Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет"

На правах рукописи

Мосман Елена Аркадьевна

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

(01.04.02 – теоретическая физика)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2011

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Национальный исследовательский Томский государственный университет" на кафедре квантовой теории поля.

Научные руководители: Доктор физ.-мат. наук, профессор
Ляхович Семен Леонидович;

Доктор физ.-мат. наук
Шарапов Алексей Анатольевич

Официальные оппоненты: Доктор физ.-мат. наук
Семихатов Алексей Михайлович;

Доктор физ.-мат. наук, профессор
Галажинский Антон Владимирович

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Защита состоится 22 декабря 2011 года в 13.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 21 ноября 2011 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07
доктор физико-математических наук,
профессор И.В. Ивонин

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию глобальных инвариантов калибровочных теорий.

Актуальность темы. Одной из основных проблем квантовой теории поля как теоретической основы физики фундаментальных взаимодействий является проблема квантования калибровочных теорий. Калибровочные теории возникают в современной физике повсеместно. Все известные на сегодняшний день модели фундаментальных взаимодействий, в том числе такие, как теория струн и бран, полей высших спинов, являются калибровочными.

Одной из первых работ по квантованию калибровочных теорий была работа Фаддеева и Попова (L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. B, 1967), где они предложили метод функционального интегрирования, который наряду с исходными полями использует дополнительные антикоммутирующие переменные (духи). Вскоре после этого Бекки, Руэ, Стора и Тютин обнаружили глобальную симметрию, смешивающую калибровочные поля с духами Фаддеева-Попова, получившую название в честь ее авторов БРСТ-симметрии. Обобщение и использование идей БРСТ-симметрии привело к созданию эффективных методов квантования, известных под общим условным названием БРСТ-теории.

На сегодняшний день БРСТ-теория является одной из центральных концепций современной теоретической и математической физики. Весь прогресс в квантовании калибровочных теорий, включая стандартную модель фундаментальных взаимодействий и теорию суперструн, связан с развитием БРСТ-метода: он обеспечивает наиболее систематичный метод квантования калибровочных систем, подчас не имеющий альтернатив. Круг приложений метода, однако, не ограничивается исключительно квантованием. БРСТ-метод оказывается полезным в теории перенормировок, при анализе аномалий, как инструмент построения совместных взаимодействий в калибровочных моделях, а также в когомологической интерпретации соответствия симметрий и законов сохранения.

Важным достоинством БРСТ-метода является то, что он, в том числе, позволяет разработать процедуру квантования калибровочных теорий, классические уравнения движения которых не допускают вариационной формулировки, то есть не следуют из принципа наименьшего действия (S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, JHEP, 2005,2006,2007). Надо сказать, что круг таких моделей в теории поля довольно широк. Среди наиболее фундаментальных моделей такого рода стоит отметить самодуальные поля

Янга-Миллса, различные многомерные конформные теории поля с расширенной суперсимметрией, теории безмассовых полей высших спинов, а также уравнения, описывающие самосогласованную динамику частиц струн и бран во внешних динамических полях.

Ключевое свойство БРСТ-теории состоит в существовании нильпотентного дифференциала, несущего всю информацию об уравнениях движения теории, ее симметриях и алгебре калибровочных преобразований. Свойство нильпотентности дифференциала позволяет вести рассмотрение на уровне групп когомологий $H^k(Q)$. Например, известно, что физические величины описываются $H^0(Q)$. Помимо физических величин, интерес представляют и другие группы когомологий: в различных градуировках они содержат информацию о БВФ-БРСТ заряде, мастер-действии, симметриях и квантовых аномалиях. Таким образом, когомологии БРСТ-дифференциала несут важную информацию как о классической, так и квантовой структуре теории. К сожалению, нахождение этих групп когомологий в каждом конкретном случае может оказаться весьма не тривиальной задачей. Тем не менее, можно искать когомологические классы, которые определены для любой калибровочной теории, то есть являются в некотором смысле универсальными. В качестве таких классов можно предложить классы когомологий БРСТ-дифференциала, которые строятся в терминах его самого и некоторой симметричной связности, необходимой для того, чтобы построенные классы были глобально определены. По определению, они должны существовать для любой калибровочной динамики и быть ее глобальными инвариантами. Такие классы получили название характеристических классов калибровочных систем (S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov, Nucl. Phys. B, 2004). Там же была построена первая бесконечная серия характеристических классов и показано, что низшие из них связаны с однопетлевыми квантовыми аномалиями в БВ и БРСТ-БВФ формализме.

Изучение глобальной геометрической структуры калибровочных теорий, вкупе с новейшими идеями супергеометрии и гомологической алгебры, является актуальным в свете современных тенденций к разработке непертурбативных методов анализа классической и квантовой динамики полей в существенно нелинейных калибровочных моделях. Однако нельзя сказать, что эти вопросы математической физики являются хорошо изученными. Несмотря на то, что подобные конструкции характеристических классов, точнее их очень частные случаи, ранее уже рассматривались как в физике, так и в математике, введенное понятие дало универсальную точку зрения на все эти конструкции и дало возможность для дальнейшего их обобщения.

Методы и подходы. Основным подходом, используемым в диссертации, является БРСТ-формализм, являющийся на сегодняшний день наиболее универсальным инструментом построения и исследования калибровочных теорий. Для вычисления групп когомологий БРСТ-дифференциала применялся метод построения спектральных последовательностей, который является эффективным методом нахождения групп когомологий фильтрованных комплексов, в том числе БРСТ-комплексов, рассматриваемых в работе.

Целью работы является разработка теории топологических инвариантов (характеристических классов)калибровочных систем, которая включает в себя создание новых методов построения характеристических классов калибровочных систем, их классификацию, изучение их свойств и физических приложений.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые. Разработана теория характеристических классов калибровочных систем. В частности, был предложен метод построения характеристических классов, проведена их полная классификация. Продемонстрирован ряд приложений теории в задачах математики и физики, включая анализ связи характеристических классов с низкопетлевыми квантовыми аномалиями в БРСТ-формализме.

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой теории поля и математической физики. Теория характеристических классов является потенциально важной при исследовании непертурбативных эффектов в существенно нелинейных теориях, а также в задачах о построении совместных взаимодействий и исследовании квантовых аномалий.

Апробация и публикации. Основные результаты диссертации, были представлены на ряде международных научных конференций и семинаров: Международная летная школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Петровские чтения", г. Казань, 2007-2009 гг.; VI Международная конференция "Перспективы развития фундаментальных наук", г.Томск, 2009 г.; Международная конференция "Quantum Field Theory and Gravity", г. Томск, 2007 г.; Международный семинар "Higher Structures in Mathematics and Physics", Австрия, Вена, 2010 г. ; XXX Workshop on Geometric Methods in Physics, Польша, Беловежа, 2011 г.; а также на научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета.

По материалам диссертационной работы опубликовано 6 работ, в том числе 4 статьи – в журналах из списка рекомендованных ВАК [1-4].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения, двух приложений и списка литературы, содержащего 92 библиографические ссылки. Общий объем диссертации – 107 страниц. Работа содержит 23 рисунка.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится краткий обзор ранее полученных результатов по теме работы. Дается краткое содержание диссертации, формулируются основные цели и задачи.

Глава 1. Характеристические классы калибровочных систем

Первая глава содержит обзорные сведения, касающиеся геометрического описания калибровочных систем в рамках БРСТ-теории. Дается общее определение Q-многообразий и приводятся их примеры в физике и математике. Определяются характеристические классы Q-многообразий как когомологии некоторого графического комплекса, ассоциированного с Q-многообразием и некоторой симметричной связностью на нем. Доказывается теорема о независимости характеристических классов от выбора связности.

Любая (не-)вариационная калибровочная система допускает БРСТ-описание в терминах градуированных супермногообразий. При этом, вся информация об уравнениях движения и алгебре калибровочных преобразований оказывается закодированной в условии нильпотентности классического БРСТ-дифференциала, который можно интерпретировать, как векторное поле на конфигурационном или фазовом пространстве теории. Таким образом, любая калибровочная система представляется некоторым супермногообразием с нечетным векторным полем Q, удовлетворяющим условию $Q^2 = 0$. В математике такие объекты получили название Q-многообразий.

Оператор производной Ли $\delta = \mathcal{L}_Q$ на Q-многообразии превращает тензорную алгебру $\mathcal{T}(M)$ в дифференциальную градуированную алгебру с когомологиями $H(M,Q) = \mathrm{Ker}\delta/\mathrm{Im}\delta$. Алгебра $H(M,Q)$ является естественным инвариантом Q-многообразия M, но, к сожалению, ее вычисление является довольно сложной задачей даже в топологически тривиальных случаях, ввиду возможных особых точек поля Q.

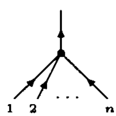
Пусть дана симметричная связность ∇, можно определить тензорную алгебру конкомитантов $\mathcal{A} \in \mathcal{T}(M)$, порожденную гомологическим векторным полем Q, тензором кривизны связности R и их ковариантным производным конечного порядка $\nabla^n Q$, $\nabla^m R$. Действие дифференциала

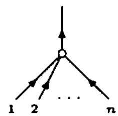
δ наделяет $\mathcal{A}$ структурой градуированной дифференциальной алгебры. Стабильные характеристические классы определяются как классы когомологий δ-коциклов $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$, условие замкнутости $\delta\mathcal{C} = 0$ которых следует лишь из условия интегрируемости гомологического векторного поля и тождеств Бьянки для симметричной связности вне зависимости от конкретной структуры Q, ∇ и M.

Доказано, что так определенные характеристические классы оказываются не зависящими от выбора симметричной связности, и, следовательно, могут рассматриваться как инварианты самого Q-многообразия.

Стабильные характеристические классы образуют подгруппу $H_{\mathrm{st}}(\mathcal{A})$ в группе δ-когомологий алгебры $\mathcal{A}$. Вычисление этой группы осложняется тем обстоятельством, что в алгебре $\mathcal{A}$ базисные конкомитанты $\{\nabla^n Q, \nabla^m R\}$ удовлетворяют бесконечному набору тензорных соотношений, возникающих из условия интегрируемости Q и тождеств Бьянки-Риччи для связности ∇. Для упрощения задачи вводится удобный базис $(1,n)$-тензоров $\{Q_n,\ R_n\}$, носящий название базиса Лосика-Йанышка-Маркла, в котором часть соотношений можно исключить, а часть – заменить свойствами симметрии генераторов.

Вводим графическое представление для алгебры конкомитантов $\mathcal{A}$. Для этого каждому элементу алгебры ставится в соответствие ориентированный граф по правилам

$Q_n \leftrightarrow$ 

$R_n \leftrightarrow$ 

Каждая вершина обладает симметрией по перестановке входящих ребер, считывающей симметрию исходных генераторов, а соединение ребром двух вершин отвечает свертке соответствующих конкомитантов. Дополнительно, на каждом графе задан порядок вершин, в соответствии с порядком конкомитантов, а также порядок внешних исходящих и входящих ребер. Таким образом, алгебре $\mathcal{A}$ соответствует линейное пространство графов $\mathcal{G}$, факторизованное по соотношениям симметрии вершин и смены их нумерации. На нем можно задать действие кограничного оператора ∂ так, чтобы отображение $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ определяло коцепное отображение.

В этих терминах стабильные характеристические классы Q-многообразий могут быть определены, как классы δ-когомологий, принадлежащие образу гомоморфизма $H(\phi) : H(\mathcal{G}) \to H(\mathcal{A})$. Тем самым задача нахождения $H_{\mathrm{st}}(\mathcal{A})$ сводится к изучению когомологий графического комплекса $(\mathcal{G}, \partial)$.

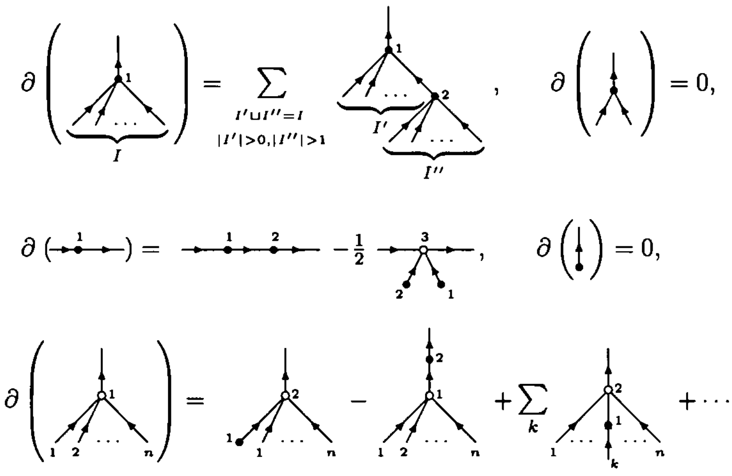


Рис. 1: Действие кограничного оператора на вершины.

Глава 2. Классификация характеристических классов

Вторая глава посвящена изучению когомологий комплекса $(\mathcal{G}, \partial)$. В главе найдены когомологии $H_{\mathrm{st}}(\mathcal{A})$ в общем случае и показано, что все стабильные характеристические классы сводятся к трем сериям классов, вовлекающим ковариантные производные гомологического векторного поля не выше второго порядка.

Основное свойство графического комплекса G состоит в том, что дифференциал ∂ не перемешивает компонент связности графов. Потому, согласно теореме Кюннета, изучение когомологий $H(\mathcal{G})$ можно свести к изучению когомологий комплекса $\bar{\mathcal{G}}$, состоящего из связных графов, то есть не соответствующих тензорным произведениям конкомитантов.

Комплекс связных графов $\bar{\mathcal{G}}$ в свою очередь распадается в прямую сумму комплексов

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}^{(1)} \oplus \bar{\mathcal{G}}^{(2)} \oplus \bar{\mathcal{G}}^{(3)} \oplus \bar{\mathcal{G}}^{(4)} .$$

Здесь $\bar{\mathcal{G}}^{(1)}$ – это одномерный подкомплекс, порожденный одним единственным графом $\bullet\!\!\rightarrow$. Комплекс $\bar{\mathcal{G}}^{(2)}$ строится по элементам третьего соотношения на Рис. 1, причем для удобства второе в правой части слагаемое обозначается белой бивалентной вершиной. Графы, порождающие $\bar{\mathcal{G}}^{(3)}$, по определению, содержат только черные вершины валентности ≥ 3. Наконец, линейная оболочка всех остальных $\mathcal{A}$-графов образует подкомплекс $\bar{\mathcal{G}}^{(4)}$. Когомологии каждого подкомплекса оказывается возможным непосредственно посчитать.

С очевидностью, $H(\bar{\mathcal{G}}^{(1)}) \cong \mathbb{R}$. На $\bar{\mathcal{G}}^{(2)}$ можно ввести фильтрацию по количеству вершин. Ассоциированная спектральная последовательность вырождается уже на первом шаге и $H(\bar{\mathcal{G}}^{(2)}) = 0$.

Вычисление $H(\bar{\mathcal{G}}^{(3)})$ по существу эквивалентно вычислению стабильных когомологий алгебры Ли формальных векторных полей с тензорными коэффициентами.

Кограничный оператор не перемешивает графы с различным числом входящих и исходящих ног, потому имеет место разложение:

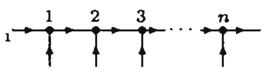
$$\bar{\mathcal{G}}^{(3)} = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}^n\right) \oplus \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}^m\right) .$$

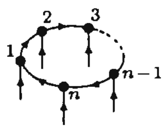
Здесь пространство $\mathcal{T}^n$ натянуто на древесные графы с $n+1$ входящих и одним исходящим внешними ребрами, в то время как графы из $\mathcal{C}^m$ содержат в точности один цикл, m входящих внешних ребер и ни одного исходящего.

Согласно теореме Д.Б. Фукса (Д. Б. Фукс, Функц. анализ и прил., 1983) все нетривиальные группы когомологий в комплексе $\bar{\mathcal{G}}^{(3)}$ имеют следующие размерности:

$$\dim H^{n-1}(\mathcal{T}^n) = n!\,, \qquad \dim H^n(\mathcal{C}^n) = (n-1)!\,.$$

Базисные коциклы, описывающие когомологии, можно выбрать в виде двух серий B и C

$B_n =$ 

$C_n =$ 

Наконец, комплекс $\bar{\mathcal{G}}^{(4)}$ ацикличен. Доказательство проводится заданием спектральной последовательности, ассоциированной с некоторой фильтрацией комплекса.

Таким образом, все базовые характеристические классы Q-многообразий в общем случае образуют две бесконечные серии B и C вместе с δ-когомологическим классом самого поля $[Q]$.

Отождествляя базисные генераторы Q_2, соответствующие трехвалентным черным вершинам, с $C^\infty(M)$-модульным гомоморфизмом $\mathcal{V}(M) \to \mathfrak{A}(M)$, который отображает векторное поле в нечетный правый эндоморфизм $Q_2(X)$:

$$Q_2(X)(Y) = Q_2(X,Y) = \{X^i Y^j Q^k_{ij}\} \qquad \forall Y \in \mathcal{V}(M),$$

можно записать тензорные выражения для графов серий B и C. Коциклы серии B дают набор Q-инвариантных тензоров $B_n \in \mathcal{T}^{n+1,1}(M)$

$$B_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = (-1)^{\sum_k \epsilon(X_{2k})} Q_2(X_n) Q_2(X_{n-1}) \cdots Q_2(X_1), \quad (1)$$

которые отождествляются с $C^\infty(M)$-модульными гомоморфизмами $\mathcal{V}(M)^{\otimes n} \to \mathfrak{A}(M)$. Универсальные коциклы, соответствующие графам серии C, получаются взятием следа:

$$C_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathrm{Str} B_n(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2)$$

Переставляя в выражениях (1) и (2) аргументы X_1, X_2,...,X_n получаем базис нетривиальных δ-коциклов.

Дополнительно можно рассмотреть скалярные характеристические классы для специального выбора связности. Скалярные конкомитанты образуют подкомплекс в комплексе $\bar{\mathcal{G}}^{(2)}$, ацикличный в общем случае. Тем не менее, можно определить серию скалярных конкомитантов, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{A}_n(\Lambda, 0) = \mathrm{Str}(\Lambda^{2n-1}), \quad \delta \mathrm{A}_n(\Lambda, \mathrm{R}) = \binom{2n-1}{n} \mathrm{Str}(\mathrm{R}^n).$$

Здесь $\Lambda, \mathrm{R} \in \mathfrak{A}(M)$ – правые эндоморфизмы векторных пространств, определенные по правилу: $\Lambda(X) = \nabla_X Q$, $\mathrm{R}(X) = \frac{1}{2} R_{QQ} X$, $\forall X \in \mathcal{V}(M)$. Таким образом, $\mathrm{Str}(\mathrm{R}^n)$ является значением $2n$-формы $\mathbf{P}_n = \mathrm{Str}(R^n)$ на гомологическом векторном поле.

В свою очередь, на каждом супермногообразии M можно определить симметричную аффинную связность ∇, для которой $\mathbf{P}^{\nabla}_{2m+1} = 0$ $\forall m \geq 0$.

Следовательно, на каждом Q-многообразии можно определить серию δ-когомологических классов $[A_{2n+1}]$, ассоциированных с некоторой симметричной аффинной связностью. Такие классы оказываются не зависящими от выбора такой специальной связности. Явные выражения для скалярных конкомитантов A_{2n-1} с небольшими номерами n записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \mathrm{Str}(\Lambda)\,, \\
&A_3 = \mathrm{Str}(\Lambda^5 + 5\mathrm{R}\Lambda^3 + 10\mathrm{R}^2\Lambda)\,, \\
&A_5 = \mathrm{Str}(\Lambda^9 + 9\mathrm{R}\Lambda^7 + 18\mathrm{R}^2\Lambda^5 + 9\mathrm{R}\Lambda\mathrm{R}\Lambda^4 + 9\mathrm{R}\Lambda^2\mathrm{R}\Lambda^3 + \\
&\qquad + 45\mathrm{R}^3\Lambda^3 + 21\mathrm{R}^2\Lambda\mathrm{R}\Lambda^2 + 15\mathrm{R}^2\Lambda^2\mathrm{R}\Lambda + 3\mathrm{R}\Lambda\mathrm{R}\Lambda\mathrm{R}\Lambda + 126\mathrm{R}^4\Lambda)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Основной результат главы можно сформулировать в виде теоремы

Теорема 1. *Все базисные характеристические классы Q-многообразий образуют две бесконечные серии B и C вместе с δ-когомологическим классом самого поля $[Q]$. Для специального выбора симметричной связности можно также определить серию скалярных характеристических классов A. Построенные классы не зависят от выбора симметричной связности, удовлетворяющей дополнительным условиям в случае серии A.*

Классы серий A, B и C называются внутренними классами, чтобы подчеркнуть тот факт, что они в общем случае нетривиальны даже для Q-многообразия с плоской связностью.

Глава 3. Универсальное классифицирующее пространство

В третьей главе проводится доказательство того факта, что все внутренние характеристические классы Q-многообразия могут быть получены как образ отображения характеристических классов из некоторого формального универсального классифицирующего Q-пространства.

Пусть дано конечномерное суперпространство V с координатами y^i, обозначим через $L_0(V)$ алгебру Ли формальных векторных полей на V с координатами $v^j_{i_1\cdots i_n} \in \mathbb{R}$:

$$
v = \sum_{n=1}^{\infty} y^{i_n}\cdots y^{i_1} v^j_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial}{\partial y^j}\,.
$$

С $L_0(V)$ можно ассоциировать формальное Q-многообразие $\mathbb{E} = \Pi L_0(V) \times V$ с координатами $\{c^j_{i_1\cdots i_n}, y^k\}$ и диагональным действием $GL(V)$. Гомологическое векторное поле имеет вид

$$
\mathbb{Q} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{\epsilon_{i_1}+\ldots+\epsilon_{i_l}} c^m_{i_1\ldots i_l} c^j_{m i_{l+1}\ldots i_n}\frac{\partial}{\partial c^j_{i_1\ldots i_n}} - y^i c^j_i \frac{\partial}{\partial y^j}\,.
$$

Пространство $(\mathbb{E}, \mathbb{Q})$ называется классифицирующим Q-пространством.

Обозначим через $\mathcal{T}(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{E})$ тензорную алгебру $GL(V)$-инвариантных $\mathbb{E}$-тензоров. Очевидно, $(\mathcal{T}(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}}, \delta)$ является дифференциальной алгеброй и соответствующие алгебре δ-когомологии обозначаются $H(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}}$.

Пусть дано Q-многообразие M с плоской симметричной связностью ∂. Без потери общности можно считать, что M односвязно. Некоторая тривиализация $\varphi : TM \to M \times V$ называется совместной с плоской связностью ∂, если обратное отображение любого постоянного сечения $v \in \Gamma(M \times V)$ оказывается ковариантно постоянным сечением в TM.

По заданному гомологическому векторному полю Q и плоской симметричной связности ∂, можно построить набор тензоров $\partial^n Q \in \mathcal{T}^{n,1}(M)$. Взятые вместе тензорные поля $\{\partial^n Q\}_{n=1}^{\infty}$ определяют отображение Гаусса

$$\mathbb{G} : M \to \Pi L_0(V)$$

плоского Q-многообразия M на базу $\Pi L_0(V)$ классифицирующего Q-пространства $\mathbb{E}$. При этом, гауссово отображение $\mathbb{G}$ зависит от тривиализации φ. В координатах отображение имеет вид

$$c^j_{i_1 \cdots i_n} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} Q^j(x)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Далее, отображение $\mathbb{G}$ можно продолжить до отображения расслоений $\widehat{\mathbb{G}} : TM \to \mathbb{E}$, индуцирующего гомоморфизм тензорной алгебры $\widehat{\mathbb{G}}_* : \mathcal{T}(\mathbb{E}) \to \mathcal{T}(M)$.

Можно доказать тот факт, что отображение $\widehat{\mathbb{G}}$ является морфизмом Q-векторных расслоений. Доказательство проводится путем формулировки цепного свойства $\delta \circ \widehat{\mathbb{G}}_* = \widehat{\mathbb{G}}_* \circ \delta$ характеристического отображения $\widehat{\mathbb{G}}$ в виде условия интегрируемости некоторого формального гомологического векторного поля на TM.

Теперь, ограничение отображения $\widehat{\mathbb{G}}_*$ на подпространство $\mathcal{T}(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{E})$

$$\chi : \mathcal{T}(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{T}(M)$$

индуцирует хорошо определенный гомоморфизм в когомологиях

$$\chi_* : H(\mathbb{E})^{\mathrm{inv}} \to H_Q(M)\,. \tag{4}$$

Гомоморфизм (4) оказывается уже не зависящим от выбора плоской связности и совместной тривиализации.

Основной результат главы можно сформулировать таким образом. Характеристические классы плоского Q-многообразия, а вместе с ними и внутренние классы, представляются классами Q-когомологий, принадлежащих образу гомоморфизма (4).

Глава 4. Приложения и примеры

Первый раздел четвертой главы посвящен изучению характеристических классов со значениями в дифференциальных формах.

Пусть $\mathbb{A} = \mathcal{A} \cap \Omega(M)$ – бидифференциальная, биградуированная, ассоциативная алгебра, элементами которой являются конкомитанты гомологического векторного поля Q и симметричной связности ∇ со значениями в дифференциальных формах $\Omega(M)$.

Когомологии дифференциала δ алгебры $\mathbb{A}$ были вычислены в предыдущей главе. Мультипликативный базис δ-коциклов записывается в виде

$$\mathbf{C}_n = \mathrm{Str}(\mathrm{B}_1^n) \in \mathbb{A}^{n,n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\mathrm{B}_1 = \nabla\Lambda + i_Q R \in \Omega^1(M) \otimes \mathcal{T}^{1,1}(M).$$

Основным результатом раздела является

Теорема 2. *Пусть M – Q-многообразие с $[\mathbf{P}_n] = 0$. Тогда класс δ-когомологий $[\mathbf{C}_n] \in H_Q(M)$ содержит d-точный представитель.*

Доказательство основано на сопоставлении двух спектральных последовательностей, ассоциированных с бикомплексом $V \subset \mathbb{A}$, расширенным дифференциальным идеалом, порожденным потенциалом для $\mathbf{P}_n$.

Из доказательства в том числе следует процедура нахождения явных выражений для d-точных представителей. В частности, для первых трех классов $[\mathbf{C}_1]$, $[\mathbf{C}_2]$, и $[\mathbf{C}_3]$ можно записать:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 &- \tfrac{1}{2}\delta\mathbf{F}_1^0 = d\left[\mathrm{Str}(\Lambda) + \mathbf{F}_1^1\right], \\
\mathbf{C}_2 &+ \delta\left[\mathrm{Str}(R\Lambda) + \tfrac{1}{4}\mathbf{F}_2^1\right] = d\left[\mathrm{Str}(\Lambda\nabla\Lambda) + \tfrac{1}{8}\mathbf{F}_2^2\right], \\
\mathbf{C}_3 &+ \tfrac{3}{4}\delta\left[\mathrm{Str}(R[\Lambda,\nabla\Lambda]) - \tfrac{1}{12}\mathbf{F}_3^2\right] = \qquad\qquad (5) \\
&= d\left[\mathrm{Str}(\Lambda\nabla\Lambda^2 + \Lambda i_Q R^2 + \tfrac{1}{2}\Lambda[\nabla\Lambda, i_Q R] + \tfrac{1}{2}\Lambda^3 R\right. \\
&+ \left.\tfrac{3}{8}\Lambda(R_{QQ}R + RR_{QQ})) - \tfrac{1}{48}\mathbf{F}_3^3\right].
\end{aligned}$$

Здесь элементы $\mathbf{F}_n^m$ определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_n^k = i_Q^k \mathbf{F}_n \,, \qquad d\mathbf{F}_n = \mathbf{P}_n = \mathrm{Str}(R^n) \,.$$

Поскольку на любом супермногообразии можно выбрать симметричную связность, для которой все характеры Понтрягина $[\mathbf{P}_{2m+1}]$ равны нулю, d-точные представители существуют для всех классов $[\mathbf{C}_{2m+1}]$. Определенные выше потенциалы в частном случае воспроизводят лагранжианы Черна-Саймонса.

Второй раздел посвящен вычислению характеристических классов для слоений, алгебр и алгеброидов Ли. Показано, что характеристические классы воспроизводят известные инварианты этих систем, а также не тривиально их обобщают.

• Пусть дано регулярное слоение $\mathcal{F}$ обычного (четного) многообразия N, обозначим через $T\mathcal{F} \subset TN$ подрасслоение касательных пространств к слоям $\mathcal{F}$. Так как $T\mathcal{F}$ интегрируемо, вложение $T\mathcal{F} \to TN$ определяет инъективный алгеброид Ли над N. В свою очередь, любому алгеброиду Ли $E \to TN$ можно поставить в соответствие Q-многообразие ΠE вместе с соответствующими характеристическими классами. Если алгеброид Ли происходит из регулярного слоения, эти характеристические классы могут рассматриваться как инварианты самого слоения.

Примером слоения с нетривиальным модулярным классом может служить группа вещественных 2×2 матриц $SL(2, \mathbb{R})$. Известно, что эта группа имеет дискретные подгруппы Γ такие, что правое фактор-пространство $N = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, $\mathrm{dim} N = 3$ является компактным многообразием. Для этого многообразия можно определить модулярный класс

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{div}_\rho Q \,, \tag{6}$$

который оказывается не тривиальным. Можно показать, что модулярный класс (6) фактически совпадает с классом Риба слоения $\mathcal{F}$.

• Рассмотрим теперь гомологическое векторное поле, ассоциированное с алгеброй Ли. Если $\{t_a\}$ – базис в алгебре Ли $\mathcal{L}$ с коммутационными соотношениями

$$[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c \,,$$

то структура комплекса Шевалье-Эйленберга алгебры Ли $\mathcal{L}$ кодируется гомологическим векторным полем на $\Pi\mathcal{L}$

$$Q = \frac{1}{2} c^b c^a f_{ab}^d \frac{\partial}{\partial c^d} \,.$$

Можно видеть, что соответствующее характеристические классы C-серии не тривиальны и описывают когомологии алгебры Ли

$$C_n = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{a_1}\cdots \mathrm{ad}_{a_n})dc^{a_1}\otimes\cdots\otimes dc^{a_n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Если алгебра Ли $\mathcal{L}$ полупроста, то 1-форма C_1 равна нулю, в то время как 2-форма C_2 невырождена (метрика Киллинга).

• Пусть дан алгеброид Ли $E \longrightarrow B$. Обозначим через x^i – некоторые локальные координаты тривиализующего атласа на базе B, а y^α – координаты, дуальные к некоторому базису $\{e_\alpha\}$ в слоях. Якорь и и скобка Ли на сечениях определяются в этих координатах функциями $\rho^i_\alpha(x)$ и $f^\gamma_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющими условиям

$$[e_\alpha, e_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma, \quad f^\gamma_{\alpha\beta}\rho^i_\gamma = \rho^j_\alpha\partial_j\rho^i_\beta - \rho^j_\beta\partial_j\rho^i_\alpha\,,$$

$$f^\sigma_{\alpha\beta}f^\delta_{\gamma\sigma} + \rho^j_\gamma\partial_j f^\delta_{\alpha\beta} + cycle(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

С алгеброидом можно ассоциировать Q-многообразие ΠE с локальными координатами (x^i, c^α) и гомологическим векторным полем

$$Q = c^\alpha\rho^i_\alpha\frac{\partial}{x^i} + \frac{1}{2}c^\alpha c^\beta f^\gamma_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial c^\gamma}\,,$$

для которого условие интегрируемости $[Q,Q]=0$ компактно кодирует соотношения для якоря и структурных функций алгеброида.

Выбирая на базе B симметричную связность ∇_1 с символами Кристоффеля $\{\Gamma^k_{ij}\}$ и связность ∇_2 в расслоении E, с коэффициентами $\{\Gamma^\beta_{i\alpha}\}$, можно определить базисные векторные поля

$$v_\alpha = \frac{\partial}{\partial c^\alpha}, \qquad h_i = \partial_i - c^\alpha\Gamma^\beta_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial c^\beta},$$

порождающие, соответственно, вертикальное и горизонтальное распределение на $T\Pi E$, а также симметричную связность ∇ на тотальном пространстве алгеброида Ли, носящую название связности Яно-Леджера.

По этим данным можно построить характеристические классы Q-многообразия ΠE. Тогда серия A описывает характеристические классы алгеброидов Ли (R. L. Fernandes, Adv. Math., 2002). Для первых коциклов серии C имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}&(C_1)_\gamma = \hat\nabla_i\rho^i_\gamma + T^\alpha_{\alpha\gamma}, \qquad (C_1)_k = c^\sigma(\hat\nabla_k\hat\nabla_i\rho^i_\sigma - \hat\nabla_k T^\alpha_{\alpha\sigma}).\\ &(C_2)_{\gamma_1\gamma_2} = \hat\nabla_i\rho^j_{\gamma_1}\hat\nabla_j\rho^i_{\gamma_2} - T^\beta_{\alpha\gamma_1}T^\alpha_{\beta\gamma_2}\,,\dots\,,\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, можно видеть, что вертикальная составляющая C_2 обобщает метрику Киллинга:

Третий раздел главы включает анализ связи характеристических классов с квантовыми аномалиями в методе БРСТ-квантования. Описание связи модулярного класса с однопетлевых аномалий носит обзорный характер. Анализ связи характеристичсских классов с двух-петлевыми аномалиями в мстоде БРСТ-БВФ квантования составляет оригинальный результат.

Известно, что аномалии, возникающие в квантовой теории поля имеют топологическую природу (J. Zinn-Justin. Topology and Geometry in Physics, 2005). В самом широком смысле, термин *аномалия* означает нарушение классической калибровочной симметрии при квантовании. На практике, аномалии возникают как нетривиальные коциклы БРСТ-дифференциала в духовых числах 1 или 2, в зависимости от того, какой метод (лагранжев БВ или гамильтонов БВФ) используется для квантования. Эти коциклы прсдставляют собой когомологические препятствия к разрешимости квантовых мастер-уравнений.

• В рамках метода лагранжсва БВ-квантования калибровочная система реализуется как пространство ΠT^*M вместе с канонической антискобкой $(\cdot,\cdot)$. Квантовос мастер-уравнение имест вид

$$(S,S)=2i\hbar\Delta S \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta e^{\frac{i}{\hbar}S}=0\,. \tag{9}$$

Здесь Δ – нильпотентный дифференциальный оператор второго порядка, называющийся нечетным лапласианом.

Разложение (9) по степеням $\hbar$ дает цепочку уравнений

$$\begin{aligned}
&(S_0,S_0)=0\,,\\
&(S_0,S_1)=i\Delta S_0\,,\\
&(S_0,S_n)=i\Delta S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(S_k,S_{n-k})\,, \qquad n\geq 2\,.
\end{aligned}$$

Первое уравнение сстъ просто классическое мастер-уравнение. С учетом опредсления гомологичсского векторного поля $Q=(S_0,\,\cdot\,)$ эта цепочка может быть переписана в виде

$$\delta S_n=B_n(S_0,...,S_{n-1})\,,\quad n=0,1,\ldots\,.$$

В частности, второе уравнение означает тривиальность модулярного класса $[\mathrm{A}_1]$, где

$$\mathrm{A}_1=\Delta S_0=\frac{1}{2}\mathrm{div}_\rho Q\,,$$

где ρ – некоторая плотность.

Таким образом, отождествить модулярный класс классического БРСТ-дифференциала с первым когомологическим препятствием к разрешению квантового мастер-уравнения.

• В рамках процедуры БВФ-БРСТ квантования, заряд Ω удовлетворяет квантовому мастер-уравнению

$$\Omega * \Omega = 0 . \tag{10}$$

Здесь $*$-произведение на $C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}[[\hbar]]$ определено как локальная, $\mathbb{C}[[\hbar]]$-линейная деформация по $\hbar$ обычного произведения функций, удовлетворяющая принципу соответствия

$$f * g - (-1)^{(\epsilon(f)+1)(\epsilon(g)+1)} g * f = i\hbar(f,g) + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \forall f,g \in C^\infty(M) .$$

Подставляя разложение $\Omega = \sum_{n\geq 0} \hbar^n \Omega_n$ по порядкам постоянной Планка в (10), мы получаем бесконечный набор уравнений

$$\{\Omega_0, \Omega_n\} = - \sum_{\substack{k+l+m=n+1 \\ l,m<n}} \Omega_l *_k \Omega_m . \tag{11}$$

Первое из них, $\{\Omega_0, \Omega_0\} = 0$, называется классическим мастер-уравнением, а его решение Ω_0 – классическим БРСТ-зарядом. С учетом этого определения следующее уравнение в (11) принимает вид

$$\delta\Omega_1 = 0 . \tag{12}$$

Оно отождествляет первую квантовую поправку к классическому БРСТ-заряду с БРСТ-коциклом. Пусть $\{f, g\} = \langle \Pi, df \wedge dg \rangle$, где треугольные скобки означают естественное спаривание между бивекторами и 2-формами. Тогда поправка второго порядка Ω_2 определяется из уравнения

$$\delta\Omega_2 = \langle \Pi, \tfrac{1}{48}\mathbf{C}_2 - \tfrac{1}{2} d\Omega_1 \wedge d\Omega_1 \rangle , \tag{13}$$

где $\mathbf{C}_2$ – второй универсальный коцикл серии C, ассоциированной с классическим БРСТ-дифференциалом Q.

Таким образом, класс $[\mathbf{C}_2]$ может служить препятствием к разрешимости квантового мастер-уравнения во втором порядке по $\hbar$. Точнее, если (M, ω) – симплектическое супермногообразие с гамильтоновым действием классического БРСТ дифференциала δ, и $[\mathbf{C}_2] = 0$, то существует $*$-произведение на M, такое, что квантовое мастер-уравнение (10) разрешимо вплоть до третьего порядка по $\hbar$.

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Приложения содержат дополнительный теоретический материал, посвященный базовым соглашениям и определениям, необходимым для понимания основной части диссертации.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Дано определение и проведена полная классификация характеристических классов калибровочных систем. В том числе, показано, что в общем случае все характеристические классы могут быть представлены универсальными тензорными коциклами, вовлекающими не выше второй ковариантной производной гомологического векторного поля. Доказано, что характеристические классы не зависят от выбора симметричной связности.

2. Построено универсальное Q-пространство и классифицирующее отображение, позволяющее интерпретировать характеристические классы плоских Q-многообразий, как образы классов универсального Q-пространства.

3. Для характеристических классов со значениями в дифференциальных формах, доказано существование в каждом классе серии C d-точного представителя при условии обращения в нуль соответствующего характера Понтрягина. Определенные для этих представителей потенциалы в частном случае воспроизводят лагранжианы Черна-Саймонса.

4. Получено явное выражение для характеристических классов построенных серий для ряда примеров Q-многообразий. Показано, что классы воспроизводят уже известные классы слоений, алгебр и алгеброидов Ли, а также обобщают их нетривиальным образом.

5. Показано, что характеристические классы серии C являются потенциальными источниками двухпетлевых квантовых аномалий, возникающих в процедуре БФВ-БРСТ-квантования калибровочных теорий.

Публикации по теме диссертации

[1] С. Л. Ляхович, Е. А. Мосман, А. А. Шарапов. О характеристических классах Q-многообразий // *Функц. анализ и его прил.*. – 2008. – 42:88–91.

[2] S.L. Lyakhovich, E.A. Mosman, and A.A. Sharapov. Characteristic classes of Q-manifolds: classification and applications // *J. Geom. Phys.*. – 2010. – 60(5):729–759.

[3] Elena Mosman and Alexey Sharapov. All stable characteristic classes of homological vector fields // *Letters in Mathematical Physics*. – 2010. – 94:243–261.

[4] E.A. Мосман and А.А. Шарапов. Квазиримановы структуры на супермногообразиях и характеристические классы // *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2011. – 54:47–50.

[5] С.Л. Ляхович, Е.А. Мосман, А.А. Шарапов. Характеристические классы Q-многообразий // *Сборник трудов XI Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых*. – 2007. – Т. 1. – С. 318–322. Изд-во ТГПУ.

[6] С.Л. Ляхович, Е.А. Мосман, А.А. Шарапов. Стабильные характеристические классы Q-многообразий // *Труды VI Международной конференции студентов и молодых ученых*. – 2009. – Т. 2, С. 610–613. Изд-во ТПУ.

102

Тираж 100 экз. Заказ 1138.
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.