МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ОБОСНОВАНИИ НЕРАВЕНСТВ БЕРНУЛЛИ

Калинин Сергей Иванович, д. п. н., профессор
Вятский государственный университет
kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Работа систематизирует различные способы доказательства неравенств Бернулли, основанные на методах дифференциального исчисления функций одной переменной.

Ключевые слова: неравенство Бернулли, экстремум функции, выпуклая функция, формула Тейлора.

THE METHODS OF DIFFERENTIAL CALCULUS IN PROVING OF BERNOULLI INEQUALITIES

Kalinin Sergey Ivanovich, ScD in Education, Professor
Vyatka State University
kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The work systematizes the different ways of proving Bernoulli inequalities, based on the methods of differential calculus of the one-variable functions.

Key words: Bernoulli inequality, extremum of function, convex function, Taylor formula.

Напомним, что в тематике неравенств неравенствами Бернулли называют следующие неравенства

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad (x>-1, n\in \mathbf{N}), \tag{1}$$

$$(1+x)^p \le 1+px \qquad (0<p<1, x>-1), \tag{2}$$

$$(1+x)^p \ge 1+px \qquad (p\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty), x>-1). \tag{3}$$

Неравенство (1) – хорошо известное классическое неравенство, его обычно называют *простым неравенством Бернулли* или (просто) *неравенством Бернулли*. Каждое же из неравенств (2) и (3) называется *обобщенным неравенством Бернулли*. Равенство в (1) достигается лишь тогда, когда $x = 0$ или $n=1$, а в (2)–(3) – только при условии $x = 0$. Нетрудно заметить, что простое неравенство Бернулли получается из неравенства (3) при $p = n$ ($n\in\mathbf{N}$, $n>1$).

Цель настоящей статьи заключается в систематизации простых известных нам способов доказательства данных неравенств, основанных на принципиальных положениях дифференциального исчисления функций одной переменной. Рассмотрим упоминаемые способы по порядку.

Доказательства, использующие исследование функции на экстремум

1. Введем в рассмотрение функцию $g(x) = (1+x)^p - 1 - px$, $x \in (-1;+\infty)$, и исследуем ее на экстремум. Так как $g'(x) = p(1+x)^{p-1} - p$, то $x = 0$ – единственная стационарная точка данной функции. Вычислим значение ее второй производной в найденной точке: $g''(0) = p(p-1)$. Из последнего соотношения следует, что при $0 < p < 1$ значение $g''(0)$ будет отрицательным (функция g в точке $x = 0$ имеет строгий максимум), а при $p < 0$ или $p > 1$ – положительным (функция g в точке $x = 0$ имеет строгий минимум). Следовательно, при $0 < p < 1$ будет выполняться неравенство $g(x) < 0, x \neq 0$, а при $p < 0$ или $p > 1$ – неравенство $g(x) > 0, x \neq 0$. Неравенства (2) и (3) обоснованы.

2. Неравенства (2)–(3) можно установить точно так же, обращаясь к функции $h(x) = (1+x)^p - px$, $x \in (-1;+\infty)$. Для нее $h'(x) = g'(x)$, $h''(x) = g''(x)$, потому точка $x = 0$ будет стационарной точкой функции h, а значение $h(0) = 1$ – ее строгим экстремумом: максимумом при $0 < p < 1$ и минимумом при $p < 0$ или $p > 1$. Это обосновывает рассматриваемые неравенства.

Доказательство, основанное на сравнении скоростей изменения функций $(1+x)^p$ и $1+px$

Установим сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть функции* $f(t)$, $g(t)$ *определены и непрерывны на отрезке* $[a;b]$ $(a < b)$, *дифференцируемы внутри его, а также удовлетворяют условию* $f(c) = g(c)$, *где c – некоторая внутренняя точка рассматриваемого отрезка. Если* $f'(t) < g'(t)$ при $t \in (a;c)$ и $f'(t) > g'(t)$ при $t \in (c;b)$, *то* $f(t) > g(t)$ *для всех t,* $t \in [a;c) \cup (c;b]$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = f(t) - g(t)$. Она непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. По теореме Лагранжа для $t \in [a;c) \cup (c;b]$ справедливо представление $\varphi(t) - \varphi(c) = \varphi'(\xi)(t-c)$, где ξ – некоторая внутренняя точка отрезка $[a;b]$, лежащая между c и t. Так как $\varphi(c) = 0$, $\varphi'(\xi) < 0$ при $\xi < c$, $\varphi'(\xi) > 0$ при $\xi > c$, то из этого представления получаем $\varphi(t) > 0$, или $f(t) > g(t)$, $t \in [a;c) \cup (c;b]$ Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение леммы можно переформулировать в терминах скоростей изменения функций f и g.

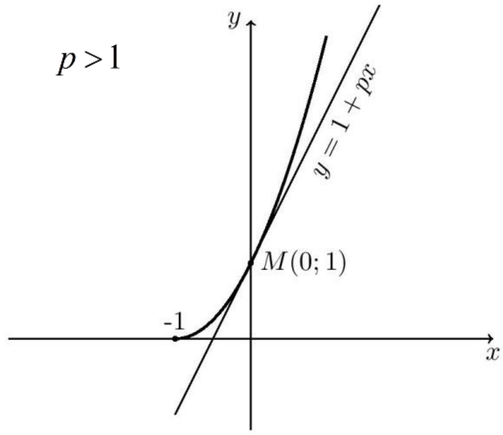
Если в условиях леммы на интервале $(a;c)$ *скорость изменения функции f меньше скорости изменения функции g, а на интервале* $(c;b)$, *наоборот, выше, то* $f(t) > g(t)$ *для всех t,* $t \in [a;c) \cup (c;b]$.

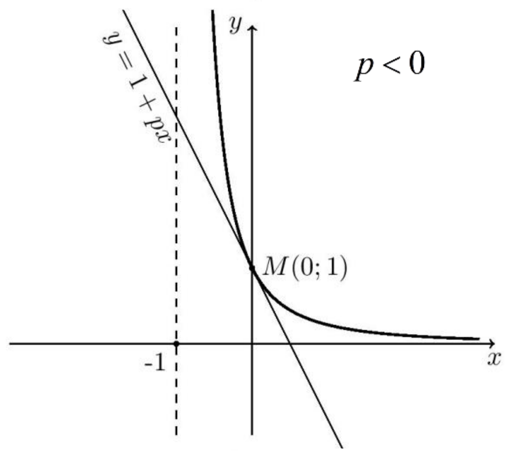
Перейдем к доказательству неравенств (2)–(3). Установим сначала (3). Положим $f(x) = (1+x)^p$, $g(x) = 1 + px$, где $p \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$, $x > -1$. Очевидно, данные функции дифференцируемы и $f(0) = g(0) = 1$. Кроме того, замечаем, что для их производных $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$ и $g'(x) = p$ выполняются соотношения $f'(x) < g'(x)$ при $-1 < x < 0$ и $f'(x) > g'(x)$ при $x > 0$. Тогда по лемме заключаем, что $f(x) > g(x), x \neq 0$. Неравенство (3) установлено.

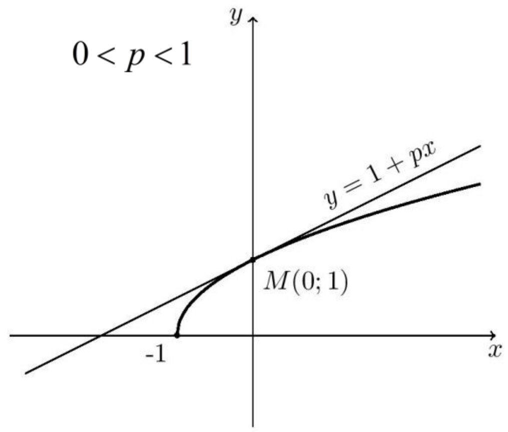
Докажем сейчас (2). Положим $f(x) = 1 + px$, $g(x) = (1+x)^p$, где $0 < p < 1, x > -1$. Так как $f'(x) < g'(x)$ при $-1 < x < 0$ и $f'(x) > g'(x)$ при $x > 0$, то снова по лемме заключаем, что $f(x) > g(x), x \neq 0$. Неравенство (2) доказано.

Выпуклость и неравенства Бернулли

Докажем неравенства (2)–(3), обращаясь к свойству выпуклости степенной функции $f(x)=(1+x)^p$. Так как $f'(x)=p(1+x)^{p-1}$, $f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2}$, то по знаку f'' заключаем: на интервале $(-1;+\infty)$ данная функция будет выпуклой вниз при $p\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ и выпуклой вверх при $p\in(0;1)$. Следовательно, при $p\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ график функции f будет лежать всеми своими точками не ниже соответствующих точек касательной к нему в точке $M(0;1)$, а при $p\in(0;1)$ – не выше (см. рис.). Так как уравнение упоминаемой касательной имеет вид $y=1+px$, то аналитически данный факт будет описываться соотношением (3) в случае выпуклости вниз функции f и соотношением (2) – в ситуации ее выпуклости вверх. Ясно, что равенство в этих соотношениях будет достигаться только, если $x=0$ (точка графика будет точкой касания). Неравенства (2)–(3) полностью обоснованы.







Доказательство посредством формулы Тейлора

Обоснуем неравенства (2)–(3), обращаясь к формуле Тейлора функции $f(x)=(1+x)^p$.

Напомним [4, с. 254–257], что если функция f определена и n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[x_0-\delta_1; x_0+\delta_2]$ $(\delta_1>0, \delta_2>0)$, внутри этого отрезка имеет конечную производную (n+1)-го порядка, за исключением, быть может, самой точки x_0, то для неё справедлива следующая формула Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$
$$x\in[x_0-\delta_1;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta_2]. \quad (4)$$

В представлении (4) точка ξ – точка, лежащая между точками x и x_0.

Запишем формулу Тейлора (4) первого порядка для функции $f(x)=(1+x)^p$, где p – действительный показатель, отличный от 0 и 1. Будем иметь

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2}(1+\xi)^{p-2}x^2,\ x\in(-1;0)\cup(0;+\infty). \quad (5)$$

В представлении (5) точка ξ лежит между точками x и $x_0=0$.

Рассмотрим остаточный член $R_n(x)=\frac{p(p-1)}{2}(1+\xi)^{p-2}x^2$ в формуле (5). Легко видеть, что при $p<0$ или $p>1$ справедливо неравенство $R_n(x)>0$, а при $0<p<1$ – неравенство $R_n(x)<0$. Следовательно, верны соотношения

$$(1+x)^p>1+px \quad (p>1, p<0, x>-1, x\neq 0), \quad (6)$$
$$(1+x)^p<1+px \quad (0<p<1, x>-1, x\neq 0). \quad (7)$$

Данные соотношения и есть соответственно неравенства (3) и (2). Заметим, неравенства (6)–(7) обращаются в равенства при $x=0$. Обобщенные неравенства Бернулли (2)–(3) полностью обоснованы.

З а м е ч а н и е 2. С различными применениями неравенств Бернулли при решении задач читатель может познакомиться, обращаясь к недавним работам [1]–[3].

Автор надеется на то, что представленный материал будет полезным в содержании обучения студентов и школьников основам математического анализа.

Список литературы

1. Дворянинов С. В., Калинин С. И. Неравенство Бернулли и его место в основной школе // Математика в школе. – 2015. – № 4. – С. 44–47.

2. Калинин С. И. Неравенства Бернулли, их геометрическая интерпретация и применения при решении уравнений // Геометрия и геометрическое образование: сб. трудов III Междунар. науч. конф. «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е. В. Потоскуева), Тольятти, 27–29 ноября 2014 года / под общ. ред. Р. А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2014 – С.63–64.

3. Калинин Сергей, Дворянинов Сергей. Неравенства Бернулли, их уточнения и применения // Математика в профильной школе. Фрактал. – 2015. – № 2. – С. 19–27.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 607 с.