КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2016

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"*

*Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 9 июня 2016 г.*

*заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 30 мая 2016 г.*

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, доцент **А.А. Попов**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **В.В. Шурыгин (мл.)**

Сосов Е.Н.

Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: учеб.-метод. пособие / Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2016. - 84 с.

Пособие содержит геометрию Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности.

Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов, а также для магистрантов.

УДК 514.13, 515.17

Оглавление

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по геометрии Лобачевского и ее применению в специальной теории относительности (СТО). Оно предназначено для студентов математиков старших курсов университетов, магистрантов. Автор стремился дать ясное изложение начал геометрии Лобачевского по возможности бескоординатным методом, охватив бесконечномерный случай. Из наиболее известных четырех моделей геометрии Лобачевского более подробно изучается модель Бельтрами–Клейна. Это связано с тем, что эта модель достаточно наглядная, дает возможность быстро изложить основные начальные факты и достаточно просто получить основные применения геометрии Лобачевского в СТО. Например, рассматриваются преобразования Лоренца и устанавливается, что геометрия пространства скоростей частиц в специальной теории относительности является геометрией Лобачевского. Обсуждаются применения эффекта Доплера и разбираются различные случаи упругого столкновения двух частиц. Показывается, что формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта. Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

Глава 1

Геометрия Лобачевского

1.1 Определение пространства Лобачевского. Метрика пространства Лобачевского в модели Бельтрами-Клейна

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O,1) \subset \mathbb{E}$ ($\mathbb{S}(O,1)$) — открытый шар (сфера) с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Обозначим через $|xy|$ — расстояние между точками x, $y \in \mathbb{E}$ и через $L[x,u) \subset \mathbb{E}$ — луч с началом в точке x, содержащий точку $u \neq x$.

Множество Λ называется **пространством Лобачевского** над полем $\mathbb{R}$, если существует такое отображение $\pi : \Lambda \to B(O,1)$, что выполняются следующие условия (аксиомы) :

1. π — биекция.

2. Любой паре элементов x, $y \in \Lambda$ сопоставляется число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x,x) = 0 \qquad \text{и при } x \neq y \quad \rho(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{|\pi(x)v||\pi(y)u|}{|\pi(x)u||\pi(y)v|},$$

где v (u) — точка пересечения луча $L[\pi(x),\pi(y))$ ($L[\pi(y),\pi(x))$) со сферой $\mathbb{S}(O,1)$, $k > 0$ — константа.

Размерностью пространства Лобачевского называется размерность $\mathbb{E}$, т.е. $\dim \Lambda = \dim \mathbb{E}$.

Элементы Λ называются **точками** или **л-точками**, когда необходимо отличать их от точек евклидова пространства.

Отрезок (**л-отрезок**) в Λ есть полный прообраз евклидова отрезка из $B(O,1)$ при отображении π.

Прямая (**л-прямая**) в Λ есть полный прообраз хорды из $B(O,1)$ при отображении π.

При $\Lambda = B(O,1)$, $\pi = \mathrm{id}$ мы получаем так называемую **модель Бельтрами–Клейна** пространства Лобачевского.

Теорема 1. (Λ, ρ) — *метрическое пространство, геодезические сегменты в котором есть отрезки.*

$\odot$ Достаточно доказать теорему в модели Бельтрами–Клейна. Действительно, после такого доказательства надо использовать π в качестве изометрии исходного пространства Лобачевского на модель Бельтрами–Клейна.

Проверим аксиомы метрики. Пусть x, $y \in B(O,1)$, $x \neq y$. Тогда

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{(|xy| + |yv|)(|yx| + |xu|)}{|yv||xu|} > 1.$$

Следовательно, $\rho(x,y) > 0$. Очевидно, что для любых x, $y \in B(O,1)$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

Пусть точка z принадлежит отрезку $[x,y] \subset B(O,1)$. Тогда в случае $z \notin \{x,y\}$

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{|xv||zu||zv||yu|}{|xu||zv||zu||yv|}.$$

Следовательно, $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Пусть точки x, y, $z \in B(O,1)$ не принадлежат одному отрезку. Построим точки

$$\{v\} = L[x,y) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{u\} = L[y,x) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{s\} = L[y,z) \cap \mathbb{S}(O,1),$$

$$\{t\} = L[z,y) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{m\} = L[x,z) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{l\} = L[z,x) \cap \mathbb{E}(O,1),$$

$$\{q\} = [s,l] \cap [u,v], \qquad \{h\} = [m,t] \cap [u,v],$$

$$\{p\} = P(l,s) \cap P(t,m), \qquad \{w\} = P(p,z) \cap [u,v],$$

где $P(l,s)$ — прямая, проходящая через точки l и s, а p может быть несобственной точкой в случае параллельности прямых $P(l,s)$ и $P(t,m)$.

Мы разберем случай, когда $w \in [x,y] \backslash \{x,y\}$, поскольку другие случаи тривиальны или аналогичны.

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{|xv||wu||wv||yu|}{|wv||xu||yv||wu|} < \frac{|xh||wq||wh||yq|}{|wh||xq||yh||wq|} = \frac{|xm||zl||zt||ys|}{|zm||xl||yt||zs|},$$

так как, например,

$$\frac{|xv|}{|wv|} = \frac{|xh| + |hv|}{|wh| + |hv|} < \frac{|xh|}{|wh|}$$

и остальные неравенства аналогичны, а последнее равенство следует из инвариантности сложного отношения четырех точек при проектировании из точки p на прямые $P(l,m)$ и $P(s,t)$ соответственно.

Следовательно, $\rho(x,y) < \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Таким образом, (Λ, ρ) — метрическое пространство.

Под геодезическим сегментом в метрическом пространстве понимается кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами (подробности см. в [1], с. 42).

После доказанных равенств и неравенств ясно, что отрезки являются геодезическими сегментами.

Из последнего строгого неравенства и определения геодезического сегмента следует, что кроме отрезков других геодезических сегментов в (Λ, ρ) нет. $\odot$

В модели Бельтрами–Клейна мы будем задавать точки их радиус-векторами относительно точки O и обозначать эти радиус-векторы также, как и точки. Точке O при этом соответствует нулевой радиус-вектор 0.

В модели Бельтрами–Клейна получим другую формулу для метрики, избавившись от точек u, v, принадлежащих так называемому **абсолюту** $\mathbb{S}(0,1)$ пространства Лобачевского $\Lambda = B(0,1)$.

Теорема 2. *В модели Бельтрами–Клейна имеет место формула*

$$\rho(x,y) = k \operatorname{Arch} \frac{1 - (x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

где (x,y) — скалярное произведение радиусов-векторов точек x, $y \in B(0,1)$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x.

$\odot$ Представим u, $v \in \mathbb{S}(0,1)$ в следующем виде

$$v = x + \lambda_1(y-x), \quad \lambda_1 > 1, \qquad u = x + \lambda_2(y-x), \quad \lambda_2 < 0.$$

При фиксированных различных x, $y \in B(0,1)$ числа λ_1, λ_2 являются корнями уравнения

$$\lambda^2(y-x)^2 + 2\lambda(x, y-x) + x^2 - 1 = 0.$$

Откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \frac{(x, x-y) \pm \sqrt{\Delta}}{(y-x)^2},$$

где $\Delta = (x, y-x)^2 + (1-x^2)(y-x)^2 = A^2 - B$, $A = 1 - (x,y)$, $B = (1-x^2)(1-y^2)$. Кроме того,

$$\frac{|x-v||y-u|}{|x-u||y-v|} = \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)} = \frac{((x,x-y)+\sqrt{\Delta})((y,y-x)+\sqrt{\Delta})}{((x,y-x)+\sqrt{\Delta})((y,x-y)+\sqrt{\Delta})} =$$

$$\frac{[((x,x-y)+\sqrt{\Delta})((y,y-x)+\sqrt{\Delta})]^2}{(1-x^2)(1-y^2)(y-x)^4} = \frac{(A+\sqrt{\Delta})^2}{B}.$$

Следовательно,

$$\rho(x,y) = k \ln \left(\frac{A}{\sqrt{B}} + \sqrt{\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)^2 - 1} \right) = k \operatorname{Arch} \frac{A}{\sqrt{B}}. \odot$$

Следствие 1. *В модели Бельтрами–Клейна для любых x, $y \in B(0,1)$ имеют место формулы*

$$\rho(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{A+\sqrt{\Delta}}{A-\sqrt{\Delta}} = k \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{\Delta}}{A},$$

$$\rho(0,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{1+|y|}{1-|y|} = k \operatorname{Arth}|y| = k \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad |y| = \operatorname{th}\frac{\rho(0,y)}{k}.$$

Задачи.

1. Произвести все вычисления в теоремах 1, 2 и следствии 1.

2. Доказать, что в модели Бельтрами–Клейна для любых x, $y \in B(0,r)$ имеют место формулы

$$\tilde{\rho}(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{A+\sqrt{\Delta}}{A-\sqrt{\Delta}} = k \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{\Delta}}{A},$$

$$\tilde\rho(0,y)=\frac{k}{2}\ln\frac{r+|y|}{r-|y|}=k\mathrm{Arth}\,\frac{|y|}{r}=k\mathrm{Arch}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}},\qquad |y|=r\mathrm{th}\frac{\rho(0,y)}{k},$$

где $\Delta=A^2-B$, $A=r^2-(x,y)$, $B=(r^2-x^2)(r^2-y^2)$.

1.2 Движения пространства Лобачевского

Движением пространства Лобачевского называется изометрия пространства (Λ,ρ) на себя, т.е. такая сюръекция $f:(\Lambda,\rho)\to(\Lambda,\rho)$, что для любых x, $y\in\Lambda$

$$\rho(f(x),f(y))=\rho(x,y).$$

Группа всех движений $\mathrm{Iso}(\Lambda)$ пространства Лобачевского, очевидно, изоморфна группе всех движений $\mathrm{Iso}(B(0,1))$ модели Бельтрами–Клейна.

Что произойдет, если в определении пространства Лобачевского изменить радиус шара? Оказывается получится изометричное исходному пространство Лобачевского.

Это сразу следует из следующей леммы, доказательство которой также почти очевидно.

Лемма 1. *Отображение*

$$\chi:(B(0,1),\rho)\to(B(0,r),\tilde\rho),\qquad \chi(x)=rx$$

для каждого $r>0$ является изометрией, если для любых x, $y\in B(0,r)$

$$\tilde\rho(x,y)=k\mathrm{Arch}\,\frac{r^2-(x,y)}{\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{r^2-y^2}}\,.$$

Выясним, какой вид имеет произвольное движение в модели Бельтрами–Клейна.

Теорема 1. *В модели Бельтрами–Клейна произвольное движение есть ограничение на открытый шар $B(0,1)$ проективного преобразования евклидова пространства $\mathbb{E}$, сохраняющего $B(0,1)$.*

$\odot$ Пусть $f\in\mathrm{Iso}(B(0,1))$ и $z\in[x,y]\subset B(0,1)$. Тогда $\rho(x,z)+\rho(z,y)=\rho(x,y)$.

Следовательно, $f(z) \in [f(x), f(y)]$. Кроме того, f сохраняет сложное отношение четырех точек специального вида

$$\frac{|f(x)\hat{v}||f(y)\hat{u}|}{|f(x)\hat{u}||f(y)\hat{v}|} = \frac{|xv||yu|}{|xu||yv|},$$

где $\{\hat{v}\} = L[f(x), f(y)) \cap \mathbb{S}(O,1)$, $\{\hat{u}\} = L[f(y), f(x)) \cap \mathbb{S}(O,1)$. Осталось доказать, что f сохраняет произвольное сложное отношение четырех точек.

Нетрудно понять, что достаточно доказать, что f сохраняет сложное отношение четырех точек вида $u_1 \in [u,x]\backslash\{u\}$, x, y и v. Из предыдущего свойства получим

$$\frac{|f(u_1)\hat{v}||f(x)\hat{u}|}{|f(u_1)\hat{u}||f(x)\hat{v}|} = \frac{|u_1v||xu|}{|u_1u||xv|}.$$

Тогда

$$\frac{|f(x)\hat{v}||f(y)f(u_1)|}{|f(x)f(u_1)||f(y)\hat{v}|} = \frac{1 - \dfrac{|f(y)\hat{u}||f(u_1)\hat{v}|}{|f(y)\hat{v}||f(u_1)\hat{u}|}}{1 - \dfrac{|f(u_1)\hat{v}||f(x)\hat{u}|}{|f(u_1)\hat{u}||f(x)\hat{v}|}} =$$

$$\frac{1 - \dfrac{|yu||u_1v|}{|yv||u_1u|}}{1 - \dfrac{|u_1v||xu|}{|u_1u||xv|}} = \frac{|xv||yu_1|}{|xu_1||yv|}. \odot$$

Пусть e — фиксированный единичный вектор из ассоциированного для $\mathbb{E}$ евклидова векторного пространства E.

Радиус-вектор произвольной точки $x \in B(0,1)$ можно представить в форме $x = x_1e + x_2$, где $x_1 = (x,e)$ и $x_2 = x - x_1e$.

Параллельным переносом на вектор (или вдоль направленного отрезка) $a = pe$, где $p = |a| < 1$, в модели Бельтрами–Клейна называется преобразование $g_a : B(0,1) \to B(0,1)$, имееющее вид

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1 + p}{1 + px_1}, \qquad \hat{x}_2 = \frac{x_2\sqrt{1-p^2}}{1 + px_1}.$$

Нетрудно проверить, что обратное преобразование есть параллельный перенос на вектор $(-a)$, т.е. имеет вид

$$g_a^{-1} = g_{-a}: \ x_1 = \frac{\hat{x}_1 - p}{1 - p\hat{x}_1}, \qquad x_2 = \frac{\hat{x}_2\sqrt{1-p^2}}{1 - p\hat{x}_1}.$$

Используя лемму 1, представим для параллельный перенос $g_a : (B(0,r),\rho) \to (B(0,r),\rho)$ на вектор $a = pe$ в иной форме

$$\hat{x} = r^2 \frac{(x_1+p)e}{r^2+px_1} + r\frac{x_2\sqrt{r^2-p^2}}{r^2+px_1} =$$

$$\frac{r[r((a,x)+a^2)a + (a^2x-(a,x)a)\sqrt{r^2-a^2}]}{a^2(r^2+(a,x))}.$$

1. **Паралельный перенос является движением**.

$\odot$ Мы установили, что g_a — биекция. Нетрудно непосредственно проверить, что для любых x, $y \in B(0,1)$ $\rho(g_a(x), g_a(y)) = \rho(x,y)$.

Еще проще воспользоваться теоремой 1. Из вида биекции g_a следует, что это проективное преобразование. А из равенств

$$1-(\hat{x}_1)^2-(\hat{x}_2)^2 = \frac{(1+px_1)^2-(x_1+p)^2-(1-p^2)x_2^2}{(1+px_1)^2} =$$

$$\frac{(1-p^2)(1-x_1^2-x_2^2)}{(1+px_1)^2}$$

следует, что это проективное преобразование сохраняет открытый шар $B(0,1)$. $\odot$

2. В однородных компонентах $x_1 = x_1/Z$, $x_2 = x_2/Z$ параллельный перенос g_a, очевидно, имеет вид

$$\lambda\hat{x}_1 = x_1 + pZ, \qquad \lambda\hat{x}_2 = x_2\sqrt{1-p^2}, \qquad \lambda\hat{Z} = px_1 + Z.$$

Теорема 2. *В модели Бельтрами–Клейна верны следующие утверждения.*

(i) $f \in \mathrm{Iso}(B(0,1))$ *и* $f(0) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f(0) = 0$ *и* f *— ортогональное преобразование.*

(ii) *Любое движение* $f \in \mathrm{Iso}(B(0,1))$ *имеет вид* $f = g_{f(0)} \circ U$*, где* U *— ортогональное преобразование.*

$\odot$ (i) Утверждение следует из теоремы 1 и следующих равенств и импликаций

$$\rho(f(0), f(x)) = \rho(0,x) = \rho(0, f(x)) \Leftrightarrow k\mathrm{Arth}\,|f(x)| =$$

$$k\operatorname{Arth}|x| \Leftrightarrow |f(x)| = |x|.$$

(ii) Утверждение следует из (i) и следующей импликации

$$U(x) = g^{-1}_{f(0)}(f(x)) \Rightarrow U(0) = 0. \odot$$

Отметим, что композиция параллельных переносов может не являться параллельным переносом, а представлять собой композицию поворота и параллельного переноса.

Лемма 2. *В модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского любое движение имеет вид*

$$\hat{x} = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}, \qquad \hat{y} = \frac{lx + my + n}{px + qy + r},$$

где вещественные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a^2 + l^2 - p^2 = b^2 + m^2 - q^2 = -c^2 - n^2 + r^2 = 1,$$

$$ab + lm - pq = ac + ln - pr = bc + mn - qr = 0.$$

$\odot$ Подсчитаем следующее выражение

$$(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 - 1 = \frac{V}{(px + qy + r)^2}, \quad \text{где}$$

$$V = (a^2 + l^2 - p^2)x^2 + (b^2 + m^2 - q^2)y^2 +$$
$$c^2 + n^2 - r^2 + 2(ab + lm - pq)xy + 2(ac + ln - pr)x + 2(bc + mn - qr)y.$$

Из условия сохранения $\mathbb{S}(0, 1)$ получим

$$(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 - 1 = \frac{(x^2 + y^2 - 1)(a^2 + l^2 - p^2)}{(px + qy + r)^2}.$$

Левая и правая части этого равенства должны быть меньше нуля. Следовательно, $h = a^2 + l^2 - p^2 > 0$.

Полагая $h = s^2$ и деля все коэффициенты на s, получим требуемые условия. $\odot$

Задачи.

1. Произвести все вычисления в теореме 1 и лемме 1.

1.3 Элементарная геометрия в модели Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые. Величина угла и угол параллельности. Формула Лобачевского. Теоремы Пифагора, синусов, косинусов и двойственная теорема косинусов, о биссектрисе. Дефект и избыток, длины средней линии и медианы треугольника

Используем модель Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского, т.е. $n = \dim \Lambda = 2$.

Величина л-угла есть величина евклидова угла, который получается после л-параллельного перенесения исходного угла так, чтобы вершина исходного угла перешла в центр круга 0.

Угловым дефектом или дефектом л-многоугольника M называется число

$$\sigma(M) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — величины внутренних л-углов многоугольника.

Абсолютным избытком л-треугольника T называется число

$$\delta(T) = -\sigma(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Докажем сначала теорему Пифагора.

Теорема 1. *Для прямоугольного треугольника с гипотенузой c_l и катетами a_l, b_l имеет место формула*

$$\operatorname{ch} \frac{c_l}{k} = \operatorname{ch} \frac{a_l}{k} \operatorname{ch} \frac{b_l}{k}.$$

⊙ Расположим треугольник так, чтобы его вершина, противолежащая гипотенузе, находилась в центре круга. Тогда

$$a_l = k \mathrm{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad b_l = k \mathrm{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-b^2}},$$

$$c_l = k \mathrm{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}. \odot$$

Отметим, что при достаточно малых

$$\frac{a_l}{k}, \qquad \frac{b_l}{k}, \qquad \frac{c_l}{k}$$

из аналога теоремы Пифагора следуют приближенные равенства

$$1+\frac{c_l^2}{k^2}\approx\left(1+\frac{a_l^2}{k^2}\right)\left(1+\frac{b_l^2}{k^2}\right), \qquad c_l^2\approx a_l^2+b_l^2,$$

т.е., например, в пределе при $k\to\infty$ аналог перейдет в теорему Пифагора, поэтому слово $<$аналог$>$ часто опускается.

Пусть точка $z\in B(0,1)$ не принадлежит л-прямой $P(x,y)$. Л-луч $L[z,a)$ называется **л-параллельным** л-лучу $L[x,y)$, если

$$L[z,a)\cap\mathbb{S}(0,1)=L[x,y)\cap\mathbb{S}(0,1).$$

Прямые $P(z,a)$ и $P(x,y)$ называются в этом случае **л-параллельными**.

Таким образом, **через точку вне данной л-прямой в плоскости Лобачевского проходят точно две прямые, л-параллельные данной л-прямой.**

Проведем из точки z л-перпендикуляр $[z,b]$ к л-прямой $P(x,y)$. Л-угол (и его величина) между л-лучами $L[z,a)$ и $L[z,b)$ называется **углом параллельности**.

Две л-прямые в плоскости Лобачевского называются **расходящимися** или сверхпараллельными, если они не пересекаются и не являются л-параллельными.

Теорема 2. *Имеют место следующие формулы Лобачевского*

$$\alpha_l=2\operatorname{arctg}e^{-\frac{x_l}{k}} \qquad \cos\alpha_l=\operatorname{th}\frac{x_l}{k},$$

где α_l — угол параллельности, x_l — длина перпендикуляра, проведенного из точки вне прямой к этой прямой. При этом первая функция называется функцией Лобачевского.

$\odot$ Если одна л-прямая содержит центр шара, то в силу сохранения перпендикулярности при л-параллельном переносе вдоль этой л-прямой е-перпендикулярная ей л-прямая будет и л-перпендикулярной. Действительно, при $n=2$ и $a=<p;0>$

$$g_a(<0;0>)=<p;0>, \qquad g_a(<0;1>)=<p;\sqrt{1-p^2}>.$$

Поместив вершину угла паралелльности в центр круга, получим

$$\cos\,\alpha_l = \cos\,\alpha = x = \mathrm{th}\,\frac{x_l}{k},$$

где x — евклидова длина перпендикуляра. Запишем полученное равенство в виде

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha_l}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha_l}{2}} = \frac{1-e^{-\frac{2x_l}{k}}}{1+e^{-\frac{2x_l}{k}}}\,,$$

откуда и следует первая формула. $\odot$

Для упрощения обозначений всюду в остальных формулах положим $k = 1$.

Теорема 3. *Верны следующие утверждения в планиметрии Лобачевского.*

(i) *Теорема синусов :*

$$\frac{\mathrm{sh}\,a_l}{\sin\,\alpha_l} = \frac{\mathrm{sh}\,b_l}{\sin\,\beta_l} = \frac{\mathrm{sh}\,c_l}{\sin\,\gamma_l}.$$

(ii) *Теорема косинусов :*

$$\mathrm{ch}\,c_l = \mathrm{ch}\,a_l\,\mathrm{ch}\,b_l - \mathrm{sh}\,a_l\,\mathrm{sh}\,b_l\cos\,\gamma_l.$$

(iii) *Двойственная теорема косинусов :*

$$\cos\,\gamma_l = -cos\,\alpha_l\cos\,\beta_l + \sin\,\alpha_l\sin\,\beta_l\,\mathrm{ch}\,c_l.$$

Следовательно, группа всех подобий пространства Лобачевского совпадает с группой всех движений этого пространства.

(iv) *Длина медианы m_l, проведенной к стороне c_l.*

$$\mathrm{ch}\,m_l = \frac{\mathrm{ch}\,a_l + \mathrm{ch}\,b_l}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{c_l}{2}}\,.$$

(v) *Длина средней линии d_l, проведенной к сторонам a_l и b_l.*

$$\mathrm{ch}\,d_l = \frac{\mathrm{ch}\,a_l + \mathrm{ch}\,b_l + \mathrm{ch}\,c_l + 1}{4\,\mathrm{ch}\,\frac{a_l}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{b_l}{2}}\,.$$

(vi) *Теорема о биссектрисе, основание которой делит сторону c_l на отрезок x_l, имеющий общую вершину со стороной a_l, и отрезок y_l, имеющий общую вершину со стороной b_l.*

$$\frac{\text{sh } a_l}{\text{sh } b_l} = \frac{\text{sh } x_l}{\text{sh } y_l}\,.$$

$\odot$ (i) Расположим вершину острого угла α_l прямоугольного треугольника в центре круга. Тогда получим

$$\text{th } b_l = b = c\cos\,\alpha = \text{th } c_l \cos\,\alpha_l.$$

Если учтем еще теорему Пифагора, то найдем

$$\sin\,\alpha_l = \sqrt{1-\frac{\text{th}^2\ b_l}{\text{th}^2\ c_l}} = \sqrt{1-\frac{\text{ch}^2\ a_l\,\text{sh}^2\ b_l}{\text{sh}^2\ c_l}} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{ch}^2\ a_l\,\text{ch}^2\ b_l - 1 - \text{ch}^2\ a_l\,\text{sh}^2\ b_l}}{\text{sh } c_l} = \frac{\text{sh } a_l}{\text{sh } c_l}\,.$$

В произвольном треугольнике проведем высоту h_l из вершины, противолежащей стороне c_l и используем полученную формулу для двух прямоугольных треугольников.

$$\sin\,\alpha_l = \frac{\text{sh } h_l}{\text{sh } b_l} = \frac{\sin\,\beta_l\,\text{sh } a_l}{\text{sh } b_l}.$$

(ii) Пусть h_l — высота в треугольнике с основанием на стороне a_l. Другие случаи можно привести к этому заменой обозначений.

Рассмотрим один из образовавшихся прямоугольных треугольников со сторонами b_l, h_l и d_l.

Используя теорему Пифагора и первую из полученных формул в доказательстве (i), получим

$$\text{ch } c_l = \text{ch}(a_l - d_l)\,\text{ch } h_l = \text{ch } h_l(\text{ch } a_l\,\text{ch } d_l - \text{sh } a_l\,\text{sh } d_l) =$$

$$\text{ch } a_l\,\text{ch } b_l - \text{sh } a_l\,\text{th } d_l\,\text{ch } b_l = \text{ch } a_l\,\text{ch } b_l - \text{sh } a_l\,\text{sh } b_l \cos\,\gamma_l.$$

В случае, когда основание высоты принадлежит продолжению стороны, доказательство можно получить простым изменением данного.

(iii) Преобразуем следующее отношение, используя теоремы синусов и косинусов

$$\frac{\cos\,\gamma_l+\cos\,\alpha_l\cos\,\beta_l}{\sin\,\alpha_l\sin\,\beta_l}=$$

$$\frac{\dfrac{\text{ch}\ b_l\,\text{ch}\ a_l-\text{ch}\ c_l}{\text{sh}\ b_l\,\text{sh}\ a_l}+\dfrac{(\text{ch}\ c_l\,\text{ch}\ b_l-\text{ch}\ a_l)(\text{ch}\ c_l\,\text{ch}\ a_l-\text{ch}\ b_l)}{\text{sh}^2\ c_l\,\text{sh}\ b_l\,\text{sh}\ a_l}}{\dfrac{\text{sh}\ a_l}{\text{sh}\ b_l}\left(1-\dfrac{(\text{ch}\ c_l\,\text{ch}\ a_l-\text{ch}\ b_l)^2}{\text{sh}^2\ c_l\,\text{sh}^2\ a_l}\right)}=$$

$$\frac{(\text{ch}^2\,c_l-1)(\text{ch}\,b_l\,\text{ch}\,a_l-\text{ch}\,c_l)+\text{ch}^2\,c_l\,\text{ch}\,b_l\,\text{ch}\,a_l+\text{ch}\,b_l\,\text{ch}\,a_l-\text{ch}\,c_l(\text{ch}^2\,b_l+\text{ch}^2\,a_l)}{(\text{ch}^2\,c_l-1)\,\text{sh}^2\,a_l-\text{ch}^2\,c_l\,\text{ch}^2\,a_l+2\,\text{ch}\,c_l\,\text{ch}\,a_l\,\text{ch}\,b_l-\text{ch}^2\,b_l}$$

$$=\frac{\text{ch}\ c_l(1+2\,\text{ch}\ c_l\,\text{ch}\ a_l\,\text{ch}\ b_l-\text{ch}^2\ c_l-\text{ch}^2\ b_l-\text{ch}^2\ a_l)}{-\,\text{ch}^2\ c_l-\text{sh}^2\ a_l+2\,\text{ch}\ c_l\,\text{ch}\ a_l\,\text{ch}\ b_l-\text{ch}^2\ b_l}=\text{ch}\ c_l.$$

(iv) Пусть основание медианы m_l делит сторону c_l. Используем теорему косинусов для двух образовавшихся треугольников.

$$\text{ch}\ a_l=\text{ch}\ \frac{c_l}{2}\,\text{ch}\ m_l-\text{sh}\ \frac{c_l}{2}\,\text{sh}\ m_l\cos\,\delta_l,$$

$$\text{ch}\ b_l=\text{ch}\ \frac{c_l}{2}\,\text{ch}\ m_l-\text{sh}\ \frac{c_l}{2}\,\text{sh}\ m_l\cos\,(\pi-\delta_l).$$

Сложив эти равенства, получим искомую формулу.

(v) Используем теорему косинусов сначала для меньшего треугольника, затем для исходного треугольника.

$$\text{ch}\ d_l=\text{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\text{ch}\ \frac{b_l}{2}-\text{sh}\ \frac{a_l}{2}\,\text{sh}\ \frac{b_l}{2}\cos\,\gamma_l=\text{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\text{ch}\ \frac{b_l}{2}-$$

$$\frac{\text{ch}\ a_l\,\text{ch}\ b_l-\text{ch}\ c_l}{4\,\text{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\text{ch}\ \frac{b_l}{2}}=\frac{(1+\text{ch}\ a_l)(1+\text{ch}\ b_l)-\text{ch}\ a_l\,\text{ch}\ b_l+\text{ch}\ c_l}{4\,\text{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\text{ch}\ \frac{b_l}{2}}=$$

$$\frac{\text{ch}\ a_l+\text{ch}\ b_l+\text{ch}\ c_l+1}{4\,\text{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\text{ch}\ \frac{b_l}{2}}.$$

(vi) Используем теорему синусов для смежных треугольников.

$$\frac{\text{sh}\ a_l}{\sin\,\delta_l}=\frac{\text{sh}\ x_l}{\sin\,\frac{\gamma_l}{2}},\qquad\frac{\text{sh}\ b_l}{\sin\,(\pi-\delta_l)}=\frac{\text{sh}\ y_l}{\sin\,\frac{\gamma_l}{2}}.$$

Взяв отношение этих равенств, получим искомое равенство. $\odot$

1.4 Деление отрезка в данном отношении, точка пересечения медиан в треугольнике, четырехугольник Ламберта

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. Определим точку $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий.

1. $\rho(p, \lambda_p(x)) = |\lambda|\rho(p, x)$.

2. Если $x \neq p$, $\lambda > 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$, проходящей через точки p, x, по одну сторону от точки p.

3. Если $x \neq p$, $\lambda < 0$, то точки x, $\lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$ по разные стороны от точки p.

Отображение

$$x \mapsto \lambda_p(x),$$

где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ — фиксирована). Отметим еще следующие элементарные свойства отображения λ_p.

A. Нетрудно проверить, что при $\lambda \neq 1$ точка $\lambda_p(x)$ делит ориентированный л-отрезок $[p, x]$ с началом в точке p и концом в точке x в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$.

B. Для всех p, x, $y \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\lambda_x(y) = (1 - \lambda)_y(x), \quad \rho(\lambda_p(x), \mu_p(x)) = |\lambda - \mu|\rho(p, x).$$

C. Для всех x, $y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mu_x(y) = (\mu + \lambda(\mu - 1))_z(y),$$

где точка

$$z = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)_x (y)$$

делит ориентированный л-отрезок $[x, y]$ в отношении λ.

D. Параллельный перенос g_a можно представить в виде

$$g_a = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_0(a)} \circ (-1)_0.$$

Хорошо известно, что в евклидовом пространстве группа всех движений является собственной подгруппой группы всех подобий. В пространстве

Лобачевского эти группы совпадают. Но группу всех движений пространства Лобачевского можно расширить, образовав конечные композиции движений с преобразованиями λ_p, когда точка p пробегает Λ и $\lambda > 0$. Получится сложная и недостаточно изученная группа преобразований. Ясно, что для изучения этой группы желательно иметь явное представление преобразования λ_p.

Теорема. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, p, $x \in \Lambda$. Тогда имеет место следующая формула*

$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c) + x \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c) + \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)},$$

где $a = \frac{\rho(0,p)}{k}$, $b = \frac{\rho(0,x)}{k}$, $c = \frac{\rho(p,x)}{k}$.

$\odot$ Из определения точки $\lambda_p(x)$ следует, что ее радиус-вектор можно искать в виде

$$\lambda_p(x) = p + \mu(x-p),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$. Подставим правую часть этого равенства в условие 1 и используем формулу для расстояния. Тогда получим следующее уравнение относительно μ

$$\frac{1-(p, p+\mu(x-p))}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-(p+\mu(x-p))^2}} = \operatorname{ch}(|\lambda|c).$$

Возведя обе части в квадрат и используя основное гиперболическое тождество, придем к следующему уравнению

$$((p, x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2)\mu^2 +$$
$$2\mu(1-p^2)(p, x-p)\operatorname{sh}^2(\lambda c) - (1-p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c) = 0.$$

Найдем корни этого квадратного уравнения

$$\mu_{1,2} = \frac{-(1-p^2)(p, x-p)\operatorname{sh}^2(\lambda c) \pm \sqrt{\Delta}}{(p, x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2},$$

где $\Delta = (1-p^2)^2(p, x-p)^2 \operatorname{sh}^4(\lambda c) +$

$$((p, x-p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1-p^2)(x-p)^2)(1-p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c).$$

Используя основное гиперболическое тождество, упростим числитель

$$(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)(-(p, x-p)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(p, x-p)^2 + (1-p^2)(x-p)^2}).$$

Теперь нетрудно упростить формулу для корней

$$\mu_{1,2} = \frac{(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(p, x-p)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(p, x-p)^2 + (1-p^2)(x-p)^2}} =$$

$$\frac{(1-p^2)\operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(1-p^2-(1-(p,x)))\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{(1-(p,x))^2 - (1-p^2)(1-x^2)}} =$$

$$\frac{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(\operatorname{ch}^{-2} a - \operatorname{ch}^{-1} a \operatorname{ch}^{-1} b \operatorname{ch} c)\operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\sqrt{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b \operatorname{ch}^2 c - \operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b}} =$$

$$\frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a(-\operatorname{ch} c \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c)\operatorname{sh} c)} =$$

$$\frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((\pm 1 - |\lambda|)c)}.$$

Если $\lambda = 1$, то $\mu = 1$ и в этом случае в полученной формуле должен быть верхний знак. Если $\lambda = -1$ и $p = 0$, то $\mu = -1$, $a = 0$, $c = b$ и в этом случае в полученной формуле должен быть нижний знак. Теперь нетрудно понять, что в полученной формуле верхний знак должен быть при $\lambda > 0$, а нижний знак — при $\lambda < 0$. Следовательно, получим формулу

$$\mu = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1-\lambda)c)}. \odot$$

E. Еще один способ нахождения преобразования λ_p состоит в использовании представления

$$\lambda_p = g_p \circ \lambda_0 \circ g_{-p}$$

с учетом того, что

$$\lambda_0(x) = x \operatorname{cth} b \operatorname{th}(\lambda b),$$

где $b = \frac{\rho(0,x)}{k}$, $x \in \Lambda$.

Следствие. *При $k = 1$ верны следующие утверждения в модели Бельтрами-Клейна геометрии Лобачевского.*

(i) Представление радиус-вектора середины ω отрезка через радиус-векторы его концов x и y.

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\right)_x (y) = \frac{x \operatorname{ch}\, \rho(0,x) + y \operatorname{ch}\, \rho(0,y)}{\operatorname{ch}\, \rho(0,x) + \operatorname{ch}\, \rho(0,y)} = \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) *Представление радиус-вектора r точки пересечения трех медиан треугольника через радиус-векторы вершин треугольника x, y и p.*

$$r = \frac{p\,\mathrm{ch}\ \rho(0,p) + x\,\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + y\,\mathrm{ch}\ \rho(0,y)}{\mathrm{ch}\ \rho(0,p) + \mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathrm{ch}\ \rho(0,y)}\,.$$

$\odot$ (i) Очевидно.

(ii) Рассмотрим радиус-вектор

$$r = \frac{p\,\mathrm{ch}\ \rho(0,p) + x\,\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + y\,\mathrm{ch}\ \rho(0,y)}{\mathrm{ch}\ \rho(0,p) + \mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathrm{ch}\ \rho(0,y)}\,.$$

Используя формулы для радиуса-вектора a середины отрезка $[x, y]$ и для радиуса-вектора b середины отрезка $[p, x]$, непосредственно устанавливаем, что вектор $r-y$ сонаправлен вектору $b-y$ и вектор $r-p$ сонаправлен вектору $a-p$. Аналогично, для другой пары медиан.$\odot$

Четырехугольником Ламберта называется четырехугольник $xyzu$ с прямыми углами при вершинах x, y, z и острым углом α_l при вершине u.

Для четырехугольника Ламберта имеет место формула

$$\mathrm{sh}\ \rho(x,u) = \mathrm{ch}\ \rho(z,u)\,\mathrm{sh}\ \rho(y,z).$$

$\odot$ Действительно, пусть β_l — угол между отрезками $[y, u]$ и $[y, x]$. Тогда

$$\mathrm{sh}\ \rho(x,u) = \mathrm{sh}\ \rho(y,u)\sin\,\beta_l = \mathrm{sh}\ \rho(y,u)\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}-\beta_l)} =$$

$$\mathrm{sh}\ \rho(y,u)\sqrt{1-\frac{\mathrm{sh}^2\ \rho(z,u)}{\mathrm{sh}^2\ \rho(y,u)}} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\ \rho(y,u) - 1 - \mathrm{sh}^2\ \rho(z,u)} =$$

$$\sqrt{\mathrm{ch}^2\ \rho(y,z)\,\mathrm{ch}^2\ \rho(z,u) - \mathrm{ch}^2\ \rho(z,u)} = \mathrm{ch}\ \rho(z,u)\,\mathrm{sh}\ \rho(y,z).\ \odot$$

В модели Бельтрами–Клейна можно проверить, что за исключением пятого постулата (одиннадцатой аксиомы) все аксиомы планиметрии Евклида верны.

Задачи.

1. Докажите свойства $(A-E)$.

2. Докажите, что это преобразование λ_p уменьшает расстояния при $0<\lambda<1$ и, следовательно, увеличивает расстояния при $\lambda>1$.

1.5 Модели Пуанкаре пространства Лобачевского на верхней полусфере псевдоевклидова пространства индекса 1, в открытом шаре евклидова пространства и в открытом полупространстве евклидова пространства

Рассмотрим в $\mathbb{R} \times E$ псевдоскалярное произведение

$$(< x_0; x >, < y_0; y >) = x_0 y_0 - (x, y),$$

где x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, x, $y \in E$. Задав на верхней полусфере псевдоевклидова пространства индекса 1

$$\mathbb{S}_+ = \{< x_0; x > \in \mathbb{R} \times \mathbb{E} : < x_0; x >^2 = r^2,\ x_0 > 0\},$$

где $r > 0$, метрику

$$\rho_L(< x_0; x >, < y_0; y >) = k \mathrm{Arch}\, \frac{(< x_0; x >, < y_0; y >)}{r^2},$$

мы получим **модель пространства Лобачевского на сфере псевдоевклидова пространства индекса 1**.

Рассмотрим отображение (опустив тильду у метрики)

$$F : (\mathbb{S}_+, \rho_L) \to (B(0, r), \rho) \subset \mathbb{E}, \qquad F(< x_0; x >) = \frac{r}{x_0} x = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} x.$$

Тогда нетрудно найти обратное отображение

$$F^{-1} : (B(0, r), \rho) \to (\mathbb{S}_+, \rho_L), \qquad F^{-1}(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} < r; x > .$$

Теорема 1. *Отображение $F : (\mathbb{S}_+, \rho_L) \to (B(0, r), \rho)$ является изометрией, которая есть композиция центральной проекции из точки 0 сферы $\mathbb{S}_+$ на гиперплоскость с уравнением $x_0 = r$ и ортогональной проекции этой гиперплоскости на гиперплоскость с уравнением $x_0 = 0$. Следовательно, прямые пространства $(\mathbb{S}_+, \rho_L)$ есть сечения $\mathbb{S}_+$ двумерными плоскостями, содержащими 0.*

$\odot$ Докажем сохранение расстояния отображением F

$$\rho(F(< x_0; x >), F(< y_0; y >)) =$$

$$k\operatorname{Arch}\frac{r^2-(\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}x,\frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}}y)}{\sqrt{r^2-\left(\frac{rx}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)^2}\sqrt{r^2-\left(\frac{ry}{\sqrt{r^2+y^2}}\right)^2}}=$$

$$k\operatorname{Arch}\frac{(<x_0;x>,<y_0;y>)}{r^2}=\rho_L(<x_0;x>,<y_0;y>)\,.$$

Прямая с уравнением

$$<y_0;y>=\lambda<\sqrt{r^2+x^2};x>,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

пересекает гиперплоскость с уравнением $x_0=r$ в точке с параметром на прямой $\lambda=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$. Следовательно, после проекции на гиперплоскость с уравнением $x_0=0$, получим

$$F(<x_0;x>)=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}x.$$

Кроме того,

$$F(F^{-1}(x))=\frac{\frac{r^2x}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}}=x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Рассмотрим стереографическую проекцию f из точки $<-r;0>\in\mathbb{S}_+$ на открытый шар $B(0,r)\subset\mathbb{E}$

$$f:\mathbb{S}_+\to B(0,r),\qquad f(<x_0;x>)=\frac{rx}{r+\sqrt{r^2+x^2}}\,.$$

Докажем это и то, что обратное отображение имеет вид

$$f^{-1}:B(0,r)\to\mathbb{S}_+,\qquad f^{-1}(x)=\frac{r}{r^2-x^2}<r^2+x^2;2rx>\ .$$

$\odot$ Прямая с уравнением

$$<y_0;y>=<-r;0>+\lambda<r+\sqrt{r^2+x^2};x>,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

пересекает гиперплоскость с уравнением $x_0=0$ в точке с параметром на прямой $\lambda=\frac{r}{r+\sqrt{r^2+x^2}}$. Следовательно,

$$f(<x_0;x>)=\frac{rx}{r+\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Кроме того,

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{\dfrac{2r^3x}{r^2-x^2}}{r+\sqrt{r^2+\left(\dfrac{2r^2x}{r^2-x^2}\right)^2}} = x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Определим метрику Пуанкаре формулой

$$\rho_P : B(0,r)\times B(0,r)\to \mathbb{R}_+, \qquad \rho_P(x,y)=\rho_L(f^{-1}(x),f^{-1}(y)).$$

Тогда, используя формулы

$$\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\ t-1}{2}}, \qquad \mathrm{th}\,\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\ t-1}{\mathrm{ch}\ t+1}}\,,$$

нетрудно проверить, что

$$\rho_P(x,y)=k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2+x^2)(r^2+y^2)-4r^2(x,y)}{(r^2-x^2)(r^2-y^2)} =$$

$$2k\mathrm{Arsh}\,\frac{r|x-y|}{\sqrt{(r^2-x^2)(r^2-y^2)}} = 2k\mathrm{Arth}\,\frac{r|x-y|}{\sqrt{r^2(y-x)^2+(r^2-x^2)(r^2-y^2)}}\,.$$

Таким образом, получили **модель Пуанкаре пространства Лобачевского в открытом шаре $B(0,r)$ евклидова пространства**.

Теорема 2. *Отображение*

$$\psi : (B(0,r),\rho_P)\to(B(0,r),\rho), \qquad \psi(x)=\frac{2r^2x}{r^2+x^2}$$

является изометрией, которая есть композиция ограничения на шар $B(0,r)\subset\mathbb{E}$ стереографической проекции из точки $< -r;0 >\in \mathbb{R}\times\mathbb{E}$, принимающей значения на верхней полусфере $\mathbb{S}_+(<0;0>,r)$ евклидова пространства $\mathbb{E}$, и ортогональной проекции этой полусферы на шар $B(0,r)\subset\mathbb{E}$. Обратная изометрия имеет вид

$$\psi^{-1} : (B(0,r),\rho)\to(B(0,r),\rho_P), \qquad \psi^{-1}(x)=\frac{rx}{r+\sqrt{r^2-x^2}}\,.$$

$\odot$ Докажем сохранение расстояния отображением ψ

$$\rho(\psi(x),\psi(y)) = k\mathrm{Arch}\,\frac{r^2-(\dfrac{2r^2x}{r^2+x^2},\dfrac{2r^2y}{r^2+y^2})}{\sqrt{r^2-\left(\dfrac{2r^2x}{r^2+x^2}\right)^2}\sqrt{r^2-\left(\dfrac{2r^2y}{r^2+y^2}\right)^2}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2+x^2)(r^2+y^2)-4r^2(x,y)}{(r^2-x^2)(r^2-y^2)} = \rho_P(x,y).$$

Прямая с уравнением

$$< y_0; y >=< -r; 0 > +\lambda < r; x >, \qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

пересекает верхнюю полусферу $\mathbb{S}_+(< 0; 0 >, r)$ с уравнением $x_0^2+x^2=r^2$ в точке с параметром на прямой, удовлетворяющим уравнению $r^2(\lambda-1)^2+\lambda^2x^2=r^2$.

Следовательно, $\lambda=\frac{2r^2}{r^2+x^2}$. После проекции на гиперплоскость с уравнением $x_0=0$, получим

$$\psi(x)=\frac{2r^2x}{r^2+x^2}\,.$$

Кроме того,

$$\psi(\psi^{-1}(x)) = \frac{\dfrac{2r^3x}{r+\sqrt{r^2-x^2}}}{r^2+\left(\dfrac{rx}{r+\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} = x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Теорема 3. *Если на шаре $B(0,r)$ заменить метрику ρ_P на метрику ρ, то отображение $\psi:(B(0,r),\rho)\to(B(0,r),\rho)$ будет сохранять лучи, исходящие из 0, и увеличивать на них в два раза в метрике ρ расстояния от 0. Обратное отображение ψ^{-1} отображает гиперплоскости пространства $(B(0,r),\rho)$ в гиперплоскости пространства $(B(0,r),\rho_P)$, которые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ есть пересечения с шаром $B(0,r)$ евклидовых сфер или евклидовых гиперплоскостей (содержащих 0), ортогональных сфере $\mathbb{E}(0,r)$.*

$\odot$ Проверим свойство увеличения расстояния

$$\rho(0,\psi(x)) = \frac{k}{2}\ln\frac{r+\dfrac{2r^2|x|}{r^2+x^2}}{r-\dfrac{2r^2|x|}{r^2+x^2}} = k\ln\frac{r+|x|}{r-|x|} = 2\rho(0,x).$$

Пусть гиперплоскость в $(B(0,r),\rho)$ имеет уравнение $(n,x)=p$, где $|n|=1$ и $0\le p<r$.

При отображении ψ^{-1} эта гиперплоскость отобразится в гиперплоскость пространства $(B(0,r),\rho_P)$ с уравнением

$$\frac{2r^2(n,x)}{r^2+x^2} = p.$$

При $p=0$ это уравнение $(n,x)=0$ гиперплоскости, содержащей 0.

А при $0<p<r$ это уравнение $p(x^2+r^2)-2r^2(n,x)=0$ сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с вектором нормали $px-r^2n$.

В точках пересечения этой сферы со сферой $\mathbb{S}(0,r)$ с уравнением $x^2=r^2$ получим

$$(px-r^2n,x) = pr^2-r^2(n,x) = 0,$$

т.е. они пересекаются ортогонально. $\odot$

Рассмотрим ограничение инверсии $\theta : B(<0;0>,r)\to\Pi_+$ относительно сферы $\mathbb{S}(<-r;0>,\sqrt{2}r)\subset\mathbb{R}\times\mathbb{E}$ на открытый шар $B(<0;0>,r)\subset\mathbb{R}\times\mathbb{E}$ и принимающей значения в верхнем открытом полупространстве $\Pi_+=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{E}$.

Используя свойства инверсии: оставлять инвариантными открытые лучи с началом в точке $<-r;0>$ и

$$|\theta(<x_1;x>)-<-r;0>||<x_1;x>-<-r;0>| = 2r^2,$$

получим явный вид инверсии

$$\theta(<x_1;x>) = <-r;0> + \frac{2r^2}{<r+x_1;x>^2}<r+x_1;x> =$$

$$\frac{r}{(r+x_1)^2+x^2}<r^2-x_1^2-x^2;2rx>.$$

Отметим, что при этой инверсии сфера $\mathbb{S}(< 0; 0 >, r)$ отобразится на гиперплоскость с уравнением $x_1 = 0$.

$\odot$ Действительно, если $< x_1; x > \in \mathbb{S}(< 0; 0 >, r)$, то

$$x_1^2 + x^2 = r^2, \qquad \theta(< x_1; x >) = \frac{r}{r + x_1} < 0; x > . \odot$$

Если мы введем на верхнем открытом полупространстве $\Pi_+ = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{E}$ метрику

$$\rho_{\Pi_+}(< x_1; x >, < y_1; y >) = \rho_P(\theta^{-1}(< x_1; x >), \theta^{-1}(< y_1; y >)),$$

то получим **модель Пуанкаре пространства Лобачевского в открытом полупространстве евклидова пространства**.

Лемма 1. *Метрика ρ_{Π_+} на Π_+ имеет вид*

$$\rho_{\Pi_+}(< x_1; x >, < y_1; y >) = k\mathrm{Arch}\,\frac{x_1^2 + y_1^2 + (x - y)^2}{2x_1 y_1} .$$

$\odot$ Вычислим следующие величины

$$(\theta(< x_1; x >))^2 = \frac{r^2}{((r + x_1)^2 + x^2)^2}(r^4 + (x^2)^2 - 2x_1^2(r^2 - x^2) + 2r^2x^2 + x_1^4) =$$

$$\frac{r^2((r - x_1)^2 + x^2)}{(r + x_1)^2 + x^2}, \qquad r^2 - (\theta(< x_1; x >))^2 = \frac{4r^3 x_1}{(r + x_1)^2 + x^2} ,$$

$$r^2 + (\theta(< x_1; x >))^2 = \frac{2r^2(r^2 + x_1^2 + x^2)}{(r + x_1)^2 + x^2} .$$

Тогда, учитывая, что $\theta^{-1} = \theta$, получим

$$\rho_{\Pi_+}(< x_1; x >, < y_1; y >) = \rho_P(\theta^{-1}(< x_1; x >), \theta^{-1}(< y_1; y >)) =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2 + (\theta(< x_1; x >))^2)(r^2 + (\theta(< y_1; y >))^2) - 4r^2(\theta(< x_1; x >), \theta(< y_1; y >))}{(r^2 - (\theta(< x_1; x >))^2)(r^2 - (\theta(< y_1; y >))^2)} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2 + x_1^2 + x^2)(r^2 + y_1^2 + y^2) - (r^2 - x_1^2 - x^2)(r^2 - y_1^2 - y^2) - 4r^2(x, y)}{4r^2 x_1 y_1} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{x_1^2 + y_1^2 + (x - y)^2}{2x_1 y_1} . \odot$$

Задачи.

1. Доказать, что при $r = 1$

$$\psi^{-1}(x) = \omega(0, x) = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\rho(0, x)}{k} x}{1 + \operatorname{ch} \dfrac{\rho(0, x)}{k}},$$

где $\omega(0, x)$ — радиус-вектор середины отрезка $[0, x]$.

2. Доказать, что при $n = 2$, $x_1 = y$, $x_2 = x$ и $z = x + iy$

$$\theta(z) = r\frac{ri - z}{ri + z} = r\frac{r^2 - x^2 - y^2 + 2rxi}{x^2 + (r + y)^2}.$$

3. Доказать, что различные формулы для метрики ρ_P верны.

4. Докажите, что в модели Пуанкаре в шаре

$$|x| = r \operatorname{th} \frac{\rho_P(0, x)}{2k}.$$

1.6 Гиперплоскость в пространстве Лобачевского. Расстояние от точки до гиперплоскости. Ортогональная проекция точки на гиперплоскость. Величина угла между гиперплоскостями

Пусть гиперплоскость Π в модели Бельтрами–Клейна в шаре $(B(0, k), \rho)$ имеет уравнение $(n, x) = p$, где $|n| = 1$ и $0 \le p < k$.

Найдем проекцию y_Π точки y на эту гиперплоскость. Сначала параллельно перенесем гиперплоскость Π так, чтобы $0 \in g_a^{-1}(\Pi)$, где $a = pn$.

$$\hat{y}_1 = k^2\frac{y_1 - p}{k^2 - py_1}, \qquad \hat{y}_2 = k\frac{y_2\sqrt{k^2 - p^2}}{k^2 - py_1}.$$

Записывая условие ортогональности гиперплоскости и нормали, проведенной через точку $\hat{y}$ к гиперплоскости $g_a^{-1}(\Pi)$ с уравнением $(n, x) = 0$

$$(n, \hat{y} + \lambda n) = 0,$$

найдем $\lambda = -(n, \hat{y})$. Следовательно, радиус-вектор основания перпендикуляра на гиперплоскости $g_a^{-1}(\Pi)$, проведенного из точки $\hat{y}$, имеет вид

$$b = \hat{y} - (n, \hat{y})n = \hat{y}_2.$$

Осуществим обратный параллельный перенос этого основания b, чтобы получить искомый радиус-вектор ортогональной проекции точки y на гиперплоскость П.

$$y_{\Pi} = g_a(b): \quad \hat{b}_1 = k^2 \frac{b_1 + p}{k^2 + pb_1} = p,$$

$$\hat{b}_2 = k \frac{b_2\sqrt{k^2-p^2}}{k^2+pb_1} = \frac{\hat{y}_2\sqrt{k^2-p^2}}{k} = \frac{y_2(k^2-p^2)}{k^2-py_1} = \frac{(y-(n,y)n)(k^2-p^2)}{k^2-p(n,y)}.$$

Таким образом, получим

$$y_{\Pi} = pn + \frac{(y-(n,y)n)(k^2-p^2)}{k^2-p(n,y)} = \frac{(k^2-p^2)y + k^2(p-(n,y))n}{k^2-p(n,y)}.$$

Найдем расстояние от точки y до гиперплоскости П.

$$\rho(y, y_{\Pi}) = k \operatorname{Arch} \frac{k^2 - (y, y_{\Pi})}{\sqrt{k^2-y^2}\sqrt{k^2-y_{\Pi}^2}} =$$

$$k \operatorname{Arch} \frac{k^2(k^2-p(n,y)) - (k^2-p^2)y^2 - k^2(p-(n,y))(n,y)}{\sqrt{k^2-y^2}\sqrt{k^2(k^2-p(n,y))^2 - ((k^2-p^2)y + k^2(p-(n,y))n)^2}} =$$

$$k \operatorname{Arch} \frac{(k^2-p^2)(k^2-y^2) + k^2(p-(n,y))^2}{\sqrt{k^2-y^2}\sqrt{(k^2-p^2)((k^2-p^2)(k^2-y^2) + k^2(p-(n,y))^2)}} =$$

$$k \operatorname{Arch} \sqrt{1 + \frac{k^2(p-(n,y))^2}{(k^2-y^2)(k^2-p^2)}}.$$

Таким образом, верны формулы

$$\rho(y, y_{\Pi}) = k \operatorname{Arch} \sqrt{1 + \frac{k^2(p-(n,y))^2}{(k^2-y^2)(k^2-p^2)}},$$

$$\operatorname{sh} \frac{\rho(y, y_{\Pi})}{k} = \frac{k|(n,y)-p|}{\sqrt{k^2-y^2}\sqrt{k^2-p^2}} = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{p_l}{k} |(n,y) - k \operatorname{th} \dfrac{p_l}{k}|}{\sqrt{k^2-y^2}}.$$

Вспомним формулу для параллельного переноса
$g_a : (B(0,k), \rho) \to (B(0,k), \rho)$ на вектор $a = pe$

$$\hat{x} = \frac{k[k((a,x)+a^2)a + (a^2x - (a,x)a)\sqrt{k^2-a^2}]}{a^2(k^2+(a,x))},$$

и перенесем параллельно гиперплоскость Π с уравнением $(n, \hat{x} - x_0) = 0$, где $|n| = 1$, на вектор $a = -x_0$. Тогда она отобразится в гиперплоскость, проходящую через центр шара и имеющую уравнение

$$(n, k[k((x_0, x)+x_0^2)x_0+(x_0^2 x-(x_0, x)x_0)\sqrt{k^2 - x_0^2}]-x_0 x_0^2(k^2+(x_0, x))) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(kx_0^2 n + (n, x_0)(\sqrt{k^2 - x_0^2} - k)x_0, x) = 0.$$

Вычислим величину угла, образованного в точке x_0 гиперплоскостью Π и гиперплоскостью Π_1 с уравнением $(n_1, \hat{x} - x_0) = 0$, где $|n_1| = 1$.

После аналогичного параллельного переноса второй гиперплоскости получим

$$\cos\varphi = \frac{|(kx_0^2 n + (n, x_0)(\sqrt{k^2 - x_0^2} - k)x_0, kx_0^2 n_1 + (n_1, x_0)(\sqrt{k^2 - x_0^2} - k)x_0)|}{|kx_0^2 n + (n, x_0)(\sqrt{k^2 - x_0^2} - k)x_0||kx_0^2 n_1 + (n_1, x_0)(\sqrt{k^2 - x_0^2} - k)x_0|} =$$

$$\frac{|k^2(n, n_1) - (n, x_0)(n_1, x_0)|}{\sqrt{k^2 - (n, x_0)^2}\sqrt{k^2 - (n_1, x_0)^2}}.$$

Если гиперплоскости заданы уравнениями

$$(n, x) = p, \qquad (n_1, x) = p_1,$$

где $|n| = |n_1| = 1$ и $0 \le p\,, p_1 < k$, то, очевидно,

$$\cos\varphi = \frac{|k^2(n, n_1) - pp_1|}{\sqrt{k^2 - p^2}\sqrt{k^2 - p_1^2}}.$$

Эти гиперплоскости пересекаются, расходятся, перпендикулярны, если правая часть этого равенства меньше 1, больше 1, равна 0 соответственно.

Таким образом, условие перпендикулярности гиперплоскостей имеет вид

$$k^2(n, n_1) - pp_1 = 0.$$

1.7 Римановы метрики пространства Лобачевского в моделях Бельтрами–Клейна, Пуанкаре в шаре и в открытом полупространстве. Длина окружности

Рассмотрим в $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ псевдориманову метрику, выбрав знак таким образом, чтобы индуцированная риманова метрика на $\mathbb{E}$ была положительно определенной

$$dl^2 = -dx_0^2 + dx^2.$$

Используем изометрию

$$F^{-1} : (B(0,r), \rho) \to (\mathbb{S}_+, \rho_L), \qquad F^{-1}(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} < r; x >$$

для нахождения римановой метрики в модели Бельтрами–Клейна.

$$dl^2 = -d\hat{x}_0^2 + d\hat{x}^2 = -\frac{r^4(x,dx)^2}{(r^2-x^2)^3} + \left(\frac{rx(x,dx)}{(r^2-x^2)^{3/2}} + \frac{rdx}{(r^2-x^2)^{1/2}}\right)^2 =$$

$$\frac{r^2}{(r^2-x^2)^3}(-r^2(x,dx)^2 + x^2(x,dx)^2 + 2(x,dx)^2(r^2-x^2) + dx^2(r^2-x^2)^2) =$$

$$\frac{r^2}{(r^2-x^2)^2}((r^2-x^2)dx^2 + (x,dx)^2).$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Бельтрами–Клейна** имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2((r^2-x^2)dx^2 + (x,dx)^2)}{(r^2-x^2)^2}.$$

Для нахождения римановой метрики в модели Пуанкаре в шаре используем изометрию

$$f^{-1} : (B(0,r), \rho_P) \to (\mathbb{S}_+, \rho_L), \qquad f^{-1}(x) = \frac{r}{r^2 - x^2} < r^2 + x^2; 2rx > .$$

$$dl^2 = -d\hat{x}_0^2 + d\hat{x}^2 = -\frac{16r^6(x,dx)^2}{(r^2-x^2)^4} +$$

$$\frac{4r^4(dx^2(r^2-x^2)^2 + 4(x,dx)^2(r^2-x^2) + 4x^2(x,dx)^2)}{(r^2-x^2)^4} = \frac{4r^4dx^2}{(r^2-x^2)^2}.$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Пуанкаре в шаре** имеет вид

$$dl^2 = \frac{4r^4dx^2}{(r^2-x^2)^2}.$$

Для нахождения римановой метрики в модели Пуанкаре в открытом полупространстве используем изометрию

$$f^{-1} \circ \theta^{-1} : (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}) \to (\mathbb{S}_+, \rho_L)$$

Найдем сначала ее явный вид и дифференциал, используя найденные ранее выражения,

$$(f^{-1} \circ \theta^{-1})(< x_1; x >) = \frac{r}{r^2 - (\theta(< x_1; x >))^2} < r^2 + (\theta(< x_1; x >))^2;$$

$$2r\theta(< x_1; x >) >= \frac{1}{2x_1} < r^2 + x_1^2 + x^2; r^2 - x_1^2 - x^2; 2rx >,$$

$$< d\hat{x}_0; d\hat{x}_1; d\hat{x} >= \frac{1}{2x_1^2} < (x_1^2 - r^2 - x^2)dx_1 + 2x_1(x, dx);$$

$$(-x_1^2 - r^2 + x^2)dx_1 - 2x_1(x, dx); 2r(x_1 dx - x dx_1) > .$$

Тогда

$$dl^2 = -d\hat{x}_0^2 + d\hat{x}_1^2 + d\hat{x}^2 = \frac{1}{4x_1^4}(-(x_1^2 - r^2 - x^2)^2 dx_1^2 - 4x_1^2(x, dx)^2 -$$

$$4x_1 dx_1(x, dx)(x_1^2 - r^2 - x^2) + (-x_1^2 - r^2 + x^2)^2 dx_1^2 - 4x_1 dx_1(x, dx)(-x_1^2 - r^2 + x^2) +$$

$$4x_1^2(x, dx)^2 + 4r^2(x_1^2 dx^2 - 2(x, dx)x_1 dx_1 + x^2 dx_1^2) = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}.$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Пуанкаре в открытом полупространстве** имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}.$$

Приведем эти римановы метрики при $n = 2$ в декартовых координатах $< x; y >$.

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2((r^2 - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2) + (xdx + ydy)^2)}{(r^2 - x^2 - y^2)^2} =$$

$$\frac{r^2((r^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (r^2 - x^2)dy^2)}{(r^2 - x^2 - y^2)^2}.$$

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в открытом круге имеет вид

$$dl^2 = \frac{4r^4(dx^2 + dy^2)}{(r^2 - x^2 - y^2)^2}.$$

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней открытой полуплоскости имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2(dx^2+dy^2)}{y^2}\,.$$

Примеры.

1. Найдем длину окружности радиуса R_l плоскости Лобачевского, используя полярные координаты (ρ, φ) и модель Бельтрами–Клейна.

Сначала запишем риманову метрику в модели Бельтрами–Клейна, используя полярные координаты,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$dl^2 = \frac{r^2((r^2-x^2-y^2)(dx^2+dy^2)+(xdx+ydy)^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2} = \frac{r^2((r^2-\rho^2)(d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2)+\rho^2 d\rho^2)}{(r^2-\rho^2)^2}.$$

Уравнение окружности в евклидовой плоскости имеет вид $\rho = R$, а в плоскости Лобачевского имеет вид $\rho = r\,\mathrm{th}\,\frac{R_l}{k}$. Тогда длина окружности имеет вид

$$l = r\int\limits_0^{2\pi}\frac{Rd\varphi}{\sqrt{r^2-R^2}} = \frac{2\pi rR}{\sqrt{r^2-R^2}} = \frac{2\pi r^2\,\mathrm{th}\,\dfrac{R_l}{k}}{r\,\mathrm{ch}^{-1}\,\dfrac{R_l}{k}} = 2\pi r\,\mathrm{sh}\,\frac{R_l}{k}\,.$$

2. Проведем расчет той же длины в модели Пуанкаре в открытом круге.

Сначала запишем риманову метрику в модели Пуанкаре в открытом круге, используя полярные координаты,

$$dl^2 = \frac{4r^4(d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2)}{(r^2-\rho^2)^2}\,.$$

Тогда длина окружности с уравнением $\rho = R = r\,\mathrm{th}\,\frac{R_l}{2k}$ имеет вид

$$l = 2r^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{Rd\varphi}{r^2-R^2} = \frac{4\pi r^2 R}{r^2-R^2} = \frac{4\pi r^3\,\mathrm{th}\,\dfrac{R_l}{2k}}{r^2-r^2\,\mathrm{th}^2\,\dfrac{R_l}{2k}} =$$

$$4\pi r \operatorname{sh} \frac{R_l}{2k} \operatorname{ch} \frac{R_l}{2k} = 2\pi r \operatorname{sh} \frac{R_l}{k}.$$

Обычно формулу длины окружности приводят при $r = k$

$$l = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{R_l}{k}.$$

1.8 Координаты Лобачевского, Бельтрами и полярные координаты в плоскости Лобачевского. Элемент площади в координатах Бельтрами. Площадь круга и треугольника. Полюс и поляра. Величина угла между прямыми

1. Декартовы координаты в модели Бельтрами–Клейна в круге радиуса k плоскости Лобачевского

$$x = k \operatorname{th} \frac{x_l}{k}, \qquad y = k \operatorname{th} \frac{y_l}{k}$$

называются **бельтрамиевыми координатами**.

Соответствующие полярные координаты (ρ, φ) называются **бельтрамиевыми полярными координатами**.

2. Координаты $< \rho_l = k \operatorname{Arth} \frac{\rho}{k}; \varphi >$ называются **л-полярными координатами**.

3. Координаты $< x_l; \rho(< x; 0 >, < x; y >) >$ называются **координатами Лобачевского** для точки из верхней полуплоскости.

Чтобы найти элемент площади в координатах Бельтрами, найдем определитель метрического тензора

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{k^4((k^2 - y^2)(k^2 - x^2) - x^2y^2)}{(k^2 - x^2 - y^2)^4} = \frac{k^6}{(k^2 - x^2 - y^2)^3}.$$

Следовательно, элемент площади в модели Бельтрами–Клейна в координатах Бельтрами выражается формулой

$$dS = \frac{k^3 dxdy}{(k^2 - x^2 - y^2)^{3/2}}.$$

Найдем площадь круга радиуса $R = k\,\mathrm{th}\,\frac{R_l}{k}$, используя бельтрамиевы полярные координаты.

$$S = k^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R}\frac{\rho d\rho}{(k^2-\rho^2)^{3/2}} = \frac{2\pi k^3}{\sqrt{k^2-\rho^2}}|_0^R = 2\pi k^2(\frac{k}{\sqrt{k^2-R^2}}-1) =$$

$$2\pi k^2(\mathrm{ch}\,\frac{R_l}{k}-1) = 4\pi k^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{R_l}{2k}\,.$$

Найдем теперь площадь прямоугольного треугольника, вершина острого угла $\alpha_l = \alpha$ которого расположена в центре круга.

Пусть сторона, противолежащая этому углу, имеет уравнение $\rho\cos\varphi = b$. Тогда

$$S = k^3\int\limits_0^{\alpha} d\varphi\int\limits_0^{\frac{b}{\cos\varphi}}\frac{\rho d\rho}{(k^2-\rho^2)^{3/2}} = k^3\int\limits_0^{\alpha}\frac{1}{(k^2-\rho^2)^{1/2}}|_0^{\frac{b}{\cos\varphi}}d\varphi =$$

$$k^2\int\limits_0^{\alpha}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-(b/k)^2}}-1\right)d\varphi = k^2\mathrm{arcsin}\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-(b/k)^2}}|_0^{\alpha} - k^2\alpha =$$

$$k^2\mathrm{arcsin}\,(\mathrm{ch}\,\frac{b_l}{k}\sin\alpha_l) - k^2\alpha_l = k^2(\mathrm{arcsin}\,(\cos\beta_l)-\alpha_l) = k^2(\frac{\pi}{2}-\alpha_l-\beta_l).$$

Разбив произвольный треугольный треугольник T на два прямоугольных, получим его площадь в виде

$$S = k^2(\pi-\alpha_l-\beta_l-\gamma_l) = k^2\sigma(T).$$

Таким образом, **площадь треугольника плоскости Лобачевского пропорциональна его дефекту**.

Отметим также что, если все вершины треугольника лежат на абсолюте, то его площадь равна $k^2\pi$.

Пусть $a \neq 0$ радиус-вектор точки евклидова пространства $\mathbb{E}$. Гиперплоскость Π с уравнением

$$(a,x) = k^2$$

называется **полярной гиперплоскостью или полярой** относительно сферы $\mathbb{S}(0,k)$, а точка a называется **полюсом** гиперплоскости Π.

При $a = 0$ считаем, что поляра сопадает с бесконечно удаленной гиперплоскостью.

Гиперплоскости с уравнением $(a, x) = 0$ соответствует несобственный полюс, направление на который определяет вектор a.

Полюсы и поляры находятся в биективном соответствии.

Действительно, гиперплоскости Π_1 с уравнением $(b, x) = c$, где $c \neq 0$, соответствует полюс $a = \frac{k^2 b}{c}$.

Две гиперплоскости пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них содержит полюс другой.

⊙ Пусть гиперплоскости заданы уравнениями

$$(b, x) = c, \qquad (b_1, x) = c_1.$$

В случае, когда $c \neq 0$

$$k^2(b, b_1) = cc_1 \Leftrightarrow (b_1, \frac{k^2 b}{c}) = c_1.$$

В случае, когда $c_1 \neq 0$, доказательство аналогично, а в случае, когда $c = c_1 = 0$, — очевидно. ⊙

Почти очевидны следующие утверждения.

А (полярная сопряженность). Если из двух точек одна принадлежит поляре другой точки, то и эта другая принадлежит поляре первой.

В (двойственное утверждение). Если из двух гиперплоскостей одна проходит через полюс другой гиперплоскости, то и эта другая проходит через полюс первой .

⊙ Действительно, поляры точек a, a_1 имеют уравнения

$$(a, x) = k^2, \qquad (a_1, x) = k^2,$$

а условие принадлежности точки a поляре второй второй имеет вид $(a_1, a) = k^2$. Вывод очевиден. ⊙

Пусть л-гиперплоскости с уравнениями

$$(b, x) = c, \qquad (b_1, x) = c_1,$$

пересекаются под углом φ и их полюсы есть $a = \frac{k^2 b}{c}$, $a_1 = \frac{k^2 b_1}{c_1}$ соответственно. Тогда

$$\cos\varphi_l = \frac{|k^2(b,b_1) - cc_1|}{\sqrt{k^2b^2 - c^2}\sqrt{k^2b_1^2 - c_1^2}} = \frac{|(a,a_1) - k^2|}{\sqrt{a^2 - k^2}\sqrt{a_1^2 - k^2}} = \operatorname{ch}\frac{d_l}{ik}\,.$$

Здесь $d_l = k\varphi_l$ можно рассматривать в качестве расстояния между полюсами, находящимися вне замкнутого шара $B[0,k]$.

Пусть даны две пересекающиеся прямые, заданные своими векторно-параметрическими уравнениями

$$r = r_0 + at, \qquad \hat{r} = r_0 + bu,$$

где t, $u \in I \subset \mathbb{R}$. Величину угола между ними вычислим, как с помощью величины угола между двумя гиперплоскостями, перпендикулярными к этим прямым по Лобачевскому. Пусть эти гиперплоскости заданы уравнениями

$$(a_1, x) = k^2,\ (a_2, x) = k^2,$$

где $a_1 = r_0 + at_1$, $a_2 = r_0 + bu_1$. Кроме того, $(r_0 + at_1, r_0) = (r_0 + bu_1, r_0) = k^2$. Следовательно,

$$t_1 = \frac{k^2 - r_0^2}{(a, r_0)}, \qquad u_1 = \frac{k^2 - r_0^2}{(b, r_0)}$$

Вычислим косинус угла между ними

$$\cos\varphi = \frac{|(a_1, a_2) - k^2|}{\sqrt{a_1^2 - k^2}\sqrt{a_2^2 - k^2}} =$$

$$\frac{|(a,r_0)(b,r_0) + (a,b)(k^2 - r_0^2)|}{\sqrt{(a,r_0)^2 + a^2(k^2 - r_0^2)}\sqrt{(b,r_0)^2 + b^2(k^2 - r_0^2)}}.$$

Тогда условие перпендикулярности двух пересекающихся прямых примет вид

$$(a,r_0)(b,r_0) + (a,b)(k^2 - r_0^2) = 0.$$

Вычислим и синус угла между ними

$$\sin^2\varphi = \frac{(k^2 - r_0^2)\{(k^2 - r_0^2)(a^2b^2 - (a,b)^2) + ((b,r_0)a - (a,r_0)b)^2\}}{\{(a,r_0)^2 + a^2(k^2 - r_0^2)\}\{(b,r_0)^2 + b^2(k^2 - r_0^2)\}}.$$

Задачи.

1. Постройте с помощью циркуля и линейки в модели Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского: a) для данного полюса — поляру; b) для данной поляры — полюс; c) перпендикуляр из данной точки и данную прямую; d) середину данного отрезка; e) биссектрису данного угла.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости: a) перпендикуляр из данной точки и данную прямую; b) середину данного отрезка; c) биссектрису данного угла.

1.9 Сфера, орисфера и эквидистантная гиперповерхность. Эллиптический, гиперболический и параболический пучки прямых

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского. Множество всех точек пространства Лобачевского, равноудаленных от фиксированной точки называется **сферой**.

Очевидно, что уравнение

$$x^2 = k^2 \operatorname{th}^2 \frac{r_l}{k}$$

есть уравнение сферы $\mathbb{S}(0, r_l)$ пространства Лобачевского. Используя определение сферы и метрики пространства Лобачевского получим следующее уравнение сферы $\mathbb{S}(a, r_l)$

$$\operatorname{ch} \frac{r_l}{k} = \frac{k^2 - (a, x)}{\sqrt{k^2 - a^2}\sqrt{k^2 - x^2}}\,.$$

Возводя обе части в квадрат и обозначая

$$\mu^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{r_l}{k}(k^2 - a^2)}\,,$$

получим это уравнение в виде

$$k^2 - x^2 = \mu^2(k^2 - (a, x))^2.$$

Представим x в виде $x =< y_1; y >$ и, используя действие ортогонального оператора, перейдем от вектора a к вектору $< b; 0 >$. Тогда наше уравнение примет вид

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \mu^2(k^2 - by_1)^2, \qquad \mu^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{r_l}{k}(k^2 - b^2)}$$

Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k^2\mu^2 b}{b^2\mu^2+1}\right)^2}{\dfrac{k^2(1-\mu^2(k^2-b^2))}{(b^2\mu^2+1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2(1-\mu^2(k^2-b^2))}{b^2\mu^2+1}} = 1.$$

Таким образом, сфера пространства Лобачевского $\mathbb{S}(< b; 0 >, r_l)$ в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{k^2\mu^2 b}{b^2\mu^2+1}; 0 >$.

Эллиптическим пучком прямых в пространстве Лобачевского называется множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку (**центр эллиптического пучка**).

Очевидно, что ортогональными траекториями эллиптического пучка прямых являются сферы с общим центром в центре эллиптического пучка.

Орисферой (в двумерном случае **орициклом**) называется предельное положение сферы пространства Лобачевского при условии, что ее центр неограниченно удаляется от фиксированной точки этой сферы по диаметру, проходящему через эту точку.

Пусть η фиксированная точка сферы $\mathbb{S}(a, r_l)$ с уравнением

$$k^2 - x^2 = \mu^2(k^2 - (a, x))^2.$$

Тогда

$$\mu^2 = \frac{k^2 - \eta^2}{(k^2 - (a, \eta))^2}\,.$$

После удаления центра он займет предельное положение на сфере $\mathbb{S}(0, k)$, следовательно, будет удовлетворять условию $a^2 = k^2$. Следовательно, уравнения орисферы имеют вид

$$k^2 - x^2 = \mu^2(k^2 - (a, x))^2, \qquad a^2 = k^2.$$

Снова, используя действие ортогонального оператора, получим для векторов a, η вид $< k; 0 >$ и $< \zeta; 0 >$ соответственно.

Уравнение орисферы примет вид

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \hat{\mu}^2(k - y_1)^2,$$

где $\hat{\mu}^2 = k^2\mu^2 = \frac{k+\zeta}{k-\zeta}$. Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k\hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^2+1}\right)^2}{\dfrac{k^2}{(\hat{\mu}^2+1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2}{\hat{\mu}^2+1}} = 1.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k+\zeta}{2}\right)^2}{\dfrac{(k-\zeta)^2}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{k(k-\zeta)}{2}} = 1.$$

Таким образом, орисфера пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{k+\zeta}{2}; 0 >$, касающимся в одной точке сферы $\mathbb{S}(0, k)$.

Эллиптический пучок прямых, проходящий через центр сферы, перейдет при удалении этого центра на абсолют в так называемый **параболический пучок прямых** с центром на абсолюте.

Таким образом, ортогональными траекториями параболического пучка прямых являются орисферы с общей точкой касания в центре параболического пучка.

На орисфере индуцируется евклидова геометрия.

Нетрудно заметить, что в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве уравнение орисферы можно привести к виду

$$x_1 = c,$$

где c — положительная константа. Параболический пучок прямых, ортогональных этой орисфере, моделируется в этом случае пучком лучей параллельных оси $< x_1; 0 >$. Тогда риманова метрика

$$dl^2 = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}$$

в данной модели индуцирует на орисфере риманову метрику

$$dl^2 = \frac{r^2 dx^2}{c^2}.$$

Сделав преобразование
$$\hat{x} = \frac{rx}{c}\,,$$
получим на орисфере стандартную риманову метрику евклидова пространства
$$dl^2 = d\hat{x}^2.$$

Эквидистантной гиперповерхностью (в двумерном случае **эквидистантой**) называется множество всех точек пространства Лобачевского, равноудаленных от фиксированной гиперплоскости (**базы эквидистантной гиперповерхности**).

Пусть положительное постоянное расстояние от точки эквидистантной гиперповерхности до ее базы (**высота эквидистантной гиперповерхности**) есть h_l и $(n, x) = p$ — уравнение базы. Тогда уравнение эквидистантной гиперповерхности имеет вид
$$\operatorname{sh}\frac{h_l}{k} = \frac{\operatorname{ch}\dfrac{p_l}{k}|(n,x) - k\operatorname{th}\dfrac{p_l}{k}|}{\sqrt{k^2 - x^2}}\,.$$
Перепишем это уравнение в виде
$$k^2 - x^2 = \mu^2((n,x) - k\operatorname{th}\frac{p_l}{k})^2,$$
где
$$\mu^2 = \frac{\operatorname{ch}^2\dfrac{p_l}{k}}{\operatorname{sh}^2\dfrac{h_l}{k}}\,.$$
Снова, используя действие ортогонального оператора, получим для вектора n вид $< 1; 0 >$, а для базы уравнение $y_1 = p(= k\operatorname{th}\dfrac{p_l}{k})$.

Уравнение эквидистантной гиперповерхности примет вид
$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \mu^2(y_1 - p)^2.$$
Приведем это уравнение к каноническому виду
$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{p\mu^2}{\mu^2+1}\right)^2}{\dfrac{k^2(\mu^2+1) - \mu^2p^2}{(\mu^2+1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2(\mu^2+1) - \mu^2p^2}{\mu^2+1}} = 1.$$

Таким образом, эквидистантная гиперповерхность пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{p\mu^2}{\mu^2+1}; 0 >$, касающимся сферы $\mathbb{S}(0, k)$ в точках ее сечения базой с уравнением $y_1 = p(= k \operatorname{th} \dfrac{p_l}{k})$.

Ось вращения этого эллипсоида называется **осью эквидистантной гиперповерхности**.

Пусть база содержит центр шара, тогда $p = 0$ и уравнение эквидистантной гиперповерхности упрощается

$$\frac{y_1^2}{\dfrac{k^2}{\mu^2+1}} + \frac{y^2}{k^2} = 1,$$

где $\frac{k^2}{\mu^2+1} = k^2 \operatorname{th}^2 \dfrac{h_l}{k}$. В этом случае эквидистантная гиперповерхность ортогонально пересекает пучок прямых параллельных по Евклиду нормали базы, т.е. пересекающихся в несобственной точке.

Общий случай получается из данного л-параллельным переносом. Рассматриваемый пучок перейдет в пучок прямых, имеющих при их продолжении общую точку (**центр пучка**) вне замкнутого шара $B[0, k]$.

Такой пучок прямых в самом пространстве Лобачевского называется **гиперболическим пучком прямых**.

Таким образом, ортогональными траекториями гиперболического пучка прямых являются эквидистантные гиперповерхности с общей базой.

Пусть в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве выделено направление $< 0; x_2; 0 >$, ортогональное направлению $< x_1; 0; 0 >$. Рассмотрим в этой модели базу с уравнением $x_2 = 0$.

Докажем, что в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве уравнение эквидистантной гиперповерхности с этой базой имеет вид

$$x_1 = cx_2,$$

где c — положительная константа. Действительно, точка $< cx_2; x_2; y >$ имеет ортогональную проекцию $< \sqrt{1+c^2}x_2; 0; y >$ на базе. Тогда

$$\rho_{\Pi_+}(< cx_2; x_2; y >, < \sqrt{1+c^2}x_2; 0; y >) = k\mathrm{Arch}\,\frac{c^2x_2^2 + (1+c^2)x_2^2 + x_2^2}{2c\sqrt{1+c^2}x_2^2} =$$

$$k\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=h_l.$$

Риманова метрика
$$dl^2=\frac{r^2(dx_1^2+dx^2)}{x_1^2}$$
в данной модели индуцирует на этой эквидистантной гиперповерхности риманову метрику
$$dl^2=\frac{r^2((1+c^2)dx_2^2+dy^2)}{c^2x_2^2}\,.$$
Сделав преобразование
$$\hat{x}_2=x_2,\qquad \hat{y}=\frac{y}{\sqrt{1+c^2}},$$
получим на эквидистантной гиперповерхности риманову метрику пространства Лобачевского
$$dl^2=\frac{R^2(d\hat{x}_2^2+d\hat{y}^2)}{\hat{x}_2^2}\,,$$
где $R=\frac{r\sqrt{1+c^2}}{c}$.

Орисферу можно рассматривать и как предельное положение эквидистантной гиперповерхности при условии, что ее база неограниченно удаляется от фиксированной точки эквидистантной гиперповерхности, оставаясь перпендикулярной оси эквидистантной гиперповерхности, проходящей через эту точку.

$\odot$ Пусть $<\zeta;0>$ — фиксированная точка эквидистантной гиперповерхности. Тогда
$$k^2-\zeta^2=\mu^2(\zeta-p)^2\Rightarrow\mu^2=\frac{k^2-\zeta^2}{(\zeta-p)^2}\,.$$
При вышеуказанном удалении базы в пределе получим $p=k$ и $\hat{\mu}^2=\frac{k+\zeta}{k-\zeta}$. Таким образом, получим уравнение орисферы
$$k^2-y_1^2-y^2=\hat{\mu}^2(y_1-k)^2.\odot$$
Рассмотрим теперь в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве экидистантную гиперповерхность прямой $<x_1;0>$. Эта поверхность называется еще эквидистантным цилиндром или гиперповерхностью Клиффорда. Зададим ее векторно-параметрическое уравнение в виде
$$R=(ct;te),$$

где c — положительная константа, $t > 0$ — параметр, e — единичный переменный вектор, ортогональный оси $< x_1; 0 >$. Тогда риманова метрика

$$dl^2 = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}$$

в данной модели индуцирует на этой гиперповерхности риманову метрику

$$dl^2 = \frac{r^2((1+c^2)dt^2 + t^2 de^2)}{c^2 t^2} = \frac{r^2((d(1+c^2)^{1/2}\ln t)^2 + de^2)}{c^2}.$$

Теперь очевидно, что экидистантная гиперповерхность прямой изометрична гиперцилиндру евклидова пространства с уравнением

$$\hat{R} = \frac{r}{c}((1+c^2)^{1/2}\ln t; e).$$

1.10 Нормальная, соприкасающаяся, спрямляющая плоскости, кривизна и кручение пространственной кривой. Эволюта плоской кривой в модели Бельтрами–Клейна

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна трехмерного пространства Лобачевского в шаре радиуса $k > 0$. Пусть

$$r = r(t) \qquad (t \in I \subset \mathbb{R})$$

— векторно-параметрическое уравнение регулярной пространственной кривой. Из вида дифференциала длины дуги

$$dl^2 = \frac{k^2((k^2 - r^2)dr^2 + (r, dr)^2)}{(k^2 - r^2)^2}$$

получим, что при $t = l$

$$(k^2 - r^2)\dot{r}^2 + (r, \dot{r})^2 = \frac{(k^2 - r^2)^2}{k^2},$$

где точкой обозначена производная по длине дуги (натуральному параметру). Для нахождения и определения кривизны кривой рассмотрим сначала эту кривую в натуральной параметризации

$$r = r(l) \qquad (l \in I \subset \mathbb{R}).$$

Пусть $r = r(l)$ — радиус-вектор фиксированной точки A кривой, а $r = r(l+h)$ — радиус-вектор точки A_1, близкой к точке A, где h — ориентированная длина дуги от точки A до точки A_1. Векторно-параметрическое уравнение касательной прямой в точке запишем в виде

$$p = r(l) + \dot{r}(l)u \qquad (u \in \mathbb{R}),$$

а векторно-параметрическое уравнение секущей AA_1 в виде

$$P = r(l) + (r(l+h) - r(l))v \qquad (v \in \mathbb{R}).$$

С точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$P = r(l) + (\dot{r}(l) + \frac{1}{2}\ddot{r}(l)h)hv.$$

Пусть φ — величина угла между касательной и секущей в точке A. Предел отношения удвоенного угла 2φ к длине дуги кривой $|h|$ при неограниченном приближении по кривой точки A_1 к A назовем **кривизной** данной кривой в точке A. Тогда

$$k_L = \lim_{h \to 0} \frac{2\varphi}{|h|},$$

где k_L — кривизна кривой в точке A.

Используя ранее установленную формулу для $\sin\varphi$ между прямыми и пропуская аргумент l, получим с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$\sin^2\varphi =$$
$$\frac{(k^2 - r^2)\{(k^2 - r^2)(\dot{r}^2\ddot{r}^2 - (\dot{r}, \ddot{r})^2)\frac{h^2}{4} + (((\dot{r} + \frac{1}{2}\ddot{r}h), r)\dot{r} - (\dot{r}, r)(\dot{r} + \frac{1}{2}\ddot{r}h))^2\}}{\{(\dot{r}, r)^2 + \dot{r}^2(k^2 - r^2)\}\{((\dot{r} + \frac{1}{2}\ddot{r}h), r)^2 + (\dot{r} + \frac{1}{2}\ddot{r}h)^2(k^2 - r^2)\}}.$$

Используем натуральность параметра. Тогда знаменатель приводится к виду

$$\frac{(k^2 - r^2)^2}{k^2}\{\frac{(k^2 - r^2)^2}{k^2} + \{((r, \dot{r})(r, \ddot{r}) + (\dot{r}, \ddot{r})(k^2 - r^2))\}h + \frac{1}{4}\{(r, \ddot{r})^2 + \ddot{r}^2(k^2 - r^2)\}h^2\}.$$

Преобразуем числитель

$$(k^2 - r^2)\{(k^2 - r^2)[\dot{r}, \ddot{r}]^2 + (\dot{r}(r, \ddot{r}) - \ddot{r}(r, \dot{r}))^2\}\frac{h^2}{4},$$

где $[\dot{r}, \ddot{r}]$ — векторное произведение векторов $\dot{r}$, $\ddot{r}$. Но

$$(\dot{r}(r, \ddot{r}) - \ddot{r}(r, \dot{r}))^2 = [r, [\dot{r}, \ddot{r}]]^2 = r^2[\dot{r}, \ddot{r}]^2 - (r, \dot{r}, \ddot{r})^2,$$

где $(r,\dot r,\ddot r)$ — смешанное произведение векторов r, $\dot r$, $\ddot r$. Следовательно, числитель примет вид

$$(k^2-(r)^2)\{k^2[\dot r,\ddot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2\}\frac{h^2}{4}.$$

Подставим в исходную формулу

$$\sin^2\varphi =$$

$$\frac{k^2\{k^2[\dot r,\ddot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2\}\frac{h^2}{4}}{(k^2-r^2)\{\frac{(k^2-r^2)^2}{k^2}+((r,\dot r)(r,\ddot r)+(\dot r,\ddot r)(k^2-r^2))h+(((r,\ddot r)^2+\ddot r(k^2-r^2))\frac{h^2}{4})\}}.$$

Тогда формула для кривизны кривой в натуральной параметризации будет такой

$$k_L=\lim_{h\to 0}\frac{2\varphi}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\varphi}{|h|}=\frac{k^2\sqrt{k^2[\dot r,\ddot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2}}{(k^2-r^2)^{3/2}}.$$

Перейдем к произвольной параметризации

$$\dot r=r'\dot t,\qquad \ddot r=r''(\dot t)^2+r'\ddot t,\qquad \dddot r=r'''(\dot t)^3+3r''\dot t+\ddot t+r'\dddot t,$$

$$\dot t=\frac{1}{l'},\qquad |l'|=\frac{k\sqrt{(k^2-r^2)(r')^2+(r,r')^2}}{k^2-r^2}$$

и найдем формулу для кривизны пространственной кривой в произвольной параметризации

$$k_L=\frac{(k^2-r^2)^{3/2}\sqrt{k^2[r',r'']^2-(r,r',r'')^2}}{k((k^2-r^2)(r')^2+(r,r')^2)^{3/2}}.$$

Для плоской кривой кривизна имеет вид

$$k_L=\frac{(k^2-r^2)^{3/2}|[r',r'']|}{((k^2-r^2)(r')^2+(r,r')^2)^{3/2}}.$$

где $[r',r'']$ — косое произведение векторов r', r''.

Теперь проведем через точки A, A_1 соприкасающиеся плоскости кривой, уравнения которых имеют вид

$$(\dot r(l),\ddot r(l),R)=(r(l),\dot r(l),\ddot r(l)),$$

$$(\dot r(l+h),\ddot r(l+h),\hat R)=(r(l+h),\dot r(l+h),\ddot r(l+h)).$$

Назовем **кручением** кривой в точке A предел отношения величины острого угла θ между соприкасающимися плоскостями в точках A и A_1 к длине дуги кривой $|h|$ при неограниченном приближении по кривой точки A_1 к A. Обозначим это кручение через $\varkappa_L$. Таким образом,

$$\varkappa_L = \lim_{h\to 0} \frac{\theta}{|h|}.$$

Вычислим сначала квадрат синуса угла между соприкасающимися плоскостями, обозначив правые части плоскостей через D и $\hat{D}$ соответственно

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta =$$

$$1 - \frac{(k^2([\dot{r}(l), \ddot{r}(l)], [\dot{r}(l+h), \ddot{r}(l+h)]) - D\hat{D})^2}{[k^2[\dot{r}(l), \ddot{r}(l)]^2 - D^2][k^2[\dot{r}(l+h), \ddot{r}(l+h)]^2 - \hat{D}^2]} =$$

$$\frac{k^4[[\dot{r}(l), \ddot{r}(l)], [\dot{r}(l+h), \ddot{r}(l+h)]]^2 - k^2(\hat{D}[\dot{r}(l), \ddot{r}(l)] - D[\dot{r}(l+h), \ddot{r}(l+h)])^2}{[k^2[\dot{r}(l), \ddot{r}(l)]^2 - D^2][k^2[\dot{r}(l+h), \ddot{r}(l+h)]^2 - \hat{D}^2]}.$$

Теперь уже нетрудно получить формулу кручения в натуральной параметризации.

$$\varkappa_L = \lim_{h\to 0} \frac{\theta}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\theta}{|h|} =$$

$$\frac{\sqrt{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})^2 \dot{r}^2 - \frac{1}{k^2}\{(r, \dot{r}, \dddot{r})[\dot{r}, \ddot{r}] - (r, \dot{r}, \ddot{r})[\dot{r}, \dddot{r}]\}^2}}{[\dot{r}, \ddot{r}]^2 - \frac{1}{k^2}(r, \dot{r}, \ddot{r})^2}.$$

Используем полученные выше формулы, связывающие производные векторной функции в натуральной параметризации с производными этой векторной функции в произвольной параметризации. Тогда нетрудно получить формулу кручения в произвольной параметризации

$$\varkappa_L = \frac{(k^2 - r^2)\sqrt{(r', r'', r''')^2 (r')^2 - \frac{1}{k^2}\{(r, r', r''')[r', r''] - (r, r', r'')[r', r''']\}^2}}{k([r', r'']^2 - \frac{1}{k^2}(r, r', r'')^2)\sqrt{(k^2 - r^2)(r')^2 + (r, r')^2}}.$$

Найдем теперь уравнения нормальной и соприкасающейся плоскостей для натурально параметризованной кривой. Используем полученную ранее формулу для нахождения уравнения плоскости, проходящей через фиксированную точку прямой и перпендикулярной этой прямой по Лобачевскому. Тогда уравнение **нормальной плоскости** кривой в точке с радиусом-вектором r будет таким

$$(P_1, R) = k^2,$$

где
$$P_1 = r + \frac{k^2 - r^2}{(\dot{r}, r)}\dot{r}$$
— радиус-вектор полюса нормальной плоскости. По определению, **спрямляющая плоскость** проходит через точку кривой с радиусом-вектором r и имеет направляющие векторы $P - r$, $P_1 - r$, где
$$P = \frac{k^2[\dot{r}, \ddot{r}]}{(r, \dot{r}, \ddot{r})}$$
— радиус-вектор полюса соприкасающейся плоскости, P_1 — радиус-вектор полюса нормальной плоскости. Тогда уравнение спрямляющей плоскости имеет вид
$$(R - r, P - r, P_1 - r) = 0.$$
После подстановки радиусов-векторов полюсов оно примет вид
$$(R - r, k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - (r, \dot{r}, \ddot{r})r, \dot{r}) = 0$$
или в другой форме
$$(R, N_1) = D_1,$$
где
$$N_1 = [(k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - (r, \dot{r}, \ddot{r})r), \dot{r}], \qquad D_1 = k^2([\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}, r).$$

Пусть
$$r = r(t) \qquad (t \in I \subset \mathbb{R})$$
— векторно-параметрическое уравнение регулярной плоской кривой. В точке A с радиусом-вектором $r(t)$ уравнение касательной прямой зададим в виде
$$(\hat{r}'(t), \eta - r(t)) = 0,$$
где $\hat{r}'(t) = (-y'(t); x'(t))$ и η — радиус-вектор текущей точки касательной прямой. Тогда радиус-вектор полюса этой прямой будет таким
$$p = \frac{k^2\hat{r}'(t)}{(\hat{r}'(t), r(t))}.$$

Значит, векторно-параметрическое уравнение эволюты, как огибающей семейства нормалей нашей кривой, следует искать в виде
$$R = r(t) + \mu(t)N(t),$$

где $N(t) = k^2\hat{r}'(t) - (\hat{r}'(t), r(t))r(t)$ — направляющий вектор нормали, а $\mu(t)$ — искомая скалярная функция. Условие огибания запишем в виде равенства нулю следующего косого произведения

$$[N(t), R'(t)] = 0.$$

Откуда найдем искомую функцию

$$\mu(t) = \frac{[r'(t), N(t)]}{[N(t), N'(t)]}.$$

Таким образом, эволюта плоской кривой имеет следующее векторно-параметрическое уравнение

$$R = r(t) + \frac{[r'(t), N(t)]}{[N(t), N'(t)]}N(t),$$

при условии, что $[N(t), N'(t)] \neq 0$, где $N(t) = k^2\hat{r}'(t) - (\hat{r}'(t), r(t))r(t)$.

Задачи.

1. Проверьте, что в пределе при $k \to \infty$ формулы кривизны, кручения пространственной кривой и уравнение эволюты плоской кривой примут обычный вид для пространственной кривой в евклидовом пространстве и кривой евклидовой плоскости соответственно.

2. Найдите кривизну в произвольной точке и уравнение эволюты кривой, заданной векторно-параметрическим уравнением

$$r = (a\cos t; b\sin t),$$

где $t \in [0, 2\pi]$, $0 < b \leq a < k$.

1.11 Вторая квадратичная форма, гауссова и эйлерова кривизна поверхности

Рассмотрим в модели Бельтрами-Клейна трехмерного пространства Лобачевского в векторно-параметрическое уравнение поверхности

$$r = r(u, v) \qquad (u; v) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

и некоторую кривую на ней, заданную внутренними уравнениями в натуральной параметризации $u = u(l)$, $v = v(l)$. Будем использовать также следующие обозначения

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad r_1 = r_u, \quad r_2 = r_v.$$

Тогда риманова метрика пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна

$$dl^2 = k^2 \frac{((k^2 - r^2)dr^2 + (r, dr)^2)}{(k^2 - r^2)^2}$$

индуцирует на поверхности следующую риманову метрику

$$dl^2 = \frac{k^2((r, r_i)(r, r_j) + (k^2 - r^2)(r_i, r_j))du^i du^j}{(k^2 - r^2)^2}.$$

Найдем координаты индуцированного метрического тензора и определитель его матрицы

$$g_{11} = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \left\{ (r, r_1)^2 + (k^2 - r^2) r_1^2 \right\} = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \left\{ k^2 r_1^2 - [r, r_1]^2 \right\},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \left\{ (r, r_1)(r, r_2) + (k^2 - r^2)(r_1, r_2) \right\},$$

$$g_{22} = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \left\{ (r, r_2)^2 + (k^2 - r^2) r_2^2 \right\} = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \left\{ k^2 r_2^2 - [r, r_2]^2 \right\},$$

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \frac{k^4}{(k^2 - r^2)^3} \left\{ (k^2 - r^2)[r_1, r_2]^2 + [r, [r_1, r_2]]^2 \right\} =$$

$$\frac{k^4}{(k^2 - r^2)^3} \left\{ k^2 [r_1, r_2]^2 - (r, r_1, r_2)^2 \right\}.$$

Найдем теперь коэффициенты второй квадратичной формы h_{ij}. Для этого вычислим величину угла между спрямляющей плоскостью кривой на поверхности и касательной плоскостью поверхности в точке этой кривой. Зададим уравнение касательной плоскости поверхности в виде

$$(R, N_2) = D_2,$$

где $N_2 = [r_1, r_2]$, $D_2 = (r, r_1, r_2)$, и используем формулу для вычисления величины угла между плоскостями

$$\cos\theta = \frac{\left| (N_1, N_2) - \frac{D_1 D_2}{k^2} \right|}{\sqrt{N_1^2 - \frac{D_1^2}{k^2}} \sqrt{N_2^2 - \frac{D_2^2}{k^2}}}.$$

Вычислим числитель, используя формулу для произведения двух смешанных произведений и натуральность параметризации.

$$|(k^2[[\dot r,\ddot r],\dot r]-(r,\dot r,\ddot r)[r,\dot r],[r_1,r_2])-([\dot r,\ddot r],\dot r,r)(r,r_1,r_2)|=$$

$$|k^2\dot r^2(\ddot r,r_1,r_2)-(r,\dot r,\ddot r)(r,\dot r,[r_1,r_2])-((r,\ddot r)\dot r^2-(r,\dot r)(\dot r,\ddot r))(r,r_1,r_2)|=$$

$$|k^2\dot r^2(\ddot r,r_1,r_2)-(r,r_1,r_2)((r,\dot r)(\dot r,\ddot r)-\dot r^2(r,\ddot r))-(\ddot r,r_1,r_2)(r^2\dot r^2-(r,\dot r)^2)-$$

$$-((r,\ddot r)\dot r^2-(r,\dot r)(\dot r,\ddot r))(r,r_1,r_2)|=|(\ddot r,r_1,r_2)(\dot r^2(k^2-r^2)+(r,\dot r)^2)+$$

$$+(r,r_1,r_2)(\dot r^2(r,\ddot r)-(r,\dot r)(\dot r,\ddot r))-(r,r_1,r_2)(\dot r^2(r,\ddot r)-(\dot r,\ddot r)(r,\dot r))|=$$

$$|(\ddot r,r_1,r_2)|(\dot r^2(k^2-r^2)+(r,\dot r)^2)=\frac{|(\ddot r,r_1,r_2)|(k^2-r^2)^2}{k^2}.$$

Вычислим подкоренные выражения

$$\sqrt{N_1^2-\frac{D_1^2}{k^2}}=\sqrt{(k^2[[\dot r,\ddot r],\dot r]-(r,\dot r,\ddot r)[r,\dot r])^2-k^2([\dot r,\ddot r],\dot r,r)^2}=$$

$$\sqrt{k^4[\dot r,\ddot r]^2\dot r^2-2k^2(r,\dot r,\ddot r)^2\dot r^2+(r,\dot r,\ddot r)^2[r,\dot r]^2-k^2([\dot r,\ddot r]^2[r,\dot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2\dot r^2)}=$$

$$\sqrt{(k^2\dot r^2-[r,\dot r]^2)(k^2[\dot r,\ddot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2)}=$$

$$\sqrt{(\dot r^2(k^2-r^2)+(r,\dot r)^2)(k^2[\dot r,\ddot r]^2-(r,\dot r,\ddot r)^2)}=\frac{k_L(k^2-r^2)^{5/2}}{k^3},$$

$$\sqrt{\bar N_2^2-\frac{D_2^2}{k^2}}=\sqrt{[r_1,r_2]^2-\frac{(r,r_1,r_2)^2}{k^2}}=\frac{\sqrt{g}(k^2-r^2)^{3/2}}{k^3}.$$

Таким образом, косинус угла между спрямляющей и касательной плоскостью вычисляется по формулам

$$\cos\theta=\frac{k^4|(\ddot r,r_1,r_2)|}{k_L\sqrt{g}(k^2-r^2)^2}=\frac{k^4|(r''_{ij},r_1,r_2)\dot u^i\dot u^j|}{k_L\sqrt{g}(k^2-r^2)^2}.$$

А **коэффициенты второй квадратичной формы поверхности** и **нормальная кривизна** кривой на поверхности определяются следующими формулами

$$h_{ij}=\frac{k^4(r''_{ij},r_1,r_2)}{\sqrt{g}(k^2-r^2)^2},\qquad k_n=\frac{h_{ij}du^idu^j}{g_{ij}du^idu^j}.$$

Экстремальные значения k_n называются **главными кривизнами** k_1, k_2, а их произведение **эйлеровой кривизной** K_E. Тогда эйлерова кривизна вычисляется по аналогичной для евклидовой геометрии формуле

$$K_E = k_1 k_2 = \frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{k^8((r_{11}, r_1, r_2)(r_{22}, r_1, r_2) - (r_{12}, r_1, r_2)^2)}{(k^2 - r^2)^4 g^2}.$$

Как известно из римановой геометрии, коэффициенты связности, тензор Риччи, скалярная и гауссова кривизны вычисляются по формулам

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \qquad R_{ij} = R_{kij}{}^k = 2\{\partial_{[k}\Gamma^k_{i]j} + \Gamma^s_{j[i}\Gamma^k_{k]s}\},$$

$$R = R_{ij}g^{ij}, \qquad K = \frac{R}{2}.$$

Гауссову кривизну можно также вычислять по формуле, полученной самим Гауссом,

$$K = \frac{1}{g^2}\left(\begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_1 & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right),$$

где $E = g_{11}$, $F = g_{12}$, $G = g_{22}$. Покажем, что эйлерова кривизна поверхности в модели Бельтрами-Клейна связана с гауссовой кривизной формулой

$$K_E = K + \frac{1}{k^2}.$$

Перепишем эйлерову кривизну в виде

$$K_E = \frac{k^8 \left(\begin{vmatrix} (r_{uu}, r_{vv}) & (r_{uu}, r_u) & (r_{uu}, r_v) \\ (r_u, r_{vv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{vv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & (r_{uv}, r_u) & (r_{uv}, r_v) \\ (r_u, r_{uv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{uv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} \right)}{(k^2 - r^2)^4 g^2} =$$

$$\frac{k^8 \left(\begin{vmatrix} (r_{uu}, r_{vv}) - r_{uv}^2 & (r_{uu}, r_u) & (r_{uu}, r_v) \\ (r_u, r_{vv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{vv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (r_{uv}, r_u) & (r_{uv}, r_v) \\ (r_u, r_{uv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{uv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} \right)}{(k^2 - r^2)^4 g^2} =$$

$$\frac{k^8 \left(\begin{vmatrix} f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g^*_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g^*_u & e & f \\ \frac{1}{2}g^*_v & f & g^* \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g^*_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g^*_u & f & g^* \end{vmatrix} \right)}{(k^2 - r^2)^4 g^2},$$

где

$$e = r_u^2, \qquad f = (r_u, r_v), \qquad g^* = r_v^2.$$

Используем эти обозначнения и для координат метрического тензора

$$E = \frac{k^2((r, r_u)^2 + (k^2 - r^2)e)}{(k^2 - r^2)^2}, \qquad F = \frac{k^2((r, r_u)(r, r_v) + (k^2 - r^2)f)}{(k^2 - r^2)^2},$$

$$G = \frac{k^2((r, r_v)^2 + (k^2 - r^2)g^*)}{(k^2 - r^2)^2}.$$

Поместим начало координат в точку поверхности, в которой вычисляются K_E и K. В этой точке $r = 0$. Вычислим в этой точке необходимые выражения

$$E = e, \quad F = f, \quad G = g^*, \quad E_u = e_u, \quad F_u = f_u, \quad G_u = g_u^*,$$

$$E_v = e_v, \quad F_v = f_v, \quad G_v = g_v^*, \quad E_{vv} = \frac{1}{k^2}(2f^2 + 2eg^* + k^2 e_{vv}),$$

$$F_{uv} = \frac{1}{k^2}(3f^2 + eg^* + k^2 f_{uv}), \qquad G_{uu} = \frac{1}{k^2}(2f^2 + 2eg^* + k^2 g_{uu}^*).$$

Подсчитаем еще одно выражение в формуле для гауссовой кривизны

$$F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} = -\frac{1}{k^2}(eg^* - f^2) + f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu}^*.$$

Тогда получим связь эйлеровой кривизны с гауссовой кривизной поверхности

$$K_E = K + \frac{1}{k^2}.$$

Задачи.

1. Вычислите гауссову и эйлерову кривизны плоскости, сферы и поверхности Клифформа в модели Бельтрами–Клейна.

Глава 2

Применения геометрии Лобачевского в СТО

2.1 Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна

Сначала напомним следующие определения.

Системой отсчета (СО) в механике называют тело отсчета с координатной системой, набор эталонов длины и одни часы, жестко скрепленные с телом отсчета.

В произвольной СО, которую обозначим через K, **событие** характеризуется местом и временем, т.е. упорядоченной четверкой вещественных чисел

$$< t; x >=< t; x^1; x^2; x^3 >\in \mathbb{R}^4.$$

СО, в которой движение тел, не находящихся под воздействием внешних сил (свободное движение тел), происходит с постоянной скоростью, называется **инерциальной системой отсчета** (ИСО).

В механике предполагают, что во всех ИСО время однородно, а пространство **однородно и изотропно**, т.е. все точки пространства равноправны и все направления пространства равноправны.

Рассмотрим ИСО K и ИСО $\hat{K}$, которая движется относительно K с постоянной скоростью $V =< V^1; V^2; V^3 >$.

В данный момент времени t радиус-векторы точки M связаны равенством

$$\hat{x} = x - R,$$

где $R = Vt + R_0$ — радиус-вектор начала $\hat{O}$ СО $\hat{K}$ относительно начала O СО K. Если предположить, что в момент $t = 0$ оба начала совпадают, то $R = Vt$.

Используя изотропность пространства, мы можем повернуть каждую из СО вокруг своего начала любым способом. За счет поворотов можно упростить полученную формулу до вида

$$\hat{x} =< x^1 - V^1 t; x^2; x^3 > .$$

В классической механике в обеих СО пользуются бесконечно быстрыми сигналами (из одной СО в другую СО), а для таких сигналов конечная относительная скорость систем несущественна, т.е. бесконечная скорость в обеих системах бесконечна.

Следовательно, по часам обеих СО время наступления события будет одно и то же, т.е. $\hat{t} = t$.

Полученные преобразования координатных систем

$$< \hat{t}; \hat{x} >=< t; x^1 - V^1 t; x^2; x^3 >$$

называются **преобразованиями Галилея**. Нетрудно понять, что в общем виде преобразования Галилея имеют вид

$$< \hat{t}; \hat{x} >=< t + t_0; Ax + x_0 - Vt >,$$

где x_0, t_0 — постоянные вектор и число, A — ортогональный оператор пространства $\mathbb{R}^3$, V — вектор скорости.

Принцип относительности Галилея состоит в следующем: тождественные механические опыты, поставленные в любых двух ИСО, дадут тождественные результаты. Следовательно, уравнения законов классической механики должны быть одинаковы в любых двух ИСО, т.е. эти уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея (при этом масса считается инвариантной).

Взаимодействие материальных частиц описывается в классической механике с помощью потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц.

Изменение положения одной из взаимодействующих частиц, в силу второго закона Ньютона, отражается на остальных частицах в тот же момент, т.е. взаимодействия распространяются мгновенно (дальнодействие).

Но этот вывод находится в противоречии с опытными данными, из которых можно сделать вывод о существовании **максимальной скорости распространения взаимодействий**. Следовательно, в природе вообще невозможно движение тел со скоростью больше максимальной скорости распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой говорят как о «сигнале», отправляющемся от первой частицы и «дающем знать» второй об изменении, которое испытала первая.

Передать сигнал — это значит передать энергию и импульс (в СТО они неразделимы). О скорости распространения взаимодействий говорят тогда, как о «скорости сигнала».

Уравнения теории электромагнетизма Максвелла оказались неинвариантными относительно преобразований Галилея. Взаимодействие зарядов или токов в этой теории осуществляется посредством поля, которому приписывается самостоятельное существование.

Кроме того, электромагнитное поле распространяется с конечной скоростью, а это означает, что взаимодействие распространяется со скоростью распространения поля.

Опыт показывает, что наибольшей скоростью передачи сигнала является **скорость света** $c = 299792458 \pm 1,2$ м/с в вакууме (1975 г.), которая является также скоростью распространения электромагнитных волн любой частоты в вакууме, т.е. опытные данные согласуются с теорией Максвелла.

В 1905 году А. Эйнштейн распространил принцип относительности на все явления природы: **все тождественные физические явления во всех ИСО при одинаковых начальных условиях протекают одинаково**.

Его второй постулат был таким: **скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной ИСО и одинакова во всех ИСО**.

В настоящее время вместо этого постулата исходят из того, что в природе существует предельная скорость передачи сигнала (взаимодействия).

Далее полагают, что этой предельной скоростью является скоростью света в вакууме (но СТО не утратила бы смысла, если бы предельная скорость оказалась иной).

Из того, что скорость света является предельной скоростью распространения взаимодействий, следует, что она должна иметь одно и то же значение во всех ИСО (иначе различные ИСО стало бы возможным различить и в силу принципа относительности получилось бы противоречие).

2.2 Пространство Минковского. Преобразования Лоренца

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ псевдоскалярное умножение

$$(< x^0; x >, < y^0; y >) = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = x^0y^0 - (x, y),$$

где, например, $x =< x^1; x^2; x^3 >\in \mathbb{R}^3$.

Получим, так называемое **пространство Минковского** $\mathbb{R}^4_{1,3} = \mathbb{R}^4_1$. Это четырехмерное векторное пространство с псевдоскалярным умножением сигнатуры $(+, -, -, -)$ является ассоциированным для точечного псевдоевклидова пространства с аналогичным названием и тем же самым обозначением.

Если $< t_1; x >$, $< t_2; y >$ — два события (которые называются **мировыми точками**), то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x - y)^2} =$$

$$\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2}$$

называется **интервалом** или **расстоянием** между этими событиями.

Обычно полагают $x^0 = ct_1$, $y^0 = ct_2$.

Множество $\{< y^0; y >\in \mathbb{R}^4_1 : \ s_{12} = 0\}$ называется **изотропным** (**световым**) **конусом** с вершиной в точке $< x^0; x >$.

Ненулевой вектор называется **времениподобным** (**пространственноподобным, изотропным**), если его псевдоскалярный квадрат больше нуля (меньше нуля, равен нулю).

Если два события бесконечно близки друг другу, то для интервала ds между ними имеем

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Из инвариантности скорости света следует, если интервал между двумя событиями равен нулю в одной ИСО, то он равен нулю и в любой другой ИСО, т.е. если $ds = 0$ в одной ИСО K, то $d\hat{s} = 0$ в любой другой ИСО $\hat{K}$.

С другой стороны, ds и $d\hat{s}$ — бесконечно малые одного порядка. Следовательно, ds^2 и $d\hat{s}^2$ должны быть пропорциональны друг другу

$$ds^2 = a d\hat{s}^2,$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины скорости обеих ИСО и не может зависеть от координат, времени и направления относительной скорости, поскольку тогда различные точки и направления пространства, а также моменты времени были бы не равноценны.

Рассмотрим три системы отсчета K_1, K_2, K и пусть V_1 и V_2 — скорости движения систем K_1 и K_2 относительно K. Тогда

$$ds^2 = a(|V_1|)ds_1^2, \qquad ds^2 = a(|V_2|)ds_2^2, \qquad ds_1^2 = a(|V_{12}|)ds_2^2,$$

где $|V_{12}|$ — абсолютная величина скорости движения K_2 относительно K_1. Сравнивая эти соотношения, получим

$$\frac{a(|V_2|)}{a(|V_1|)} = a(|V_{12}|).$$

V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов V_1, V_2, но и от угла между ними. Но последний не входит в левую часть полученного равенства.

Следовательно, это равенство может быть справедливым, если функция $a(|V|)$ является постоянной, равной в силу того же равенства единице, т.е. $ds^2 = d\hat{s}^2$ и, следовательно, $s = \hat{s}$.

Таким образом, **интервал является инвариантом по отношению к преобразованию ИСО к любой другой ИСО**.

Эта инвариантность интервала и является математическим выражением постоянства скорости света в любой ИСО.

Группа движений пространства Минковского называется **группой Пуанкаре**. Это группа Ли (докажите).

Компонента единицы группы Пуанкаре называется **группой Лоренца**.

Примеры. Найдем стационарную подгруппу $O(1,1)$ (группу псевдоортогональных преобразований) группы движений пространства $\mathbb{R}^2_1$, произвольный элемент которой оставляет неподвижной точку $(0;0) \in \mathbb{R}^2_1$.

Запишем в матричном виде условие сохранения матрицы G метрического тензора при действии стационарной подгруппы

$$G = A^\top G A,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ k & d \end{pmatrix} \in O(1,1).$$

Из этого условия получим систему уравнений

$$a^2 - k^2 = 1, \qquad ab - kd = 0, \qquad b^2 - d^2 = -1$$

с неизвестными a, b, k и $d \in \mathbb{R}$. Обозначим $\operatorname{th}\Psi = \frac{k}{a}$. Тогда общее решение нашей системы имеет вид

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \pm\operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \pm\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \Psi \in \mathbb{R},$$

а группа $O(1,1)$ состоит из четырех компонент связности, общий вид представителей которых следующий

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & -\operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & -\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\Psi & \operatorname{sh}\Psi \\ -\operatorname{sh}\Psi & \operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\Psi & -\operatorname{sh}\Psi \\ -\operatorname{sh}\Psi & -\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \Psi \in \mathbb{R}.$$

Первая матрица есть представитель компоненты единицы группы $O(1,1)$.

Рассмотрим ИСО $K(O;< x^0 = ct; x >)$ и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1 ИСО $\hat{K}(\hat{O};< \hat{x}^0 = c\hat{t}; \hat{x} >)$ так, что $Ox^2||\hat{O}\hat{x}^2$, $Ox^3||\hat{O}\hat{x}^3$.

Ортохронные (с неизменным направлением времени) псевдоортогональные преобразования первого рода (с единичным определителем) этих координат с учетом приведенного примера будут иметь вид

$$x^0 = \hat{x}^0 \operatorname{ch}\Psi + \hat{x}^1 \operatorname{sh}\Psi, \qquad x^1 = \hat{x}^0 \operatorname{sh}\Psi + \hat{x}^1 \operatorname{ch}\Psi,$$

$$x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3, \qquad \Psi \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим в системе K движение начала $\hat{O} : \hat{x} = 0$. Тогда получим

$$\frac{V}{c} = \frac{x^1}{ct} = \frac{x^1}{x^0} = \operatorname{th}\Psi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\Psi = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}, \qquad \operatorname{ch}\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}},$$

где $B = \frac{V}{c}$ условно будем называть **приведенной скоростью**. Тогда преобразования координат можно написать в виде

$$x^0 = \Gamma(\hat{x}^0 + B\hat{x}^1), \qquad x^1 = \Gamma(B\hat{x}^0 + \hat{x}^1), \qquad x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3,$$

где $\Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}$. Эти преобразования называются **преобразованиями Лоренца**.

Обратные преобразования Лоренца нетрудно найти. Они имеют вид

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - Bx^1), \qquad \hat{x}^1 = \Gamma(-Bx^0 + x^1), \qquad \hat{x}^2 = x^2, \qquad \hat{x}^3 = x^3.$$

Если $B = \frac{V}{c} << 1$, то, отбрасывая малые величины, из преобразований Лоренца приближенно получим преобразования Галилея

$$t = \hat{t}, \qquad x^1 = V\hat{t} + \hat{x}^1, \qquad x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3.$$

Найдем **преобразования Лоренца в общем случае**, когда ИСО $\hat{K}$ движется относительно ИСО K с постоянной скоростью, определяемой вектором V.

Теперь $B = \frac{V}{c}$ — вектор, определяющий при $|B| \neq 0$ единичный вектор e, т.е. $B = |B|e$. Тогда для каждого вектора $x \in \mathbb{R}^4$

$$x_1 e = (e, x)e = \frac{(B, x)B}{B^2}, \qquad x_2 = x - x_1 e = x - \frac{(B, x)B}{B^2}.$$

Компонента x_1 теперь играет роль координаты x^1 из предыдущего примера, поэтому

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - (B, x)).$$

Учитывая, что ортогональный к направлению скорости вектор x_2 не изменяется, получим

$$\hat{x} = \hat{x}_1 e + \hat{x}_2 = \Gamma(-Bx^0 + x_1 e) + x_2 =$$

$$\Gamma(-Bx^0 + \frac{(B, x)B}{B^2}) + x - \frac{(B, x)B}{B^2} = \Gamma(x - Bx^0) + (\Gamma - 1)(\frac{(B, x)B}{B^2} - x).$$

Таким образом, в общем случае преобразования Лоренца имеют вид

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - (B, x)), \qquad \hat{x} = \Gamma(x - Bx^0) + \frac{(\Gamma - 1)[B, [B, x]]}{B^2} =$$

$$\frac{\Gamma}{B^2}(((B, x) - B^2 x^0)B + (B^2 x - (B, x)B)\sqrt{1 - B^2}).$$

Если считать, что $q = \frac{x}{x^0}$ — радиус-вектор точки из открытого шара $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$, то **преобразования Лоренца определят параллельный перенос в модели Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского в этом шаре на вектор** $(-B)$:

$$\hat{q} = \frac{((B, q) - B^2)B + (B^2 q - (B, q)B)\sqrt{1 - B^2}}{B^2(1 - (B, q))}.$$

Отметим еще два простых следствия из вида преобразований Лоренца.

1. Если в СО K на оси $Ox^1 = Ox$ покоится стержень длины $l_0 = \Delta x = x_2 - x_1$, то в движущейся вдоль этой оси со скоростью V СО $\hat{K}$ найдем

$$x_i = \Gamma(B\hat{x}^0 + \hat{x}_i), \ i = 1, 2.$$

Собственной длиной стержня называется его длина в той СО, в которой он покоится. Следовательно, l_0 — собственная длина стержня и $l = \Delta\hat{x} = l_0 \Gamma^{-1} = l_0 \sqrt{1 - B^2}$.

Таким образом, происходит **лоренцево сокращение длины стержня**: длина стержня в движущейся СО $\hat{K}$ сокращается в отношении Γ^{-1}.

Объем также сокращается в отношении Γ^{-1}, поскольку поперечные размеры тела не изменяются.

2. Пусть теперь в СО $\hat{K}$, где покоятся часы, два события произошли в одном и том же месте с координатами $(\hat{x}^1; \hat{x}^2; \hat{x}^3)$ в СО $\hat{K}$ и в СО $\hat{K}$ время между этими событиями есть $\Delta\hat{t} = \hat{t}_2 - \hat{t}_1$. Тогда

$$x_i^0 = \Gamma(\hat{x}_i^0 + B\hat{x}^1),\ \ i = 1, 2.$$

Следовательно, $\Delta t = t_2 - t_1 = \Gamma\Delta\hat{t}$ и **в движущейся СО часы идут медленнее в отношении** Γ^{-1}.

2.3 Геометрия пространства скоростей частиц в специальной теории относительности является геометрией Лобачевского

3-**скоростью частицы** в СО K называется вектор-функция

$$v =< \frac{dx^1}{dt}; \frac{dx^2}{dt}; \frac{dx^3}{dt} >= \frac{dx}{dt}\,.$$

Рассмотрим также вектор-функцию

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{dx}{dx^0}.$$

Пусть ИСО $\hat{K}(\hat{O}; < \hat{x}^0 = c\hat{t}; \hat{x} >)$ движется относительно $K(O; < x^0 = ct; x >)$ с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1 так, что $Ox^2 || \hat{O}\hat{x}^2$, $Ox^3 || \hat{O}\hat{x}^3$.

Из преобразований Лоренца найдем

$$dx^0 = \Gamma(d\hat{x}^0 + Bd\hat{x}^1), \qquad dx^1 = \Gamma(Bd\hat{x}^0 + d\hat{x}^1), \qquad dx^2 = d\hat{x}^2, \qquad dx^3 = d\hat{x}^3.$$

Следовательно,

$$\beta^1 = \frac{\hat{\beta}^1 + B}{1 + B\hat{\beta}^1}\,, \quad \beta^2 = \frac{\hat{\beta}^2\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\hat{\beta}^1}\,, \quad \beta^3 = \frac{\hat{\beta}^3\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\hat{\beta}^1}\,.$$

Для общего преобразования Лоренца получим

$$d\hat{x}^0 = \Gamma(dx^0 - (B, dx)), \qquad d\hat{x} = \Gamma(dx - B dx^0) + \frac{(\Gamma - 1)[B, [B, dx]]}{B^2} =$$

$$\frac{\Gamma}{B^2}(((B, dx) - B^2 dx^0)B + (B^2 dx - (B, dx)B)\sqrt{1 - B^2}).$$

Следовательно,

$$\hat{\beta} = \frac{\beta - B + \dfrac{(1 - \Gamma^{-1})[B, [B, \beta]]}{B^2}}{1 - (B, \beta)} =$$

$$\frac{((B, \beta) - B^2)B + (B^2\beta - (B, \beta)B)\sqrt{1 - B^2}}{B^2(1 - (B, \beta))}.$$

Кроме того,

$$\hat{\beta}^2 = \frac{(\beta - B)^2 - [B, \beta]^2}{(1 - (B, \beta))^2} = \frac{(1 - (B, \beta))^2 - (1 - \beta^2)(1 - B^2)}{(1 - (B, \beta))^2},$$

$$1 - \hat{\beta}^2 = \frac{(1 - \beta^2)(1 - B^2)}{(1 - (B, \beta))^2}.$$

Эти формулы можно получить и с помощью формул планиметрии Лобачевского следующим образом. Параллельный перенос является изометрией и $\hat{\beta} = g_B^{-1}(\beta)$, следовательно,

$$\rho(0, \hat{\beta}) = \rho(0, g_B^{-1}(\beta)) = \rho(g_B^{-1}(g_B(0)), g_B^{-1}(\beta)) = \rho(B, \beta).$$

Осталось использовать формулу для метрики в левой и правой частях полученного равенства, затем привести выражения к нужному виду. Кроме того, вторая формула есть теорема косинусов планиметрии Лобачевского

$$\operatorname{ch}\rho(0, \hat{\beta}) = \operatorname{ch}\rho(0, \beta)\operatorname{ch}\rho(0, B) - \operatorname{sh}\rho(0, \beta)\operatorname{sh}\rho(0, B)\cos\alpha,$$

где α — величина угла между векторами B и β, записанная в ином виде

$$(1 - \hat{\beta}^2)^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2}(1 - B^2)^{-1/2}(1 - (\beta, B)).$$

Осталось просто возвести обе части в степень (-2).

Если приближенно $B = \beta + d\beta$, то получим римановы метрики

$$dl^2 = \frac{d\beta^2 - [d\beta, \beta]^2}{(1 - \beta^2)^2} = \frac{(1 - \beta^2)d\beta^2 + (\beta, d\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2},$$

$$ds^2 = c^2\frac{(c^2-v^2)dv^2+(v,dv)^2}{(c^2-v^2)^2}\,.$$

Таким образом, **пространство скоростей частиц является пространством Лобачевского, а преобразование скорости частицы является параллельным переносом в этом пространстве**.

2.4 4-скорость частицы, 4-вектор энергии-импульса частицы и функция Гамильтона

4-скоростью частицы в $\mathbb{R}^4_1$ называется вектор с компонентами

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}\,, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Преобразуются эти компоненты также как и координаты при обратном преобразовании Лоренца

$$u^{i'} = a^{i'}_i u^i,$$

где

$$(a^{i'}_i) = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma B & 0 & 0\\ -\Gamma B & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Можно также получить **ковариантные компоненты скорости частицы**

$$u_i = g_{ik}u^k,$$

где ненулевые компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1.$$

Компоненты 4-скорости удовлетворяют тождеству

$$< u^0; u >^2 = u_i u^i = 1.$$

Действительно,

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2} = c\sqrt{1-\beta^2}dt = \gamma^{-1}dx^0,$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = \operatorname{ch}\rho(0,\beta) = \operatorname{ch}\psi$. Тогда

$$< u^0; u > = < u^0; u^1; u^2; u^3 > = \gamma < 1; \beta >, \qquad < u^0; u >^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1.$$

Таким образом, 4-скорость частицы есть радиус-вектор точки из $\mathbb{S}_+(0,1)$ в $\mathbb{R}^4_1$.

Принцип наименьшего действия заключается в том, что для любой механической системы существует такой интеграл S (**называемый действием**), **который минимален вдоль малых участков линии движения** (**следовательно, вариация** δS **которого равна нулю**).

Таким образом, мировые линии массивных частиц в $\mathbb{R}^4_1$ есть экстремали функционала S.

Действие для свободной материальной частицы не должно зависеть от выбора ИСО, т.е. должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Следовательно, интеграл должен быть взят от скаляра $-\alpha$, умноженного на дифференциал первой степени от интервала (минус выбран, чтобы интеграл принимал вдоль прямой минимальное значение)

$$S = -\alpha \int\limits_a^b ds = -\alpha \int\limits_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt.$$

При $c \to \infty$ функция Лагранжа

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

должна перейти в ее классическое выражение

$$L = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Разложим L по степеням $\frac{v}{c}$

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} + \ldots .$$

Следовательно, $\alpha = mc$, поскольку постоянную в L можно опустить (она исчезает при варьировании действия). Таким образом,

$$L = -mc^2\gamma^{-1}, \qquad S = -mc\int\limits_a^b ds.$$

3-импульсом частицы называется вектор

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = m\gamma v = mc\gamma\beta.$$

Тогда модуль 3-импульса имеет вид

$$|p| = mc \operatorname{sh} \psi.$$

3-силой называется вектор

$$f = \frac{dp}{dt} = m\frac{d(\gamma v)}{dt}\,.$$

Энергией частицы называется величина

$$E = (v, \frac{\partial L}{\partial v}) - L.$$

Учитывая выражение для 3-импульса, получим

$$E = (v, p) - L = m\gamma v^2 + mc^2\gamma^{-1} = mc^2\gamma = mc^2 \operatorname{ch} \psi.$$

Энергией покоя частицы называется величина ее энергии при $v = 0$, т.е. $E_0 = mc^2$.

Энергия и импульс частицы связаны следующими соотношениями.

Связь 1.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2.$$

Действительно,

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \operatorname{ch}^2 \psi - m^2c^2 \operatorname{sh}^2 \psi = m^2c^2.$$

Если $|\beta| << 1$, то приблизительно $E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.

Связь 2.

$$p = \frac{Ev}{c^2}\,.$$

Если масса покоя частицы равна нулю (например, для фотона), то из этой формулы при $|v| = c$ получим

$$|p| = \frac{E}{c}\,.$$

В обычном же случае из $|v| \to c$ следует $E \to \infty$ и $|p| \to \infty$.

Получим аналогичные формулы в четырехмерном случае

$$ds = \sqrt{dx_i dx^i}, \qquad \delta S = -mc\delta \int\limits_a^b ds = -mc \int\limits_a^b \delta\sqrt{dx_i dx^i} =$$

$$-mc \int\limits_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc \int\limits_a^b u_i d\delta x^i = -mcu_i \delta x^i|_a^b + mc \int\limits_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds.$$

Для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т.е.

$$\delta x^i|_a = \delta x^i|_b = 0.$$

Истинная траектория движения определяется тогда из условия $\delta S = 0$. Тогда ковариантные компоненты **4-ускорения** равны нулю

$$w_i = \frac{du_i}{ds} = \gamma \frac{du_i}{dx^0} = 0.$$

Для того, чтобы найти вариацию действия, как функцию от координат, надо считать заданной лишь одну точку $\delta x^i|_a = 0$, а вторую переменной.

Но при этом рассматриваются только истинные, т.е. траектории, удовлетворяющие уравнениям движения.

Следовательно, последний интеграл равен нулю и

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i,$$

где $\delta x^i = \delta x^i|_b$.

Ковариантные компоненты **4-импульса частицы** определяются формулами

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i.$$

Следовательно,

$$p^i = mcu^i, \qquad < p^0; p^1; p^2; p^3 > = < \frac{E}{c}; mc\gamma\beta >, \qquad u_i w^i = u_i \frac{du^i}{ds} = 0.$$

Формулы преобразования 4-импульса частицы следующие

$$\hat{p}^0 = \Gamma(p^0 - Bp^1), \qquad \hat{p}^1 = \Gamma(-Bp^0 + p^1), \qquad \hat{p}^2 = p^2, \qquad \hat{p}^3 = p^3.$$

Эти же формулы в ином виде

$$\hat{E} = E \operatorname{ch} \Psi - cp^1 \operatorname{sh} \Psi, \qquad c\hat{p}^1 = -E \operatorname{sh} \Psi + cp^1 \operatorname{ch} \Psi, \qquad \hat{p}^2 = p^2, \qquad \hat{p}^3 = p^3.$$

Из формул

$$p^i = mcu^i, \qquad u_i u^i = 1$$

получим, что 4-импульс частицы есть радиус-вектор точки из $\mathbb{S}_+(0, mc)$ в $\mathbb{R}^4_1$, т.е.

$$< p^0; p >^2 = p_i p^i = m^2c^2.$$

Это тождество в силу формулы $< p^0; p > = < \frac{E}{c}; p >$ эквивалентно связи 1

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2.$$

При переходе к модели Бельтрами–Клейна 4-скорость частицы отобразится в β, а 4-импульс отобразится в $mc\beta$.

Функцией Гамильтона H называется энергия, выраженная через импульс

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots .$$

4-вектором силы называется вектор с компонентами

$$F^i = \frac{dp^i}{ds} = mcw^i = mc\gamma\frac{du^i}{dx^0}\,.$$

Очевидно, что его компоненты удовлетворяют тождеству

$$u_i F^i = 0.$$

Непосредственный расчет дает

$$< F^i > = mc\frac{d < \gamma; \gamma\beta >}{ds} = mc\gamma\frac{d < \gamma; \gamma\beta >}{dx^0} = \frac{\gamma}{c} < (\beta, f); f > .$$

Задача. Интерпретировать в пространстве скоростей движение частицы постоянной массы под действием постоянной 3-силы. (Ответ: движение происходит либо по прямой, либо по эквидистанте.)

2.5 Угол аберрации света звезды. Эффект Доплера

Под **аберрацией света** понимают изменение направления распространения света (излучения) при переходе от одной СО к другой.

Допустим, что наблюдатель в точке K видит звезду M под прямым углом к направлению движения Земли. Пусть через полгода в точке $\hat{K}$ он увидит эту звезду под углом α к противоположному направлению движения Земли.

Углом аберрации называется угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

С учетом изменения направления движения Земли, движущейся приблизительно с абсолютной скоростью $|V| \approx 30 \frac{\text{км}}{\text{сек}} \approx 10^{-4}c$, модуль приведенной скорости движения $\hat{K}$ относительно K равен

$$|B| = \operatorname{th}\Psi = \frac{|V|}{c} = 10^{-4}.$$

Фотоны движутся со скоростью света, поэтому α — угол параллельности и

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \operatorname{th}\Psi = |B|,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|B|}{\sqrt{1-B^2}} \approx |B| + \frac{|B|^3}{2}.$$

А в классической механике $\operatorname{tg}\varphi = |B|$, что в пределах точности измерения не отличается от релятисткого значения. Таким образом, **результаты экспериментов по измерению аберрации света звезд хорошо объясняются и классической механикой и СТО.**

Эффект Доплера есть сдвиг частоты излучения при удалении (приближении) источника излучения от наблюдателя.

Таким образом, частота электромагнитной волны зависит от относительной скорости источника излучения и наблюдателя.

Сначала припишем фотону некоторую конечную массу и определим его энергию в новой СО, а затем перейдем к пределу при стремлении массы к нулю и абсолютной приведенной скорости к единице.

Пусть K — СО излучателя, в которой энергия частицы F с массой m равна $E = mc^2 \operatorname{ch}\psi$.

Пусть наблюдатель находится в СО $\hat{K}$, которая движется с приведенной скоростью B относительно СО K под углом θ к направлению движения частицы F. Используем теорему косинусов для преобразования энергии из СО K в СО $\hat{K}$

$$\hat{E} = mc^2 \operatorname{ch} \hat{\psi} = mc^2(\operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta) =$$

$$E(\operatorname{ch} \Psi - \operatorname{th} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta).$$

Тогда отношение

$$\frac{\hat{E}}{E} = \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{th} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta$$

уже не зависит от массы частицы и нетрудно сделать предельный переход к фотону: точка F, изображающая приведенную скорость частицы, уйдет на абсолют, т.е. абсолютная приведенная скорость частицы $|\beta| = \operatorname{th} \psi$ в пределе даст единицу.

Учтем известную формулу для энергии фотона $E = h\nu$, где ν — частота электромагнитного излучения, $h = 6,626 * 10^{-34}$Дж $*$ сек — постоянная Планка. Тогда получим **формулу, определяющую искомый сдвиг частоты, т.е. эффект Доплера**.

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \frac{\hat{E}}{E} = \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \Psi \cos \theta = \Gamma(1 - |B| \cos \theta).$$

Важное значение имеет частный случай, когда $\theta = 0$. Тогда

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \Psi = e^{-\Psi},$$

то есть принимаемая наблюдателем частота в e^{Ψ} раз меньше частоты излучения источником. Выразим скорость удаления через эти частоты

$$|V| = c \operatorname{th} \Psi = c\frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{e^{\Psi} + e^{-\Psi}} = c\frac{\nu^2 - \hat{\nu}^2}{\nu^2 + \hat{\nu}^2}\,.$$

Допустим, что в далекой галактике возбужденные атомы излучают свет с частотой ν. Спектры излучения атомов в этой галактике и на Земле одинаковы.

Если галактика удаляется с большой скоростью, то для наблюдателя на Земле каждая линия этого спектра в силу эффекта Доплера окажется сдвинутой и будет иметь частоту $\hat{\nu}$.

С помощью этой формулы было установлено, что большинство галактик удаляются друг от друга со скоростью, пропорциональной расстояниям между ними. Но галактика Андромеды, находящаяся от нашей на расстоянии в 2,5 млн световых лет, приближается к нашей галактике со скоростью 120км/с и они начнут сталкиваться через 4 млрд лет.

Так называемые квазары имеют красное смещение $\frac{\hat{\nu}}{\nu}$ от 2 до $2,5$, что соответствует скорости удаления $|V|$ от $0,6c$ до $0,7c$.

Теоретически поперечный эффект Доплера может получится при $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. источник движется перпендикулярно направлению движения наблюдателя. Тогда небольшой сдвиг возникает только для электромагнитных волн

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \operatorname{ch}\Psi = (1-B^2)^{-1/2}.$$

Для обычных волн

$$(1-B^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{B^2}{2}\,,$$

поэтому величина

$$\frac{\hat{\nu}-\nu}{\nu} \approx \frac{B^2}{2}$$

в реальных ситуациях очень мала. Таким образом, **для обычных волн поперечный эффект Доплера отсутствует**.

Если $|B| << 1$, то

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} \approx 1 - |B|\cos\theta, \qquad \frac{\nu-\hat{\nu}}{\nu} \approx \frac{|V|}{c}\cos\theta.$$

Это хорошо известрые формулы для эффекта Доплера в классическом случае. Их применяют, например, следующим образом.

На космическом аппарате (спутнике) устанавливают радиопередатчик со стабилизированной частотой ν, а на Земле — радиосистему, которая позволяет с высокой точностью измерить $\hat{\nu}$ и $\cos\theta$.

По результатам этих измерений с помощью формулы Доплера определяют скорость космического аппарата. С помощью формулы Доплера измеряют также скорости ракет, самолетов и автомобилей.

2.6 Упругое столкновение двух частиц. Упругое рассеяние частиц одинаковой массы

Упругое столкновение двух частиц это такое столкновение, при котором не изменяются внутренние состояния частиц.

Пусть в СО K до столкновения частица A имеет 3-импульс $p_A = 0$ и энергию E_A, а частица D имеет 3-импульс p_D и энергию E_D.

Таким образом, их полная энергия есть $E = E_A + E_D$ и полный 3-импульс, вдоль которого направим ось Ox^1, есть $p = p_A + p_D$.

Пусть начало новой СО $\hat{K}$ есть «центр инерции», т.е. в этой СО сумма импульсов обеих частиц равна нулю. И пусть это начало движется относительно K со скоростью V.

После соударения полная энергия и полный импульс не изменятся, импульсы частиц только повернутся относительно центра инерции $\hat{O}$ на некоторый угол φ, который называется **углом рассеяния в СО «центра инерции»**.

Мы оставим прежние обозначения для импульсов, относительных скоростей и энергий после столкновения. Тогда $\varphi =< \beta_D \hat{O} \hat{\beta}_D$.

Найдем закон преобразования полной энергии с помощью теоремы косинусов планиметрии Лобачевского и условия для импульсов в СО $\hat{K}$ $\hat{p}_A = -\hat{p}_D$.

$$E = E_A + E_D = m_A c^2 \operatorname{ch} \psi_A + m_D c^2 \operatorname{ch} \psi_D =$$

$$m_A c^2 (\operatorname{ch} \hat{\psi}_A \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \hat{\psi}_A \operatorname{sh} \Psi \cos \varphi) + m_D c^2 (\operatorname{ch} \hat{\psi}_D \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \hat{\psi}_D \operatorname{sh} \Psi \cos(\pi - \varphi)) =$$

$$(\hat{E}_A + \hat{E}_D) \operatorname{ch} \Psi - (|\hat{p}_A| - |\hat{p}_D|) c \operatorname{sh} \Psi \cos \varphi = \hat{E} \operatorname{ch} \Psi.$$

Пусть после столкновения в СО K скорости частиц A и D составляют углы α и θ соответственно с осью Ox^1.

С помощью полученого закона преобразования полной энергии и теоремы косинусов найдем модуль полного 3-импульса

$$|p| = |p_A| \cos \alpha + |p_D| \cos \theta = m_A c \operatorname{sh} \psi_A \cos \alpha + m_D c \operatorname{sh} \psi_D \cos \theta =$$

$$m_A c \frac{\operatorname{ch} \psi_A \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{ch} \hat{\psi}_A}{\operatorname{sh} \Psi} + m_D c \frac{\operatorname{ch} \psi_D \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{ch} \hat{\psi}_D}{\operatorname{sh} \Psi} =$$

$$\frac{E\operatorname{ch}\Psi - \hat{E}}{c\operatorname{sh}\Psi} = \frac{\hat{E}(\operatorname{ch}^2\Psi - 1)}{c\operatorname{sh}\Psi} = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Итак, получили формулы

$$E = \hat{E}\operatorname{ch}\Psi, \qquad |p| = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Из второй формулы следует, что **сохранение полного импульса в произвольной СО возможно только одновременно с сохранением энергии.**

А из первой формулы с учетом ее вывода следует, что **для сохранения энергии необходимо, чтобы сохранялся полный импульс в СО «центра инерции».**

Таким образом, **закон сохранения энергии и закон сохранения импульса объединяются в единый релятивистский закон сохранения энергии-импульса.**

Отметим, что **величина угла φ не может быть определена из закона сохранения энергии-импульса**.

Кроме того, движение пары частиц с точки зрения энергии и импульса можно рассматривать как движение воображаемой «составной» частицы с приведенной абсолютной скоростью $|\beta| = \operatorname{th}\Psi$ и массой $m = \frac{\hat{E}}{c^2}$.

Полная энергия и модуль полного импульса пары частиц равны энергии и модулю импульса «составной» частицы

$$E = mc^2\operatorname{ch}\Psi, \qquad |p| = mc\operatorname{sh}\Psi.$$

Пусть в лабораторной СО K (т.е. СО, в которой происходит эксперимент, например, в камере Вильсона) электрон D, имеющий приведенную скорость β_D, рассеивается на покоящемся электроне A, с приведенной скоростью $\beta_A = 0$.

Массы частиц одинаковы, поэтому в СО $\hat{K}$ «центра инерции» $\hat{\beta}_D = -\hat{\beta}_A$. Снова сохраним обозначения для рассматриваемых величин после столкновения.

После столкновения мы получим следующие четыре угла: $\theta =< \hat{O}O\hat{\beta}_D$ — **угол рассеяния в лабораторной СО** K; $\alpha =< \hat{\beta}_A O\hat{O}$ — **угол отдачи**, под которым вылетает покоящийся электрон; $\varphi =< O\hat{O}\hat{\beta}_A$ — **угол**

рассеяния в СО «центра инерции» $\hat{K}$; $\alpha+\theta=<\hat{\beta}_A O\hat{\beta}_D$ — **угол разлета**, т.е. угол между направлениями скоростей электронов после столкновения, равный углу между их треками в камере Вильсона (фиксируемый на фотографии после столкновения).

Заметим, что треугольники $\Delta O\hat{O}\hat{\beta}_D$, $\Delta O\hat{O}\hat{\beta}_A$ равнобедренные, поскольку импульсы после соударения поворачиваются и массы частиц равны.

Пусть P (P_1) — основание перпендикуляра, проведенного из точки $\hat{O}$ к стороне $O\hat{\beta}_D$ $(O\hat{\beta}_A)$.

Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника плоскости Лобачевского совпадает с биссектрисой (докажите!). Тогда, используя еще двойственную теорему косинусов для треугольника $\Delta O\hat{O}P$, получим

$$\operatorname{ch}\Psi=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\cos\frac{\pi-\varphi}{2}}{\sin\theta\sin\frac{\pi-\varphi}{2}}=\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,.$$

Следовательно, связь угла рассеяния в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\operatorname{ch}\Psi}=\frac{2m_Ac^2\operatorname{tg}\varphi/2}{\hat{E}}\,,$$

где $\hat{E}=2m_Ac^2\operatorname{ch}\Psi$ — суммарная энергия частиц в СО «центра инерции» $\hat{K}$. Аналогично, для треугольника $\Delta O\hat{O}P_1$, получим

$$\operatorname{ch}\Psi=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\cos\varphi/2}{\sin\theta\sin\varphi/2}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,.$$

Следовательно, связь угла отдачи в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2m_Ac^2\operatorname{ctg}\varphi/2}{\hat{E}}\,.$$

Тогда связь угла разлета в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}=\frac{1-\frac{4m_A^2c^4}{\hat{E}^2}}{\frac{2m_Ac^2}{\hat{E}}(\operatorname{tg}\varphi/2+\operatorname{ctg}\varphi/2)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{E}}{2m_Ac^2}-\frac{2m_Ac^2}{\hat{E}}\right)\sin\varphi.$$

Если величина угла рассеяния φ в СО $\hat{K}$ стремится к минимальному значению, то в лабораторной СО быстрая частица рассеивается на небольшой угол θ.

Следовательно, частица A после соударения движется почти перпендикулярно к направлению движения налетающей частицы.

Это практически нерелятивисткий случай, когда до столкновения $|\beta_D| << 1$ и $\mathrm{ctg}(\alpha+\theta) \approx 0$, т.е. $\alpha+\theta \approx \pi/2$.

При $\varphi = \pi/2$ минимальный угол разлета $(\alpha+\theta)_{min}$ может быть найден из любой формулы, поскольку $\alpha = \theta$.

$$\mathrm{ctg}\,\alpha_{min} = \frac{\hat{E}}{2m_A c^2}\,.$$

2.7 Упругое рассеяние тяжелой частицы на покоящейся легкой, а также легкой частицы на покоящейся тяжелой. Формула Комптона

Пусть в лабораторной СО K покоится легкая частица и тяжелая частица D с ней сталкивается. В СО «центра инерции» $\hat{p}_A = -\hat{p}_D$, следовательно, $m_A \,\mathrm{sh}\,\hat{\psi}_A = m_D \,\mathrm{sh}\,\hat{\psi}_D$.

Угол рассеяния θ максимальный, когда после столкновения $< O\hat{\beta}_D\hat{O} = \frac{\pi}{2}$. В этом случае с учетом того, что после столкновения $\Psi = \hat{\psi}_A$, получим

$$\sin\theta_{max} = \frac{\mathrm{sh}\,\hat{\psi}_D}{\mathrm{sh}\,\hat{\psi}_A} = \frac{m_A}{m_D}\,,$$

т.е. **в лабораторной СО максимальный угол рассеяния тяжелой частицы на легкой зависит только от отношения масс этих частиц и не зависит от их энергий**.

Измерив θ_{max} в большой серии экспериментов, можно узнать массу тяжелых частиц

$$m_D = \frac{m_A}{\sin\theta_{max}}\,,$$

поскольку массы частиц мишени обычно известны.

Пусть теперь в лабораторной СО K покоится тяжелая частица A с массой $m_A = M$ и налетающая легкая частица D имеет массу $m_D = m$.

Тогда в лабораторной СО $E = mc^2 \operatorname{ch} \rho(0, \beta_D)$ — энергия легкой частицы до столкновения и $E^* = mc^2 \operatorname{ch} \rho(0, \beta_D^*)$ — энергия легкой частицы после столкновения.

Запишем закон сохранения энергии в СО, связанной с частицей D после столкновения,

$$mc^2 \operatorname{ch} \rho(\beta_D^*, \beta_D) + Mc^2 \operatorname{ch} \rho(\beta_D^*, 0) = mc^2 + Mc^2 \operatorname{ch} \rho(\beta_D^*, \beta_A^*).$$

Отметим, что в силу поворота импульсов относительно «центра инерции» после столкновения

$$\rho(\beta_D^*, \beta_A^*) = \rho(\beta_D, 0).$$

Используем теорему косинусов для треугольника $\Delta O \beta_D \beta_D^*$

$$\operatorname{ch} \rho(\beta_D^*, \beta_D) = \operatorname{ch} \rho(0, \beta_D) \operatorname{ch} \rho(0, \beta_D^*) - \operatorname{sh} \rho(0, \beta_D) \operatorname{sh} \rho(0, \beta_D^*) \cos\theta =$$

$$\operatorname{ch} \rho(0, \beta_D) \operatorname{ch} \rho(0, \beta_D^*)(1 - \operatorname{th} \rho(0, \beta_D) \operatorname{th} \rho(0, \beta_D^*) \cos\theta) =$$

$$\frac{EE^*}{m^2c^4}(1 - |\beta_D||\beta_D^*| \cos\theta).$$

Тогда из закона сохранения энергии получим связь начальной и конечной энергий легкой частицы с углом ее рассеяния

$$M(E - E^*) = \frac{EE^*}{c^2}(1 - |\beta_D||\beta_D^*| \cos\theta) - m^2c^2.$$

Эта формула представляет наибольший интерес в ультрарелятивистском пределе, когда энергия E, а значит и энергия E^*, много больше энергии покоя легкой частицы E, $E^* >> mc^2$.

Ее скорость до и после рассеяния в этом случае очень близка к скорости света $|\beta_D| \approx 1$, $|\beta_D^*| \approx 1$.

Кроме того, в правой части можно пренебречь выражением $(-m^2c^2)$, которое мало по сравнению с первым слагаемым. В итоге получим **формулу Комптона**

$$M(E - E^*) = \frac{EE^*}{c^2}(1 - \cos\theta).$$

Отметим, что это точное равенство, если легкая частица является фотоном, т.е. формула получается при стремлении массы m к нулю и абсолютной приведенной скорости до и после столкновения к единице.

В этом случае $E = h\nu$, $E^* = h\nu^*$ и формулу Комптона можно записать в виде

$$\frac{\nu}{\nu^*} = 1 + \frac{h\nu}{Mc^2}(1 - \cos\theta).$$

Из этой формулы следует, что частота фотона не изменяется только при рассеянии на нулевой угол.

При увеличении угла θ частота и энергия рассеянного фотона уменьшается, причем сдвиг частоты максимален при $\theta = \pi$.

Это наблюдал Артур Комптон в 1922-1923 годах при рассеянии рентгеновских лучей на графической мишени, когда часть рассеянного излучения имела частоту меньшую, чем частота падающего излучения.

Пусть в мишени неизвестные частицы. Тогда их массу можно вычислить из формулы Комптона

$$M = \frac{EE^*(1 - \cos\theta)}{c^2(E - E^*)}.$$

2.8 Дефект массы. Распад нейтрального пиона на два гамма кванта

Пусть покоящееся тело массы M распадается на две части A и D с массами m_A и m_D соответственно. Тогда из закона сохранения энергии $E = E_A + E_D$ получим

$$M = \frac{E}{c^2} = m_A \operatorname{ch}\psi_A + m_D \operatorname{ch}\psi_D \geq m_A + m_D.$$

Можно также найти энергии частей при известных массах. Действительно, $p_A + p_D = 0$, следовательно,

$$|p_A| = m_A c \operatorname{sh}\psi_A = m_D c \operatorname{sh}\psi_D = |p_D|,$$

$$E(E_A - E_D) = E_A^2 - E_D^2 = m_A^2 c^4 \operatorname{ch}^2\psi_A - m_D^2 c^4 \operatorname{ch}^2\psi_D = c^4(m_A^2 - m_D^2).$$

Тогда

$$E_A = \frac{c^2(M^2 + m_A^2 - m_D^2)}{2M}, \qquad E_D = \frac{c^2(M^2 - m_A^2 + m_D^2)}{2M}.$$

Величина $\Delta M = M - m_A - m_D$ называется **дефектом массы**.

Для того, чтобы тело массы M распалось на две части с массами m_A и m_D при отрицательном дефекте, необходимо сообщить телу извне энергию равную по крайней мере **энергии связи** $|\Delta M|c^2$.

Если частица массы M движется, то из связи 1 между энергией и импульсом получим

$$M^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{(E_A + E_D)^2}{c^2} - (p_A + p_D)^2\right) =$$

$$m_A^2 + m_D^2 + \frac{2}{c^2}\left(\frac{E_A E_D}{c^2} - |p_A||p_D|\cos\theta\right).$$

Если частица A покоится, то

$$p_A = 0, \qquad E_A = m_A c^2, \qquad M^2 = m_A^2 + m_D^2 + \frac{2m_A E_D}{c^2}.$$

В ускорителях $\frac{E_D}{c^2}$ может более, чем в 100 раз превосходить m_A и m_D, поэтому

$$M \approx \frac{\sqrt{2m_A E_D}}{c}.$$

Если при этом частица D медленная, то

$$E_D \approx m_D c^2, \qquad M^2 \approx (m_A + m_D)^2,$$

т.е. приближенно выполняется закон сложения масс.

Задача. Пусть частица A покоится и частица D имеет приведенную скорость β_D. Найти массу M и абсолютную величину $|\beta|$ сложной частицы.

Найдем сначала массу

$$M^2 = m_A^2 + m_D^2 + 2m_A m_D \gamma_D,$$

Затем абсолютную величину приведенной скорости

$$|\beta| = \frac{|p|c}{E} = \frac{m_D|\beta_D|\gamma_D}{m_A + m_D\gamma_D}.$$

При взаимодействии пучка протонов с веществом мишени образуются вместе с другими частицами и π-мезоны (пионы) трех сортов: положительно заряженные π^+; отрицательно заряженные π^-; электрически нейтральные π^0-мезоны.

π^0-мезоны после недолгой жизни распадаются на два γ-кванта (т.е. два фотона больших энергий), которые можно зарегистрировать счетчиком γ-излучения.

Сами π^0-мезоны не вступают в электрическое взаимодействие с атомами и не оставляют следов ни в пузырьковой камере или камере Вильсона, ни на фотоэмульсии, т.е. остаются невидимыми.

Пусть СО $\hat{K}$ покоя π^0-мезона движется относительно лабораторной СО K с приведенной скоростью B. В **СО $\hat{K}$ при распаде π^0-мезона γ-кванты разлетаются со скоростью света в противоположные стороны**.

Поэтому точки A_1 и A_2, соответствующие приведенным скоростям γ-квантов, принадлежат абсолюту и точка с радиус-вектором B, лежит на прямой L, проходящей через эти точки.

Пусть D — основание перпендикуляра, проведенного из начала O СО K к прямой L. Таким образом, величины углов $< A_1OD$, $< A_2OD$ равны углу параллельности α_l и

$$\cos\alpha_l = \operatorname{th}\rho(O, D).$$

Пусть $\varphi_l =< A_1BO$, тогда $0 \leq \varphi_l \leq \pi$, поскольку γ-кванты могут вылететь в любом направлении.

При изменении φ_l будет изменяться угол $2\alpha_l$ между направлениями вылета двух γ-квантов в СО K. Если, например, $\varphi_l = 0; \pi$, то $2\alpha = \pi$, $D = O$.

Если угол φ_l возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\rho(O, D)$ изменяется от 0 до $\rho(0, B)$. Угол разлета в СО K уменьшается от π до $\alpha_{l,min}$. Следовательно,

$$\cos\alpha_{l,min} = \operatorname{th}\rho(0, B)_{max} = |B|.$$

Таким образом, в лабораторной СО существует минимальный угол разлета двух γ-квантов, образовавшихся в результате распада π^0-мезона.

Экспериментальная проверка наличия этого минимального угла разлета в 1950 году явилась подтверждением существования π^0-мезона.

Два счетчика γ-квантов, включенные по схеме совпадений, были направлены в то место, где предположительно распадались π^0-мезоны, имеющие примерно одинаковую абсолютную приведенную скорость $|B|$. При уменьшении угла между счетчиками интенсивность счета резко уменьшалась по достижении угла α_{min}, где $\cos\alpha_{min} = |B|$.

Проанализируем распад π^0-мезона, используя планиметрию Лобачевского. Из связи между модулем импульса и энергии для фотонов, а также закона сохранения энергии получим

$$|\hat{p}_i| = \frac{\hat{E}_i}{c} = \frac{\hat{E}}{2c}, \qquad i = 1, 2,$$

где $\hat{E}$ — энергия покоя π^0-мезона в СО $\hat{K}$, $|\hat{p}_i|$, $\hat{E}_i$ — модуль импульса и энергия i-го γ-кванта в СО $\hat{K}$. Рассмотрим сначала частный случай, когда $B = D$.

1. Пусть $B = D$. Запишем закон сохранения энергии-импульса в СО K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$

$$E = \hat{E}\,\mathrm{ch}\,\Psi = E_1 + E_2 = 2E_1,$$

$$|p| = \frac{\hat{E}}{c}\,\mathrm{sh}\,\Psi = |p_1|\cos\alpha_l + |p_2|\cos\alpha_l = \frac{2E_1}{c}\cos\alpha_l,$$

где $\Psi = \rho(O, B)$. В силу симметрии относительно OD закон сохранения импульса на перпендикулярное к $\overrightarrow{OD}$ направление выполняется автоматически.

Заметим, что первое соотношение дает **формулу для поперечного эффекта Доплера**, т.е. устанавливает связь между энергией фотона в СО $\hat{K}$ $\hat{E}_1 = \frac{\hat{E}}{2}$ и его энергией в СО K, движущейся перпендикулярно направлению приведенной скорости фотона

$$E_1 = \hat{E}_1\,\mathrm{ch}\,\Psi.$$

Второе соотношение определяет тогда величину угла параллельности Лобачевского. Действительно, подставим полученную формулу во второе со-

отношение
$$\frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi = \frac{2\hat{E}_1}{c}\cos\alpha_l \operatorname{ch}\Psi.$$
Следовательно, $\cos\alpha_l = \operatorname{th}\Psi$. Таким образом, **экспериментальный факт распада π^0-мезона на два γ-кванта эквивалентен аксиоме Лобачевского о параллельных**.

Из закона сохранения импульса следует, что $\alpha_l < \frac{\pi}{2}$. Действительно, у π^0-мезона есть импульс, направленный по $\overrightarrow{OD}$, поэтому и продукты его распада — γ-кванты — должны иметь в СО K ненулевую проекцию на это направление, т.е. $\alpha_l < \frac{\pi}{2}$.

Если бы пространство скоростей имело геометрию Евклида, то угол параллельности $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и распад π^0-мезона на два γ-кванта был бы запрещен законом сохранения импульса.

В нерелятивистской физике невозможны процессы, идущие с изменением массы частиц, т.е. геометрия в этом случае тесно связана с физикой.

2. **Общий случай**. Найдем величины энергий и модулей импульсов γ-квантов в СО K. Для этого используем сначала поперечное преобразование Доплера из O в D, а затем продольное преобразование Доплера из D в B.
$$|p_1| = \frac{E_1}{c} = \frac{E_{1,D}}{c}\operatorname{ch}\rho(O,D) =$$
$$\frac{\hat{E}_1}{c}e^{-\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) = \frac{\hat{E}}{2c}e^{-\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D),$$
$$|p_2| = \frac{E_2}{c} = \frac{E_{2,D}}{c}\operatorname{ch}\rho(O,D) =$$
$$\frac{\hat{E}_2}{c}e^{\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) = \frac{\hat{E}}{2c}e^{\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D),$$
Используем закон сохранения энергии в СО K
$$E = E_1 + E_2, \qquad E = \hat{E}\operatorname{ch}\rho(O,B) =$$
$$\frac{\hat{E}}{2}e^{-\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) + \frac{\hat{E}}{2}e^{\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) = \hat{E}\operatorname{ch}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D).$$
Следовательно, $\operatorname{ch}\rho(O,B) = \operatorname{ch}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D)$.

Таким образом, **закон сохранения энергии в данном случае интерпретируется теоремой Пифагора в геометрии Лобачевского**.

Заметим, что

$$\sin\alpha_l = \sqrt{1-\cos^2\alpha_l} = \frac{1}{\operatorname{ch}\rho(O,D)}$$

и запишем закон сохранения импульса в СО K в проекции на направление L с учетом полученных формул

$$|p|\sin\xi_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l = |p_2|\sin\alpha_l - |p_1|\sin\alpha_l =$$

$$\frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D)\sin\alpha_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(D,B),$$

где ξ_l — величина угла между вектором B и $\overrightarrow{OD}$. Таким образом, получили частный случай теоремы синусов

$$\operatorname{sh}\rho(D,B) = \operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l.$$

Запишем теперь закон сохранения импульса в СО K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$.

$$|p|\cos\xi_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(O,B)\cos\xi_l = |p_2|\cos\alpha_l + |p_1|\cos\alpha_l =$$

$$\frac{E_1+E_2}{c}\cos\alpha_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{ch}\rho(O,B)\operatorname{th}\rho(O,D).$$

Таким образом, получили выражение катета через гипотенузу и прилежащий угол

$$\operatorname{th}\rho(O,D) = \operatorname{th}\rho(O,B)\cos\xi_l.$$

Вывод. **Формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* - М.: Физматгиз, 1962. - 503 с.

2. Широков П.А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.* - М.: Наука, 1983. - 80 с.

3. Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского.* - М.: МЦНМО, 2000. - 80 с.

4. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* - М.: Наука, 1966. - 648 с.

5. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* - М.: Наука, 1969. - 548 с.

6. Дубровский В.Н., Смородинский Я.А., Сурков Е.Л. *Релятивистский мир.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. Библиотечка «Квант». Вып. 34, 1984. - 176 с.

7. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1978. - 576 с.

8. Артин Э. *Геометрическая алгебра.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1969. - 284 с.

9. Нут Ю.Ю *Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении.* - М.: Изд.-во Академии Наук СССР, 1961. - 311 с.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля.* - М.: Физматлит, 2006. - 534 с.

11. Угаров В.А. *Специальная теория относительности.* - М.: Наука, 1977. - 383 с.

12. Трайнин Я.Л. *Аналитическая геометрия на плоскости Лобаческого.* - Новосибирск.: [б.и.], 1971. - 341 с.

13. Трайнин Я.Л. *Аналитическая геометрия в пространстве Лобаческого.* - Новосибирск: Новосибирский гос. педагогический ин-т., 1974. - 285 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И.П. *Геометрия.* - М.: Просвещение, 1997. - 256 с.

2. Васильев А.В. *Николай Иванович Лобачевский.* - М.: Наука, 1992. - 222 с

3. Каган В.Ф. *Основания геометрии.* Ч. I. - Л.: Гос. изд-во технико-технической лит., 1949. - 492 с.

4. Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.* «Современные проблемы математики. Фундаметальные направления. Т. 29. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)» - М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5-146.