

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА

М.Р. Хамидуллин, А.Б. Мазо, К.А. Поташев

Аннотация

Решается стационарная задача притока однофазного флюида к протяженной горизонтальной скважине, осложненной многозонным гидроразрывом пласта (МГРП). Модель учитывает фильтрацию жидкости в пласте, трансверсальных трещинах МГРП, а также вязкое течение внутри ствола скважины. Для решения задачи предлагаются две схемы (сквозная и итерационная) проведения вычислительного эксперимента. Рассматривается зависимость коэффициента продуктивности горизонтальных скважин, стимулированных МГРП, от геометрии пласта, трещин и свойств жидкости. **Ключевые слова:** Многозонный гидравлический разрыв пласта, горизонтальная скважина, математическая модель, метод конечных объемов, итерационный метод, многосеточный метод, QR-факторизация, масштабирование матрицы.

1. Введение

Бурение горизонтальных скважин является новой технологией в нефтегазовой отрасли по сравнению с традиционными вертикальными скважинами. Данная технология получила сильное распространение в связи с истощением традиционных месторождений нефти и газа и необходимостью разработки нетрадиционных залежей с тяжелой нефтью и низкой проницаемостью коллекторов максимально эффективно. Для увеличения контакта между поверхностью скважины и пластов была разработана технология многостадийного гидроразрыва пласта, которая многократно увеличивает продуктивность протяженных горизонтальных скважин.

2. Математическая модель

Рассматривается модельная стационарная задача притока однофазного флюида из пласта к горизонтальной скважине длиной L радиуса r_w , вдоль которой выполнен многозонный гидроразрыв. Трещины ГРП расположены вдоль ствола скважины в сечениях x_i и являются ортогональными к ее оси круговыми дисками радиуса r_{f_i} и толщиной 2δ (рис. 1). Границей расчетной области является поверхность соосного со скважиной кругового цилиндра радиуса R_c , полностью содержащего в себе перфорированный участок скважины и все трещины гидроразрыва. Проницаемость пласта k и заполненных пропантом трещин k_f считаются постоянными. При таких предположениях задача является симметричной относительно оси скважины и формулируется в виде упрощенной системы безразмерных уравнений.

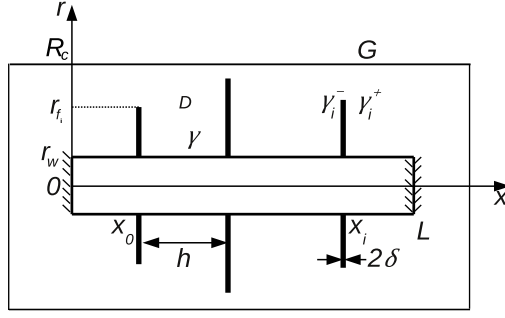


Рис. 1. Схема МГРП на ГС

- Уравнение для давления p в пласте [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

$$r, x \in G : p = 1,$$

$$r = r_w : p = \gamma p_w,$$
(1)

$$x, r \in \gamma_i^\pm, i = 1..n : \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} (2p + p_i^\mp - 3\langle p_f \rangle_i),$$

где $\gamma = \frac{\rho(v_0/\varepsilon)^2}{\Delta p} = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\eta}}$, $\tilde{\gamma}^2 = \frac{k}{\varepsilon r_w^2}$, $\tilde{\eta}^2 = \frac{L\rho^2\nu^4 r_w}{k^3 \Delta p^2}$, $\alpha = \frac{k_f}{k}$, $\beta = \frac{\delta}{L}$, $\varepsilon = \frac{r_w}{L}$, безразмерные величины, которые выражаются через размерные параметры (Δp – перепад давления, ρ – плотность жидкости, насыщающей пласт, $v_0 = \sigma(\Delta p/L)$ – характерная скорость фильтрации жидкости, σ – гидропроводность пласта). Здесь $\alpha > 1$, $0 < \beta \leq 1$, $\langle p_f \rangle_i$ – давление в i -ой трещине, p_i^\pm – значения давления p на границах γ_i^\pm трещин.

- Уравнения для давления p_w и скорости u_w в скважине

$$p'_w(x) = -8(\tilde{\eta}\tilde{\gamma} - w(x))u_w(x), \quad u'_w(x) = -2w(x)$$

$$x = 1 : u_w = 0, \quad x = 0 : p_w = 0,$$
(2)

где

$$w(x) = - \left(\frac{\partial p}{\partial r} + 2\alpha\beta \sum_{i=1}^n \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \Delta(x - x_i) \right) \Big|_{r=r_w}$$

скорость притока к скважине; Δ – дельта-функция Дирака.

- Уравнения для давления p_f в трещинах

$$\frac{\beta^2}{3r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \right) - \langle p_f \rangle_i + \tilde{p}_i = 0, \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i^- + p_i^+}{2},$$

$$r_w < r < r_f; \quad r = r_w : \langle p_f \rangle_i = \gamma p_w(x_i), \quad r = r_f : r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} = 0.$$
(3)

В отличие от упрощенных моделей ГРП [2], данная модель учитывает фильтрационное течение жидкости по трещинам, а также падение давления внутри скважины.

3. Дискретизация уравнений

Система (1)-(3) решается численно с помощью метода конечных объемов [3]. Пласт, трещины МГРП и горизонтальная скважина покрываются сеткой, имеющей логарифмическое сгущение (вблизи скважины) по оси ОР и регулярный характер по оси ОХ.

Уравнение для давления (1) интегрируется по V_k

$$\int_{V_k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) dV + \int_{V_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dV = 0, \quad (4)$$

где $dV = r dr dx$, V_k – k -ый конечный объем. Здесь и далее по p будем понимать среднее значение для давления внутри одного конечного объема, которое определяется следующим образом $\bar{p} = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} p dV$. Черта над средними величинами

опущена, чтобы не загромождать формулы. Координаты узлов V_k элемента обозначим $x_m^k, r_m^k, m = 1, 2$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\int_{x_0^k}^{x_1^k} r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_0^k}^{r_1^k} dx + \int_{r_0^k}^{r_1^k} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_0^k}^{x_1^k} r dr = 0. \quad (5)$$

Окончательно

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_0^k}^{r_1^k} \cdot (x_1^k - x_0^k) + \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_0^k}^{x_1^k} \cdot \left(\frac{(r_1^k)^2 - (r_0^k)^2}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

Если $x_m^k, r_m^k \in \gamma_i^\pm$, то $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1^k} \approx -\frac{\alpha}{\beta} (2p + p_i^\mp - 3\langle p_f \rangle_i)$.

Первое уравнение для из (3) интегрируется по V_k^f . Введя обозначение $\overline{\langle p_f \rangle_i} = \frac{1}{V_k^f} \int_{V_k^f} \langle p_f \rangle_i dV$, где $dV = r dr$ и подставив его в данное уравнение, оно примет следующий вид (черта над средними опущена)

$$r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \Big|_{\tilde{r}_0^k}^{\tilde{r}_1^k} - V_k^f \cdot \langle p_f \rangle_i + V_k^f \cdot \tilde{p}_i = 0 \quad (7)$$

Осредненные уравнения внутри скважины (2) интегрируются по КО принадлежащим скважине

$$\begin{aligned} [u] (\hat{x}_1^{k-1}) &= [u] (\hat{x}_1^k) + 2 \int_{\hat{x}_1^{k-1}}^{\hat{x}_1^k} w dx, \\ p_w (\hat{x}_0^k + h/2) &= p_w (\hat{x}_0^k - h/2) - \int_{\hat{x}_0^k - h/2}^{\hat{x}_0^k + h/2} 8[u] (\hat{x}_0^k) (\tilde{\eta}\tilde{\gamma} - w) dx \end{aligned} \quad (8)$$

При граничных условиях

$$[u] (\hat{x}_1^k = 1) = 0, \quad p_w (\hat{x}_0^k = 0) = p_0 \quad (9)$$

4. Методы решения

Предложенная задача решается численно двумя методами: многосеточным методом [4] и методом QR-факторизации [5]. Отличие этих методов заключается в том, что многосеточный метод накладывает на матрицу системы линейных уравнений (СЛАУ) условие диагонального преобладания [5], которое нарушается за счет наличие условий третьего рода на границе трещин МГРП и пласта. В следствие чего для согласования решений в пласте и трещинах МГРП необходимо организовать итерационный процесс с использованием релаксации [5, 6] по давлению. QR-факторизации не накладывает дополнительных условий на матрицу СЛАУ и позволяет получить точное решение системы для сквозной постановки, когда система уравнений для пласта и трещин МГРП решаются совместно. Однако, в таком случае в матрице системы наблюдаются заметные колебания значений коэффициентов, и поэтому разумно провести предварительное перемасштабирование матрицы [7] с тем, чтобы все диагональные элементы стали равными единице.

5. Результаты

5.1. Одиночная трещина. Рассматривается модельный однородный пористый пласт, который эксплуатируется горизонтальной скважиной, осложненной трансверсальной трещиной ГРП. Расчеты проводятся при следующих параметрах : $\varepsilon = 0.003$; $\beta = 0.0003$; $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$.

Для удобства анализа результатов вводится параметр $M = 2\alpha\beta$. Наибольшее влияние на прирост дебита жидкости q ($q = Q/q_0$, где q_0 – приток к горизонтальной скважине без трещин, а Q – с трещинами МГРП) оказывают радиус трещины ГРП, коэффициенты M и $\tilde{\eta}^2$ (рис. 2 а,б,в).

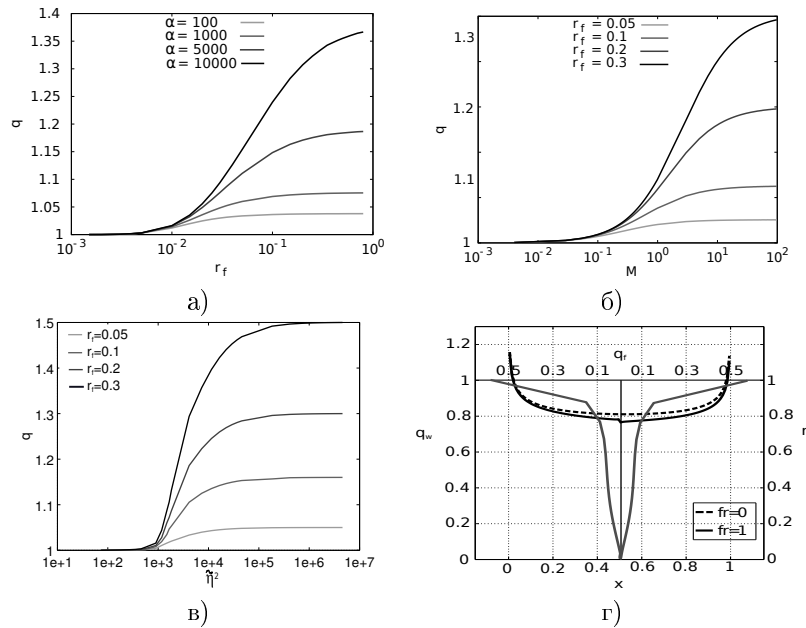


Рис. 2. Кривые изменения дебита

На рис. 2 г) приведен приток, отнесенный к единице длины, к скважине q_w и трещине ГРП q_r . Пунктирной линией изображен приток к ГС без МГРП, сплошными линиями – приток к ГС с единичной трансверсальной трещиной и приток к

берегам трещины. Как видно из графика, наличие трещины снижает приток к горизонтальной скважине, однако, трещина значительно увеличивает зону дренирования и дает существенный прирост к дебиту.

5.2. Две трещины МГРП. Рассматривается однородный пласт, который содержит в себе горизонтальную скважину, осложненную двумя трещинами МГРП. Одна трещина фиксируется на левом конце скважины, расположение второй варьируется вдоль ГС (dr – расстояние между трещинами). На рис. 3 а) изоб-

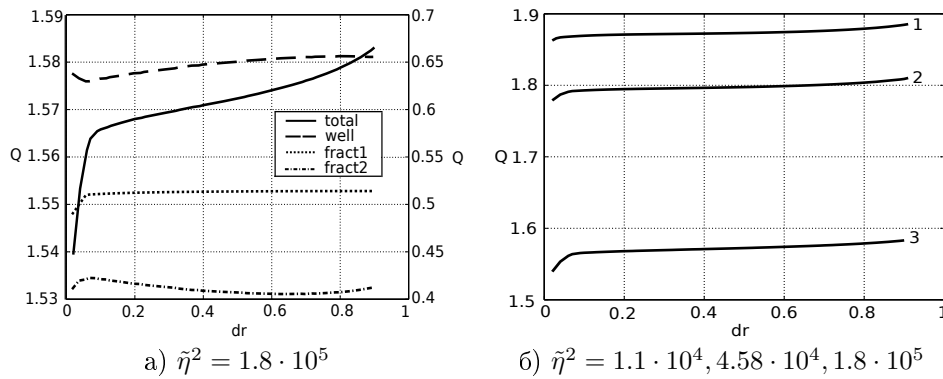


Рис. 3. Приток к трещинам МГРП

ражены кривые изменения притока жидкости к скважине и трещинам МГРП при изменении dr . При этом видно, что величина притока к первой трещине, которая фиксирована, почти не изменяется, за исключением тех случаев, когда вторая трещина расположена вблизи нее. Все пунктирные линии отложены по вспомогательной оси, тогда как кривая изменения общего притока к системе ГС и трещин МГРП по основной. На рис. 3 б) приводятся кривые изменения притока в ГС с МГРП при различных значениях параметра $\tilde{\eta}^2$.

5.3. Оптимизационная задача. Решается оптимизационная задача определения таких радиусов трещин МГРП, которые обеспечивают одинаковый приток жидкости из трещин в горизонтальную скважину (рис. 4).

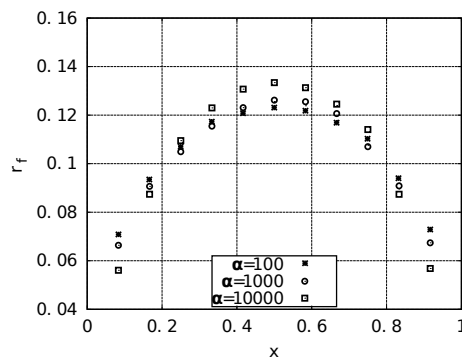


Рис. 4. Радиусы трещин, обеспечивающие равномерный приток к ГС

Алгоритм решения оптимизационной задачи:

1. Задается начальное приближение (например, одинаковые радиусы r_{f_i});
2. Определяется приток q_{f_i} , ($i = 1..N_f$ – количество трещин) к каждой из них;
3. Вычисляется среднее значение притоков $q_{av} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} q_{f_i}$;
4. Новый радиус для каждой трещины МГРП рассчитываются по формуле $\hat{r}_{f_i} = \frac{q_{av}}{q_{f_i}} r_{f_i}$;
5. Цикл 2–5 выполняется до тех пор, пока $\max_i |q_{av} - q_{f_i}| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 10^{-6}$.

6. Выводы

1. Предложена двумерная математическая модель процесса фильтрации жидкости в призабойной зоне горизонтальной скважины с МГРП с учетом фильтрации внутри трещин, а также вязкого течения внутри ствола скважины.
2. Разработан эффективный численный метод расчета изменения дебита горизонтальной скважины, осложненной трансверсальными трещинами многозонного гидравлического разрыва пласта.
3. Предлагаемая модель может быть использована для оценки эффективности проведения МГРП на горизонтальных скважинах, а также для определения радиуса трещин, дающих равномерный приток жидкости без локальных прорывов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты 13-01-970044, 13-01-970031).

Summary

M.R. Khamidullin, A.B. Mazo, K.A. Potashev Solving problem of the flow to multi fractured horizontal well. In this study, a model of stationary one phase flow to hydraulically multi fractured horizontal well formulated. The model consider flow in reservoir, in transverse hydraulic fractures and viscous flow in wellbore. To solve this problem two numeric schemes are proposed. Also analysed influence of fracture geometry, reservoir characteristics and liquid properties on productivity index (PI). **Key words:** Multistage hydraulically fracturing, horizontal well, mathematical model, finite volume method, iterative method, mutligrid matrix solver, QR factorization

Литература

1. **Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.** Подземная гидромеханика. – М.:Недра, 1993. –303 с.
2. **Каневская Р.Д.** Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.:Недра, 1999. – 212 с
3. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000, – 345 с.

-
4. **Wolfgang HackBusch** Multi-grid methods and applications // Springer, 2010, 378 p.
 5. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.:Мир, 1999, 548с.
 6. **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения линейных систем. – М.:Физматлит, 1995.
 7. **Форсайт Дж., Молер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.:Мир, 1969, – 167с.

Хамидуллин, Марсель Рашитович – аспирант института математики и механики КФУ

E-mail: *marseille.ksu@gmail.com*

Мазо Александр Бенцианович – д.ф.-м.н, профессор кафедры аэрогидромеханики института математики и механики КФУ

E-mail: *amazo@kpfu.ru*

Поташев Константин Андреевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры аэрогидромеханики института математики и механики КФУ

E-mail: *kpotashev@mail.ru*