КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра общей математики

М.С. МАЛАКАЕВ, Е.А. ШИРОКОВА

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 517

Принято на заседании кафедры общей математики

Рецензенты:
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **В.А. Сочнева**,
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **Е.П. Аксентьева**

Математика. Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Е.А.Широкова.– Казань: Казан. ун-т, 2016 – 64 с.

Учебно-методическое пособие представляет собой лекции по курсу «Математики» в КПФУ для студентов, обучающихся по направлениям «Лингвистика», «Туризм», «Международные отношения», «Востоковедение и африканистика», «Зарубежное регионоведение».

В пособии рассмотрены темы «Элементы математической логики», «Элементы теории множеств», «Комбинаторика», «Элементы теории графов», «Производные и интегралы», «Элементы теории вероятностей», «Элементы математической статистики» с набором примеров по каждой теме.

Содержание

1. Элементы математической логики……………………………………..4
2. Элементы теории множеств……………………………………………17
3. Элементы теории графов………………………………………………23
4. Функции………………………………………………………………33
5.Основные понятия и теоремы теории вероятностей…………………… 46
6.Элементы математической статистики ………………………………66

Зачем гуманитариям математика? Эта наука позволяет развить логическое мышление, умение прогнозировать на основе наблюдений и делать выводы на основе точных расчетов.

В данном курсе студенты познакомятся с элементами соответствующих разделов математики. Раздел «Элементы математической логики» позволит отличать истинные высказывания от ложных. Раздел «Элементы теории множеств» представляет собой новую интерпретацию предыдущего раздела: новые объекты при той же аксиоматике и новых обозначениях операций. Умение работать с множествами поможет при изучении раздела «Основные понятия и теоремы теории вероятностей». При изучении раздела «Элементы теории графов» студенты знакомятся с приемами поиска путей между заданными пунктами. В разделе «Функции» студенты вспомнят понятие производной и ее применения, познакомятся как с комбинаторными функциями, так и с функциями двух переменных, а также узнают, что такое интеграл и как он применяется при вычислении площадей. Эти сведения будут необходимы в разделе «Случайные величины». Раздел «Основные понятия и теоремы теории вероятностей» обогащает школьный материал по теории вероятностей важными теоремами. Раздел «Случайные величины» знакомит с видами величин и типами распределений.

Последним разделом курса является раздел «Элементы математической статистики». Этот раздел особенно важен для специалистов в области внешних связей, туризма и иностранных языков, так как именно математическая статистика и ее приемы и методы помогают в выявлении связей между событиями или явлениями и в изучении запросов населения в различных сегментах туристического рынка.

Элементы математической логики

Логика – это наука, изучающая формы и законы мышления. Само слово произошло от греческого logos, что означает «слово, понятие, разум». Законы и правила формальной логики необходимо знать для построения правильных рассуждений. Согласно основному принципу логики правильность рассуждения (вывода) определяется только его логической формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него рассуждений. Отличительной особенностью правильного вывода является то, что из истинных утверждений всегда получаются истинные заключения. Это позволяет из одних истин получать другие с помощью только рассуждений, разума и без обращения к опыту.

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384-322 гг. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться традиционной или аристотелевой логикой. Аппарат этой логики оказался настолько мощным, что, например, на его основе известный средневековый философ и богослов Фома Аквинский осуществил обоснование всей христианской теологии. Немецкий математик Лейбниц впервые высказал мысль о том, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением. Он писал, что единственное средство улучшения умозаключений состоит в уподоблению их математическим, «чтобы ошибочность их можно было увидеть глазами, и если между людьми возникают разногласия, достаточно было бы сказать «Вычислим!» и станет ясно, кто прав». Это проделал в своей работе «Исследование законов мысли» Джордж Буль, в результате чего логическая теория приняла вид обычной алгебры и получила название алгебры высказываний или булевой алгебры, которую мы и будем изучать.

Математическая логика – разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения. Как наука математическая логика содержит множество разделов, например, теорию доказательств. Мы, в основном, познакомимся с наиболее простым разделом математической логики – с **логикой высказываний**. В этом разделе вопрос об истинности или ложности высказываний рассматривается и решается на основе изучения способа построения высказываний из так называемых элементарных с помощью логических операций или связок. Основным понятием этого раздела логики естественно является высказывание.

Высказыванием называется повествовательное предложение, про которое всегда определенно можно сказать, является оно истинным (И) или ложным (Л). Примеры высказываний: «Дважды два четыре», «Земля вращается вокруг Солнца», «3>5», «10 – нечетное число», «На улице идет дождь». Побудительные предложения («Кругом», «Идите к доске»), вопросительные («Сколько времени?») и восклицательные («Ак Барс – чемпион!») высказываниями не являются. Логические операции на множестве высказываний задаются аксиоматически с применением таблиц истинности, указывающих значение (И или Л) результата операции при задании значений исходных высказываний.

Аксиоматика операций над высказываниями.

1) **Отрицание**. Логическая операция, соответствующая логической связке «не» называется отрицанием. В результате этой операции получается высказывание ложное, если исходное высказывание истинно и истинное, если исходное ложно. Она обозначается $\bar{A}$ или $\neg A$ и читается «не A». Например, если A – это высказывание «математическое утверждение доказано», то высказывание «математическое утверждение не доказано» обозначается $\bar{A}$. Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Пример. A: «ΔABC остроугольный.», тогда $\bar{A}$: «неверно, что ΔABC остроугольный» или $\bar{A}$: «ΔABC прямоугольный или тупоугольный.» Пример показывает, что отрицание не обязательно содержит частицу «не» в явном виде, – отрицание может содержаться и в смысловом оттенке фразы.

2) **Конъюнкция.** Операция конъюнкции применяется к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «и». Она обозначается A & B или A^B или A·B (читается: A и B). Например, «Он мой сокурсник и друг». Конъюнкция двух высказываний A и B будет истинной тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Поэтому таблица истинности для конъюнкции имеет вид

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Предложение «Солнце светит и на улице тепло» представляет собой конъюнкцию двух высказываний Х: «Солнце светит.» и У: «На улице тепло».

3) **Дизъюнкция.** Операция дизъюнкции применяется к двум высказываниям А и В и соответствует соединению их с помощью союза «или». Она обозначается $A \vee B$ (читается: А или В). Например, «Договор может быть заключен в устной или письменной форме». Дизъюнкция двух высказываний А и В будет ложной тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Поэтому таблица истинности для конъюнкции имеет вид

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Заметим, что в обыденной речи союз «или» употребляется в двух смыслах:

1) неразделительном, как, например, в предложении « Право бесплатного проезда имеют пенсионеры или ветераны труда» (очевидно, что если человек одновременно пенсионер и ветеран труда, то правом бесплатного проезда он может пользоваться); 2) разделительном. Например, молодой человек говорит другу: «Вечером я пойду на дискотеку или посижу в библиотеке». Очевидно, он куда-то не пойдет.

На самом деле это два разных союза. У древних римлян в качестве неразделительного «или» использовалось слово «vel», а разделительного слово «aut». Дизъюнкция это неразделительное «или».

Рассмотренные три операции называют *булевыми*.

4) **Импликация.** Операция импликации соответствует объединению двух высказываний с помощью союза «если А , то В». Она обозначается $A \rightarrow B$. Например, «Если студент-контрактник в течение 2-х сессий получал только отличные отметки, то по его ходатайству деканат может перевести его на бюджетную форму обучения». Импликация двух высказываний А и В ложна тогда и только тогда, когда высказывание А истинно, а В – ложно. Высказывание А называется посылкой импликации, а высказывание В – следствием. Таблица истинности имеет вид

A	B	$A \rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Приведем несколько выражений, которые считаются имеющими тот же смысл, что и «если А , то В» (где А и В высказывания): «А влечет В», «А только тогда, когда В», «В при условии А», «А, только если В», «В, если А». Следует уточнить, что логическими операциями никак не учитывается смысл высказываний в них участвующих. Высказывания рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством быть истинными или ложными. Например: Пусть Х: «Луна сделана из зеленого сыра», а У: «2+2=5», тогда согласно таблице раз Х ложно, то импликация $X \rightarrow У$ будет истинна , хотя никакой связи по смыслу между Х и У нет. Точно так же, если У– это «2+2=4», то $X \rightarrow У$ – истинно , причем совершенно независимо от того есть ли связь между «Луна состоит из зеленого сыра» и «2+2=4». Такое уточнение смысла импликации «если Х, то У» не противоречит обыденному смыслу. Например обещание «Если мне подарят велосипед, то я дам тебе покататься» воспринимается как ложь только в том случае, если мне подарили велосипед, а покататься на нем я не дал.

5) **Эквиваленция.** Эквиваленция обозначается $A \leftrightarrow B$ (читается: А эквивалентно В или А равносильно В или А тогда и только тогда, когда В). Например, «Четное число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3» или «Студент допускается к сессии в том и только в том

случае, если он сдаст все зачеты». Эквиваленция двух высказываний А и В истинна тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают. Поэтому таблица истинности для эквиваленции имеет вид

A	B	A↔B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Основные законы логики высказываний

Следующие законы являются логическими следствиями введенных булевых операций и доказываются, как теоремы, с применением таблиц истинности. Перечислим эти законы.

1. Коммутативность конъюнкции: $A \wedge B = B \wedge A$.

2. Коммутативность дизъюнкции: $A \vee B = B \vee A$.

3. Ассоциативность конъюнкции: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

4. Ассоциативность дизъюнкции: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

5. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

6. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

7. Закон де Моргана относительно конъюнкции: $\overline{(A \wedge B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$.

8. Закон де Моргана относительно дизъюнкции: $\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

9. Закон поглощения для дизъюнкции: $A \vee (A \wedge B) = A$.

10. Закон поглощения для конъюнкции: $A \wedge (A \vee B) = A$.

11. Закон идемпотентности для конъюнкции: $A \wedge A = A$.

12. Закон идемпотентности для дизъюнкции: $A \vee A = A$.

13. Закон противоречия: $A \wedge \bar{A} = "Л"$.

14. Закон исключения третьего: $A \vee \bar{A} = "И"$.

15. Закон двойного отрицания: $\overline{(\bar{A})} = A$.

16. $A \wedge "Л" = "Л"$, $A \wedge "И" = A$.

17. $A \vee "Л" = A$, $A \vee "И" = "И"$.

Равенства в приведенных законах означает совпадение значений левой и правой частей равенства при любых значениях входящих в выражение высказываний.

Доказательство каждого закона представляет собой составление таблицы истинности, перебор всевозможных значений входящих в закон высказываний и сравнение значений высказываний левой и правой частей равенства. Приведем примеры доказательств законов 5 и 7.

Для доказательства закона 5, зададим всевозможные наборы значений для множеств A, B и C (первые три столбца).

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	И

Заполним 4-й, 6-й и 7-й столбцы в соответствии с аксиоматически заданными таблицами значений для соответствующих операций. После этого заполним 5-й и 8-й столбцы. Мы видим, что значения на соответствующих строках совпадают. Закон доказан.

Аналогичным способом доказывается 7-й закон:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л

Л	И	Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Студенты должны самостоятельно доказать остальные законы.

Полученные законы мы сможем применять для упрощения сложных высказываний.

Формулы логики высказываний

Пусть A,B,C,…,X,У,Z (прописные латинские буквы)– переменные, которыми мы будем обозначать элементарные высказывания. Такие переменные называются высказывательными или пропозиционными. Рассмотрим: символы логических операций $\bar{\ }$ ($\neg$) , $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и скобки для указывания порядка действий.

Из перечисленных элементов составляются формулы. Чтобы из повествовательного предложения получить формулу нужно

1) выделить все элементарные высказывания и логические операции, образующие данное предложение,
2) заменить их соответствующими буквами и символами,

3) в соответствии со смыслом предложения расставить скобки, установив порядок действий.

Примеры. 1. Предложение «Сдать зачет по математике можно, зная блестяще теорию или решив все примеры » можно представить так $A\vee B$, где A: «Сдать зачет можно, зная блестяще теорию», B: «Сдать зачет можно, решив все примеры»

2. Предложение «Если Сувар или Таиф проиграют, а Феникс выиграет тендер, то Альбатрос упрочит свое положение и мы понесем убытки» представляет собой импликацию $A\rightarrow B$, где посылка A составлена из трех элементарных высказываний: P: « Сувар проиграет», Q: «Таиф проиграет», R: «Феникс выиграет», а заключение B есть конъюнкция высказываний: D: «Альбатрос упрочит свое положение» и C: «Мы

понесем убытки».С помощью введенных символов первоначальное предложение записывается в виде формулы: F: $((P\vee Q)\wedge R)\rightarrow(D\wedge C)$.

Если истинностные значения простых переменных P, Q, R, D, C соответственно равны И, Л, Л, И, Л, то истинностное значение сложного высказывания F может быть определено механически, используя таблицы истинности логических операций, следующим образом

$$((P\vee Q)\wedge R)\rightarrow(D\wedge C)$$

$$((\text{И}\vee\text{Л})\wedge\text{Л})\rightarrow(\text{И}\wedge\text{Л})$$

$$(\text{И}\wedge\text{Л})\rightarrow\text{Л}$$

$$\text{Л}\rightarrow\text{Л}$$

$$\text{И}$$

Таким образом, при заданном наборе значений простых высказываний, используя аксиоматику логических операций, мы определяем значение высказывания, получаемого с помощью логической формулы.

Если дано сложное высказывание в виде логической формулы, то часто бывает важно знать, для какого набора значений переменных это сложное высказывание истинно, для какого ложно. Тогда, как и при доказательстве законов логики, применяют таблицы истинности, в которых дается перебор всех возможных комбинаций значений простых высказываний, из которых состоит логическая формула, и получение соответствующих значений сложного высказывания.

Пример. Доказать, что при любых значениях P и Q справедлива формула $(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\bar{P}\vee Q)$.

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{P}\vee Q$	$(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\bar{P}\vee Q)$
И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Высказывание, истинное при любых значениях входящих в нее простых высказываний, называется **тавтологией**.

В случае, когда логическая формула содержит булевы операции, доказательства тавтологий или упрощение формул проще проводить, не строя таблицы истинности, а применяя доказанные нами основные законы логики высказываний.

Пример. Доказать тавтологию $P \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \bar{Q})$.

Согласно закону 14 правая часть эквиваленции имеет вид $P \wedge "И"$, Применяем вторую часть закона 16, тогда правая часть превращается в P. Поскольку любое высказывание равносильно самому себе, тавтология доказана.

Пример. Упростить высказывание $\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee (A \vee (C \wedge \bar{A}))$.

Последовательно применяя законы, имеем: $\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee (A \vee (C \wedge \bar{A})) = = (\bar{A} \wedge \overline{(A \wedge B)}) \vee ((A \vee C) \wedge (A \vee \bar{A})) = (\bar{A} \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})) \vee (A \vee C) =$
$((\bar{A} \wedge \bar{A}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})) \vee (A \vee C) = (\bar{A} \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})) \vee (A \vee C) = \bar{A} \vee (A \vee C) = (\bar{A} \vee A) \vee C =$
$= "И" \vee C = "И"$. Таким образом, исходное высказывание – тавтология.

Пример. Доказать, что справедлива формула $(A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{A}) = (A \vee B) \wedge \overline{(A \wedge B)}$.

$(A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{A}) = ((A \wedge \bar{B}) \vee B) \wedge ((A \wedge \bar{B}) \vee \bar{A}) =$
$= ((A \vee B) \wedge (\bar{B} \vee B)) \wedge ((A \vee \bar{A}) \wedge (\bar{B} \vee \bar{A})) =$
$((A \vee B) \wedge "И") \wedge ("И" \wedge (\bar{B} \vee \bar{A})) = (A \vee B) \wedge (\bar{B} \vee \bar{A}) = (A \vee B) \wedge \overline{(A \wedge B)}$, что и требовалось доказать.

Построение противоположного высказывания

Пользуясь законами де Моргана, нетрудно определить правило, по которому строится высказывание, противоположное данному. Для построения противоположного высказывания, следует записать высказывание в виде формулы, а затем надчеркнуть эту формулу и упростить полученное высказывание, пользуясь доказанными законами математической логики.

Очень часто в высказываниях (особенно, математических) присутствуют кванторы общности ($\forall$) или существования ($\exists$). При построении противоположного высказывания данные кванторы взаимно заменяют друг друга. Поэтому правило построения высказывания, противоположного высказыванию, содержащему кванторы, такое. **В исходном высказывании выделяется основная фраза, которая содержится в последней части высказывания. При построении противоположного высказывания кванторы взаимно заменяются, а последняя фраза заменяется на противоположную.**

Примеры. 1. Исходная фраза: «Каждого человека посещает мысль о том, что либо он должен поместить все деньги в банк, либо приобрести акции нефтяных компаний».

Запишем с помощью кванторов: « у $\forall$ человека $\exists$ мысль (($\forall$ деньги положить в банк)$\vee$(приобрести акции нефтяных компаний))». То, что мы поместили в скобку, и есть основная фраза, содержащаяся в последней части высказывания. Фраза, противоположная той, что в скобках, в формальной записи имеет вид: (($\exists$ деньги, не положенные в банк)$\wedge$(не приобретать акции нефтяных компаний)). Операция дизъюнкции заменена на операцию конъюнкции в соответствии с законом де Моргана. Запись высказывания, противоположного исходному, в кванторах имеет вид: «$\exists$ человек , у которого $\forall$ мысль (($\exists$ деньги, не положенные в банк)$\wedge$(не приобретать акции нефтяных компаний))».

После некоторой литературной обработки наше высказывание принимает вид: «Есть люди, твердо уверенные в том, что не все деньги следует доверять банкам и что нельзя покупать акции нефтяных компаний».

2. Аналогичным способом строятся высказывания, противоположные математическим, таким как «Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом x, обладающем свойством $|x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$».

Запишем исходное высказывание в кванторах: «$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x, |x| < \delta, (|f(x)| < \varepsilon)$». Противоположное высказывание в кванторах имеет вид «$\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0 \exists x, |x| < \delta, (|f(x)| \geq \varepsilon)$». Читается противоположное высказывание так: «существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого положительного δ можно подобрать такое x, что $|x| < \delta$, и при этом $|f(x)| \geq \varepsilon$».

Кстати, исходное высказывание – это математическое определение того факта, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ предел, равный 0. Противоположное высказывание – это математическое определение того, что у функции $f(x)$ в точке $x=0$ либо не существует предела, либо есть предел, отличный от нуля.

Задания

1. Среди предложений выделите высказывания и определите их истинностные значения: 1) Рыбы живут в воде. 2) Осень – хорошее время года. 3) Казань – столица США. 4) Волга впадает в Каспийское море. 5) Не ходи сюда! 6) 2 + 2 = 4. 7) 3 – 5 = 8.

2. Пусть А: «Сегодня буду писать отчет»; В: «Сегодня буду отдыхать»; С: «На улице идет дождь». Сформулируйте предложения соответствующие формулам:

1) А^В, 2) С^В, 3) ¬А^В, 4) С^А, 5) А ∨ ¬В, 6) ¬ С ∨ А, 7) С→ В∨А, 8) (В↔С) ^А.

3. Составьте формулы, соответствующие повествовательным предложениям, обозначая буквами элементарные высказывания: 1) Идет дождь или кто-то не выключил душ; 2) Если вечером будет туман, то я останусь дома или вынужден буду взять такси; 3) Если я устал или голоден, то не могу заниматься; 4) Если Роман проснется и пойдет на лекцию, то он будет доволен, а если не проснется, то не будет доволен; 5) Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные канавы, а если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят свои фермы.

4. Сформулируйте словесно высказывания:

1) (А∨ В) →С, С→(А^В), где А: лето жаркое; В: лето дождливое; С: я поеду в отпуск;

2) (А^ В) →С, (А∨ В) → С, где А: фигура ромб; В: фигура прямоугольник; С: фигура параллелограмм;

3) (¬ А∨В) → ¬С, С→(А∨ ¬В), где А: сегодня светит солнце; В: сегодня сыро; С: я поеду на дачу.

5. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность формул:

1) А → (В → С) ≡ (А^В) →С;

2) (А→В) ^(А→С) ≡ А→(В^С).

6. В результате тестирования были установлены следующие факты(И):

1) если Иванов не увлекается историей, то либо Петров , либо Сидоров ею увлечены, причем не Сидоров и Иванов одновременно;

2) если Сидоров не увлечен историей, то Иванов увлечен ею, Петров нет;

3) если Иванов историк, то и Сидоров историк.
Выяснить, кто согласно указанным фактам увлекается историей.

7. Пусть значение высказывания $A \rightarrow B$ = И, что можно сказать о значении высказывания
$\neg A \wedge B \leftrightarrow A \vee B$?

8. Проверить, является ли данная логическая формула тавтологией:
1) $(A \vee B) \rightarrow B \vee \neg A$; 2) $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$; 3) $A \rightarrow (A \vee (\neg B \wedge A))$.

9. Переведите каждое рассуждение в логическую символику и установите, имеет ли место в нем логическое следование:
1) Если он принадлежит к нашей компании (К), то он храбр (Х) и на него можно положиться (П). Он не принадлежит нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.
2) В бюджете возникнет дефицит (D), если не повысят пошлины (Р). Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся (О). Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.
3) Если он автор этого слуха (А), то он глуп (Г) или беспринципен (Б). Он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.
4) Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он бы и не сказал. Но она узнала. Значит: Она его спросила.
5). Если бы он не пошел в кино, он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание.

10. Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Если бы он не пошел в кино, он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание».

19. Пользуясь правилом построения противоположного высказывания, записать утверждения, противоположные следующим:
1) На любом курсе каждого факультета КГУ есть студенты, сдающие все экзамены на «отлично».
2) Каждый студент философского факультета КГУ имеет друга, который умеет решать все логические задачи.

3) В любом самолете на рейсе Вашингтон-Москва присутствует хотя бы один сотрудник силовых органов, в каждой пуговице одежды которого вмонтирован микрофон.

Элементы теории множеств

Понятие **множества** или **совокупности** принадлежит к числу простейших математических понятий. Оно не имеет точного определения. Любое множество задается своими элементами. Примерами являются множество книг в библиотеке или множество студентов, присутствующих на занятии. Обычно множество обозначают заглавными латинскими буквами (A), а его элементы строчными латинскими буквами (a). То, что элемент принадлежит множеству, обозначают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то этот факт обозначают так: $a \notin A$.

Чтобы задать множество, следует или перечислить его элементы, или указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они.

Примеры. 1. Множество натуральных чисел можно задать так: N={1, 2, 3,…,n, n+1,…}. Из записи следует, что все натуральные числа, начиная с двойки, получаются прибавлением единицы к предыдущему числу.

2. Множество целых чисел можно задать так: Z={0, 1 ,–1, 2, –2,…,n, –n,…}.
3. Множество рациональных чисел можно задать так:

$Q=\{\frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N\}$. Вертикальная черта внутри фигурной скобки означает, что далее идет описание характеристических свойств введенных обозначений.

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов. Если все элементы множества А содержатся в множестве В, то говорят, что А является подмножеством множества В и обозначают $A \subset B$.

В рамках рассматриваемой математической теории вводят два исключительных множества: пустое множество ($\varnothing$), не содержащее элементов, и универсальное множество или «универсум» (U), содержащее все элементы данной теории.

Аксиоматика операций над множествами

Основными операциями над множествами являются следующие.

1. **Дополнение.** Для любого множества $A \subset U$ определим дополнение $A^c = \{b \in U \mid b \notin A\}$.

Например, в множестве вещественных чисел дополнением к множеству Q является множество всех иррациональных чисел.

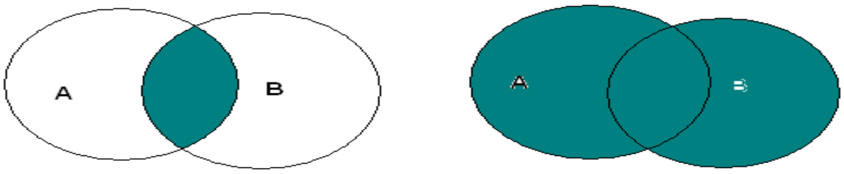
2. **Объединение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим объединение $A \cup B = \{c \in U \mid (c \in A) \vee (c \in B)\}$.

Например, объединением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [1,7].

2. **Пересечение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим пересечение $A \cap B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \in B)\}$.

Например, пересечением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [2,3].

Для иллюстрации операций над множествами вводят диаграммы Эйлера-Венна – круги, обозначающие множества. Так, введенные нами операции иллюстрируются следующим образом.

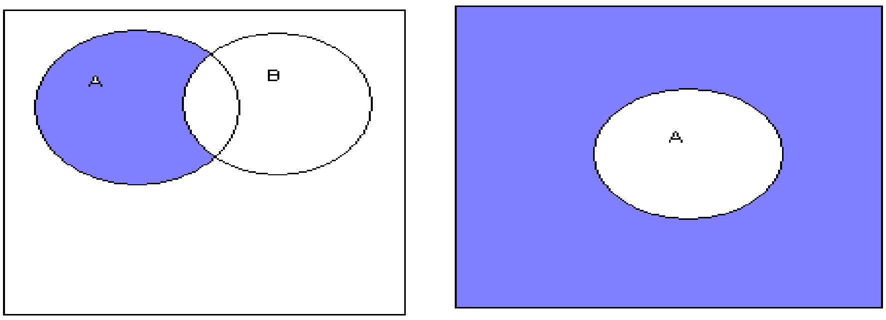


A ∩ B A ∪ B

Подчеркнем, что диаграммы Эйлера-Венна не могут служить доказательствами равенства множеств.

Кроме введенных нами трех операций над множествами существуют еще операции, которые могут быть представлены как комбинация простейших операций. Введем операцию **вычитания** множеств:

$A \setminus B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \notin B\}$. На диаграмме Эйлера-Венна результат вычитания выглядит так:



A\B $B^c = U \setminus B$

Докажем, что $A \setminus B = A \cap B^c$. Для доказательства равенства двух множеств следует убедиться в том, что все элементы первого множества принадлежат второму и все элементы второго множества принадлежат первому.

а) Пусть $x_0 \in A \setminus B$. Из определения следует, что справедливо высказывание $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \notin B)$. Из определения дополнения к множеству B следует, что $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B^c)$. Теперь из определения пересечения множеств следует, что $x_0 \in A \cap B^c$. То есть, любой элемент из множества $A \setminus B$ принадлежит множеству $A \cap B^c$.

б) Пусть $x_0 \in A \cap B^c$. Из определения пересечения множеств следует, что $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B^c)$. Из определения дополнения множества получим $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \notin B)$. В соответствии с определением разности множеств $x_0 \in A \setminus B$. Следовательно, любой элемент из множества $A \cap B^c$ принадлежит множеству $A \setminus B$.

Доказательство равенства двух множеств закончено.

Нетрудно заметить, что при доказательстве, связанном с множествами, большую роль играют высказывания, присутствующие в определении высказывания. Поскольку эти высказывания содержат логические операции, естественно предположить, что законы, справедливые для логических операций, могут быть перенесены на множества. Это, действительно, так.

Основные законы теории множеств

Следующие законы являются следствием соответствующих законов логики высказываний. Перечислим эти законы.

1. Коммутативность пересечения: $A \cap B = B \cap A$.

2. Коммутативность объединения: $A \cup B = B \cup A$.

3. Ассоциативность пересечения: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

4. Ассоциативность объединения: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

5. Дистрибутивность пересечения относительно объединения: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6. Дистрибутивность объединения относительно пересечения: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Закон де Моргана относительно пересечения: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

8. Закон де Моргана относительно объединения: $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$.

9. Закон поглощения для объединения: $A\cup(A\cap B) = A$.

10. Закон поглощения для пересечения: $A\cap(A\cup B) = A$.

11. Закон идемпотентности для пересечения: $A\cap A = A$.

12. Закон идемпотентности для объединения: $A\cup A = A$.

13. Закон противоречия: $A\cap A^c = \varnothing$.

14. Закон исключения третьего: $A\cup A^c = U$.

15. Закон двойного отрицания: $(A^c)^c = A$.

16. $A\cap\varnothing = \varnothing$, $A\cap U = A$.

17. $A\cup\varnothing = A$, $A\cup U = U$.

Для доказательства равенств, присутствующих в законах, следует показать, что множества, стоящие по обе стороны знака равенства, состоят из одних и тех же элементов.

Приведем пример **доказательства закона 6**.

а) Пусть $x_0 \in A\cup(B\cap C) \to (x_0 \in A)\vee(x_0 \in (B\cap C)) \to$ $(x_0 \in A)\vee((x_0 \in B)\wedge(x_0 \in C))$. Все использованные нами импликации основываются на определениях. Теперь применим к последнему высказыванию шестой закон логики высказываний. Получим $x_0 \in A\cup(B\cap C) \to ((x_0 \in A)\vee(x_0 \in B))\wedge((x_0 \in A)\vee(x_0 \in C))$. В соответствии с определениями пересечения и объединения множеств имеем $x_0 \in A\cup(B\cap C) \to (x_0 \in (A\cup B))\wedge(x_0 \in (A\cup C)) \to x_0 \in ((A\cup B)\cap(A\cup C))$. Таким образом,

$$x_0 \in A\cup(B\cap C) \to x_0 \in ((A\cup B)\cap(A\cup C)).$$

б) Пусть $x_0 \in ((A\cup B)\cap(A\cup C)) \to ((x_0 \in A)\vee(x_0 \in B))\wedge((x_0 \in A)\vee(x_0 \in C))$, что следует из определений пересечения и объединения. Теперь согласно шестому закону логики высказываний $x_0 \in ((A\cup B)\cap(A\cup C))$ $\to (x_0 \in A)\vee((x_0 \in B)\wedge(x_0 \in C))$, и снова из определений объединения множеств и пересечения множеств $x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ $\to x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Доказательство закончено.

Студенты должны самостоятельно доказать все равенства, приведенные в законах теории множеств, основываясь на соответствующих равенствах в законах логики высказываний, и убедиться в том, что такие разные разделы математики, как математическая логика и теория множеств, могут иметь сходные свойства с точки зрения действующих там законов.

Используя законы теории множеств, легко упрощать представление множеств, заданных с помощью последовательности операций.

Пример.
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) =$$
$$= A \cap B.$$

Задания

1. Прочтите записи и перечислите элементы каждого из множеств:

$A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$; $D = \{x \mid x \in Z, -5 < x \le 2\}$; $E = \{x \mid x \in Z, -3 \le x \le 2\}$.

2. Установите, какое из подмножеств А или В является подмножеством другого множества, если: 1) A={1; 2; 3; ... 10}, B={2; 4; 6 ;8}; 2) A={2; 4; 6; 8; 10}, В - множество чисел первого десятка; 3) А – множество четных однозначных чисел, В - множество однозначных чисел, кратных 4; 4) А- множество двузначных натуральных чисел, В - множество четных двузначных чисел; 5)A=N, D=No; 6) A=N, B=Z; 7) A=R, B=Z.

3. Заданы множества: A={3,5,7,a,c}; B={a,p,c,3,5,6,7}; C={a,3,c,7}. Расположите их так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

4. Пусть А – множество всех натуральных делителей числа 18; В – множество всех натуральных делителей числа 24. Найти: 1) множество общих делителей чисел 18 и 24; 2) самый большой общий делитель.

5. Найдите пересечение и объединение множества А различных букв, входящих в слово “педагогика”, и множества В различных букв, входящих в слово “математика”.

6. Пусть даны множества А, В, С. Найдите $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, если:

1) A={2; 3; 8; 9}, B={16; 18; 20}, C=N; 2) A=N, B={-2; -1; 0; 1; 2}, C={3; 5; 7};
3) A={3; 4; 5; ...}, B=N, C={-1; 0; 1; 2}; 4) A={21; 22; ...; 26}, B={3; 5}, C=N.

7. Заданы множества $A=\{1,2,3,5,a,c\}$, $B=\{1,2,3,p,a\}$, $C=\{5,c\}$. Какие из приведенных соотношений: 1) $B\subset A$,2) $C\subset A$, 3) $A\backslash B=C$, 4) $A\cap B=C$, 5) $A\cap C=C$ верны?

8. Найти пересечение и объединение множеств:1) [3; 4] и [2; 6]; 2) (-1; 3) и (-4; 2]; 3) (-2; 1] и [-2; 0); 4) (-∞; 3) и (-1; ∞); 5) A=[-2; 3], B=(1; 5]; 6) A=[-1; 4], B=[1; 2); 7) A=(-∞; 2), B=[-3; ∞). (**Указание**. Для решения использовать числовую прямую).

9. Дано: A={1; 2; 3}, B={2; 4}, C=[2; 8]. Найдите результат следующих операций:

1) $A\cap(B\cup C)$; 2)$A\cup(B\cap C)$; 3)$(A\cup B)\cap C$; 4)$(A\cap C)\cup(A\cap B)$.

10. Найдите результаты операций для каждой тройки множеств A, B, C:

1) $A\cup(B\cap C)$; 2) $(A\cap B)\cap C$; 3) $A\cap(B\cup C)$; 4) $(A\cap B)\cup C$, если

а) A=(0;2], B=[-1; 3], C=(-3; 6); б) A=(-3; 6), B=[0; 4), C=[2; 7].

11. Найти разности A\B и B\A множеств A и B, если: 1) A={1; 2; 3; ...; 10}, B={5; 6; ...; 12}; 2) A – множество натуральных делителей числа 18; B – множество натуральных делителей числа 24; 3) A – множество правильных многоугольников, B – множество прямоугольников; 4) $A=\{x|x\in R,\ 2\le x\le 6\}$, $B=\{x|x\in R,\ 3\le x\le 7\}$; 5) $A=\{x|x\in R,\ 1<x\le 4\}$, $B=\{x|x\in R,\ 2<x\le 8\}$; 6) $A=\{x|x\in R,\ 0<x<2\}$, $B=\{x|x\in R,\ 1<x\le 3\}$.

12. Для множеств A, B, C общего положения (т.е. $A\cap B\cap C\neq\varnothing$) на диаграмме Эйлера изобразить множества

1) $(A\cup C)\backslash B$; 2) $(A\backslash C)\cup B$; 3) $(A\cap B)\backslash C$; 4) $(A\cup B)\cap C$.

Элементы теории графов.

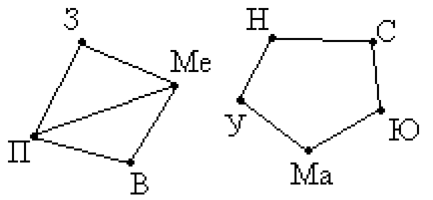
Графы – замечательные математические объекты, с их помощью можно решать очень много различных, внешне не похожих друг на друга задач. В математике существует целый раздел – теория графов, который изучает графы, их свойства и применение. Мы же обсудим только самые основные понятия, свойства графов и некоторые способы решения задач.

Понятие графа

Рассмотрим две задачи.

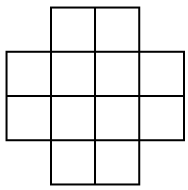
Задача 1. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Венера; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса ?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.



Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4х4 убрать угловые клетки.

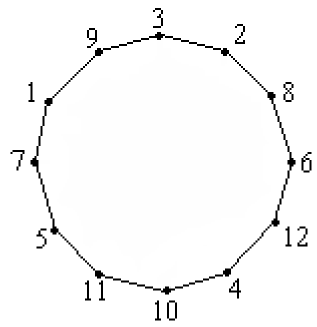


Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках ровно по одному разу ?

Решение: Занумеруем последовательно клетки доски:

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

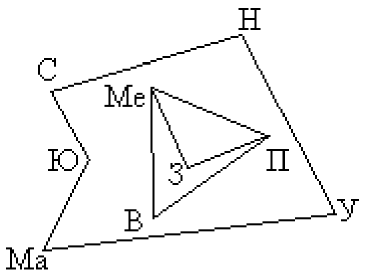
А теперь с помощью рисунка покажем, что такой обход таблицы, как указано в условии, возможен:



Мы рассмотрели две непохожие задачи. Однако решения этих двух задач объединяет общая идея – графическое представление решения. При этом и картинки, нарисованные для каждой задачи, оказались похожими: каждая картинка – это несколько точек, некоторые из которых соединены линиями.

Такие картинки и называются *графами*. Точки при этом называются *вершинами*, а линии – *ребрами* графа. Заметим, что не каждая картинка такого вида будет называться графом. Например. если вас попросят нарисовать в тетради пятиугольник, то такой рисунок графом не будет. Будем называть что рисунок такого вида, как в предыдущих задачах, графом, если есть какая-то конкретная задача для которой такой рисунок построен.

Другое замечание касается вида графа. Попробуйте проверить, что граф для одной и той же задачи можно нарисовать разными способами; и наоборот для разных задач можно нарисовать одинаковые по виду графы. Здесь важно лишь то, какие вершины соединены друг с другом, а какие – нет. Например, граф для задачи 1 можно нарисовать по-другому:



Такие одинаковые, но по-разному нарисованные графы, называются *изоморфными*.

Степени вершин и подсчет числа ребер графа

Введем еще одно определение: Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер. В связи с этим, вершина, имеющая четную степень, называется четной вершиной, соответственно, вершина, имеющая нечетную степень, называется нечетной вершиной.

С понятием степени вершины связана одна из основных теорем теории графов –теорема о честности числа нечетных вершин. Докажем ее мы немного позднее, а сначала для иллюстрации рассмотрим задачу.

Задача 3. В городе М 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими ?

Решение: Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра – провода, их соединяющие. Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, т.е. степень каждой вершины нашего графа – 5. Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2 (т.к. каждый провод имеет два конца, то при суммировании степеней каждый провод будет взят 2 раза). Но тогда количество проводов получится разным $15 \times 5/2 = 37{,}5$. Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным.

Ответ. Соединить телефоны таким образом невозможно.

Теорема: Любой граф содержит четное число нечетных вершин.

Доказательство: Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной. А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

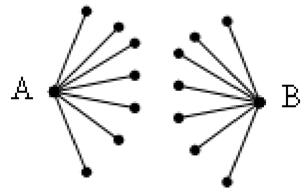
Связность графа

Есть еще одно важное понятие, относящееся к графам – понятие связности.

Граф называется *связным,* если из любые две его вершины можно соединить *путем,* т.е. непрерывной последовательностью ребер. Существует целый ряд задач, решение которых основано на понятии связности графа.

Задача 4. В стране С 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой.

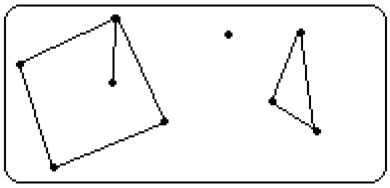
Доказательство: Рассмотрим два произвольных А и В города и допустим, что между ними нет пути. Каждый из них соединен дорогами не менее, чем с семью другими, причем нет такого города, который был бы соединен с обоими рассматриваемыми городами (в противном случае существовал бы путь из А в В). Нарисуем часть графа, соответствующую этим городам:



Теперь явно видно, что мы получили не менее различных 16 городов, что противоречит условию задачи. Значит утверждение доказано от противного.

Если принять во внимание предыдущее определение, то утверждение задачи можно переформулировать и по-другому: “Доказать, что граф дорог страны С связен.”

Теперь вы знаете, как выглядит связный граф. Несвязный граф имеет вид нескольких “кусков”, каждый из которых – либо отдельная вершина без ребер, либо связный граф. Пример несвязного графа вы видите на рисунке:



Каждый такой отдельный кусок называется *компонентой связности графа.* Каждая компонента связности представляет собой связный граф и для нее выполняются все утверждения, которые мы доказали для связных графов. Рассмотрим пример задачи, в которой используется компонента связности:

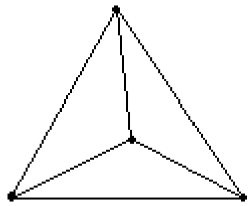
Задача 5. В государстве Н только один вид транспорта – поезд. Из столицы выходит 21 железнодорожная колея, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно доехать в город Дальний.

Доказательство: Понятно, что если нарисовать граф ж/д путей государства Н, то он может быть несвязным. Рассмотрим компоненту связности, которая включает в себя столицу государства. Из столицы выходит 21 ж/д колея, а из любых других городов, кроме города Дальний – по 20, поэтому, чтобы выполнялся закон о четном числе нечетных вершин необходимо, чтобы и город Дальний входил в эту же самую компоненту связности. А так как компонента связности – связный граф, то из столицы существует путь по ж/д путям до города Дальний, что и требовалось доказать.

Графы Эйлера

Вы наверняка сталкивались с задачами, в которых требуется нарисовать какую-либо фигуру не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждую линию только один раз. Оказывается, что такая задача не всегда разрешима, т.е. существуют фигуры, которые указанным способом нарисовать нельзя. Вопрос разрешимости таких задач также входит в теорию графов. Впервые его исследовал в 1736 году великий немецкий математик Леонард Эйлер, решая задачу о Кенигсбергских мостах. Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются Эйлеровыми графами.

Задача 6. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз ?



Решение. Если мы будем рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. То есть все вершины графа, кроме двух должны быть четными. В нашем же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным в условии способом.

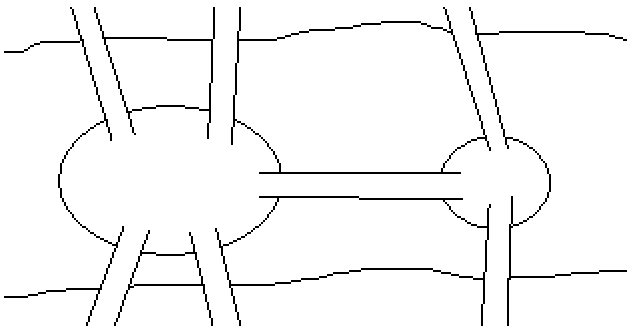
Сейчас мы доказали теорему об Эйлеровых графах:

Теорема: *Эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.*

И в заключение – задача о Кенигсбергских мостах.

Задача 7. На рисунке изображена схема мостов города Кенигсберга.

Можно ли совершить прогулку так, чтобы пройти по каждому мосту ровно 1 раз?



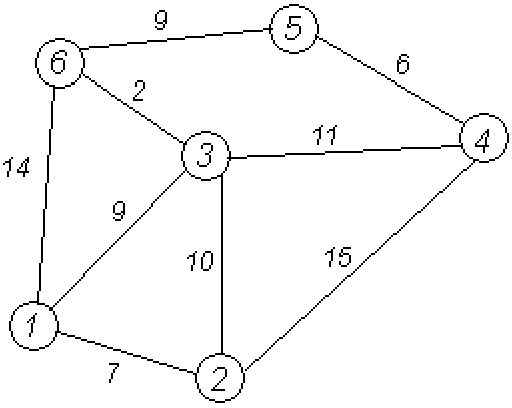
***Алгоритм Дейкстры отыскания кратчайшего пути на графе*.**

К таким задачам сводятся различные оптимизационные задачи. Если , например, граф изображает сеть дорог или коммуникаций, соединяющих некоторые пункты, длина дуги соответствует расстоянию, стоимости или времени поездки, то задача заключается в выборе минимального пути с точки зрения либо его длины, либо стоимости поездки, либо затрат времени.

Вершины графа могут представлять собой этапы решения задач при различных вариантах, а соединяющие их дуги направления решения. Если при этом рассматривать длительность каждого этапа решения, то будем иметь нагруженный ориентированный граф.

Одним из способов решения данной задачи является алгоритм Э. Дейкстры, изобретённый нидерландским учёным Эдсгером **Дейкстрой** в 1959 году, который покажем на примере.

Рассмотрим выполнение алгоритма на примере графа, показанного на рисунке. Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (рёбра графа). В кружках обозначены номера вершин, над рёбрами обозначена их «цена» — длина пути. В процессе поиска минимального пути всем вершинам графа приписываются метки (числа), которые подразделяются на постоянные (они подчеркиваются) и временные. Метку вершины i будем обозначать $m(i)$. Процесс вычисления меток для наглядности представим в виде таблицы.

Шаг\вершины	1	2	3		5	6
Первый шаг	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
Второй шаг		$\underline{7}(1)$	9	∞	∞	14
Третий		7	$\underline{9}$ (1)		∞	1

шаг				2		4
Четвертый шаг		7	9	0	∞	$\underline{11}$ (3)
Пятый шаг		7	9	0	$\underline{20}$ (6)	11

В столбцах таблицы указываются метки вершин, которые они имеют в процессе работы алгоритма. Так в первом столбце указаны метки вершины 1, во втором метки второй вершины и т.д. Таким образом за каждой вершиной закреплен свой столбец.

Для восстановления кратчайшего пути рядом с каждой подчеркнутой меткой в скобках указывается вершина предыдущего шага с постоянной меткой. Если таких вершин несколько, выбирается любая из них, поскольку нужно найти один кратчайший путь. При указании всех таких вершин перебором получаются все кратчайшие пути.

В процессе работы начальные вершины меняются, для их обозначения будем использовать общий символ (н).

На первом шаге вершине 1 приписывается начальная постоянная метка 0 (она подчеркнута), а всем остальным вершинам временные метки ∞. На каждом следующем шаге вершине (i), соединенной дугой с начальной вершиной (н), приписывается метка, равная минимальному из чисел $m(i)$ и $m(\text{н}) + l(\text{н}, i)$, где $m(i)$ -прежняя метка (i)-ой вершины, а $l(\text{н}, i)$-длина дуги, соединяющей вершину (н) с вершиной (i).

Рассмотрим второй шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6. Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме значения метки вершины 1 и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7. Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й. Полученные соответственно значения 9 и 14 заносим в столбцы 3 и 6 таблицы. Из полученных значений выбираем минимальное 7 его подчеркиваем и берем вершину 2 за начальную.

Третий шаг. Пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем. Следующий сосед вершины 2 — вершина 3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а это меньше 17, поэтому метка не меняется. Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 (7 + 15 = 22). Поскольку 22<∞, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.

Четвертый шаг. Повторяем алгоритм, выбрав за начальную вершину 3. После ее обработки результаты занесем в таблицу и вершину 6 возьмем за начальную.

Пятым шагом алгоритм закончится на 5-ой вершине с меткой 20.

Результат работы алгоритма находим по таблице: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11. Восстанавливаются эти кратчайшие пути по вершинам в скобках в таблице. Например восстановим путь из вершины 1 в вершину 5. Двигаемся из конечной вершины 5, в которую в минимальном пути ведет дуга из вершины 6. В вершину 6 попадаем из вершины 3, в 3 приходим из начальной вершины 1.Следовательно, искомый кратчайший путь: 1- 3- 6- 5.

Задания

1. На квадратной доске 3х3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

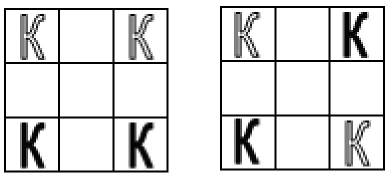


Рис. 1 *Рис. 2*

2. В стране Ц есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

3. В государстве 100 городов к из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.

4. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей ?

5. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей ?

6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

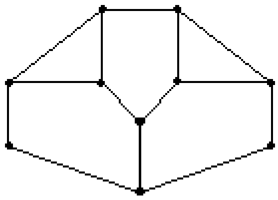
7. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

8. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться до любого другого.

9. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту розно 1 раз. На острове Т он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Т, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?
б) с него начал, но не на нем закончил?
в) с него начал и на нем закончил?

10. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей заборами. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор ровно 1 раз?



11. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

12. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в B.

	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

Функции

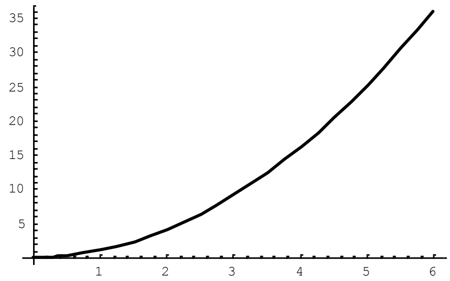
Способы задания функции одной переменной

Определение. Если каждой точке некоторого множества X на прямой OX ставится в соответствие точка на прямой OY, говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Примеры. 1. Показательная функция $y = 2^x,\ x \in \mathrm{R}$.
2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x,\ x > 0$.
3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

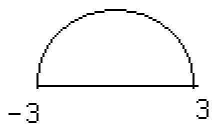
Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание). В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

x	1	1.5	2	2.5	3	4	6
y	1	2.25	4	6.25	9	16	36

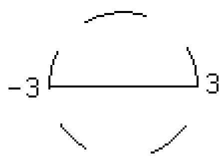


Аналитически функцию можно задать в явном виде $y=f(x)$ (*явное задание функции*), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее *неявно* $F(x,y)=0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2+y^2=9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$,



и $y=-\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2+y^2=9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Функции двух переменных

Определение. Если каждой точке с координатами x и y из некоторой области D на плоскости ставится в соответствие точка на прямой OZ, говорят, что на области D задана функция $z=f(x,y)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве натуральных чисел, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$n!=1\times 2\times 3\times ...\times n.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей… . На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1\times 2\times 3\times ...\times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times...\times(m-1)\times m=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается A_m^n. Таким образом,

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более, чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов, состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением с повторением** из m по n и равен m^n.

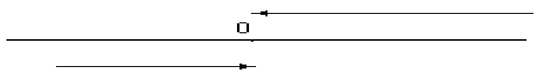
4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается C_m^n. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$ или $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

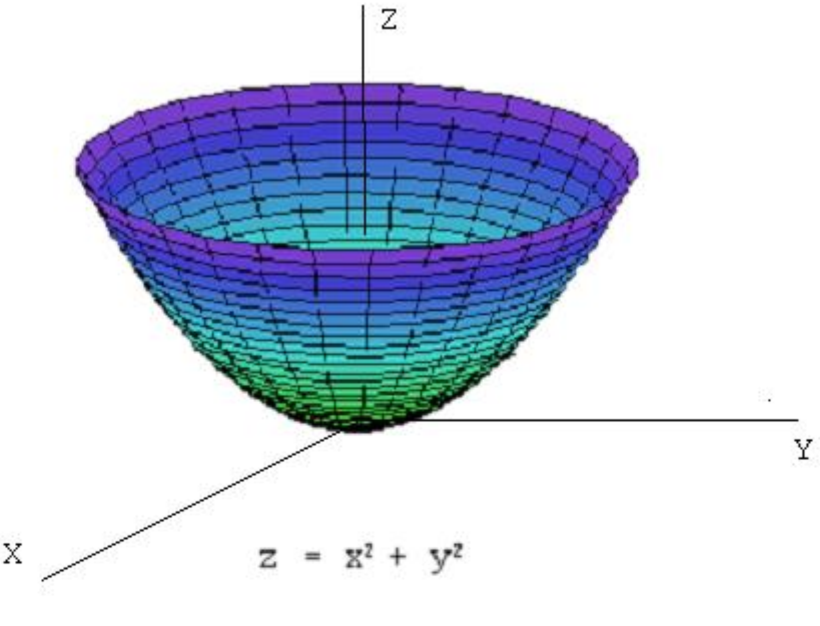
Функция, непрерывная в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset R$ и $a \in X$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то говорят, что эта функция непрерывна в точке a. Функция, непрерывная в каждой точке множества X, называется непрерывной на множестве X. График непрерывной функции представляет собой непрерывную кривую. Все известные из школьного математического курса функции непрерывны в областях, где они заданы: многочлены, e^x, $\ln x$ при $x > 0$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $\mathrm{ctg}\, x$ при $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

Пример разрывной функции – функция $y = \mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

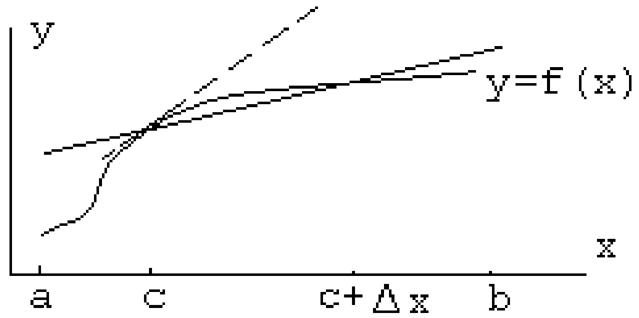


Графиком непрерывной на области D функции двух переменных $z = f(x, y)$ является непрерывная поверхность. В качестве примера приведем функцию $z = x^2 + y^2$.



$z = x^2 + y^2$

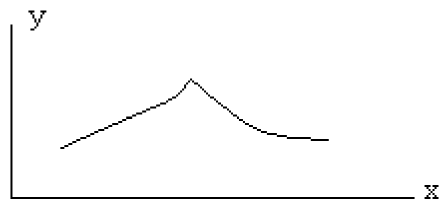
Частным случаем непрерывной в точке функции является **дифференцируемая** в этой точке функция. Такие функции еще называют «гладкими»: к графику дифференцируемой в точке функции можно провести касательную.



В случае дифференцируемости функции в точке можно вычислить **производную** в такой точке по формуле

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



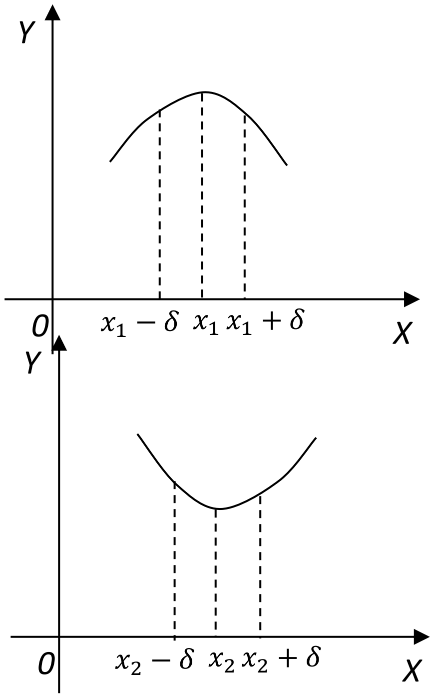
Напомним**,** что **геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Из школьного курса вам известна таблица производных. Она приводится ниже.

Таблица производных

$(C)' = 0$, если C – постоянная	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ в точке имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.



x_1

x_2

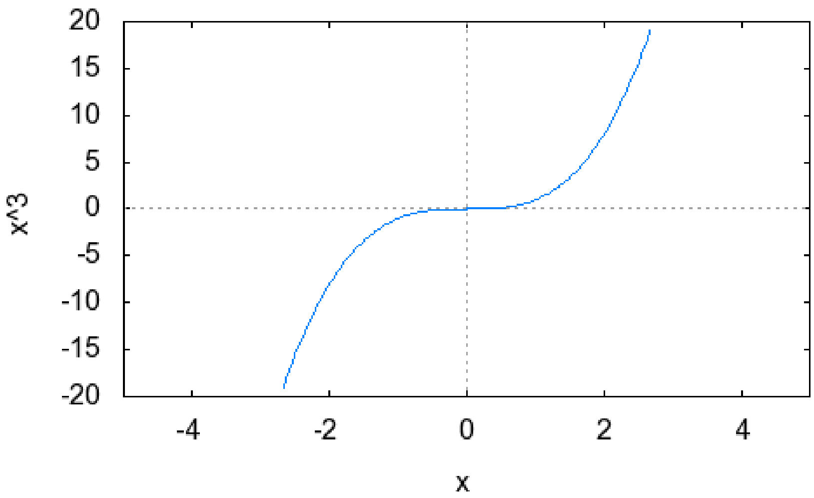
δ -

Определение 2. Функция $y = f(x)$ в точке имеет **минимум**, если для всех x из некоторой окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.

Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

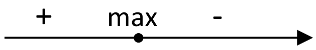
Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции одной переменной: необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c) = 0$.

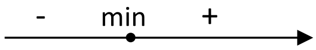
Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема о достаточном условии существования максимума и минимума функции.

Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.





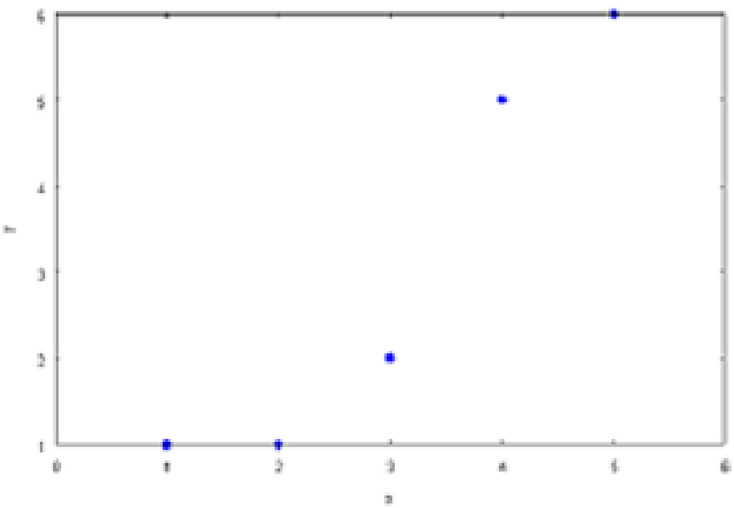
В случае, когда дифференцируемой в точке является функция двух переменных $z = f(x, y)$, она обладает в этой точке производными и по переменной x, и по переменной y. Такие производные называются частными производными. График такой функции в этой точке (поверхность) является гладким, то есть к поверхности в точке можно провести касательную плоскость.

Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции двух переменных: необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке (a,b) функции является равенство нулю обеих частных производных этой функции: $f'_x(a, b) = 0$,. $f'_y(a, b) = 0$.

Последнее условие является основой для следующего важного метода.

Метод наименьших квадратов

Известно, что через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых, через две точки – единственную прямую. Через произвольные 3 точки прямую провести нельзя. Тем более, через 5 точек. Но представим, что проведены замеры в 5 точках (x=1, x=2, x=3, x=4, x=5). Значения, полученные при замерах, соответственно, равны: y=1, y=1, y=2, y=5, y=6.
Нанесем результаты наблюдений на плоскость. Мы видим, что если соединить точки последовательно, полученная линия будет близка к прямой.



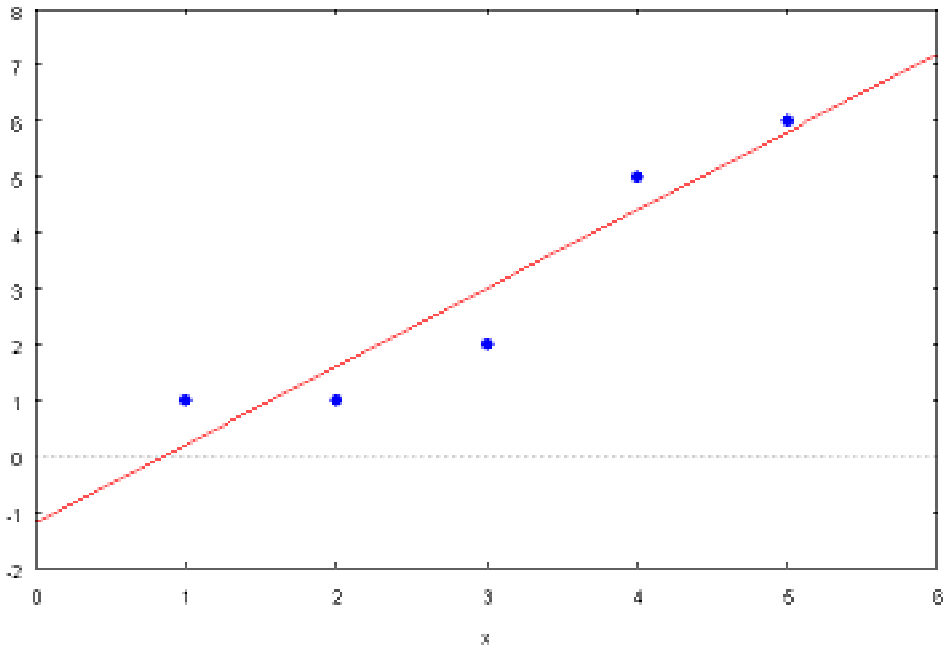
Учитывая, что замеры производятся неточно, мы хотим нарисовать приближенный график линейной зависимости y от x. Не существует прямой, проходящей через пять полученных на плоскости точек, но можно постараться провести прямую максимально близко к полученным точкам.

Уравнение прямой на плоскости $y = Ax + B$ зависит от двух параметров *A* и *B*. Нужно подобрать их так, чтобы при значениях *x*, равных 1, 2, 3, 4 и 5, значения $Ax + B$ мало отличались от 1, 1, 2, 5 и 6, соответственно. Это значит, что нужно подобрать такие *A* и *B*, чтобы значение функции

$$F(A,B) = (A\cdot 1 + B - 1)^2 + (A\cdot 2 + B - 1)^2 + (A\cdot 3 + B - 2)^2 + (A\cdot 4 + B - 5)^2 + (A\cdot 5 + B - 6)^2$$

было минимальным. Это значит, должно выполняться необходимое условие экстремума: $\begin{cases} F'_A = 0, \\ F'_B = 0. \end{cases}$ В данном случае после приведения подобных членов получим $\begin{cases} 110A + 30B = 118, \\ 15A + 5B = 15. \end{cases}$ Решая эту систему, найдем $A = \frac{7}{5}, B = -\frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение искомой прямой: $y = \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}$. Эта прямая приведена на графике:



Задачи о нахождении наибольших и наименьших значений функций одного переменного

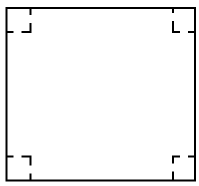
Пример задачи. Владелец грузового судна должен перевезти груз по реке из одного порта в другой. Расходы этого владельца складываются из расходов на содержание экипажа и из затрат на топливо. Следует выяснить, какую скорость движения судна следует выбрать, чтобы плавание было наиболее экономичным, так как увеличение скорости ведет к большим тратам на топливо (расходы на топливо пропорциональны кубу скорости), а уменьшение скорости, а значит, увеличение времени пути приведет к большим тратам на питание команды.

Решение. Обозначим суточные расходы на топливо $k \cdot V^3$, а суточные расходы на питание команды a. Пусть S – расстояние, которое должна пройти баржа. Тогда время в пути равно $\frac{S}{V}$. Следовательно, путевые расходы составляют $F(V) = (k \cdot V^3 + a) \cdot \frac{S}{V}$.

Нам нужно найти такое положительное значение V_0, которое обеспечит минимум введенной функции. Используя теорему о необходимом условии экстремума, приравняем нулю производную введенной функции: $(2k \cdot V - \frac{a}{V^2}) \cdot S = 0$. Получим точку экстремума $V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$. То, что мы получили минимум, а не максимум, следует из поведения функции $F(V)$ при значениях переменной V, близких к 0 и к бесконечности: функция $F(V)$ при таких значениях переменной стремится к положительной бесконечности. Следовательно, единственный экстремум этой функции может быть только минимумом. Таким образом, оптимальная скорость движения баржи по реке $V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади.
2. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты, и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?



3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32 м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Интеграл

*Определение***.** Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$, где $C-$постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если $F'(x) = f(x)$ и $\Psi'(x) = f(x)$, то $F(x) - \Psi(x) = C = \text{Const}$.

Определение. Множество всех первообразных одной функции называется **неопределенным интегралом этой функции** и обозначается $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx -$

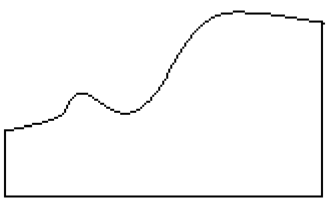
подынтегральным выражением. Интегрирование – нахождение первообразных – так же, как и нахождение производных, производится с помощью таблицы. Такая таблица приведена ниже.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$.	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	$\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{x}$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$.
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$	$\left(-\cos x + C\right)' = \sin x.$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.	$\left(\sin x\right)' = \cos x.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	$\left(\operatorname{tg} x + C\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	$\left(-\operatorname{ctg} x + C\right)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$	$\left(\arcsin x + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$	$\left(\operatorname{arctg} x + C\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
10. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C.$	$\left(\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\| +$ $+C.$	$\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\|+C\right)' =$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$

Существует ряд приемов интегрирования, но в нашем курсе эти приемы не рассматриваются. К сожалению, не любую непрерывную функцию можно «проинтегрировать в квадратурах», то есть, найти первообразную в виде конечного числа действий над элементарными функциями.

Интегралы интересны для нас не только тем, что они являются результатом операции, обратной к операции дифференцирования. Они являются мощным аппаратом для вычисления геометрических характеристик различных объектов. Например, **площадь криволинейной трапеции –** фигуры, ограниченной с трех сторон отрезками прямых, два из которых параллельны оси OY, третий лежит на оси OX, $a \le x \le b$, а четвертая сторона задается с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b].$,



вычисляется по формуле $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$. Последняя формула, устанавливающая связь интеграла по отрезку с разностью значений первообразной в концах отрезка, называется формулой Ньютона-Лейбница.

В случае, когда конечный отрезок $[a,b]$ превращается в бесконечную прямую, формула площади соответствующей криволинейной трапеции принимает вид $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)$.

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

В теории вероятностей изучаются возможные исходы опыта – **случайные события**, то есть, события, которые могут произойти или не произойти. Классический пример опыта – бросание монет. Например, при одновременном бросании двух монет (опыт) могут произойти следующие события: «выпало два герба», «выпал хотя бы один герб», «выпали две цифры», «монеты упали одинаковыми сторонами», «выпал один герб и одна цифра».

Событие называют **достоверным** (обозначают E), если оно обязательно происходит в результате опыта. Например, в приведенном опыте достоверным является событие: «выпал хотя бы один герб или хотя бы одна цифра».

Событие называют **невозможным (**обозначают $\varnothing$), если оно не может произойти в результате опыта. В рассмотренном опыте невозможным является событие: «выпало три герба».

Два события называют **несовместными**, если они не могут одновременно произойти в результате опыта. В рассмотренном примере события «выпало два герба» и «монеты упали разными сторонами» являются несовместными.

Говорят, что **событие** A **благоприятствует событию** B (обозначают $A \subset B$), если из того, что произошло событие A следует, что произошло событие B. В случае опыта с бросанием двух монет событие «выпало две цифры» благоприятствует событию «выпала хотя бы одна цифра».

Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из которых несовместны, называется **множеством исходов** опыта (или множеством элементарных событий, или полной группой событий). В случае бросания двух монет множеством исходов являются события: «выпало два герба», «выпали две цифры», «выпал один герб и одна цифра». Заметим, что множество исходов может определяться неоднозначно, ведь множеством исходов того же опыта являются события: «монеты упали одинаковыми сторонами» и «монеты упали разными сторонами». Мы видим, что первое множество исходов содержит два события («выпало два герба», «выпали две цифры»), благоприятствующих событию «монеты упали одинаковыми сторонами» из второго множества исходов. А третье событие первого множества исходов («выпал один герб и одна цифра») совпадает со вторым событием второго множества исходов («монеты упали разными сторонами»).

Очень удобно изображать события так же, как изображают множества. Несовместные события изображаются непересекающимися множествами, событие, благоприятствующее другому событию, изображается подмножеством этого другого события. Достоверное событие E, которое обязательно происходит в результате опыта, является аналогом универсума, то есть содержит все множества, соответствующие исходам опыта. Пустому множеству соответствует невозможное событие.

Так же, как в случае множеств, для событий вводятся операции объединения ($A \cup B$) – событие, состоящее в том, что произошло или событие A, или событие B, и операция пересечения ($A \cap B$) – событие, состоящее в том, что одновременно произошли события A и событие B. Операция разности событий $A \setminus B$ представляет собой событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B. Аналогично операции дополнения множества вводится понятие противоположного события: $\bar{A} = E \setminus A$.

Возможно следующее определение **математической вероятности события**: это числовая характеристика степени возможности наступления события в определенных, могущих повториться неограниченное число раз условиях. Это означает, что если вероятность события охарактеризовать числом p, то при проведении опыта n раз при достаточно большом n данное событие произойдет примерно np раз, причем чем больше n, тем ближе количество наступлений события к числу np. Очевидно, что получить вероятность события можно при достаточно большом числе опытов как отношение $\frac{m}{n}$, где m – количество наступлений события, n – количество опытов. Из определения очевидно, что вероятность $p = \frac{m}{n}$ не может быть больше 1 и меньше 0. Очевидно также, что вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0.

Проще всего определять вероятность событий, когда множество исходов опыта представляет собой несколько равновероятных событий. Так, в случае бросания неповрежденной монеты множество исходов состоит из двух равновероятных событий: «выпадение герба» и «выпадение цифры». Поскольку «выпадение герба или цифры» – это достоверное событие с вероятностью 1 и события несовместны, то при многочисленных бросаниях вследствие симметричности монеты примерно половина исходов даст герб, а другая половина цифру. Следовательно, вероятность выпадения герба, как и вероятность выпадения цифры, равна $\frac{1}{2}$. Аналогично определяется вероятность выпадения числа от 1 до 6 при бросании игральной кости: в силу симметричности кости вероятность выпадения всех чисел одинаковая и равна $\frac{1}{6}$.

В случае равновероятных исходов вероятностью события A называется число $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – число всевозможных исходов, а m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Пример. Пусть опыт состоит в однократном бросании игральной кости, а событие A – выпадение нечетного числа. Всего исходов 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6), из них 3 благоприятствуют событию A (1,3,5). Таким образом, $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пример. Вернемся к нашему опыту бросания двух монет. Вычислим вероятности событий, составляющих множество исходов: A_1 – «выпало два герба», A_2 – «выпали две цифры», A_3 – «выпал один герб и одна цифра». Если каждое из первых двух событий соответствует одному исходу: одновременное выпадение либо гербов, либо цифр у монет, условно названных первой и второй, то событию A_3 благоприятствуют следующие исходы: «герб на первой монете и цифра на второй» и «цифра на первой монете и герб на второй». Таким образом, если сосчитать равновероятные исходы с учетом номера монет, то их 4: ЦЦ, ГГ, ГЦ, ЦГ. Следовательно, $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Большую роль в решении задач об опытах с равновероятными исходами играют комбинаторные функции.

Пример. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров, из них 12 белых и 8 черных. Наудачу вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба они белые?

Определим число возможных исходов выбора двух шаров из 20. Это $C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}$. Благоприятных исходов $C_{12}^2=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}$. Таким образом, вероятность выбора двух белых шаров равна $\frac{33}{95}\approx 0,35$.

Часто для вычисления вероятностей пользуются **теоремой сложения**, согласно которой $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. В частности, если события A и B несовместны, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Следствием теоремы сложения является формула $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Пример. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку – с вероятностью 0,2, в восьмерку – с вероятностью 0,6. Какова вероятность при одном выстреле выбить не менее восьми очков?

Интересующее нас событие является объединением попарно не пересекающихся событий : «выбито 8 очков», «выбито 9 очков» и «выбито 10 очков». Следовательно, в соответствии с теоремой сложения для вычисления требуемой вероятности следует сложить вероятности всех этих событий и получить 0,85.

Пример. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Какова вероятность, вынимая наугад 3 шара, вынуть хотя бы один белый?

В данном случае можно сосчитать вероятности вынуть 3 белых, 2 белых и один красный и 1 белый и 2 красных шара, а затем сложить полученные величины. Однако рациональнее сосчитать вероятность противоположного события – вероятность вынуть три красных шара. Итак, $P(\bar{A})=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{11}{57}$. Следовательно, $P(A)=1-P(\bar{A})\approx 0,8$.

Пусть два события A и B **независимы**, то есть, от того, произойдет или нет одно из них, не зависит наступление второго. Для независимых событий определяют вероятность пересечения событий как $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример. Два самолета сбрасывают по бомбе на вражеский объект. Объект считается уничтоженным, если в него попали две бомбы. Какова вероятность уничтожить объект, если вероятность попадания первого самолета 0,8, а второго – 0,75?

Очевидно, что если летчик не отслеживает попадание в цель товарища и не укрепляет (или ослабляет) тем самым свой моральный дух, попадание бомб из разных самолетов в цель – взаимно независимые события. Поэтому вероятность одновременного попадания в цель равна $0,8\cdot 0,75=0,6$.

Пример. В условиях предыдущего примера следует подсчитать вероятность попадания в цель хотя бы одного летчика.

Благоприятными для наступления интересующего нас события являются следующие исходы: «попали оба», «первый попал, второй не попал», «первый не попал, второй попал». Вероятность первого из исходов 0,6, вероятность второго $0,8\cdot 0,25=0,2$, вероятность третьего $0,2\cdot 0,75=0,15$. Поэтому вероятность попадания хотя бы одного летчика равна $0,95$. В соответствии со следствием из теоремы сложения тот же результат мы получим, подсчитав вероятность противоположного события «в цель не попали оба летчика» ($0,2 \cdot 0,25 = 0,05$) и вычтя полученный результат из единицы.

В ряде случаев возникает вопрос: что можно сказать о вероятности события A, если известно, что произошло событие B? Вероятность при этом обозначается $P(A|B)$ и читается «вероятность A при условии B». Если события A и B несовместны, то $P(A|B)=0$, то есть A – невозможное событие при наступлении события B. Если, наоборот, $B \subset A$, то $P(A|B)=1$, то есть, при $B \subset A$ событие A при условии B – достоверное событие. Для случаев, когда при условии B событие A может как наступить, так и не наступить, вводят понятие **условной вероятности,** вычисляемой по формуле: $P(A|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Рассмотренные нами случай несовместных событий и случай $B \subset A$ согласуются с данной формулой.

В случае равновероятных исходов опыта формула условной вероятности имеет вид $P(A|B)=\dfrac{k}{m}$, где m – число исходов, благоприятных для события B, и k из них благоприятствуют событию A.

Пример. Найти вероятность того, что при бросании игрального кубика выпало число 3, если известно, что выпавшее число нечетное.

Число исходов, благоприятных для выпадения нечетного числа, равно 3 (1, 3, 5). Из этих исходов только один благоприятен выпадению числа 3. Следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{1}{3}$.

Проверим, чему равна условная вероятность $P(A|B)$, если события A и B независимы. Согласно определению вероятности пересечения независимых событий

$P(A|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$. Этот результат, несомненно, соответствует интуитивному представлению о том, что если события A и B независимы, то на вероятность наступления события A никак не влияет, произошло событие B или не произошло.

Условная вероятность используется для вычисления вероятности наступления события при известных вероятностях исходов опыта и условных вероятностях наступления события при каждом исходе. Справедлива следующая теорема.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_m$ *– множество исходов некоторого опыта (то есть* $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$*, и* $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = E$*). Тогда* $P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$.

Последняя формула называется **формулой полной вероятности**.

Пример. По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле 0,5, при втором 0,6, при третьем 0,8. При одном попадании самолет будет сбит с вероятностью 0,3, при двух попаданиях с вероятностью 0,6, при трех самолет будет сбит наверняка. Какова вероятность того, что самолет будет сбит?

Событием B является событие «самолет сбит». Множество исходов при трех выстрелах – это события: A_1 – «попадания при всех трех выстрелах», A_2 – «два попадания и один промах», A_3 – «одно попадание и два промаха», A_4 – «три промаха». Имеем $P(B \mid A_1) = 1$, $P(B \mid A_2) = 0{,}6$, $P(B \mid A_3) = 0{,}3$, $P(B \mid A_4) = 0$. Теперь нужно подсчитать $P(A_i),\ i = 1, 2, 3, 4$. Используя независимость попаданий, получим $P(A_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$. Событие A_2 – это объединение трех несовместных событий: «попадание при первых двух выстрелах и промах при третьем», «попадание при первом и третьем выстрелах и промах при втором» и «промах при первом выстреле и попадание при двух следующих». Поэтому $P(A_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}46$.

Аналогично считается вероятность третьего исхода: $P(A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$. Очевидно, что в силу независимости промахов $P(A_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$. В результате применения формулы полной вероятности получим $P(B) = 1 \cdot 0{,}24 + 0{,}6 \cdot 0{,}46 + 0{,}3 \cdot 0{,}26 + 0 \cdot 0{,}04 = 0{,}594$.

Представим, что нас интересует не столько событие, происшедшее в результате опыта, а то, при каком исходе из множества всех исходов это событие произошло. Назовем при этом множество исходов множеством **гипотез.**

Пример. Одинаковые детали производятся в трех цехах. В первом цехе 50% всех деталей, во втором цехе 30% и в третьем цехе 20%. Вероятность выпуска бракованной детали в 1-м цехе 0,02 во втором и третьем по 0,01 (видимо, там стоят более современные, чем в первом цехе, станки). К работникам ОТК попала бракованная деталь. Следует узнать вероятность того, что бракованная деталь из третьего цеха.

Итак, событием в данном опыте является событие A – «появление бракованной детали». Гипотезами здесь являются исходы «деталь произведена в 1-м цехе», «деталь произведена во 2-м цехе» и «деталь произведена в 3-м цехе». Обозначим эти гипотезы H_1, H_2, H_3, соответственно. Очевидна вероятность исходов-гипотез по объему поступающей из цехов продукции: $P(H_1)=0,5,\ P(H_2)=0,3,\ P(H_3)=0,2$. Известны также вероятности события A при каждой из гипотез: $P(A|H_1)=0,02,\quad P(A|H_2)=P(A|H_3)=0,01$. Как же подсчитать $P(H_3|A)$? Ответ на этот вопрос дает **теорема Байеса.**

Пусть $H_1,H_2,....,H_n$ – полная группа событий. Тогда

$$P(H_k|A)=\frac{P(A|H_k)\cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|H_i)\cdot P(H_i)}.$$

Применяя теорему Байеса, решим поставленную в примере задачу: подсчитаем вероятность того, что бракованная деталь из третьего цеха.

$$P(H_3|A)=\frac{0,01\cdot 0,2}{0,02\cdot 0,5+0,01\cdot 0,3+0,01\cdot 0,2}=\frac{0,002}{0,015}=0,133.....$$

Многие задачи теории вероятностей сводятся к тому, что опыт проводится n раз независимым образом, причем наступление события A в одном опыте не влияет на наступление того же события в другом опыте. Если вероятность наступления события A в одном опыте равна p, то чему равна вероятность наступлений этого события m раз при n проведенных опытах ($m<n$)? **.** Так как при проведении n опытов событие произойдет m раз и не произойдет $(n-m)$ раз, то если мы зафиксируем, в каких опытах событие A произойдет, а в каких нет, из-за независимости наступления или отсутствия события мы должны получить $p^m(1-p)^{(n-m)}$. Но поскольку мы не знаем, в каких опытах событие произойдет, а в каких нет, мы должны просуммировать вероятности несовместных событий, отличающихся номерами опытов, в которых событие происходит. Число различных вариантов групп n опытов с m происшедшими событиями равно C_n^m. Поэтому ответ на поставленный вопрос дает **формула Бернулли:** $C_n^m\cdot p^m\cdot(1-p)^{(n-m)}$.

Пример. Какова вероятность того, что при десяти бросаниях игральной кости два раза выпадет 6? Здесь $p=\frac{1}{6}$, $C_n^m=C_{10}^2=45$. Следовательно, вероятность интересующего нас события $0,25\cdot\frac{5^9}{6^8}$.

Заметим, что в соответствии с формулой бинома Ньютона сумма вероятностей наступления событий 0, 1, 2, …, n раз при проведении n опытов равна 1.

Задания.

1. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара. 1) Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый. 2) Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный.
2. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.
3. Дано 6 карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что: а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются 6 карточек.
4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков не превосходит 7; б) на обеих костях выпадает одинаковое число очков; в) произведение выпавших очков делится на 4; г) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков.
5. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что случайно набирая цифры, можно угадать нужный код?
6. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Определить вероятность того, все 6 цифр различны.
7. Имеется 6 изделий: 4 из них первого сорта и 2 второго. Наудачу взяли 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них только одно первого сорта.
8. Среди 12 студентов 7 отличников. Из группы отобрано наудачу 5 человек. Какова вероятность того, что среди них 3 отличника.
9. Среди 20 изделий 3 дефектных. Случайно из них отобрано 4 изделия. Найти вероятность того, что а) все отобранные годны; б) число годных и дефектных одинаково.
10. Каждый из двух стрелков делает по одному выстрелу в мишень. Пусть событие A – первый стрелок попал в цель, событие B – второй стрелок попал в цель. Что означают события: а) $A + B$; б) AB; в) $\overline{A}$.
11. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы выбирается один цветок. Пусть события A – вынута красная роза, B – вынута желтая роза, C – вынута белая роза. Что означают события: а) $B + C$; б) $A + B$; в) AC; г) $\overline{A+B}$; д) $A+B+C$; е) $AB + C$?

12. Три студента независимо друг от друга решают задачу. Пусть событие A_1- первый студент решил задачу, событие A_2 – второй студент решил задачу, A_3 – третий студент решил задачу. Выразить через события A_i $(i=1,2,3)$ следующие события: 1) A – все студенты решили задачу; 2) B – задачу решил только первый студент; 3) C – задачу решил хотя бы один студент; 4) D – задачу решил только один студент; 5) E – с задачей не справился ни один студент; 6) F – задачу решило не более двух студентов.

13. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открывания замка?

14. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз?

Случайные величины.

Случайной величиной называют функцию, заданную на множестве исходов конкретного опыта.

1. *Дискретная случайная величина.*

В простейшем случае, когда множество исходов опыта конечно, каждому исходу опыта E_k поставлено в соответствие единственное число x_k, которое и называется значением случайной величины на исходе E_k и представляется в виде $x_k = \xi(E_k)$. Если **все** значения случайной величины совпадают между собой, то говорят, что случайная величина есть постоянная.

Случайную величину, принимающую конечное число значений, задают таблицей:

Исходы	E_1	E_2	….	E_n
ξ	x_1	x_2		x_n

Примером случайной величины можно считать суммарное количество выпавших очков при одновременном бросании двух игральных кубиков. Очевидно, что число равновероятных исходов при опыте бросания двух кубиков равно 36. Значения, принимаемое случайной величиной, меняются от 2 до 12, причем, разным исходам могут соответствовать одинаковые значения. Например, значение 4 принимается при трех различных исходах: 1+3, 2+2 и 3+1.

Со случайными величинами обращаются так же, как с обычными числовыми функциями: можно складывать две случайные величины ξ и η (то есть строить новую случайную величину, задавая таблицу с суммами соответствующих значений при всех исходах), умножать случайную величину на число, умножать и делить случайные величины друг на друга.

Для изучения случайной величины вводят ее числовые характеристики.

Математическим ожиданием случайной величины ξ в опыте с n равновероятными исходами называется число $M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. То есть, математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Очевидно следующие из определения свойства математического ожидания:

$$M(a\xi + b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b) = a \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + b = a \cdot M\xi + b,$$

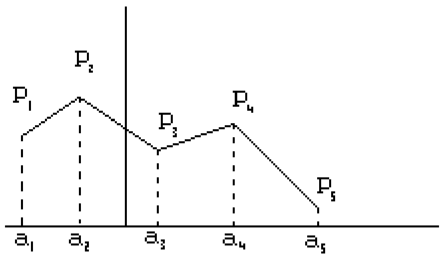
$$M(\sum_{j=1}^{r}\xi_j) = \sum_{j=1}^{r} M\xi_j .$$

В данном выше определении математического ожидания очень существенно то, что исходы $E_k,\ k = 1,...,n,$ равновероятны. Представим теперь, что изучаемая нами случайная величина принимает в результате n исходов l значений $a_j,\ j = 1,...,l,$ где $l < n$. Это означает, что какие-то из значений a_j принимаются в результате нескольких равновероятных исходов. Объединим те исходы E_k, которые соответствуют значению a_j в событие $A_j,\ j = 1,...,l$. Очевидно, что события $A_j,\ j = 1,...,l$, попарно несовместны. Если обозначить через m_j количество равновероятных исходов E_k, соответствующих значению a_j, то мы получим следующее определение математического ожидания: $M\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} a_j \cdot m_j$. А теперь заметим, что $\frac{m_j}{n} = p(A_j)$. Таким образом, мы получили **новое определение математического ожидания**: пусть полной группой исходов опыта являются события $A_1, A_2, ..., A_l$ с вероятностями $p(A_j) = p_j,\ j = 1,...,l$, причем случайная величина ξ в результате исхода A_j принимает значение a_j и все значения $a_j,\ j=1,...,l,$ различны. Тогда $M\xi=\sum_{j=1}^{l} a_j \cdot p_j$.

Таким образом, для вычисления математического ожидания случайной величины недостаточно знать только значения величины при различных исходах, необходимы также вероятности событий, обеспечивающих различные значения случайной величины. Поэтому целесообразно задавать таблицу, в которой указываются различные значения случайной величины, а также вероятности соответствующих исходов:

ξ	a_1	a_2	$\ldots$	a_l
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_l

Построенная нами таблица называется законом (рядом) **распределения дискретной случайной величины** ξ**.** Заметим, что сумма вероятностей, находящихся в нижней строке приведенной таблицы равна 1. Для наглядности закон распределения задают графически: на оси OX откладывают всевозможные значения случайной величины ξ, а над каждым значением (вдоль оси OY) помещают соответствующую вероятность. Соединяя полученные точки отрезками, мы получим **многоугольник (полигон) распределения**.



Пример. Стрелок стреляет пять раз по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,8. Найти закон распределения случайной величины «число попаданий стрелка в результате всех выстрелов».

Данная случайная величина принимает 6 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Подсчитаем вероятность каждого из исходов с применением формулы Бернулли. Значение 0 величина примет с вероятностью $0,2^5$. Значение 1 – с вероятностью $C_5^1\cdot(0,2)^4\cdot 0,8=0,0064$, значение 2 – с вероятностью $C_5^2\cdot(0,2)^3\cdot(0,8)^2=0,0512$, значение 3 – с вероятностью

$C_5^3 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^3 = 0,2048$, значение 4 – с вероятностью $C_5^4 \cdot 0,2 \cdot (0,8)^4 = 0,4096$ и значение 5 – с вероятностью $(0,8)^5 = 0,32768$.

Построим закон распределения

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Задание. Постройте многоугольник распределения рассмотренной случайной величины.

Найдем математическое ожидание данной величины.
$M\xi = 0+0,0064+2\cdot 0,0512+3\cdot 0,2048+4\cdot 0,4096+5\cdot 0,32768 = 4.$

В соответствии с определением независимых событий две дискретные случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если при любых i и j выполняется равенство
$P((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = P(\xi = a_i) \cdot P(\eta = b_j)$. Для независимых случайных величин характерно свойство $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$.

Если математическое ожидание дает нам значение, вокруг которого разбросаны значения случайной величины, то новая характеристика, называемая **дисперсией** характеризует степень разброса значений случайной величины. Для **вычисления дисперсии** применяется формула $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Найдем дисперсию случайной величины из предыдущего примера. Случайная величина $\xi - M\xi$ принимает значения -4, -3, -2, -1, 0, 1 с вероятностями 0,00032, 0,0064,
0,0512, 0,2048, 0,4096 и 0,32768, соответственно. Следовательно, величина $(\xi - M\xi)^2$ принимает значения 16, 9, 4, 1, 0 с вероятностями 0,00032, 0,0064, 0,0512, 0,53248 и 0,4096, соответственно. Поэтому $D\xi = 16 \cdot 0,00032 + 9 \cdot 0,0064 + 4 \cdot 0,0512 + 0,53248 = 0,8.$

Для вычисления дисперсии иногда удобно пользоваться формулой $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Докажем, что эта формула следует из формулы, определяющей дисперсию. Используя
определение математического ожидания и то, что $\sum_{j=1}^{l} p_j = 1$, получим

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{j=1}^{l}(a_j - M\xi)^2 p_j = \sum_{j=1}^{l} a_j^2 p_j - 2M\xi \sum_{j=1}^{l} a_j p_j +$$

$$+(M\xi)^2 \sum_{j=1}^{l} p_j = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Нетрудно заметить, что $D(k\cdot\xi) = k^2 \cdot D\xi$.

Часто при анализе каких-то процессов приходится выяснять, зависимы ли две случайные величины. Мы уже знаем, что в случае независимости $M(\xi\cdot\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta)$. Но если последнее равенство не выполняется, то можно оценить степень зависимости между случайных величин. Для этого служит **коэффициент корреляции**, вычисляемый по формуле $r(\xi,\eta) = \dfrac{M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}$. Коэффициент корреляции обладает свойством $|r(\xi,\eta)| \le 1$. Очевидно, что коэффициент корреляции двух независимых величин равен нулю. Если же две случайные величины связаны линейно, то есть, $\eta = a\cdot\xi + b$, то $|r(\xi,\eta)| = 1$.

Справедливо следующее свойство независимых величин: если величины ξ и η независимы, то $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$.

В случае, когда значение модуля коэффициента корреляции близко к 1, можно найти примерную линейную зависимость одной величины от другой, то есть, значения a и b методом наименьших квадратов. Соответствующая прямая называется **прямой регрессии**.

Задания.

1.Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,4	0,32	0,2

1) Построить многоугольник распределения; 2) найти вероятности событий $A = (X<2)$; $B = (1\le X<3)$; $C = (1<X\le 3)$; 3) найти $M(X)$; 4) найти $D(X)$.

2. Случайная величина Y задана рядом распределения:

y_i	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p_i	0,1	0,2	C	0,3	0,1

1) Найти значение $P(Y = 1{,}7)$; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти вероятности $P(Y>1{,}4)$, $P(1{,}4\le Y\le 2{,}3)$; 4) найти $M(Y)$; 5) найти $D(Y)$.

3.Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,4	0,3	C

Найти: 1) C, 2) $M(X)$, 3) $D(X)$, 4) $P(X<3)$.

2. ***Непрерывная случайная величина***.

В случае, когда значения случайной величины непрерывны, например, заполняют целиком интервал, невозможно задавать случайную величину в виде таблицы с конечным числом исходов. Примером непрерывной случайной величины является рост трехлетнего ребенка. Опыт состоит в измерении роста ребенка. Исход опыта – измерение роста конкретного ребенка. Очевидно, что нельзя установить конечное число возможных исходов, можно лишь указать диапазон значений роста по результатам многолетних наблюдений.

Для непрерывной случайной величины вводится функция распределения. По аналогии с законом распределения для дискретной величины **функция распределения непрерывной случайной величины** – это вероятность, но не вероятность того, что случайная величина принимает конкретное значение, а вероятность того, что случайная величина принимает значения, меньшие данного: $F(x) = P(\xi < x)$.

Если ввести такую же функцию распределения для дискретной величины, то эта функция окажется ступенчатой. Так, в последнем примере со стрелком $F(x)=0$ при $x \le 0$, $F(x)=0{,}00032$ при $0 < x \le 1$, $F(x)=0{,}00672$ при $1 < x \le 2$, $F(x)=0{,}05792$ при $2 < x \le 3$, $F(x)=0{,}26272$ при $3 < x \le 4$, $F(x)=0{,}67232$ при $4 < x \le 5$, $F(x)=1$ при $x > 5$.

Поскольку функция распределения является вероятностью, ее значения расположены в диапазоне [0,1], при увеличении значений аргумента x вероятность $P(\xi < x)$ уменьшиться не может, так как множество возможных значений случайной величины ξ расширяется. Поэтому функция $F(x)$ неубывающая, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$. Приведенный пример функции распределения дискретной величины подтверждает эти рассуждения.

В случае непрерывной случайной величины график функции распределения – непрерывная кривая. Если функция $F(x)$ дифференцируема, то ее производная $p(x)=F'(x)$ называется **плотностью**

распределения. Вследствие неубывания функции распределения $p(x) \geq 0$. Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что

$\int_a^b p(x)dx = F(b) - F(a) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = P(a \leq \xi < b)$. Следовательно, в соответствии с геометрическим смыслом интеграла, вероятность того, что случайная величина принимает значения на полуинтервале $[a,b)$, равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b)$, ограниченной сверху кривой $y = p(x)$. Очевидно, что площадь криволинейной трапеции не изменится, если в ее основании полуинтервал $[a,b)$ заменить на отрезок $[a,b]$ или на интервал (a,b). То есть,

$$P(a \leq \xi < b) = P(a \leq \xi \leq b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = \int_a^b p(x)dx.$$

Заметим, что для непрерывной случайной величины, в отличие от дискретной случайной величины, вероятность того, что величина принимает какое-то конкретное значение, равна нулю. Действительно,

$$P(\xi = x_0) = \lim_{\delta \to 0} P(x_0 - \delta \leq \xi \leq x_0 + \delta) = \lim_{\delta \to 0}(F(x_0 + \delta) - F(x_0 - \delta)) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Очевидно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} p(x)dx = \lim_{M \to \infty}(F(M) - F(-M)) = 1$ и

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины ξ с дифференцируемой плотностью распределения определяется как

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины так же, как и для дискретной случайной величины определяется как $M(\xi - M\xi)^2$ и также выражается с помощью интеграла в случае дифференцируемой функции распределения.

Две непрерывные случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если для любой пары промежутков I и J справедливо: $P((\xi \in I) \cap (\eta \in J)) = P(\xi \in I) \cdot P(\eta \in J)$. Так же как в случае дискретных величин имеет место соотношение $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$.

Задания.

1. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, \text{при } 3 \leq x \leq 5, \\ 1, \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Найти: 1) Плотность распределения $p(x)$; 2) $P(x \in (3; 4)$.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, \text{при } x \geq 1, \\ 0, \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Найти 1) Функцию распределения F(x); 2) $P(1 < x < 5)$.

3. Задана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0, \\ ax^2, \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, \text{при} 1 < x. \end{cases}$$

Определить:1) при каком значении a функция $F(x)$ будет функцией распределения некоторой случайной величины X; 2) плотность вероятности ; 3) вероятность события D=$\left\{-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$.

4. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

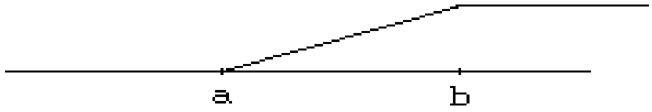
$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < 0, \\ \dfrac{1}{8} \cdot x, \text{при } 0 \leq x < 4, \\ 0, \text{при } 4 \leq x. \end{cases}$$

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$.

5.Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X с плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{2}x$ при $x \in [0; 2]$и $f(x) = 0$ для остальных x.

3. ***Примеры законов распределения случайных величин.***

1) Равномерное распределение. Непрерывное распределение с плотностью, постоянной на некотором участке $[a,b]$ и равной нулю всюду кроме этого участка, называется равномерным распределением. Из соотношения $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_a^b pdx = 1$ имеем постоянное значение плотности на участке $[a,b]$: $p = \frac{1}{b-a}$. В соответствии с формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$ имеем следующий график функции равномерного распределения:

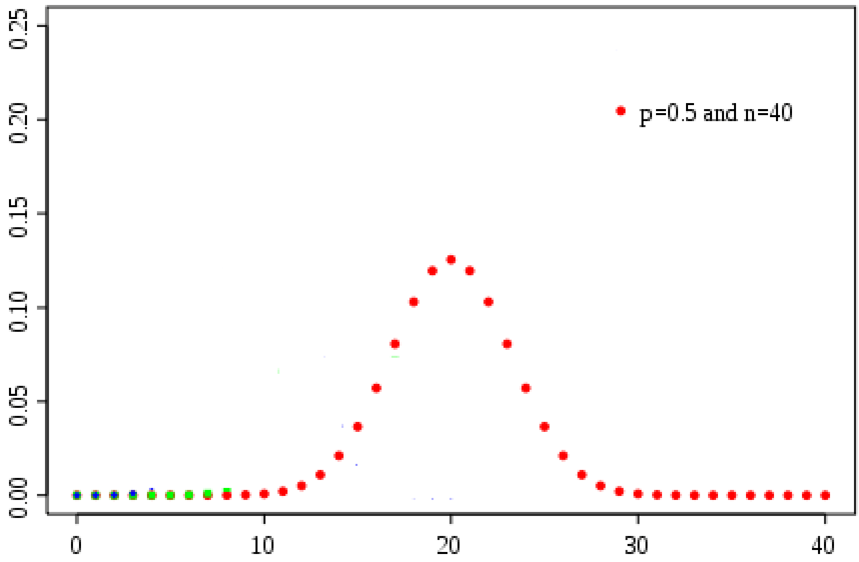


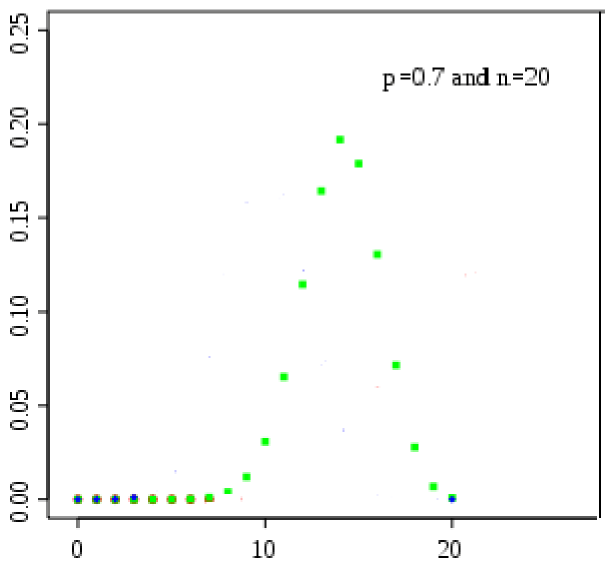
Вычислим характеристики равномерного распределения:

$$M\xi=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b+a}{2},$$

$$D\xi=\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2) Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина, принимающая только целые неотрицательные значения, не большие числа n, с вероятностями $P(\xi=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{(n-k)}$, называется распределенной по биномиальному закону. Заметим, что приведенная величина фигурировала в формуле Бернулли, которая давала вероятность наступления события в k опытах из n, если вероятность наступления события в одном опыте равна p. Характеристики распределения таковы: $M\xi=n\cdot p$, $D\xi=n\cdot p\cdot(1-p)$. На двух следующих графиках заданы законы распределения с $p=0,5$, $n=40$ и с $p=0,7$, $n=20$, соответственно.



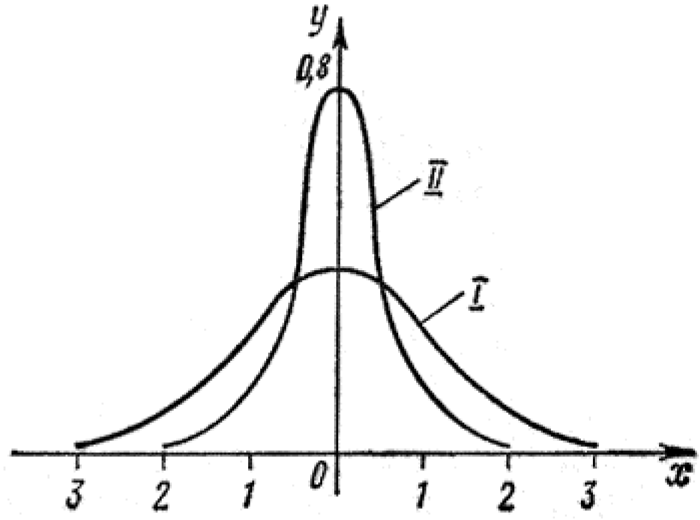


3) Нормальный закон распределения Гаусса. Этот закон распределения непрерывной случайной величины очень часто применим, поэтому остановимся на нем подробнее.

Если для дискретной величины, распределенной по биномиальному закону, построить зависимость вероятности $P(\xi = k)$ от значения k, мы заметим, что с ростом k при $k \le n \cdot p + p - 1$ вероятность монотонно возрастает, а при $k > n \cdot p + p - 1$ с ростом k вероятность монотонно убывает, достигая наибольшего значения при значениях, близких к математическому ожиданию $n \cdot p$. Это можно проследить на приведенных выше двух графиках законов биномиального распределения. Нечто подобное можно наблюдать и при построении подобной зависимости для дискретной величины, распределенной по закону Пуассона.

Аналогом закона распределения дискретной случайной величины в случае непрерывной случайной величины является плотность распределения. Естественно иметь такой закон распределения непрерывной случайной величины, плотность которого достигает наибольшего значения при значениях случайной величины, равных математическому ожиданию этой величины.

Непрерывная случайная величина называется распределенной по **нормальному закону**, если ее плотность вероятности равна $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma > 0$. График плотности распределения – кривая, симметричная относительно точки $x = m$, монотонно возрастающая от нуля ($p(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$) при $x < m$ и монотонно убывающая к нулю ($p(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$) при $x > m$. На приведенном ниже рисунке совмещены графики плотностей двух нормальных распределений. График I соответствует значениям параметров $m = 0,\ \sigma = 1$, а график II – значениям параметров $m = 0,\ \sigma = \dfrac{1}{2}$.



Коэффициент при экспоненциальной функции подобран таким, чтобы выполнялось условие $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. (При вычислении интеграла от плотности используется значение интеграла Эйлера-Пуассона: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$).

Функция распределения величины, распределенной по нормальному закону, можно задать следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-\tau^2/2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau^2/2} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(x-m)/\sigma} e^{-\tau^2/2} d\tau = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}),$$

где функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\tau^2/2} d\tau$ называется функцией Лапласа.

Функция Лапласа задается таблично, как и многие известные функции (тригонометрические функции, экспоненциальная функция и логарифмическая функция). Это монотонно возрастающая, нечетная функция, $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$.

Если случайная величина ξ имеет распределение по нормальному закону, то $P(a < \xi < b) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$. Математическое ожидание этой случайной величины равно $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx = m$. Дисперсия той же величины равна $D\xi = \sigma^2$.

Замечательным свойством нормального закона является следующее: если независимые случайные величины распределены по нормальному закону, то их сумма также распределена по нормальному закону.

Задания

1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ξ соответственно равны 10 и 2 найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале (12; 14).
2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение порога восприятия звукового сигнала в серии опытов $m_\xi = 40$ (в условных единицах), дисперсия $D_\xi = 100$. Вычислить вероятность того, что в данном испытании порог будет заключен в интервале (30; 80), считая распределение порога нормальным.
3. Пусть случайная величина ξ «центрированная», т.е. $m_\xi = 0$. Известно, что $\sigma_\xi = 5$. Найти вероятность того, что ξ не превосходит по абсолютной величине значения 5.
4. Математическое ожидание m_ξ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ уровня уверенности ξ, распределенного по нормальному закону, соответственно равны 40 и 0,4. Какие значения данного показателя можно гарантировать с вероятностью 0,8.

4. *Закон больших чисел.*

Вероятностные закономерности выявляются при большом числе опытов и называются **законом больших чисел.** Наличие этих закономерностей связано с массовостью явлений, то есть с большим числом опытов или с большим числом случайных воздействий, приводящих к такой случайной величине, которая подчиняется вполне определенному и математически выверенному закону.

Так, справедлива следующая теорема, называемая **теоремой Чебышева**. *Если случайные величины* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ *попарно независимы и существует такая константа* $C > 0$*, что* $D\xi_k \le C,\ k \in N$*, то при любом* $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| \ge a\right) = 0 .$$

То есть, какие бы конкретные значения ни принимали попарно независимые случайные величины, с большой вероятностью за их среднее можно брать среднее их математических ожиданий.

Другим примером проявления закона больших чисел является **центральная предельная теорема**: *если последовательность попарно* *независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\,|\,\xi_k - M\xi_k\,|^3}{(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k)^{3/2}} = 0\text{, } \textit{то}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n} M\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}} < b \right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Заметим, что условие, приведенное в формулировке теоремы означает, что в сумме случайных величин ни одно из слагаемых не доминирует, то есть вклад каждой из случайных величин не подавляет вкладов других величин.

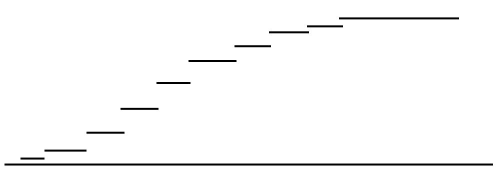
Элементы математической статистики

В предыдущем параграфе мы имели дело с законами распределения случайных величин как с чем-то заранее известным. На практике, когда мы пытаемся систематизировать наблюдения и опытные данные и делать на основании этих наблюдений прогнозы, мы должны получить все характеристики из опытов. При этом следует иметь в виду, что всякий эксперимент связан с ошибками измерений и наблюдений, и значит, характеристики, полученные из опытов, являются лишь приближенными величинами. Следует убедиться в надежности полученных результатов (то есть знать вероятность того, что результаты измерений имеют заданную точность).

Разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, полученных в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляет предмет **математической статистики**. Основными задачами математической статистики являются 1) задача определения закона распределения случайной величины по статистическим данным, 2) задача выявления достоверности полученных параметров распределения, 3) задача проверки правдоподобия гипотезы о том, что случайная величина подчиняется выбранному закону распределения.

Для статистического анализа случайной величины мы производим **выборку**, то есть, измеряем не все значения случайной величины, а только часть случайно полученных значений. Тем более, что иногда опыт по измерению значений приводит к уничтожению объекта исследований. Так, измерение срока службы электрической лампочки имеет смысл только в том случае, если в итоге опыта лампочка придет в негодность.

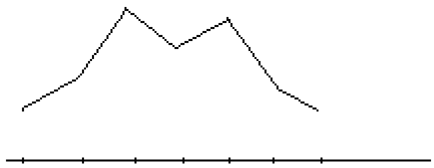
Предположим, что мы проводим анализ данных о росте трехлетних детей. При проведении опыта (измерении роста малышей) мы сначала записываем данные последовательно по мере их поступления (рост 1-го ребенка, рост 2-го ребенка,…). Следующий этап обработки статистических данных – построение **статистической функции распределения** исследуемой случайной величины. *Статистической функцией распределения случайной величины* ξ *называется частота события* $\xi < x$ *в полученном статистическом материале:* $F^*(x) = P^*(\xi < x)$. Здесь P^* – это частота, то есть, отношение числа полученных в результате опыта значений случайной величины, меньших значения x, к числу всех полученных значений. Мы получим неубывающую ступенчатую функцию, имеющую скачки в точках, соответствующих всем значениям случайной величины, полученным в результате опыта.



При увеличении числа опытов согласно закону больших чисел наша статистическая функция распределения приближается к подлинной функции распределения $F(x)$.

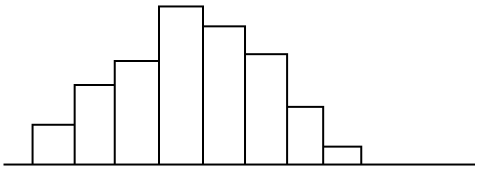
Аналогом закона распределения дискретной величины или плотности распределения непрерывной величины являются **полигон частот** и **гистограмма частот**.

Полигон частот мы получим, если каждому значению исследуемой величины, полученному в результате опыта, поставим в соответствие число наблюдений этого значения. Например, рост 1 м мы наблюдали у 7 детей, рост 1 м 1 см у 10 детей, рост
1м 2 см у 18 детей и т.д. На графике мы отложим значение $y = 7$ при значении $x = 100$, значение $y = 10$ при значении $x = 101$, значение $y = 18$ при $x = 102, \ldots$ Соединив точки графика отрезками прямых, мы получим многоугольник, который и называют полигоном частот. В случае, когда по вертикали мы откладываем не число наблюдений данного



значения, а отношение этого числа к числу всех измерений, мы получим **полигон относительных частот.**

В том случае, когда число данных, полученных в результате опыта, очень велико и расположены эти данные близко друг к другу, то есть случайная величина распределена практически непрерывно, прибегают к построению **гистограммы**. В отличие от полигона частот при построении гистограммы на оси x отмечают не отдельные значения, которые принимает случайная величина, а равные интервалы значений, а над каждым таким интервалом на высоте, равной количеству наблюденных значений случайной величины, попавших в этот интервал, помещают параллельный оси x отрезок.



Аналогом математического ожидания случайной величины при статистической обработке является среднее арифметическое полученных значений $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, называемое **эмпирическим математическим ожиданием** или **средним по выборке**. Здесь n – количество измерений, x_k – наблюдаемое значение случайной величины при k-м измерении. Аналогом дисперсии случайной величины при статистической обработке является **эмпирическая дисперсия**, вычисляемая по формуле $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x-\overline{x})^2$. Замена n на $n-1$ в знаменателе неслучайна, но объяснение этого не входит в нашу программу, поэтому ограничимся замечанием, что при больших значениях n такая замена несущественна.

После определения эмпирических параметров встает вопрос о точности оценок параметров выбранного распределения. Предположим, что θ – интересующий нас параметр распределения. На основании выборки находится интервал (θ_1, θ_2), в котором может находиться параметр и оценивается вероятность $P(\theta \in (\theta_1, \theta_2))$. Если получена такая оценка $P(\theta \in (\theta_1, \theta_2)) \ge \gamma$, то интервал (θ_1, θ_2) называется **доверительным интервалом** для параметра θ, а число γ называется **надежностью** сделанной оценки. Если надежность попадания в предложенный интервал достаточно высока (например, больше 95%), за значение θ берут середину доверительного интервала ($\theta = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$).

Пример. Пусть нам нужно найти доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения случайной величины ξ при известной дисперсии σ^2. В результате опыта мы получили значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины и нашли эмпирическое математическое ожидание $\bar{x} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Мы хотим исследовать разность между этим эмпирическим математическим ожиданием и реальным неизвестным нам математическим ожиданием m.

Считая, что каждое значение, полученное в результате измерения – это тоже случайная величина, не зависимая от других измерений, распределенная по тому же закону, что и ξ, мы можем рассматривать $\bar{x}$ как случайную величину, распределенную по нормальному закону (из свойств нормального распределения). Математическим ожиданием случайной величины $\bar{x}$ будет m, а дисперсией $\dfrac{\sigma^2}{n}$.Значит, функцией распределения случайной величины $\bar{x}$ будет $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi(\dfrac{x-m}{\sigma}\sqrt{n})$.

Следовательно,

$$P(|\bar{x} - m| < \delta) = P(m - \delta < \bar{x} < m + \delta) = F(m+\delta) - F(m-\delta) =$$
$$= \Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}).$$

Задав надежность γ, мы по таблицам для функции $\Phi(x)$ найдем то значение аргумента, при котором эта функция имеет значение $\dfrac{\gamma}{2}$. Теперь остается приравнять полученное значение аргумента выражению $\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ и найти длину доверительного интервала 2δ.

Итак, мы получили параметры и выбрали подходящий закон распределения с этими параметрами. Теперь на основании полученного статистического материала нам предстоит проверить **гипотезу**, состоящую в том, что исследуемая случайная величина подчиняется конкретному закону распределения, например, имеет функцию распределения $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi(\frac{x-m_0}{\sigma_0})$. Для проверки гипотезы существуют специальные критерии, позволяющие найти вероятность того, что отклонения данных, полученных в результате измерений, от данных, получаемых в соответствии с использованием гипотезы, вызваны случайными причинами. Если такая вероятность мала, гипотезу отвергают, если велика, гипотезу принимают.

Задания.

1. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

2. Построить полигоны частот распределения.

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	20	30	12

Найти среднее.

3. Построить гистограммы частот распределения (в первом столбце указан частичный интервал, во втором – сумма частот вариант частичного интервала).

а) 2 – 5 9 б) 150 – 155 3
5 – 8 10 155 – 160 5
8 – 11 25 160 – 165 8
11 – 14 6; 165 – 170 6
170 – 175 2

4. Дана выборка: 3, 1, 2, 1, 0, 4, 1, 4, 5, 6, 2, 5, 1, 0, 2, 3, 3, 3, 0,1.

1) Составить таблицы частот и относительных частот;
2) Построить полигоны частот и относительных частот;
3) Вычислить среднее;
4) Составить интервальные таблицы частот и относительных частот с шагом $h = 2$;
5) Построить гистограмму.

5. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}99$ неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности , если известны генеральное квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки : а) $\sigma = 4, \overline{x_B} = 10{,}2, n = 16$; б) $\sigma = 5, \overline{x_B} = 16{,}8, n = 25.$

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 10:

x_i: -2 1 2 3 4 5

n_i 2 1 2 2 2 1

Оценить с надежностью $\gamma = 0{,}95$ математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

В конце пособия мы помещаем таблицу удвоенной функции Лапласа.

Таблица удвоенной функции Лапласа

x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$
0.00	0.00000	0.36	0.28115	0.73	0.53461	1.10	0.72867	1.47	0.85844	1.84	0.93423
0.01	0.00798	0.37	0.28862	0.74	0.54070	1.11	0.73300	1.48	0.86113	1.85	0.93569
0.02	0.01596	0.38	0.29605	0.75	0.54675	1.12	0.73729	1.49	0.86378	1.86	0.93711
0.03	0.02393	0.39	0.30346	0.76	0.55275	1.13	0.74152	1.50	0.86639	1.87	0.93852
0.04	0.03191	0.40	0.31084	0.77	0.55870	1.14	0.74571	1.51	0.86696	1.88	0.93989
0.05	0.03988	0.41	0.31819	0.78	0.56461	1.15	0.74986	1.52	0.87149	1.89	0.94124
0.06	0.04784	0.42	0.32552	0.79	0.57047	1.16	0.75395	1.53	0.87398	1.90	0.94257
0.07	0.05581	0.43	0.33280	0.80	0.57629	1.17	0.75800	1.54	0.87644	1.91	0.94387
0.08	0.06376	0.44	0.34006	0.81	0.58206	1.18	0.76200	1.55	0.87886	1.92	0.94514
0.09	0.07171	0.45	0.34729	0.82	0.58778	1.19	0.76595	1.56	0.88124	1.93	0.94639
0.10	0.07966	0.46	0.35448	0.83	0.59346	1.20	0.76986	1.57	0.88358	1.94	0.94762
0.11	0.08759	0.47	0.36164	0.84	0.59909	1.21	0.77372	1.58	0.88589	1.95	0.94882
0.12	0.09552	0.48	0.36877	0.85	0.60468	1.22	0.77754	1.59	0.88817	1.96	0.95000
0.13	0.10348	0.49	0.37587	0.86	0.61021	1.23	0.78130	1.60	0.89040	1.97	0.95116
0.14	0.11134	0.50	0.38292	0.87	0.61570	1.24	0.78502	1.61	0.89260	1.98	0.95230
0.15	0.11924	0.51	0.38995	0.88	0.62114	1.25	0.78870	1.62	0.89477	1.99	0.95341
0.16	0.12712	0.52	0.39694	0.89	0.62653	1.26	0.79233	1.63	0.89690	2.00	0.95450
0.17	0.13499	0.53	0.40389	0.90	0.63188	1.27	0.79592	1.64	0.89899	2.01	0.95557
0.18	0.14285	0.54	0.41080	0.91	0.63718	1.28	0.79945	1.65	0.90106	2.02	0.95662
0.19	0.15069	0.55	0.41768	0.92	0.64243	1.29	0.80295	1.66	0.90309	2.03	0.95764
0.20	0.15852	0.56	0.42452	0.93	0.64763	1.30	0.80640	1.67	0.90508	2.04	0.95865
0.21	0.16633	0.57	0.43132	0.94	0.65278	1.31	0.80980	1.68	0.90704	2.05	0.95964
0.22	0.17413	0.58	0.43809	0.95	0.65789	1.32	0.81316	1.69	0.90897	2.06	0.96060
0.23	0.18191	0.59	0.44481	0.96	0.66294	1.33	0.81648	1.70	0.91087	2.07	0.96155

0.24	0.18967	0.60	0.45149	0.97	0.66795	1.34	0.81975	1.71	0.91273	2.08	0.96247
0.25	0.19741	0.61	0.45814	0.98	0.67291	1.35	0.82298	1.72	0.91457	2.09	0.96338
0.26	0.20514	0.62	0.46474	0.99	0.67783	1.36	0.82617	1.73	0.91637	2.10	0.96427
0.27	0.21284	0.63	0.47131	1.00	0.68269	1.37	0.82931	1.74	0.91814	2.11	0.96514
0.28	0.22052	0.64	0.47783	1.01	0.68750	1.38	0.83241	1.75	0.91988	2.12	0.96599
0.29	0.22818	0.65	0.48431	1.02	0.69227	1.39	0.83547	1.76	0.92159	2.13	0.96683
0.30	0.23582	0.66	0.49075	1.03	0.69699	1.40	0.83849	1.77	0.92327	2.14	0.96765
0.31	0.24344	0.67	0.49714	1.04	0.70166	1.41	0.84146	1.78	0.92492	2.15	0.96844
0.32	0.25103	0.68	0.50350	1.05	0.70628	1.42	0.84439	1.79	0.92655	2.16	0.96923
0.33	0.25860	0.69	0.50981	1.06	0.71086	1.43	0.84728	1.80	0.92814	2.17	0.96999
0.34	0.26614	0.70	0.51607	1.07	0.71538	1.44	0.85013	1.81	0.92970	2.18	0.97074
0.35	0.27366	0.71	0.52230	1.08	0.71986	1.45	0.85294	1.82	0.93124	2.19	0.97148
		0.72	0.52848	1.09	0.72429	1.46	0.85571	1.83	0.93275	2.20	0.97219

Литература
1. Математика: Учебно-методическое пособие / М.С.Малакаев, Е.А. Широкова – Казань: Казанский федеральный университет, 2011. – 140 с.
2. Математика: Учебно-методическое пособие / Н.Р. Абубакиров, М.С. Малакаев. – Казань: Казанский федеральный университет, 2010. – 72 с.
Электронные ресурсы
1.http://festival.1september.ru/articles/416943/
2.http://matmetod-popova.narod.ru/theme213.htm