УДК 372.851

ОБРАЩЕНИЕ ЗАДАЧ КАК ПРОДУКТИВНЫЙ СПОСОБ ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Абрамова О.М., кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического образования физико-математического факультета,
Арзамасский филиал Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Арзамас
olesia144@mail.ru

Аннотация. В статье представлена одна из задачных конструкций, зарекомендовавших себя в практике математического образования – обращённые задачи, предназначенные для лучшего усвоения школьниками взаимосвязей величин, характеризующих задачную ситуацию, а также раскрывается образовательная ценность обращения задач как одного из приёмов дополнительной работы над задачей, способствующей развитию креативности обучаемых, вовлечению их в творческую математическую деятельность, как на уроке, так и внеурочное время.

Ключевые слова: математические задачи, гибкость мышления, обращение задачи, обращённые и обратные задачи, современные технологии обучения, процедура обращения.

ADDRESS OF TASKS AS PRODUCTIVE WAY OF GENERALIZATION OF KNOWLEDGE ON MATHEMATICS

O.M. Abramova, candidate of pedagogical sciences, associate professor of physical and mathematical formation of physical and mathematical faculty,
Arzamas branch of National research N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Arzamas
olesia144@mail.ru

Abstract. One of the zadachnykh of the designs which have proved in practice of mathematical education – the turned tasks intended for the best assimilation by school students of interrelations of the sizes characterizing a zadachny situation is presented in article and also the educational value of the address of tasks as one of methods of additional work on the task contributing to the development of creativity of trainees, their involvement in creative mathematical activity as at a lesson, and after hours reveals.

Keywords: the mathematical tasks, flexibility of thinking, the address of a task turned and the return problems, modern technologies of training, the procedure of the address.

В процессе подготовки к занятиям учителю приходится постоянно решать вопрос по подбору задач, которые наилучшим образом отвечают поставленным образовательным целям. Не случайно, А.М. Гольдман и Л.И. Звавич обращают внимание на то, что «одна задача, сама по себе мало чего стоит»[4] и для достижения какой-либо образовательной цели необходима их совокупность. От успешного решения этого вопроса, полагают они, в большей степени зависит качество и каждого урока математики, и всего математического образования школьников. В связи с этим сегодня важно говорить не об отдельных развивающих задачах, которые эпизодически используются учителем на уроках математики, а уже о специальных задачных конструкциях, таких как окрестности, циклы, совокупности, системы, серии и др., которые способствуют математическому развитию обучающихся.

В настоящее время в школьном математическом образовании наблюдается тенденция роста изменений, которые касаются практически всех его аспектов. Психологи, учителя, методисты, ученые-математики ведут дискуссии по проблемам содержания и методов обучения, а также количества часов, отводимых на изучение математики, необходимости и важности активного внедрения в практику работы школ специализированных и профильных классов, положительных и отрицательных аспектов введения ЕГЭ в систему среднего школьного образования и т.п. Неоспорим тот факт, что многие из проблем, обсуждающихся в этой сфере, действительно заслуживают серьёзного внимания, конкретных действий по претворению их в жизнь. Не анализируя весь комплекс обсуждаемых вопросов, остановимся на одном из них.

Какая бы реформа математического образования не осуществлялась, в какое бы время она не проводилась, всегда в достаточной степени остро встаёт проблема, которая является одной из важнейших и труднейших для школьного математического образования. Это проблема обучения учащихся составлению математических задач, в частности обращенных задач. Вообще говоря, дело ведь не только в том, сколько часов в школе отводится на изучение математики, есть ли профильное или специализированное обучение или его нет, дело ещё и в том, чему школьники учатся на уроках математики.

Самостоятельное составление задач является сложным и вместе с тем интересным процессом. Когда обучаемый решает готовые задачи, он редко задумывается над вопросом: как они появились и кто их составил? И, очевидно, не подозревает, что сам может их придумывать, а ведь в жизни для достижения намеченной цели важно самому уметь подобрать оптимальные величины, учесть их зависимости, неизвестные факторы, самостоятельно сформулировать вопросы и проблемы и, кроме того, решить их. Простота решения подобных задач напрямую зависит от самого субъекта, как он определил исходные данные, их взаимосвязь и сформулировал конечную цель.

В исследованиях П.М. Эрдниева неоднократно подчеркивает значимость и важность самостоятельного творчества учащихся. Приведены не только всевозможные творческие задания данного характера, а также отмечается, что самостоятельное составление и решение таких задач обучаемыми запоминается полнее и прочнее, чем простое решение задач. Составленную самим задачу решить легче, нежели готовую чужую задачу, продукт мысли другого лица [7, с.73]. Тем самым учителю важно знать и использовать в своей практике упражнения для обучения школьников самостоятельному составлению задач.

Л.М. Фридман определил составление задач как одно из очень мощных средств обучения учащихся решению задач[6]. По его мнению, для составления задач необходимо основание. В качестве таких оснований автор указывает три: какой должна быть задача (по определенному разделу, простая, по сюжету и т.д.); что должна содержать задача (определенный объект, вопрос, соотношение и т.д.); какими свойствами должна обладать задача (должна иметь определенное решение, аналогична ранее решенной задаче, обратной к решенной и т.д.). Второе и третье основания являются уточнениями первого. Без наличия оснований нельзя составить задачу. Основание может быть очень жестоким или, наоборот, достаточно свободным.

Общепринятая ныне система обучения математике основана преимущественно на аналитических упражнениях. Современные школьные учебники по математике содержат огромное количество задач, требования которых, как правило, не отличаются разнообразием: «Решите...», «Вычислите...», «Найдите…», «Докажите...» и т.п. Для школьников они обыденны и не вызывают у них интереса, чувства азарта, жажды узнать что-то новое, самостоятельно поучаствовать в процессе составления задач.

Решение подобных задач способствует лишь формированию алгоритмической культуры мышления, но никак не развитию творческих способностей обучаемого. Сказанное совершенно не преуменьшает образовательной ценности задач, представленных в учебных пособиях, а только подчеркивает необходимость расширения потенциалов школьного курса математики для развития интуиции, гибкости мышления, творческих способностей школьников за счет привлечения задач, нестандартных с методической точки зрения. К числу последних можно отнести обращенные задачи.

Дело в том, что традиционно в методике математики закрепился один термин для всех задач, получаемых в результате реализации частичного или полного обращения элементов условия и требования прямой задачи - «обратная задача», однако мы не можем согласится с этим. Обусловлено это прежде всего тем, что этим определением обозначают две связанные между собой задачи, но всё же неодинаковых. Было бы, пожалуй, целесообразнее как-то различать эти два аспекта понятия и употреблять разные термины – «обращённая задача» и «обратная задача» [1].

Определим в рамках данной работы, что мы будем понимать под такими задачами.

Обращённой задачей будем называть задачу, получаемую из исходной, путем последовательного её видоизменения через извлечения из её условия части или даже всех данных и включения их в требование; при этом из него, соответственно, исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в условие. Важно, что обращённая задача станет обратной по отношению к исходной, то есть прямой, если все её условия и требования полностью поменяются местами. Таким образом, обратная задача получается в предельном случае обращения исходной задачи. Обратим внимание, что всякую обратную задачу можно назвать обращённой, обратное утверждение не верно, то есть не любая обращённая задача окажется обратной [2].

Но, несмотря на признание богатейших возможностей обращения задач, как показывает практика, этому виду деятельности в процессе обучения математике учащихся не уделяется должного внимания. Почему же учителя не используют обращение математических задач в учебном процессе? Причин этому несколько, одни сетуют на нехватку времени, другие, связывают её со сложившейся методикой обучения математике, предполагающей в основном решение целесообразно подобранных учителем задач, третьи связывают её с отсутствием методических разработок, поскольку довольно часто сами учителя не владеют методикой обращения задачи. В связи с вышесказанным в данной статье рассмотрим основные этапы процесса обращения задачи, следуя которым каждый учащийся самостоятельно или под руководством учителя сможет обращать любую математическую задачу [3].

Прежде чем обучать школьников процессу обращения задачи учитель сам должен чётко представлять основные этапы данного процесса и последовательность действий по их осуществлению.

Как же должна быть организована работа по обращению школьной математической задачи? Один из возможных путей организации подобной работы представлен ниже.

Пусть дана следующая исходная задача.

Задача 1. *Найти первый и шестой члены геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен 2, а сумма семи первых членов равна 381.*

(Ответ: $b_1 = 3$; $b_6 = 96$.)

Используя описанный приём, будем составлять новые задачи – обращённые. Для того чтобы упорядочить и облегчить процесс составления новых задач, полезно после решения исходной задачи записать поэлементный состав условия и требования этой задачи в виде числовой цепочки, присоединив к нему и найденное искомое (ответ) в следующем виде:

$$q=2 \qquad S_7=381 \qquad \boxed{b_1=3} \qquad \boxed{b_6=96}\ .$$

Следуя рекомендациям П.М. Эрдниева [7], будем заключать искомое в числовой цепочке в рамочку – это позволит школьникам более наглядно увидеть исходные и искомые элементы задачи, поскольку весь поэлементный состав задачи целостно предстает перед их глазами. А это, в свою очередь, увеличивает степень осознанности учащимися возможных вариантов образования новых обращённых задач на базе исходной. К тому же, по составленной числовой цепочке ученикам легче обнаружить и исправить допущенную ошибку, что будет способствовать развитию критичности их мышления, навыков самоконтроля.

Затем, составляются всевозможные числовые цепочки обращённых задач, в которых искомым элементом последовательно выступает каждый элемент данной задачи или их комбинация.

В результате последовательной реализации обращения исходной задачи числовые цепочки структурных элементов всех обращённых задач будут следующими:

1. $\boxed{q=2} \qquad S_7=381 \qquad b_1=3 \qquad \boxed{b_6=96}$;
2. $\boxed{q=2} \qquad S_7=381 \qquad \boxed{b_1=3} \qquad b_6=96$;
3. $q=2 \qquad \boxed{S_7=381} \qquad \boxed{b_1=3} \qquad b_6=96$;
4. $q=2 \qquad \boxed{S_7=381} \qquad b_1=3 \qquad \boxed{b_6=96}$;

5. $\boxed{q=2}$ $S_7=381$ $b_1=3$ $b_6=96$;

6. $q=2$ $\boxed{S_7=381}$ $b_1=3$ $b_6=96$;

7. $\boxed{q=2}$ $\boxed{S_7=381}$ $\boxed{b_1=3}$ $b_6=96$;

8. $\boxed{q=2}$ $\boxed{S_7=381}$ $b_1=3$ $\boxed{b_6=96}$;

9. $\boxed{q=2}$ $\boxed{S_7=381}$ $b_1=3$ $b_6=96$.

Далее, по полученным числовым цепочкам структурных элементов задачи можно формулировать условия и требования обращённых задач. Число без рамочки включаем в условие задачи, а число в рамочке в её требование, поскольку оно должно быть скрыто, т.е. сделано неизвестным, и для него подбираем соответствующий вопрос. Таким образом, числа, заключенные в рамочку, становятся своеобразными опорными пунктами для составления формулировок обращённых задач.

Так, выбрав в качестве неизвестного, например, знаменатель прогрессии, и включив при этом найденное искомое – первый член геометрической прогрессии в условие конструируемой задачи (см. схему 1.1), можно сформулировать следующую обращённую задачу:

Задача 1.1. *Первый член геометрической прогрессии равен 3, а сумма первых семи ее членов равна 381. Найти знаменатель прогрессии и шестой член.*

В случае, когда в качестве искомого выбрана сумма семи первых членов геометрической прогрессии, а найденный шестой её член введён в условие задачи (см. схему 1.3) можно получить уже такую обращённую задачу:

Задача 1.3. *Шестой член геометрической прогрессии равен 96, а её знаменатель равен 2. Найти первый член этой прогрессии и сумму семи первых членов.*

Аналогичным образом могут быть составлены и все остальные обращённые задачи по соответствующим числовым цепочкам.

Обратим внимание на то, что в результате обращения исходной задачи получаются не только обращённые задачи, представленные числовыми цепочками 1.1–1.8, некоторые из которых являются не разрешимыми, например 1.7, 1.8, но и разрешимая обратная задача (1.9), которая формулируется так:

Задача 1.9. *Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 3 и 96. Найти ее знаменатель и сумму семи первых членов.*

Такие задачи учат школьников мыслить нестандартно, открывать способы решения задачи, отрываясь от заученных формул учебника математики, приучают думать самостоятельно, принимать верные решения в короткий срок посредством обдуманных, но выполненных в свернутой форме, действий, обеспечивают благоприятное психологическое ощущение того, что задача получена самостоятельно. При решении обратной задачи, учащиеся перестраивают суждения и умозаключения, использованные при решении прямой задачи, самостоятельно, при этом преодолевая инерцию действий, осуществленных при решении прямой задачи, а это есть проявление гибкости мышления. Таким образам, в одном случае дети овладевают как новыми связями между известными им мыслями, так и новыми, более сложными формами рассуждений. В другом - возможностью одновременного восприятия задачи как единого целого со всеми ее данными и взаимоотношениями между ними, обеспечивается качественный анализ задачи, ведется осознанный поиск ее решения, обоснованный выбором арифметического или алгебраического действия, тем самым предупреждая многие ошибки в решении задач школьниками. Уместно здесь вспомнить слова Н.Г.Чеботарева: «Математическую задачу нельзя считать решенной, пока не решена или хотя бы поставлена обратная задача»[5].

Метод составления обращённых задач, является почти универсальным, т.к. его применение возможно для любых разделов математики, и всегда приводит ученика к постановке новых проблем, получению существенно иных разновидностей задач. Умение составить и решить обращенную задачу является одним из важных критериев достигнутой обучаемым глубины понимания изучаемого раздела математики.

Если на первых порах у школьников возникают затруднения по обращению математических задач, то им можно предлагать следующие задачи:

№ 1. а) Решите задачу: *Бригада трактористов вспахала в первый день* $\frac{4}{15}$ *всего поля, во второй день на* $\frac{2}{15}$ *всего поля больше, чем в первый день, а в третий день на* $\frac{1}{5}$ *всего поля меньше, чем во второй день. Какую часть поля вспахала бригада за* 3 *дня*?

б) Составьте и решите обращённую задачу с вопросом: «На какую часть поля бригада вспахала в третий день меньше, чем во второй день?».

№ 2. а) Решите задачу: *Велосипедист в первый час проехал* 13,6 *км, во второй* – 17, 5 *км. С какой средней скоростью двигался велосипедист?*

б) Составьте и решите обращённую задачу, такую, чтобы искомым выступала скорость движения велосипедиста в первый час.

№ 3. Восстановите пропущенные числа в следующей таблице 1 для вычисления площади и периметра прямоугольника:

Таблица 1

длина a	12 *м*	$\boxed{...м}$	15 *м*	$\boxed{...м}$	3 *м*	8 *м*	10 *м*	9 *м*
ширина b	6 *м*	6 *м*	$\boxed{...м}$	8 *м*	$\boxed{...м}$	9 *м*	2 *м*	$\boxed{...м}$
площадь $S = a \cdot b$	$\boxed{...м^2}$	$\boxed{...м^2}$	$\boxed{...м^2}$	1600 $м^2$	450 $м^2$	$\boxed{...м^2}$	20 $м^2$	21 $м^2$
периметр $P = 2a + 2b$	$\boxed{...м}$	22 *м*	54 *м*	$\boxed{...м}$	$\boxed{...м}$	34 *м*	$\boxed{...м}$	20 *м*

Таким образом, привлечение школьников к составлению обратных задач оказывает положительное влияние не только на развитие их творческих способностей, но и на повышение мотивации к изучению математики, поскольку в данном случае учащиеся перестают воспринимать себя исключительно в роли обучаемых. Они осознают, что теперь работают на более высоком уровне, и это требует от них более ответственного отношения к своей деятельности. Скорость и гибкость мышления, формируемые при решении таких задач, сослужат хорошую службу при оценке возникшей жизненной ситуации и принятии нужного решения.

Сказанное выше убеждает в необходимости и целесообразности использования обращенных задач в процессе обучения математике. Но не следует увлекаться такими задачами, всё хорошо в меру.

Резюмируя изложенное выше, можно заключить, что успех обучения математике, в конечном счете, решается органическим сочетанием традиционных методов обучения, испытанных вековым опытом учителей, с новыми, в частности, с тем методом, описанию которого посвящена данная статья.

Литература

1. Абрамова О.М. Возможности использования прямых и обратных задач в развитии гибкости мышления учащихся на уроках математики // В мире научных открытий. – 2011. – № 9.1 (21). – С. 183 – 194.

2. Абрамова О.М. О функциональных и структурных отличиях понятий обратной и обращённой задачи. – Мир науки, культуры, образования, №6(37). – Горно-Алтайск, 2012. – С.152 – 154.

3. Абрамова О.М. Окрестность обращённых задач как средство достижения полноты решения задачи в процессе обучения математике школьников // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8 (часть 2). – С. 426–432.

4. Гольдман А.М., Звавич Л.И. Учебные серии на уроках математики // Математика в школе. – 1990. –№ 5. – С.19-22.

5. Зайкин М.И. Семантические аспекты педагогической технологии математического творчества // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – № 4 (1). – С.62-65.

6. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся / Л.М.Фридман, Е.Н.Турецкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. – М., 1970. – 319 с.