6. Shen S., Ding F., Han J., Lin Y.L., Arya S.P., Proctor F.H. *Numerical modeling studies of wake vortices: real case simulations* // AIAA Paper 99-0755. – 1999. – 16 p.

7. Harris M., Vaughan J.M., Huenecke K., Huenecke C. *Aircraft wake vortices: a comparison of wake-tunnel data with field trial measurements by laser radar* // Aerosp. Csi. Technol. – 2000. – No 4. – P. 363-370.

8. Huenecke K. *Wake vortex investigation of transport aircraft at high-lift* // Euromech Colloquium 433. – Aachen, Germany, 2002.

М. Ю. Гарнышев, А. Б. Мазо

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Marat.Garnyshev@ksu.ru, Alexander.Mazo@ksu.ru

МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТАХ С ПРОНИЦАЕМОЙ ПОДОШВОЙ

Введение

Современные методы моделирования разработки нефтяных месторождений основаны на численном решении полных трехмерных уравнений подземной гидромеханики [1]. Такой подход требует больших затрат вычислительных ресурсов. Поэтому проблема построения упрощенных математических моделей сохраняет актуальность. В настоящей статье предлагается упрощенная плоская модель, учитывающая вертикальные потоки, обусловленные фильтрацией воды сквозь слабопроницаемую подошву.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пласт, ограниченный боковым контуром Γ и цилиндрическими поверхностями вертикальных скважин γ_k, на которых заданы давления p_k. Коллектор толщиной H заполнен двухфазным флюидом из воды и нефти; он отделен от подстилающей водонасыщенной породы слабопроницаемой подошвой с абсолютной проницаемостью k_b и толщиной H_b. Вода, поступающая в пласт через подошву, образует тонкий водонасыщенный слой $0 < z < h(x, y, t)$, по которому фильтруется под действием градиента давления, общего для этого слоя и вышележащего основного коллектора $h < z < H$ сток под подошву возможен только из слоя h. Считается, что подошва обеспечивает такую гидроизоляцию, что давление на границе $z = -H_b$ постоянно и равно гидростатическому p_Γ.

Модель фильтрации через подошву основана на допущении, что через подошву движется только вода, причем она поступает из-под подошвы в пласт, если давление $p(x, y, 0) < p_\Gamma$, и обратно при $h > 0$ и $p(x, y, 0) > p_\Gamma$. Формально это можно представить следующим выражением для скорости:

$$\begin{aligned} w_b &= -\frac{k_b}{\mu_w}\frac{p(x,y,0)-p_\Gamma}{H_b}\varphi\left(p-p_\Gamma, h\right), \\ \varphi\left(p, h\right) &= 1-\hbar(p)\left(1-\hbar(h)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где μ_w — вязкость воды, $\hbar$ — функция Хевисайда. Вектор скорости будем обозначать как

$$\mathbf{V} = (u, v, w) = (\vec{V}, w), \quad \vec{V} = (u, v).$$

Модель двухфазной фильтрации при постоянных плотностях без учета капиллярных и гравитационных сил [1] включает уравнения неразрывности фаз

$$\frac{\partial\,(ms)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{V}_w = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\,[m(1-s)]}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{V}_o=0, \tag{3}$$

закон Дарси для скоростей фильтрации фаз

$$\mathbf{V}_w=-\frac{kk_w}{\mu_w}\operatorname{grad}p,\quad \mathbf{V}_o=-\frac{kk_o}{\mu_o}\operatorname{grad}p \tag{4}$$

и линейную зависимость пористости m от давления

$$\frac{\partial m}{\partial t}=\beta\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5}$$

Здесь k — абсолютная проницаемость, μ_o — вязкость нефти, β — упругоемкость, s — водонасыщенность, k_w и k_o — относительные фазовые проницаемости воды и нефти. Как известно [2], s изменяется от s_* до s^*, при этом функция $k_w(s)$ монотонно возрастает от 0 до 1, а $k_o(s)$ убывает от 1 до 0.

Кинематическое уравнение для толщины водонасыщенного слоя h имеет следующий вид:

$$m\frac{\partial h}{\partial t}+\vec{V}(h)\cdot\nabla h=w(h)\equiv w(x,y,h),\quad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Для построения упрощенной модели введем средние значения давления

$$\bar{p}=\frac{1}{h}\int\limits_0^h p\,dz,\quad \langle p\rangle=\frac{1}{H-h}\int\limits_h^H p\,dz \tag{7}$$

по толщине водонасыщенного слоя и основного коллектора; осреднение (7) будем применять и для других параметров потока. Получим уравнения для средних. Для этого проинтегрируем (2) по z от 0 до h с учетом (5). Поскольку в водонасыщенном слое $s=s^*$, получаем

$$s^*\beta\left\{\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{p})-p(h)\frac{\partial h}{\partial t}\right\}+\nabla\cdot\left(h\bar{\vec{V}}\right)-\vec{V}(h)\cdot\nabla h+w(h)-w_b=0.$$

Заменив $w(h)$ с помощью (6), приходим к уравнению для толщины водонасыщенного слоя

$$m\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \left(h\bar{\vec{V}}\right) = w_b - s^*\beta\left\{\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{p}) - p(h)\frac{\partial h}{\partial t}\right\}. \qquad (8)$$

Последний член в правой части (8) мал и в дальнейшем учитываться не будет.

Выведем далее уравнение для среднего давления в коллекторе. Для этого сложим уравнения (2) и (3) и проинтегрируем по z от h до H. С использованием формулы (5) получим

$$\beta\frac{\partial}{\partial t}\{(H-h)\langle p\rangle\} + \beta p(h)\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle\vec{V}\right\rangle\right\} -$$
$$- \vec{V}(H)\cdot\nabla H + \vec{V}(h)\cdot\nabla h + w(H) - w(h) = 0.$$

Последние два члена этого уравнения с учетом (6) можно записать как

$$w(H) - w(h) = \vec{V}(H)\cdot\nabla H - \vec{V}(h)\cdot\nabla h - m\frac{\partial h}{\partial t}. \qquad (9)$$

В результате будем иметь

$$\beta\frac{\partial}{\partial t}\{(H-h)\langle p\rangle\} + \beta p(h)\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle\vec{V}\right\rangle\right\} - m\frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

После несложных преобразований с использованием уравнения (8) получим

$$\beta(H-h)\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle\vec{V}\right\rangle + h\bar{\vec{V}}\right\} =$$
$$= w_b - \beta\left[p(h) - \langle p\rangle\right]\frac{\partial h}{\partial t}. \qquad (10)$$

Последним членом уравнения (10) в дальнейшем пренебрегаем, поскольку β мало, а $p(h) \approx \langle p\rangle$. Для того чтобы из (10) получить уравнение для давления, выразим w_b, $\left\langle \vec{V} \right\rangle$ и $\bar{\vec{V}}$ с помощью определений (1) и (4) через $\langle p \rangle$. В первом приближении можем записать

$$w_b = -\frac{k_b}{\mu_w}\frac{\langle p \rangle - p_\Gamma}{H_b}\varphi\left(\langle p \rangle - p_\Gamma, h\right); \tag{11}$$

$$\left\langle \vec{V} \right\rangle = -\sigma\left(\langle s \rangle\right)\nabla\langle p \rangle\,; \; \sigma = \frac{kk_w}{\mu_w\left(k_w + K_\mu k_o\right)};\; K_\mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}. \tag{12}$$

$$\bar{\vec{V}} = -\frac{k}{\mu_w}\nabla\langle p \rangle\,. \tag{13}$$

Осталось получить уравнение для средней водонасыщенности в основном коллекторе. Проинтегрировав (2) по z от h до H, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(H-h)\langle ms \rangle\right\} + m(h)s(h)\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle \vec{V}_w \right\rangle\right\} -$$
$$- \vec{V}_w(H)\cdot\nabla H + \vec{V}_w(h)\cdot\nabla h + w_w(H) - w_w(h) = 0. \tag{14}$$

По аналогии с формулой (9) последние два члена могут быть записаны в виде

$$\vec{V}_w(H)\cdot\nabla H - \vec{V}_w(h)\cdot\nabla h - m(h)\frac{\partial h}{\partial t},$$

и поэтому, с учетом $s(h) = s^*$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(H-h)\langle ms \rangle\right\} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle \vec{V}_w \right\rangle\right\} =$$
$$= m\left(1-s^*\right)\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{15}$$

Допуская, что $\langle ms \rangle \approx \langle m \rangle\langle s \rangle$ и $m(h) \approx \langle m \rangle$, перепишем (15) в следующем виде:

$$\langle m \rangle\frac{\partial}{\partial t}\left\{(H-h)\langle s \rangle\right\} + \nabla\cdot\left\{(H-h)\left\langle f\vec{V} \right\rangle\right\} =$$
$$= \langle m \rangle\left(1-s^*\right)\frac{\partial h}{\partial t} - \langle s \rangle(H-h)\beta\frac{\partial\langle p \rangle}{\partial t}. \tag{16}$$

Здесь используется равенство $\vec{V}_w = f(s)\vec{V}$, в котором

$$f(s) = \frac{k_w(s)}{k_w(s) + K_\mu k_o(s)}. \tag{17}$$

Правая часть (16) мала при $h \ll H$, $s^* \sim 1$ и малых β; в дальнейшем ее не учитываем.

Итак, упрощенная модель фильтрации в пласте с проницаемой подошвой содержит три уравнения: для толщины слоя (8), для давления (10) – (13) и насыщенности (16), (17). Перепишем их в безразмерных переменных:

$$\tilde{x}, \tilde{y} = \frac{x, y}{L},\ \tilde{t} = \frac{t}{t^0},\ \tilde{h} = \frac{h}{H^0},\ \tilde{H} = \frac{H}{H^0},\ \tilde{p} = \frac{\langle p \rangle - p_\Gamma}{p^0 - p_\Gamma},$$
$$\tilde{\vec{V}} = \frac{\left\langle \vec{V} \right\rangle}{V^0},\ \tilde{\vec{V}}_h = \frac{\tilde{\vec{V}}}{V^0},\ \tilde{s} = \frac{\langle s \rangle - s_*}{s^* - s_*},\ \phi(s) = k_w + K_\mu k_o;$$
$$\sigma^0 = \frac{k}{\mu_w},\ p^0 = p_w,\ V^0 = \sigma^0 \frac{p^0 - p_\Gamma}{L},\ t^0 = \frac{m^0(s^* - s_*)L}{v^0}. \tag{18}$$

В задаче появляются три безразмерных критерия

$$\alpha = \frac{L^2 k_b}{H^0 H_b k^0},\ \varepsilon = \frac{\beta\left(p^0 - p_\Gamma\right)}{m^0(s^* - s_*)},\ K_\mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}. \tag{19}$$

Подставив (18), (19) в уравнения (8), (10) и (16), опустив тильду над безразмерными величинами, окончательно получим следующую упрощенную формулировку.

Уравнение для толщины водонасыщенного слоя:

$$\left(\frac{1}{s^* - s_*}\right) \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \left(h\vec{V}_h\right) = -\alpha p \varphi(p, h); \quad \vec{V}_h = -\nabla p; \tag{20}$$

уравнение для давления

$$\varepsilon(H - h)\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \{[(H - h)\,\phi(s) + h]\,\nabla p\} + \alpha p \varphi(p, h) = 0; \tag{21}$$

уравнение для водонасыщенности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(H-h)\,s\right]+\nabla\cdot\left[(H-h)\,f(s)\vec{V}\right]=0;\quad \vec{V}=-\phi(s)\nabla p. \quad (22)$$

2. Результаты расчета

Задача решалась в радиально-симметричной постановке с расчетной круговой областью единичного радиуса и одной добывающей скважиной радиуса r_w в центре, на которой задано давление $p = -1$. В этом случае скорость фильтрации направлена от периферии к центру, входная граница Γ определяется равенством $r = 1$, где задаются давление $p = p_\Gamma \geqslant 0$ и водонасыщенность $s = s_\Gamma \geqslant 0$. Кроме того, задавались $H \equiv 1$, $s^* = 1$, $s_* = 0$ и кубические фазовые проницаемости $k_w(s) = s^3$, $k_o(s) = (1-s)^3$. Расчет проводился с параметрами $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.5$, $K_\mu = 0.01$, $r_w = 0.001$ при двух граничных значениях водонасыщенности $s_\Gamma = 0,\ 1$ и давления $p_\Gamma = 0,\ 0.05$.

При $s_\Gamma = 0$ уравнение (22) вырождается в равенство $s \equiv 0$. В случае, когда $s_\Gamma = 1$, наблюдается продвижение фронта водонасыщенности от контура к скважине. Характер и скорость движения фронта близки к классическим [2].

На рис. 1 показаны толщина водонасыщенного слоя и скорость притока воды из-под подошвы на момент $t = 100$. Видно, что при $p_\Gamma = 0.05$ появляется участок $r \in [0.6, 1]$, где $h = 0$ и $w_b = 0$, который соответствует условию $p > 0$.

В заключение укажем на интересный эффект немонотонного поведения функции $h(r)$, который отчетливо проявляется при $K_\mu = 1$, см. рис. 2. Локальный максимум толщины слоя h в окрестности фронта насыщенности объясняется скачком градиента давления и, как следствие, торможением потоком воды за фронтом. Вид функции s при этом заметно отличается от классического.

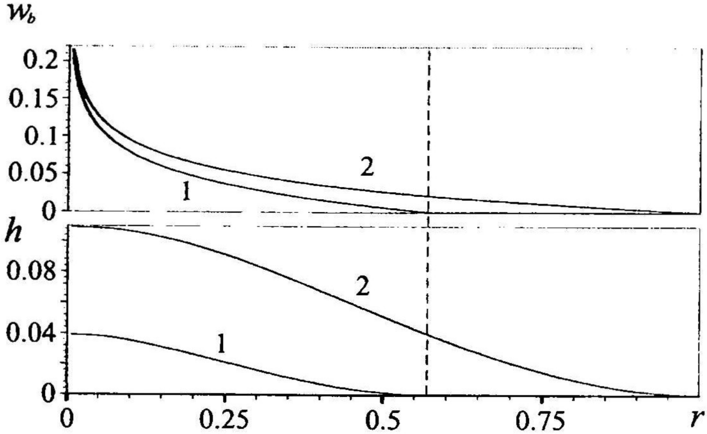

Рис. 1. Скорость воды через подошву (вверху) и толщина слоя h (внизу) при $p_\Gamma = 0.05$ (кривая 1) и $p_\Gamma = 0$ (кривая 2)

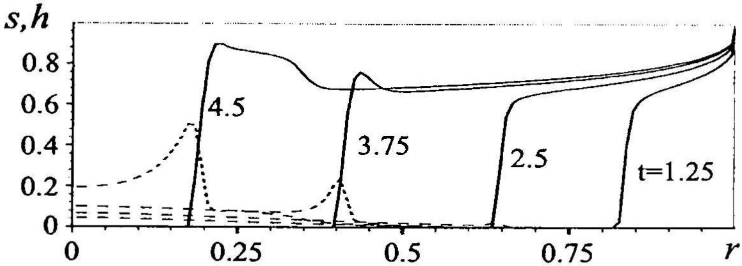

Рис. 2. Динамика водонасыщенности (сплошная линия) и толщины слоя h (штриховая линия) при $s_\Gamma = 1$, $p_\Gamma = 0.05$ и $K_\mu = 1$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00548а и 10-01-00629).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем.* – М.: Недра, 1982. – 408 с.

2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в пористых пластах.* – М.: Недра, 1984. – 208 с.

В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, Е. М. Ошмарина

Уфимский государственный авиационный технический университет, zhitnik@ugatu.ac.ru, ronika007@mail.ru, elena_ azalka@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРЕЦИЗИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

Введение

Исследование электрохимического формообразования представляет большой интерес в связи с широким использованием электрохимической размерной обработки (ЭХО) в различных отраслях промышленности. В последнее время активно развиваются технологии прецизионной обработки различных металлов и сплавов, включая нанотехнологии, с помощью импульсной ЭХО вибрирующим электрод-инструментом (ЭИ). Для этого используют различные способы, увеличивающие локализацию растворения и точность копирования.