb{R}(m, q)$ -скорости, то тем самым определены ковариантные производные и по отношению к таким q -реперам.

2. Связности в расслоениях реперов и джеты Ли. В качестве главного расслоения P в рассуждениях предыдущего раздела можно использовать расслоение r -реперов $P^r M_n$ на многообразии M_n . Расслоение $P^r M_n$ образовано r -джетами $j_x^r \gamma$ ростков диффеоморфизмов $\gamma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (M_n, x)$ и совпадает с подрасслоением $T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n$ в расслоении Эресмана $T^{(n,r)} M_n$.

Изоморфизм алгебр Вейля

$$\mathbb{R}(m, q) \otimes \mathbb{R}(n, r) \cong \mathbb{R}(n, r) \otimes \mathbb{R}(m, q)$$

индуцирует естественную эквивалентность расслоений Вейля (см. [8, 12])

$$\Phi : T^{(m,q)}(T^{(n,r)} M_n) \cong T^{(n,r)}(T^{(m,q)} M_n). \quad (14)$$

Ограничиваясь в (14) рассмотрением только джетов ростков, проектирующихся на M_n в ростки иммерсий, получим эквивалентность расслоений

$$\Phi : T_{\text{hor}}^{(m,q)}(T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n) \cong T_{\text{hor}}^{(n,r)}(T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n). \quad (15)$$

Ограничение эквивалентных расслоений

$$T_{\text{hor}}^{(m,q)}(T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n), \quad T_{\text{hor}}^{(n,r)}(T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n)$$

в (15) на полные прообразы распределения D при проекции на $J_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ приводит к эквивалентности расслоений

$$P_D^q(P^r M_n) \cong P_{\text{hor}}^q(P_D^q M_n), \quad (16)$$

где $P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n)$ — расслоение r -джетов ростков $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow P_D^q M_n$, которые в композиции с проекцией $p_D^q : P_D^q M_n \rightarrow M_n$ дают ростки диффеоморфизмов.

Частичная связность Γ_D порядка q в расслоении реперов $P^r M_n$ определяет отображение (см. (7))

$$\check{\Gamma}_D : P_D^q M_n \times_M P^r M_n \rightarrow P_D^q(P^r M_n), \quad (17)$$

осуществляющее горизонтальные лифты q -реперов, принадлежащих распределению D , на расслоение $P^r M_n$. Отображение (17) эквивариантно относительно действия групп G_n^r и G_m^q , и из его эквивариантности следует, что оно определяет частичную связность в расслоении $P^r M_n$.

Заменяя расслоение $P_D^q(P^r M_n)$ в диаграмме (8) для $P = P^r M_n$ и сечения (17) на расслоение $P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n)$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 P_D^q M_n & \xleftarrow{p^r} & P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n) \\
 \uparrow p^{r_2} & \nearrow \check{\Gamma}_D^* & \downarrow (p_D^q)^r \\
 P^r M_n \times_M P_D^q M_n & \xrightarrow{p^{r_1}} & P^r M_n
 \end{array} \quad (18)$$

в которой сечение

$$\check{\Gamma}_D^* : P^r M_n \times_M P_D^q M_n \rightarrow P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n) \quad (19)$$

осуществляет горизонтальные лифты r -реперов с многообразия M_n на расслоение $P_D^q M_n$.

Определение 3. Связность Γ_D^* порядка r в расслоении $P_D^q M_n$, определяемую сечением (19), будем называть *связностью, сопряженной частичной связности* Γ_D порядка q в расслоении реперов $P^r M_n$.

Поскольку поля \mathbb{A} -скоростей порядка q , принадлежащие распределению D , являются полями геометрических объектов, ассоциированных с расслоением $P_D^q M_n$, то определены ковариантные производные таких полей \mathbb{A} -скоростей порядка q по отношению к связности Γ_D^* .

Пусть теперь F — многообразие с заданным на нем правым действием дифференциальной группы G_n^r и $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ — поле геометрического объекта на многообразии M_n , ассоциированное с расслоением реперов $P^r M_n$, т.е. поле объекта типа $(P^r M_n, F)$ (см. [3]). Производной Ли поля геометрических объектов ξ по отношению к векторному полю v на M_n называется отображение (см. [3, 13])

$$\mathcal{L}_v \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T\xi \circ v^{\mathbb{R}(n,r)})(X) \in TF, \quad (20)$$

где $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ — естественный лифт векторного поля v на расслоение $P^r M_n$. Лифт $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ может быть получен применением к полю v функтора Вейля $T^{\mathbb{R}(n,r)}$ с последующим использованием естественной эквивалентности функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T \cong T \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$ (см. [8, 12]), где T — касательный функтор. Касательный функтор T естественно эквивалентен функтору Вейля $T^{\mathbb{D}}$ для алгебры дуальных чисел \mathbb{D} . Заменим в формуле (20) касательный функтор T на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, определяемый алгеброй Вейля \mathbb{A} , а $\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение векторного поля на $\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение поля \mathbb{A} -скорости Y и воспользуемся естественной эквивалентностью функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T^{\mathbb{A}} \cong T^{\mathbb{A}} \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$. Поскольку коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 P^r M_n & \xrightarrow{T^{\mathbb{R}(n,r)} Y} & T^{\mathbb{R}(n,r)} T^{\mathbb{A}} M_n \\
 R_g \downarrow & & \downarrow T^{\mathbb{A}} R_g \\
 P^r M_n & \xrightarrow{T^{\mathbb{R}(n,r)} Y} & T^{\mathbb{R}(n,r)} T^{\mathbb{A}} M_n
 \end{array} \quad (21)$$

в которой R_g — правый сдвиг расслоения r -реперов $\mathbb{R}(n,r)$ при действии элемента $g \in G_n^r$, то отображение $T^{\mathbb{R}(n,r)} Y$ эквивариантно по отношению к действию группы Ли G_n^r , и формула

$$\mathcal{L}_Y \xi = T^{\mathbb{A}} \xi \circ Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^r M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} F, \quad (22)$$

где $Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^r M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} P^r(n,r)$ — естественный лифт ($\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение) поля \mathbb{A} -скорости Y на расслоение r -реперов, определяет поле геометрических объектов на M_n , называемое *джетом Ли* поля ξ по отношению к полю \mathbb{A} -скоростей Y (см. [4, 13]).

Из коммутативности диаграммы (21) также следует, что естественный лифт $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля \mathbb{A} -скорости Y правоинвариантен относительно действия группы Ли G_n^r на расслоении r -реперов. Поэтому джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ представляет собой поле геометрического объекта на многообразии M_n того же типа, что и ковариантная производная $\nabla_Y \xi$, определяемая формулой (13).

Пусть Γ_D — связность в расслоении r -реперов $P^r M_n$ вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ и Y — поле \mathbb{A} -скорости на многообразии M_n , принадлежащее сечению D . Установим, при каких условиях для всякого поля геометрических объектов ξ имеет место совпадение джета Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ с

ковариантной производной $\nabla_Y^D \xi$. Поскольку при определении ковариантной производной и джета Ли можно рассматривать локально заданные поля геометрических объектов, то в качестве поля геометрических объектов ξ можно взять поле r -реперов на M_n . При этом совпадение отображений (22) и (13) для $P = P^r M_n$ повлечет совпадение естественного лифта $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля \mathbb{A} -скорости Y на расслоение $P^r M_n$ с его горизонтальным лифтом Y^h , а это эквивалентно тому, что поле \mathbb{A} -скорости Y ковариантно постоянно отношению к сопряженной связности (см. [4, теорема 8.2]). Поле \mathbb{A} -скорости Y является полем геометрического объекта типа $(P^q M_n, T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, а ковариантная производная поля Y по отношению к сопряженной связности Γ_D^* представляет собой поле геометрического объекта типа $(P^q M_n, T^{\mathbb{R}(n,r)} T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, т.е. эквивариантное отображение $\nabla^* Y : P^q M_n \rightarrow T^{\mathbb{R}(n,r)}(T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, и включает в себя поле Y . То, что поле Y ковариантно постоянно, означает, что значения отображения $\nabla^* Y$ являются нулевыми $\mathbb{R}(n,r)$ -скоростями. Будем говорить, что в этом случае ковариантная производная поля Y равна нулю: $\nabla^* Y = 0$.

Как результат выше приведенных рассуждений получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть на многообразии M_n задана связность Γ_D порядка q в расслоении r -реперов $P^r M_n$ вдоль распределения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} P^q M_n$, и пусть поле \mathbb{A} -скорости Y принадлежит распределению D . Тогда для совпадения производной Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ и ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ для всякого поля геометрического объекта $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ на M_n необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль ковариантная производная $\nabla^* Y$ поля \mathbb{A} -скорости Y по отношению к сопряженной связности Γ_D^* .

Замечание 1. \mathbb{A} -Скорость $j^{\mathbb{A}} f$, определяемая ростком иммерсии $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, называется *регулярной*. Множество регулярных \mathbb{A} -скоростей образует открытое подмногообразие $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ в расслоении $T^{\mathbb{A}} M_n$. На $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ действует справа группа $\text{Aut}(\mathbb{A})$ автоморфизмов алгебры \mathbb{A} . Фактор-многообразие $J^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ по действию группы $\text{Aut}(\mathbb{A})$ является расслоенным многообразием. В [11] элементы расслоения $J^{\mathbb{A}} M_n$ назывались *\mathbb{A} -джетами*.

Частичные связности Γ_D в главном расслоении P можно определить для сечений $D : M_n \rightarrow J^{\mathbb{A}} M_n$. Расслоение $J^{(m,q)} M_n$ при этом естественно эквивалентно расслоению $J^{\mathbb{R}(m,q)} M_n$, определяемому алгеброй срезанных многочленов $\mathbb{R}(m, q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Геометрия-1/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — М.: ВИНТИ, 1988. — 28. — С. 5–289.
2. Вагнер В. В. Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1950. — 8. — С. 11–72.
3. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1979. 9. — С. 5–246.
4. Шурыгин В. В. Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 75–106.
5. Ehresmann C. Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal // C. R. Acad. Sci. — 1951. — 233, № 11. — С. 598–600.
6. Ehresmann C. Sur les connexions d'ordre supérieur // Atti del V Congr. Unione Math. Ital. — Roma, 1955. — С. 326–328.
7. Kamber F. W., Tondeur Ph. Foliated bundles and characteristic classes / Lect. Notes Math. — Springer-Verlag, 1975. — 493.
8. Kolář J., Michor P. W., Slovák J. Natural operations in differential geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
9. Krupka D., Krupka M. Jets and contact elements // Proc. Semin. Differ. Geom. (Krupka D., ed.) / Math. Publ. — Opava: Silesian Univ. in Opava, 2000. — 2. — С. 39–85.
10. Molino P. Riemannian foliations. — Basel: Birkhäuser, 1988.
11. Muñoz J., Rodríguez J., Muriel F. J. Weil bundles and jet spaces // Czech. Math. J. — 2000. — 16 (125). — С. 721–748.

12. *Shurygin V. V.* Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles// J. Math. Sci. — 2002. — 108, № 2. — С. 249–294.
13. *Shurygin V. V.* Lie jets and symmetries of geometric objects// J. Math. Sci. — 2011. — 177, № 5. — С. 758–771.
14. *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables// Coll. Int. Centre Nat. Rech. Sci. — Strasbourg, 1953. — 52. — С. 111–117.

В. В. Шурыгин
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru