На правах рукописи

Чан Хоай Нгок Нян

МОДУЛИ, БЛИЗКИЕ К РИККАРТОВЫМ И БЭРОВСКИМ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2017

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный консультант: Абызов Адель Наилевич,
кандидат физико–математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

Официальные оппоненты: Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский
университет "МЭИ"»

Царев Андрей Валерьевич,
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский педагогический
государственный университет»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

Защита состоится «23» марта 2017 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.35 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, ауд. 711.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный универси тет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Электронная версия диссертации размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru.

Автореферат разослан «   »   2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.35
кандидат физико-математических наук, доцент   Еникеев А. И.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Понятия риккартового и бэровского кольца возникли в теории линейных операторов гильбертова пространства. Бэровские кольца были введены И. Капланским [1] в 1955 году. Риккартовы кольца были введены С. Маэда [2] в 1960 году. Важными примерами риккартовых колец являются регулярные кольца, введенные фон Нейманом [3] в 1936 году для координатизации непрерывных геометрий. В дальнейшем риккартовые и бэровские кольца, а также их различные обобщения, были изучены в работах многих математиков.

В последнее десятилетие активно изучаются модульные аналоги колец, близких к бэровским и риккартовым. Бэровские и квазибэровские модули были изучены в работах [4], [5], [6], [7]. Правый R-модуль M называется *бэровским модулем* (соотв., *квазибэровским модулем*), если $r_M(I)$ является прямым слагаемым модуля M для каждого левого идеала (соотв., каждого идеала) I кольца $S = \mathrm{End}_R(M)$. Квазибэровские модули являются модульным аналогом понятия квазибэровского кольца, введенного Кларком [8]. В работе [9] было показано, что прямое слагаемое бэровского модуля (соотв., квазибэровского модуля) является бэровским модулем (соотв., квазибэровским модулем). В статье [10] было установлено, что над кольцом R каждый проективный правый R-модуль является бэровским в точности тогда, когда R – полупервичное наследственное кольцо. Необходимые и достаточные условия, при которых прямая сумма квазибэровских модулей является квазибэровским модулем, были найдены в статье [11]. Дуально бэровские модули были рассмотрены в работе [12].

---

[1] Kaplansky I. Rings of operators. Univ. Chicago Mimeographed Lecture Notes (Notes by S.K. Berberian, with an Appendix by R. Blattner), Univ. Chicago, 1955. 106 p.

[2] Maeda S. On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. 1960. Vol. 24. P. 509-525.

[3] Von Neumann J. On Regular Rings // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1936. Vol. 22, №12. P. 707-712.

[4] Rizvi S. T., Roman C.S. Baer and quasi-Baer modules // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32, №1. P. 103-123.

[5] Rizvi S. T., Roman C.S. Baer property of modules and applications // Advances in Ring Theory. 2005. P. 225-241.

[6] Rizvi S. T., Roman C. S. On direct sums of Baer modules // Journal of Algebra. 2009. Vol. 321. P. 682-696.

[7] Lee G., Rizvi S. T. Direct sums of quasi-Baer modules // Journal of Algebra. 2016. Vol. 456. P. 76-92.

[8] Clark W. E. Twisted matrix units semigroup algebras // Duke Math. J. 1967. Vol. 34. P. 417-424.

[9] Rizvi S. T., Roman C.S. Baer and quasi-Baer modules // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32, №1. P. 103-123.

[10] Rizvi S. T., Roman C. S. On direct sums of Baer modules // Journal of Algebra. 2009. Vol. 321. P. 682-696.

[11] Lee G., Rizvi S. T. Direct sums of quasi-Baer modules // Journal of Algebra. 2016. Vol. 456. P. 76-92.

[12] Tütüncü D. K., Tribak R. On dual Baer modules // Glasgow Math. J. 2010. Vol. 52, №2. P. 261-269.

Риккартовы модули были изучены в работах [13], [14], [15]. В работе [16] было показано, что класс колец, над которыми каждый конечно порожденный проективный правый модуль является риккартовым, совпадает с классом полунаследственных справа колец. В этой же работе были найдены достаточные условия, при которых прямая сумма риккартовых модулей является риккартовым модулем. Дуально риккартовы модули были изучены в работе [17].

Одним из важных обобщений понятия риккартового кольца являются ACS-кольца. Кольцо R называется *правым ACS-кольцом*, если правый аннулятор любого элемента из кольца R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R. Примерами ACS-колец являются риккартовы кольца и CS-кольца. ACS-кольца были введены Никольсон и Юсиф [18] в 2001 году. ACS-кольца и их модульные аналоги были изучены в работах [19], [20], [21]. Модульным аналогом ACS-колец являются CS-риккартовы модули, которым посвящена первая глава диссертации. В этой главе описаны кольца, над которыми каждый конечно порожденный проективный модуль является CS-риккартовым модулем.

Существенно бэровские кольца были введены Биркенмейер, Парк и Ризви в работе [22]. Кольцо R называется *существенно бэровским справа*, если правый аннулятор каждого подмножества кольца R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R. Ряд свойств существенно бэровских колец были рассмотрены в монографии [23]. Существенно бэровские модули, существенно квазибэровские модули и их дуальные аналоги изучены во второй главе диссертации. Показано, что прямое слагаемое существенно бэровского модуля является существенно бэровским модулем, и найдены условия, при которых прямая существенно квазибэровских модулей является существен-

[13] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Rickart Modules // Comm. Algebra. 2010. Vol. 38, №11. P. 4005-4027.

[14] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Direct sums of Rickart modules // Journal of Algebra. 2012. Vol. 353, №1. P. 62-78.

[15] Agayev N., Harmanci A., Halicioglu S. On Rickart modules // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2012. Vol. 38, №2. P. 433-445.

[16] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Rickart Modules // Comm. Algebra. 2010. Vol. 38, №11. P. 4005-4027.

[17] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Dual Rickart Modules // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39, №11. P. 4036-4058.

[18] Nicholson W. K., Yousif M. F. Weakly continous and C2 rings // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29, №6. P. 2429-2446.

[19] Zeng Q. Some Examples of ACS-Rings // Vietnam Journal of Mathematics. 2007. Vol. 35, №1. P. 11-19.

[20] Абызов А. Н., Чан Хоай Нгок Нян. CS-риккартовы модули // Изв. вузов. Матем. 2014. №5. С. 59-63.

[21] Abyzov A. N., Nhan T. H. N. CS-Rickart Modules // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. Vol. 35, №4. P. 317-326.

[22] Birkenmeier G. F., Park J. K., Rizvi S. T. A Theory of Hulls for Rings and Modules // Ring and module theory, Trends Math. 2010. P. 27-71.

[23] Birkenmeier G. F., Park J. K., Rizvi S.T. Extensions of Rings and Modules. Birkhäuser, 2013. 432 p.

но квазибэровским модулем.

Модуль M называется *SSP-модулем* (соотв., *SIP-модулем*), если сумма (соотв., пересечение) двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M. SIP-модули были введены Капланским в 1969 году, и SSP-модули были введены Гарсия в 1989 году. Капланский установил, что каждый свободный модуль над областью главных идеалов является SIP-модулем. Л. Фукс поставил задачу описания абелевых групп, являющихся SIP-модулями над кольцом целых чисел. SIP-модули тесно связаны с понятиями риккартового и бэровского модуля. В работе [24] было показано, что модуль M является бэровским в точности тогда, когда M – риккартовый модуль, в котором пересечение любого множества прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M. В работе [25] было показано, что всякий риккартовый модуль является SIP-модулем. Дуальные результаты, устанавливающие связи между SSP-модулями, дуально риккартовыми модулями и дуально бэровскими модулями, были получены в работах [26, 27]. Аналогичные результаты для CS-риккартовых модулей, существенно бэровских модулей и их дуальных аналогов получены во второй и третьей главах диссертации. В работах [28, 29] были введены соответственно понятия просто прямо проективного модуля и просто прямо инъективного модуля, которые являются обобщениями соответственно понятий SSP-модулей и SIP-модулей. Модуль M называется просто прямо проективным, если для каждых его прямых слагаемых M_1, M_2, которые являются максимальными подмодулями модуля M, $M_1 \cap M_2$ – прямое слагаемое модуля M. Дуально определяется понятие просто прямо инъективного модуля. В третьей главе диссертации изучаются $\mathcal{A}$-Ci-модули (i=2,3), впервые изученные в работе [30], и их связи с $\mathcal{A}$-SSP-модулями. Также изучены дуальные аналоги этих результатов. В качестве следствий получены результаты из работ [31, 32].

[24] Rizvi S. T., Roman C.S. Baer and quasi-Baer modules // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32, №1. P. 103-123.

[25] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Rickart Modules // Comm. Algebra. 2010. Vol. 38, №11. P. 4005-4027.

[26] Tütüncü D. K., Tribak R. On dual Baer modules // Glasgow Math. J. 2010. Vol. 52, №2. P. 261-269.

[27] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Dual Rickart Modules // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39, №11. P. 4036-4058.

[28] Ibrahim Y., Tamer Kosan M., Quynh T. C., Yousif M. Simple-Direct-Projective Modules // Communications in Algebra. 2016. Vol. 44, №12. P. 5163-5178.

[29] Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. Simple-direct-injective modules // J. Algebra. 2014. Vol. 420. P. 39-53.

[30] Oshiro K. Continuous modules and quasi-continuous modules // Osaka J. Math. 1983. Vol. 20. P. 681-694.

[31] Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. Simple-direct-injective modules // J. Algebra. 2014. Vol. 420. P. 39-53.

[32] Ibrahim Y., Tamer Kosan M., Quynh T. C., Yousif M. Simple-Direct-Projective Modules // Communications in Algebra. 2016. Vol. 44, №12. P. 5163-5178.

Цели настоящей работы заключаются в исследовании свойств модулей, близких к риккартовым и бэровским: исследование CS-риккартовых модулей, существенно бэровских модулей, существенно квазибэровских модулей и их дуальных аналогов, изучение колец, над которыми проективные модули являются CS-риккартовыми, нахождение условий, при которых прямая сумма CS-риккартовых (существенно квазибэровских) модулей является CS-риккартовым (существенно квазибэровским) модулем, изучение SSP- и SIP-модулей и их обобщений.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1) Описаны кольца R, для которых для произвольного $n \in \mathbb{N}$ кольцо матриц $M_n(R)$ является правым ACS-кольцом.

2) Описаны кольца, над которыми каждый конечнопорожденный проективный модуль является одновременно CS-риккартовым модулем и $C2$-модулем.

3) Показано, что каждый правый свободный модуль над правым существенно квазибэровским кольцом является существенно квазибэровским.

4) Показано, что каждый проективный модуль P, у которого пересечение всех 2-первичных подмодулей равно нулю, является строго существенно квазибэровским в точности тогда, когда P – квазибэровский модуль.

5) Показано, что если в правом R-модуле M пересечение любого семейства прямых слагаемых является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M и M является CS-риккартовым модулем, то M – существенно квазибэровский модуль. Обратное верно, если R – полуартиново справа кольцо. Также доказано, что прямое слагаемое существенно бэровского модуля является существенно бэровским.

6) Описаны кольца R, над которыми все правые R-модули обладают $D3$-оболочками. Также охарактеризованы кольца, над которыми все конечно копорожденные правые R-модули обладают $C3$-оболочками.

7) Исследованы условия, при которых совпадают следующие классы модулей: $\mathcal{A}$-SSP-модули, $\mathcal{A}$-$C2$-модули и $\mathcal{A}$-$C3$-модули.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно, кроме результатов из параграфов 3.2 и 3.3, полученных в нераздельном соавторстве с А. Н. Абызовым и Чуонг Конг Куинь при равном участии всех сторон. В совместных с научным руководителем публикациях А. Н. Абызову принадлежат постановки задач и разработка методов исследования, автору диссертации – основные результаты и их доказательства.

Методы исследования. В работе использованы методы теории колец, теории модулей и теории категорий. Достоверность результатов, полученных в данной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы теории колец и модулей.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения теории колец, теории модулей, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

1) XII Всероссийской молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2013", г. Казань, 24-29 октября 2013 г.

2) XIII Всероссийской молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2014", г. Казань, 24-29 октября 2014 г.

3) Международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", г. Казань, 2-6 июня 2014 г.

4) XIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, г. Тула, 25-30 мая 2015 г.

5) XIV Всероссийской молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2015", г. Казань, 22-27 октября 2015 г.

6) Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, г. Казань, 26 июня - 2 июля 2016 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 научных работ [1-10], из них 5 публикации [1-5] в изданиях, входящих в перечень ВАК. Работы [1], [3] написаны совместно с А. Н. Абызовым, которому принадлежат постановка задач, идея и рекомендации по их решению. Доказательства всех результатов получены автором. Результаты работ из [4], [5], включенные в диссертацию, получены в нераздельном соавторстве с А.Н. Абызовым и Чуонг Конг Куинь при равном участии всех сторон.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 9 параграфов, списка литературы и предметного указателя. Полный объем диссертации составляет 104 страниц. Список литературы включает 87 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, исследованной в диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней, а также приводятся основные результаты исследования.

В **первой главе** диссертации изучается понятие CS-риккартова модуля, которое является модульным аналогом понятия ACS - кольца.

В параграфе 1.2 изучены CS-риккартовы модули, d-CS-риккартовы модули и их связи соответственно с SIP-CS-модулями и SSP-d-CS-модулями. Также описаны несингулярные справа кольца, над которыми каждый (конечно порожденный) проективный правый модуль является SIP-CS-модулем.

Модуль M называется *CS-риккартовым модулем*, если $\operatorname{Ker}\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M для каждого $\varphi \in S = \operatorname{End}(M)$. Кольцо R называется *правым ACS-кольцом,* если правый аннулятор всякого элемента из R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R. Модуль M называется *d-CS-риккартовым модулем*, если $\operatorname{Im}\varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M для каждого $\varphi \in S = \operatorname{End}(M)$. Модуль M называется *SIP-CS-модулем*, если пересечение любых двух подмодулей модуля M, которые существенны в некоторых прямых слагаемых модуля M, является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M. Понятие SIP-CS-модуля впервые было изучено в работе [33]. Дуально определяется понятие SSP-d-CS-модуля.

Основными результатами данного параграфа являются следующие утверждения.

[33] Karabacak F., Tercan A. On modules and matrix rings with SIP-extending // Taiwanese J. Math. 2007. Vol. 11, №4. P. 1037-1044.

Теорема 1.2.15. *Пусть M – CS-риккартовый правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда*

1) *если $A = eM$, $B = fM$, где $e^2 = e, f^2 = f \in S$, то существует такой идемпотент $g^2 = g \in S$, что $eM \cap fM \leqslant^e gM$;*

2) *если $A \leqslant^e eM$, $B \leqslant^e fM$, где $e^2 = e, f^2 = f \in S$, то существует такой идемпотент $g^2 = g \in S$, что $A \cap B \leqslant^e gM$;*

3) *для каждых гомоморфизмов $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S$ существует такой идемпотент $e \in S$, что $r_M(\varphi_1, ..., \varphi_n) \leqslant^e eM$;*

4) *M – SIP-CS-модуль.*

Теорема 1.2.19. *Пусть M – d-CS-риккартовый правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда*

1) *если $A = eM$, $B = fM$, где $e^2 = e, f^2 = f \in S$, то существует такой идемпотент $g^2 = g \in S$, что $A + B$ лежит над gM;*

2) *если подмодули A, B модуля M лежат соответственно над прямыми слагаемыми eM, $fM \in S$, где $e^2 = e, f^2 = f \in S$, то существует такой идемпотент $g^2 = g \in S$, что $A + B$ лежит над gM;*

3) *для произвольных гомоморфизмов $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S$ существует такой идемпотент $e \in S$, что $\sum_{i=1}^n \mathrm{Im}\,\varphi_i$ лежит над прямым слагаемым eM;*

4) *M — SSP-d-CS-модуль.*

Теорема 1.2.27. *Следующие условия эквивалентны для несингулярного справа кольца R:*

1) *R — наследственное справа кольцо;*

2) *каждый проективный правый R-модуль является $SIP-CS$-модулем.*

Теорема 1.2.28. *Следующие условия эквивалентны для несингулярного справа кольца R:*

1) *R — полунаследственное справа кольцо;*

2) *каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является SIP-CS-модулем;*

3) каждый конечно порожденный свободный правый R-модуль является SIP-CS-модулем.

В параграфе 1.3 изучены CS-риккартовы модули, которые также являются C2-модулями. Описаны кольца, над которыми каждый конечно порожденный проективный правый модуль является одновременно CS-риккартовым модулем и C2-модулем. Основными результатами данного параграфа являются следующие утверждения.

Теорема 1.3.11. *Пусть M – правый R-модуль и P – проективный модуль в категории $\sigma(M)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) Для произвольного гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{End}_R(P)$ имеет место равенство $\varphi(P) = eP \oplus P'$, где P' – M-сингулярный модуль и $e^2 = e \in \mathrm{End}(P)$;

2) P — CS-риккартовый модуль, который также является C2-модулем;

3) P — d-CS-риккартовый модуль, удовлетворяющий условию $\triangle(P) = \nabla(P)$.

Теорема 1.3.13. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) R — полурегулярное кольцо и $J(R) = Z(R_R)$;

2) кольцо R является правым ACS-кольцом и правым $C2$-кольцом;

3) каждый конечно порожденный правый идеал кольца R имеет вид $eR \oplus S$, где $e = e^2 \in R$ и S — сингулярный правый идеал кольца R;

4) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем, который также является C2-модулем;

5) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем, который также является C3-модулем;

6) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является SIP-CS-модулем, который также является C2-модулем;

7) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является SIP-CS-модулем, который также является C3-модулем.

В параграфе 1.4 получено описание колец, для которых для каждого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(R)$ является правым ACS-кольцом.

Теорема 1.4.4. *Следующие условия эквивалентны для кольца R и фиксированного $n \in \mathbb{N}$:*

1) каждый n-порожденный проективный правый R-модуль является CS -риккартовым модулем;

2) свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем;

3) $M_n(R)$ является правым ACS-кольцом;

4) каждый n-порожденный правый идеал кольца R имеет вид $P \oplus S$, где P — проективный R-модуль и S — сингулярный правый идеал кольца R;

5) правый R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем относительно модуля R_R;

6) каждый n-порожденный подмодуль модуля $R_R^{(n)}$ имеет вид $P_1 \oplus \ldots \oplus P_n \oplus S$, где $P_1, \ldots, P_n$ – проективные правые R-модули, каждый из которых изоморфен подмодулю модуля R_R, и S — сингулярный модуль.

Кольцо R называется *слабо полунаследственным справа*, если каждый его конечно порожденный правый идеал имеет вид $P \oplus S$, где P — проективный правый R-модуль и S — сингулярный правый R-модуль.

Центральным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1.4.6. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем;

2) свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем для каждого $n \in \mathbb{N}$;

3) $M_n(R)$ является правым ACS-кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$;

4) для некоторого натурального числа m кольцо $M_m(R)$ является слабо полунаследственным справа;

5) R — слабо полунаследственное справа кольцо;

6) каждый конечно порожденный подмодуль проективного правого R-модуля имеет вид $P_1 \oplus \ldots \oplus P_n \oplus S$, где $P_1, \ldots, P_n$ — проективные модули, которые изоморфны подмодулям модуля R_R и S — сингулярный модуль.

Следующее утверждение, которое было доказано в работах [34], [35], непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Следствие 1.4.9. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) *каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является риккартовым модулем;*
2) *свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является риккартовым модулем для каждого $n \in \mathbb{N}$;*
3) *$M_n(R)$ является правым р.р.-кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$;*
4) *R — полунаследственное справа кольцо;*
5) *для некоторого натурального числа n кольцо $M_n(R)$ является полунаследственным справа кольцом.*

Вторая глава диссертации посвящена изучению существенно бэровских модулей, существенно квазибэровских модулей и дуальных к ним модулей.

В параграфе 2.1 изучаются существенно бэровские модули.

Правый R-модуль M называется *существенно бэровским*, если для каждого левого идеала I кольца $\mathrm{End}_R(M)$ подмодуль $r_M(I)$ является существенным в некотором прямом слагаемом модуля M. Кольцо R называется *существенно бэровским справа*, если R_R – существенно бэровский правый R-модуль. Модуль M называется *дуально существенно бэровским модулем*, если для каждого правого идеала I кольца $\mathrm{End}_R(M)$ подмодуль $\sum_{\varphi \in I} \mathrm{Im}\varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M.

Доказаны следующие основные утверждения о существенно бэровских модулях.

Теорема 2.1.11. *Пусть M — правый R-модуль. Имеют место следующие утверждения:*

1) *если M – CS-риккартовый модуль и M – SSIP-CS-модуль, то M – существенно бэровский модуль. Обратное верно, если* $\mathrm{Soc}M \leqslant^e M$*;*

[34] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Direct sums of Rickart modules // Journal of Algebra. 2012. Vol. 353, №1. P. 62-78.

[35] Small L. W. Semihereditary rings // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, №5. P. 656-658.

2) если M – d-CS-риккартовый модуль и M – SSSP-d-CS-модуль, то M – дуально существенно бэровский модуль. Обратное верно, если $\mathrm{Rad}M \ll M$.

Следствие 2.1.12. *Пусть M — правый R-модуль.*

1) Если R — полуартиново справа кольцо, то следующие условия равносильны:

a) M — существенно бэровский модуль.

b) M — CS-риккартовый модуль и M — SSIP-CS-модуль.

2) Если R — правое max-кольцо, то следующие условия равносильны:

a) M — дуально существенно бэровский модуль.

b) M — d-CS-риккартовый модуль и M — SSSP-d-CS-модуль.

Теорема 2.1.13. *Имеют место следующие утверждения:*

1) Каждое прямое слагаемое существенно бэровского модуля является существенно бэровским модулем.

2) Каждое прямое слагаемое дуально существенно бэровского модуля является дуально существенно бэровским модулем.

3) Каждое прямое слагаемое строго существенно бэровского модуля является строго существенно бэровским модулем.

4) Каждое прямое слагаемое строго дуально существенно бэровского модуля является строго дуально существенно бэровским модулем.

В параграфе 2.2 изучены существенно квазибэровские модули и дуально существенно квазибэровские модули.

Модуль M называется *существенно квазибэровским модулем*, если $r_M(I)$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M для каждого идеала I кольца $\mathrm{End}(M)$. Модуль M называется *дуально существенно квазибэровским модулем*, если $\sum_{\varphi \in I} \mathrm{Im}\varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M для каждого идеала I кольца $\mathrm{End}(M)$.

Изучены условия, при которых прямая сумма (соотв., дуально) существенно квазибэровских модулей является (соотв., дуально) существенно квазибэровским модулем.

Теорема 2.2.8. *Пусть M — правый R-модуль.*

1) *если $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ — прямая сумма существенно квазибэровских правых R-модулей и M_i является копорождающим модулем модуля M_j, $\forall i \neq j$, то M — существенно квазибэровский модуль;*

2) *если $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ — прямая сумма дуально существенно квазибэровских правых R-модулей, $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ и M_i является порождающим модулем модуля M_j, $\forall i \neq j$, то M – дуально существенно квазибэровский модуль.*

Следствие 2.2.9.

1) *Каждый свободный модуль над существенно квазибэровским справа кольцом является существенно квазибэровским модулем.*

2) *Каждый конечно порожденный свободный модуль над дуально существенно квазибэровским справа кольцом является дуально существенно квазибэровским модулем.*

Пусть $\mathcal{A}$ — класс всех первичных правых R-модулей. Для произвольного правого R-модуля M введем обозначение

$$\mathcal{P}(M) = \bigcap_{f\in \mathrm{Hom}(M,A), A\in\mathcal{A}} \mathrm{Ker} f.$$

Подмодуль N модуля M называется *2-первичным* [36], если $A \times B \nsubseteq N$ для любых таких подмодулей A и B модуля M, что $A \nsubseteq N$, $B \nsubseteq N$. Ясно, что идеал I кольца R является 2-первичным как правый R-модуль в точности тогда, когда I – первичный идеал.

Согласно теореме 4.7 из работы [37] полупервичное кольцо R является квазибэровским в точности тогда, когда каждый идеал A кольца R существен как правый R-подмодуль модуля R_R в идеале eR, где e – полуцентральный слева идемпотент. Модульным аналогом этого утверждения является следующая теорема.

Теорема 2.2.17. *Пусть M — проективный модуль и $\mathcal{P}(M) = 0$. Следующие условия равносильны:*

1) *M — квазибэровский модуль;*

[36] Bican L., Jambor P., Kepka T., Nemec P. Prime and coprime modules // Fund. Math. 1980. Vol. 107. P. 33-45.

[37] Birkenmeier G. F., Muller B. J., Rizvi S. T. Modules in which every fully invariant submodules is essential in a direct summand // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, №3. P. 1395-1415.

2) каждый вполне инвариантный подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором вполне инвариантном прямом слагаемом модуля M;

3) M — строго существенно квазибэровский модуль.

В **третьей главе** изучаются SSP- и SIP-модули и их обобщения.

В параграфе 3.1 изучены SSP- и SIP-модули. Также получены новые характеристики классически полупростых колец и правых V-колец с помощью Ω-оболочек и Ω-накрытий, где Ω принадлежит к одному из следующих классов модулей: $D3$-модули, $C3$-модули, SIP-модули. Основные результаты исследования приведены ниже.

Предложение 3.1.8. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) R — классически полупростое кольцо;

2) каждый правый R-модуль имеет $D3$-накрытие;

3) каждый 2-порожденный правый R-модуль имеет $D3$-накрытие;

4) каждый правый R-модуль имеет $D3$-оболочку;

5) каждый 2-порожденный правый R-модуль имеет $D3$-оболочку.

Предложение 3.1.10. *Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) R — правое V-кольцо;

2) каждый конечно копорожденный правый R-модуль имеет $C3$-оболочку;

3) каждый конечно копорожденный правый R-модуль имеет $C3$-накрытие.

В параграфе 3.2 изучены $\mathcal{A}$-SIP- и $\mathcal{A}$-SSP-модули. Исследованы условия, при которых совпадают следующие классы модулей: $\mathcal{A}$-SSP-модули, $\mathcal{A}$-$C2$-модули и $\mathcal{A}$-$C3$-модули.

Теорема 3.2.7. *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия эквивалентны:*

1) M — $\mathcal{A}$-SSP-модуль;

2) M — $\mathcal{A}$-C3-модуль;

3) для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \to A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2.

Теорема 3.2.8. *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс артиновых правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия равносильны:*

1) M — $\mathcal{A}$-C3-модуль;

2) M — $\mathcal{A}$-C2-модуль;

3) Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.

В случае, когда $\mathcal{A}$ — класс простых правых R-модулей, следующая теорема была доказана в работе [38].

Теорема 3.2.10. *Пусть M — правый R-модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактормодуль модуля M является $\mathcal{A}$-проективным, то следующие условия эквивалентны:*

1) M — $\mathcal{A}$-SSP-модуль;

2) M — $\mathcal{A}$-C3-модуль;

3) для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \to A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2;

4) M — $\mathcal{A}$-C2-модуль;

5) если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.

[38] Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. Simple-direct-injective modules // J. Algebra. 2014. Vol. 420. P. 39-53.

Также получены аналогичные результаты, в которых исследованы условия, при которых совпадают следующие классы модулей: $\mathcal{A}$-SIP-модули, $\mathcal{A}$-$D2$-модули и $\mathcal{A}$-$D3$-модули.

В параграфе 3.3 получены характеризации колец с помощью $\mathcal{A}$-$C3$- и $\mathcal{A}$-$D3$-модулей. Основные результаты данного параграфа приведены в следующих теоремах.

Теорема 3.3.2. *Пусть R — артиново справа кольцо и $\mathcal{A}$ — класс правых R-модулей с локальными эндоморфизмами, содержащий все простые правые R-модули и замкнутый относительно изоморфизмов. Если все правые R-модули являются $\mathcal{A}$-инъективными, то следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) R — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$;

2) над кольцом R каждый правый $\mathcal{A}$-$C3$-модуль квазиинъективен;

3) над кольцом R каждый правый $\mathcal{A}$-$C3$-модуль является $C3$-модулем.

Теорема 3.3.4. *Пусть R — артиново справа кольцо и $\mathcal{A}$ — класс R-модулей с локальными эндоморфизмами, содержащий все простые правые R-модули и замкнутый относительно изоморфизмов. Если все правые R-модули $\mathcal{A}$-проективны, то следующие условия эквивалентны для кольца R:*

1) R — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$;

2) над кольцом R каждый правый $\mathcal{A}$-$D3$-модуль квазипроективен;

3) над кольцом R каждый правый $\mathcal{A}$-$D3$-модуль является $D3$-модулем.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1) Исследованы различные свойства CS-риккартовых модулей. Показано, что каждый CS-риккартовый модуль является SIP-CS-модулем. Также установлено, что каждый d-CS-риккартовый модуль является SSP-d-CS-модулем. Описаны кольца, над которыми каждый конечно порожденный проективный правый модуль является одновременно CS-риккартовым модулем и $C2$-модулем. Доказано, что над кольцом R кольцо матриц $M_n(R)$ является правым ACS-кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$ в точности тогда, когда каждый конечно порожденный правый идеал A кольца R имеет вид $A = P \oplus S$, где P – проективный правый R-модуль и S – сингулярный правый R-модуль.

2) Исследованы различные свойства существенно бэровских модулей и существенно квазибэровских модулей. Показано, что прямое слагаемое (дуально) существенно бэровского модуля является (дуально) существенно бэровским модулем. Исследованы условия, при которых прямая сумма существенно квазибэровских модулей является существенно квазибэровским модулем. В качестве следствия установлено, что каждый правый свободный модуль над правым существенно квазибэровским кольцом является существенно квазибэровским. В случае, когда у проективного модуля P пересечение всех 2-первичных подмодулей равно нулю, показано, что P является квазибэровским модулем в точности тогда, когда P – строго существенно квазибэровский модуль.

3) Получены новые характеристики классически полупростых колец и правых V-колец с помощью Ω-оболочек и Ω-накрытий, где Ω принадлежит к одному из следующих классов модулей: $D3$-модули, $C3$-модули, SIP-модули.

4) Найдены условия, при которых совпадают следующие классы модулей: $\mathcal{A}$-SSP-модули, $\mathcal{A}$-$C2$-модули и $\mathcal{A}$-$C3$-модули. Из полученных результатов, в частности, следует, что выписанные выше классы модулей совпадают в случае, когда $\mathcal{A}$ – класс всех простых (соотв., полупростых) модулей. Также исследованы условия, при которых совпадают следующие классы модулей: $\mathcal{A}$-SIP-модули, $\mathcal{A}$-$D2$-модули и $\mathcal{A}$-$D3$-модули.

Автор выражает признательность и благодарность доценту А.Н. Абызову за научное руководство, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

1) Абызов А. Н., Чан Хоай Нгок Нян. CS-риккартовы модули // Изв. вузов. Матем. 2014. №5. С. 59-63.

2) Чан Хоай Нгок Нян. Существенно бэровы модули // Чебышевский сб. 2015. Том. 16, №3. С. 355-375.

3) Abyzov A. N., Nhan T. H. N. CS-Rickart Modules // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. Vol. 35, №4. P. 317-326.

4) Abyzov A. N., Nhan T. H. N., Quynh T. C. Modules close to SSP- and SIP-modules // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, №1. 12 pp.

5) Abyzov A. N., Quynh T. C., Nhan T. H. N. SSP rings and modules // Asian-European J. Math. 2016. Vol. 9, №1. 9 pp.

Тезисы конференций

6) Абызов А. Н., Чан Хоай Нгок Нян. CS-риккартовы модули // Материалы двенадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2013" г. Казань, 24-29 октября 2013 г. – Казань, 2013. – С. 3-5.

7) Абызов А. Н., Чан Хоай Нгок Нян. Модули, в которых суммы (или пересечение) двух прямых слагаемых являются прямыми слагаемыми // Материалы двенадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2015" г. Казань, 22-27 октября 2015 г. – Казань, 2015. – С. 5-7.

8) Nhan T. H. N. Essentially Baer modules // XIII International conference "Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Issues and Applications", Tula, May 25-30, 2015. – Tula, 2015. – P.171-173.

9) Чан Хоай Нгок Нян. $\mathcal{A}$-(C3)- и $\mathcal{A}$-(D3) модули // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, г. Казань, 26 июня - 2 июля 2016 г. – Казань, 2016. - С. 258-259.

10) Abyzov A. N., Nhan T. H. N. Some results on CS-Rickart modules // International Conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications", Kazan Federal University and Tatarstan Academy of Science, June 2 - 6, 2014. – Kazan, 2014. – P.36-37.