

На правах рукописи

Великанов Петр Геннадьевич

**РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2008

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Артюхин Юрий Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Серазутдинов Мурат Нуриевич

доктор физико-математических наук,
профессор Сидоров Игорь Николаевич

Ведущая организация: Институт механики и машиностроения,
Казанский научный центр РАН

Защита состоится 25 декабря 2008 г. в 14 часов 30 минут в ауд. мех. 2 на заседании специализированного диссертационного Совета Д 212.081.11 Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Отзывы на автореферат в одном экземпляре, заверенные печатью, просим высылать по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент

Саченков А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие различных отраслей современного машиностроения - авиационной и космической техники, судостроения, химического машиностроения, промышленного и гражданского строительства ставит задачи расчета тонкостенных конструкций, сочетающих в себе легкость с высокой прочностью, что и обуславливает их широкое использование. Одним из основных требований к конструкциям является разумное соотношение между надежностью и экономичностью. В связи с этим широкое использование анизотропных материалов и пластиков в машиностроении представляется вполне оправданным. Конструкции и детали, изготовленные из таких материалов (в отличие от изотропных), обладают высокой несущей способностью по произвольно выбранным направлениям, что позволяет снизить вес конструкций (обеспечить экономичность) с одновременным увеличением их прочности. В связи с этим одной из главных задач механики тонкостенных конструкций является совершенствование методов расчета и проектирования пластин и оболочек сложной формы с различными законами изменения толщины, отверстиями, накладками при сопряженных воздействиях физических (температурных) полей и механических (локализованных и распределенных) нагрузок.

Большинство прикладных практически важных задач теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (неоднородность области, нерегулярность геометрии, сложность граничных условий, нелинейность дифференциальных уравнений) определить невозможно. В этой связи единственным возможным средством для получения приемлемых по точности и затратам времени результатов при решении практически важных задач являются численные методы. Известно, что не существует ни одного численного метода, обладающего бесспорными преимуществами при решении бесконечного разнообразия технических проблем. Любой из численных методов, обладая рядом достоинств, тем не менее не лишен определенных недостатков, зачастую принципиального характера, которые и обуславливают границы его применения.

Среди существующих численных методов сравнительно мало внимания уделено методу граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов). Несомненными достоинствами метода граничных элементов (МГЭ) в задачах теории пластин и оболочек являются снижение на единицу геометрической размерности задачи, аналитическое описание особенностей решения, высокая точность его результатов, практическое отсутствие ограничений на геометрию контура. В связи с этим актуальной темой исследований является дальнейшее развитие МГЭ для решения задач теории ортотропных пластин и пологих оболочек, основанных на применении фундаментальных решений исходной системы уравнений.

Целью работы является развитие прямого и непрямого метода граничных элементов (МГЭ) для решения задач линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных (прямолинейно и криволинейно) пластин и пологих оболочек со сложным контуром, допускающих непрерывное и ступенчатое изменение жесткости в условиях термомеханического нагружения (сосредото-

ченные, распределенные нагрузки и температурное поле) при различных граничных условиях.

Методы исследования. При проведении исследований использовались современные методы математического анализа и моделирования, численные методы и методы теории обобщенных функций. Программы расчета написаны на языке Fortran и пакета Mathematica. Графики функций и поверхности были построены с помощью пакетов Grapher и Surpher.

Научную новизну составляют следующие результаты: новым методом получены фундаментальные решения задач деформирования длинных цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига; фундаментальные решения осесимметричного деформирования криволинейно-ортотропных сферической и конической оболочек вращения; фундаментальные решения задач изгиба ортотропных и лежащих на сложном упругом основании изотропных пластин; фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, которая является гибким днищем в сосуде; матрицы фундаментальных решений задачи о плосконапряженном состоянии ортотропной пластины и изгиба трансверсально-изотропной пластины; фундаментальные решения изгиба двух- и трехслойных пластин.

Разработаны алгоритмы решения непрямым МГЭ задач изгиба ортотропных и лежащих на упругом основании Пастернака-Власова изотропных пластин сложной формы при действии термомеханического нагружения, а также контактной задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера. Предложен алгоритм решения прямым и непрямым МГЭ, основанный на применении соответствующих матриц фундаментальных решений, линейных задач изгиба пластин и пологих цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига, непрерывной и ступенчато-переменной жесткости, находящихся под действием термомеханического нагружения.

Предложен итерационный процесс для решения непрямым МГЭ линейных и нелинейных задач деформирования ортотропных пологих оболочек произвольной формы при действии термомеханического нагружения, основанный на применении матрицы фундаментального решения плосконапряженного состояния и фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины.

Разработана методика решения обратных и многослойных задач на основе предложенного итерационного процесса.

Практическая ценность. Разработанные итерационные процессы могут быть применены для решения широкого класса задач теории пластин и оболочек со сложным контуром и распространены на решения обратных задач, задач изгиба многослойных пластин и оболочек и задач с учетом физической и геометрической нелинейности. Предложенные в диссертации расчетные алгоритмы для решения задач пологих оболочек сложного контура могут быть использованы в проектных и конструкторских организациях для инженерных расчетов тонкостенных конструкций. Полученные в диссертации результаты были апробированы при чтении курса лекций “Вычислительные методы для проведения прочностных исследований” для студентов старших курсов и аспирантов КГТУ им. А.Н. Туполева.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Фундаментальные решения задач деформирования длинных цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига.
2. Фундаментальные решения задач изгиба ортотропных и лежащих на сложном упругом основании изотропных пластин; матрица фундаментального решения задачи о плосконапряженном состоянии ортотропной пластины.
3. Алгоритмы решения непрямым МГЭ задач изгиба ортотропных и лежащих на упругом основании Пастернака-Власова изотропных пластин сложной формы при действии термомеханического нагружения, а также контактной задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера.
4. Алгоритм решения прямым и непрямым МГЭ, основанный на применении соответствующих матриц фундаментальных решений, линейных задач изгиба пластин и пологих цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига, непрерывной и ступенчато-переменной жесткости, находящихся под действием термомеханического нагружения.
5. Итерационный процесс для решения непрямым МГЭ линейных и нелинейных задач деформирования ортотропных пологих оболочек произвольной формы при действии термомеханического нагружения, основанный на применении матрицы фундаментального решения плосконапряженного состояния и фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: строгими математическими постановками рассматриваемых задач и обоснованным применением математических методов; аналитическим вычислением сингулярных интегралов и применением формул численного интегрирования, обеспечивающих высокую точность при формировании системы разрешающих уравнений; сходимость приближенных решений, полученных МГЭ, при увеличении числа элементов на контуре; тщательным тестированием численных алгоритмов на всех этапах разработки и реализации; многочисленными сравнениями с известными аналитическими и численными решениями, а также с результатами экспериментальных исследований.

Апробация работы. Основные теоретические положения, результаты и выводы диссертационной работы докладывались: на XXI и XXII Международных конференциях “Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов ” (г. Санкт-Петербург, 2005 и 2007 гг.); на III и IV Всероссийских научных конференциях с международным участием “Математическое моделирование и краевые задачи” (г. Самара, 2006 г.); на II и III Международных форумах “Естественные науки” (г. Самара, 2006 г.); на Всероссийском семинаре “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” (г. Казань, 2008 г.); на Международном семинаре “Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек” (г. Казань, 2008 г.); на научных семинарах кафедры “Теоретическая механика” КГУ (г. Казань, 2005-2008 гг.).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в десяти печатных работах (всего опубликовано 25 печатных работ). Из них одна – в из-

дании, рекомендованном ВАК Министерства образования и науки РФ для опубликования результатов кандидатских диссертаций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы, содержащего 350 наименований, изложена на 200 страницах машинописного текста, содержащего 25 таблиц и 135 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, приведен литературный обзор по теме диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, приведены основные научные результаты.

Современная библиография МГЭ обширна. Опубликованы многочисленные научные работы, монографии, в которых изложены теоретические основы метода и различные аспекты его применения. Среди первых монографий, посвященных различным аспектам МГЭ (в основном посвящены расчету трехмерных тел), отметим работы Крузе Т., Риццо Ф., Бенерджи П., Баттерфилда Р., Бреббия К. (именно им приписывают введение терминов граничные интегральные уравнения (ГИУ) и МГЭ), Теллеса Ж., Вроубела Л., Уокера С., Крауча С., Старфилда А., Угодчикова А.Г., Хуторянского Н.М., Партона В.З., Перлина П.И., Верюжского Ю.В., Коренева Б.Г. (предложил метод компенсирующих нагрузок), Купрадзе В.Д., Мухелишвили Н.И. Работы Артюхина Ю.П., Банцарева К.Н., Венцеля Э.С., Гавели С.П., Грибова А.П., Гурьянова И.Н., Крамина М.В., Крамина Т.В., Кулакова В.М., Куканова Н.И., Малкина С.А., Мельникова Ю.А., Серазутдинова М.Н., Сидорова И.Н. Стахорского А.М., Толкачева В.М., Чумариной О.А. посвящены дальнейшему развитию различных аспектов МГЭ (в основном посвящены расчету тонкостенных конструкций).

Основой построения ГИУ являются фундаментальные решения. Построению и исследованию фундаментальных решений теории пластин и оболочек посвящены работы Артюхина Ю.П., Власова В.З., Григолюка Э.И., Даревского В.М., Жигалко Ю.П., Лукаевича С., Мельникова Ю.А., Нерубайло Б.В., Ольшанского В.П., Толкачева В.М., Хермандера Л., Хижняка В.К., Чернышева Г.Н., Шевченко В.П., Образцова И.Ф., Мораря Г.А., Kwang Chien Ho, Fu Chen, Sanders J.L., Simmonds J.G., Bradly M.R. и др.

В первой главе рассматриваются вопросы получения фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных с постоянными и переменными коэффициентами) теории пластин и пологих оболочек.

Для реализации МГЭ необходимо предварительно определить фундаментальное решение исходной системы дифференциальных уравнений. При этом применение МГЭ становится оправданным, если фундаментальное решение имеет явный аналитический вид. В противном случае вычислительные трудности при численном решении граничных интегральных уравнений сводят на нет все преимущества МГЭ в сравнении с другими методами. В этой связи актуальным представляется развитие методик определения фундаментальных решений, записанных в аналитическом виде.

Решение системы N линейных дифференциальных уравнений представимо в виде свертки $U(t) = L_0^{-1}F(t) = G * F = \int_{\Omega} G(t, \zeta)F(\zeta)d\zeta$, $\zeta \in \Omega$, где L_0^{-1} - интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения $G(t, \zeta)$ линейного дифференциального оператора L_0 ; Ω - область определения дифференциального оператора L_0 . Матрица фундаментального решения $G(t, \zeta)$ определяется из представления вида:

$$L_0 G(t, \zeta) = \delta(t - \zeta)I, \quad (1)$$

где $\delta(t - \zeta)$ - дельта-функция Дирака; I - единичная матрица размерностью $N \times N$.

В результате анализа выражения (1) было отмечено, что прослеживается аналогия между определением матрицы фундаментального решения линейного дифференциального уравнения и вычислением обратной матрицы в матричном исчислении. Согласно идее Хермандера Л. фундаментальное решение ищем в виде

$$G(t, \zeta) = L_0^* \mathcal{A}(t, \zeta), \quad (2)$$

где $L_0^* = \det(L_0)L_0^{-1}$ - ассоциированный к L_0 дифференциальный оператор, элементами которого являются алгебраические дополнения оператора L_0^T .

В результате подстановки (2) в (1) приходим к уравнению относительно скалярной функции $\mathcal{A}(t, \zeta)$:

$$\det(L_0)\mathcal{A}(t, \zeta) = \delta(t - \zeta), \quad (3)$$

где $\det(L_0)$ - определитель первоначального заданного дифференциального оператора.

Таким образом, определение матрицы фундаментального решения системы линейных дифференциальных уравнений данным методом предполагает: 1) вычисление компонент ассоциированного дифференциального оператора по методике, аналогичной методике вычисления компонент обратной матрицы; 2) решение уравнения (3), то есть фактически определение фундаментального решения скалярной функции $\mathcal{A}(t, \zeta)$ этого уравнения, например, методом интегрального преобразования Фурье; 3) в соответствии с найденным ассоциированным дифференциальным оператором L_0^* проведение всех необходимых вычислений производных скалярной функции $\mathcal{A}(t, \zeta)$ по (2).

Приведенная методика представляется наиболее эффективной для нахождения фундаментальных решений систем линейных дифференциальных уравнений не только потому, что она сводит систему к одному дифференциальному уравнению, а еще и потому, что, как известно, операция дифференцирования, к которой сводится процесс нахождения фундаментального решения по найденной скалярной функции, является процессом наименее трудоемким по сравнению с операцией интегрирования (при вычислении несобственных интегралов при обратном преобразовании Фурье).

С использованием предложенной методики получены фундаментальные решения задач деформирования длинных цилиндрических панелей по моделям Кирхгофа-Лява и Тимошенко, которые совпали с фундаментальными решениями, полученными по классической методике Кукановым Н.И.

Существует метод получения фундаментальных решений, основанный на предварительно найденном решении соответствующего однородного уравнения (метод вариации произвольных постоянных), использование которого часто сопряжено с трудностями, связанными с отсутствием фундаментальной системы решений (ФСР) особенно для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В связи с этим предложены методы, позволяющие определить ФСР: метод нелинейного подобию, метод факторизации дифференциальных операторов, преобразование Куммера-Лиувилля (для двух последних показана также неединственность факторизации и преобразования соответственно), с помощью которых получены фундаментальные решения задач растяжения и изгиба пластин переменной жесткости.

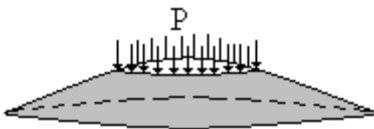


Рис. 1

С помощью интегрального преобразования Ханкеля получены фундаментальные решения дифференциальных уравнений, описывающих осесимметричное деформирование криволинейно-ортотропных конической и сферической (рис. 1) оболочек вращения.

Например, для последней фундаментальное решение примет вид:

$$G(\rho) = \frac{\rho}{\nu^2 - 1} {}_1F_2 \left(1; \frac{3 + \nu}{2}, \frac{3 - \nu}{2}; -\frac{\rho^2 a^2}{4} \right), \quad (4)$$

где ${}_1F_2(a; \beta_1, \beta_2; \gamma)$ - частный случай обобщенного гипергеометрического ряда

с параметрами 1 и 2; ρ - полярный радиус; $\nu^2 = \frac{E_2}{E_1}$; $c = \frac{h}{\nu \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)}}$; $a^2 = \frac{1}{cR}$;

E_i, ν_i ($i=1,2$) - модули упругости Юнга и коэффициенты Пуассона в направлениях ортотропии, совпадающих с направлением координатных линий; R - радиус кривизны оболочки; h - толщина оболочки.

Кроме того, показано, что функция (4) есть ни что иное, как функция Ломмеля $S_{0,\nu}(i\sqrt{i}\rho a)$.

Плодотворность использования в представлении фундаментальных решений гипергеометрических функций объясняется наличием многочисленных соотношений между этими функциями, что дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимость и сокращать число рядов, подлежащих суммированию – операции с успехом реализуемые, например, в пакете Mathematica.

Для дифференциальных уравнений в частных производных с помощью интегрального преобразования Фурье получены фундаментальные решения задач изгиба ортотропных и лежащих на сложном упругом основании изотропных пластин; фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, которая является гибким днищем в сосуде; матрицы фундаментальных решений за-

дачи о плосконапряженном состоянии ортотропной пластины (приведены 2 способа решения: классический и приведенный выше) и изгиба трансверсально-изотропной пластины; фундаментальные решения изгиба двух- и трехслойных пластин.

Во второй главе приведены основные формулы дифференцирования в локальной системе координат, связанной с точкой контура пластины, координатные оси которой направлены по нормали и касательной к контуру в этой точке. Приведены основные соотношения метода компенсирующих нагрузок для задач изгиба и плоского напряженного состояния ортотропной пластины, изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака-Власова и контактной задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера.

В соответствии с методом компенсирующих нагрузок решение задачи изгиба пластины ищется как сумма основного и компенсирующего решений. Основное решение определяет деформацию бесконечной пластины от заданных нагрузок; компенсирующее решение определяет действие на бесконечную пластину системы сил q^i, m^i , распределенных по контурам $\Gamma_i (i = 0, 1, \dots, M)$ в случае многосвязной пластины (компенсирующих нагрузок), за счет действия которых выполняются краевые условия на контуре пластины:

$$w(t) = w^r(t) + \sum_{i=0}^M \int_{\Gamma_i} \left[G(t, \zeta) q^i(\zeta) - \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\zeta)} m^i(\zeta) \right] ds(\zeta); \quad (5)$$

$$w^r(t) = \int_{\Omega^+} G(t, \zeta) p_z(\zeta) d\Omega(\zeta) + \sum_{i=1}^n G(t, \zeta_i) P_i(\zeta_i),$$

где $t(x, y)$ - точка области пластины Ω^+ ; $\zeta(\xi, \eta)$ - точка контура Γ ; P_i - модуль сосредоточенной силы, приложенной в заданной точке; n_1 - внешняя нормаль к контуру Γ в точке ζ ; p_z - поперечная нагрузка.

Фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака-Власова, имеет вид:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi\gamma^2 D} kei_0(r/l, \varphi), \quad \text{где} \quad 2p^2 = \frac{k_t h^2}{4D}, \quad \chi^4 = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4}, \quad \gamma^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\gamma^2}{p^2}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad k_z, k_t - \text{параметры упругого ос-}$$

нования; E, ν - модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона; x, y - декартовы координаты; h - толщина пластины.

Для реально существующих ортотропных материалов фундаментальное решение задачи изгиба пластины имеет вид:

$$G(x, y) = \frac{1}{16\pi D_1 \lambda^4 \sqrt{1-\mu^2}} \left[2a(\lambda^2 x^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{x^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + y^2} + b(\lambda^2 x^2 + y^2) \ln |B(x, y)| - 2xy \lambda^2 \ln \left| \frac{B_-(x, y)}{B_+(x, y)} \right| \right],$$

где $\delta_1 = \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1-\nu_1\nu_2)}{E_1}$; $\delta_2 = \frac{E_2}{E_1}$; $\mu^2 = \frac{\delta_1^2}{\delta_2}$; $\lambda^4 = \delta_2$; $\alpha^2 = \lambda^2\mu$, $\beta^2 = \lambda^2\sqrt{1-\mu^2}$,
 $a = \lambda\sqrt{\frac{1+\mu}{2}}$, $b = \lambda\sqrt{\frac{1-\mu}{2}}$, $B_+(x, y) = \lambda^2x^2 + 2bxy + y^2$, $B_-(x, y) = \lambda^2x^2 - 2bxy + y^2$,
 $B(x, y) = B_+(x, y) \cdot B_-(x, y)$; $D_1 = \frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$; E_i, ν_i ($i=1,2$), \tilde{G} - модули упругости

Юнга, коэффициенты Пуассона в направлениях ортотропии и модуль сдвига.

В соответствии с методом компенсирующих нагрузок для контактных задач изгиба пластин под действием штампа прогиб пластины ищем в виде, который аналогичен (5). Отличие лишь в том, что во втором уравнении (5) первый член соотношения представляет собой интеграл по области действия штампа S и место известной нагрузки занимает искомое контактное напряжение $\sigma(\chi)$, посредством которого штамп действует на пластину, а второй член соотношения равен нулю. Для данной задачи в качестве фундаментального решения принимаем фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера, которое получается из фундаментального решения для основания Пастернака-Власова при $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Рассматриваются граничные условия на участках контура Γ :

$$\begin{aligned} w = 0, \quad w_{,n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{ - жесткая заделка,} \\ w = 0, \quad M_n = 0 & \text{ - шарнирное закрепление,} \\ V_n = 0, \quad M_n = 0 & \text{ - свободный край,} \end{aligned} \quad (6)$$

где M_n, V_n - изгибающий момент и обобщенная поперечная сила на Γ .

В области контакта прогиб срединной плоскости пластины получим в виде (условие контакта):

$$k\sigma(t) + w(t) = \alpha + \gamma_x x + \gamma_y y, \quad t \in S, \quad (7)$$

где $\alpha, \gamma_x, \gamma_y$ - постоянные жесткого смещения.

Слагаемое $k\sigma(t)$ в условии контакта имеет смысл прогиба контактной поверхности пластины вследствие обжатия, возникающего от действия контактных напряжений.

По методу компенсирующих нагрузок решение задачи о плосконапряженном состоянии пластины ищется в виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{\Gamma} [G_{11}(t, \zeta)\varphi_1(\zeta) + G_{12}(t, \zeta)\varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + u^r(t); \\ v(t) &= \int_{\Gamma} [G_{21}(t, \zeta)\varphi_1(\zeta) + G_{22}(t, \zeta)\varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + v^r(t); \\ u^r(t) &= \int_{\Omega^+} [G_{11}(t, \zeta)p_x(\zeta) + G_{12}(t, \zeta)p_y(\zeta)] d\Omega(\zeta); \\ v^r(t) &= \int_{\Omega^+} [G_{21}(t, \zeta)p_x(\zeta) + G_{22}(t, \zeta)p_y(\zeta)] d\Omega(\zeta), \end{aligned} \quad (8)$$

где $t(x, y) \in \Omega^+$; $\zeta(\xi, \eta) \in \Gamma$; φ_1, φ_2 – неизвестные компенсирующие нагрузки; p_x, p_y – тангенциальные составляющие внешней нагрузки.

Для реально существующих ортотропных материалов матрица фундаментального решения плосконапряженного состояния пластины имеет вид:

$$G_{11} = \frac{1}{4\pi B_1 \alpha p} \{ (q\sqrt{\gamma^2 - p} - \alpha\sqrt{\gamma^2 + p}) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 + p)} + (\alpha\sqrt{\gamma^2 - p} - q\sqrt{\gamma^2 + p}) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 - p)} \};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\beta}{4\pi B_1 \alpha p} \operatorname{arctg} \frac{xy(\sqrt{\gamma^2 + p} - \sqrt{\gamma^2 - p})}{y^2 + x^2 q};$$

$$G_{22} = \frac{1}{4\pi B_1 \alpha p} \left\{ \left(\frac{\alpha}{q} \sqrt{\gamma^2 - p} - \sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 + p)} + \left(\sqrt{\gamma^2 - p} - \frac{\alpha}{q} \sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 - p)} \right\},$$

$$\text{где } \gamma^2 = \frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2; \quad q^2 = \frac{E_2}{E_1}; \quad p^2 = \gamma^4 - q^2; \quad B_1 = \frac{Eh}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad \alpha = \frac{\tilde{G}h}{B_1}; \quad \beta = \nu_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1};$$

E_i, ν_i ($i=1,2$), \tilde{G} – модули упругости Юнга, коэффициенты Пуассона в направлениях ортотропии и модуль сдвига соответственно.

Краевые условия на участках контура Γ :

$$\begin{aligned} u_n = 0; \quad u_\tau = 0 & \text{ – закрепленный контур,} \\ T_n = 0; \quad T_{n\tau} = 0 & \text{ – свободный край,} \end{aligned} \quad (9)$$

где $u_n, u_\tau, T_n, T_{n\tau}$ – проекции вектора контурного перемещения и усилия на нормаль и касательную к контуру Γ .

Неизвестные компенсирующие нагрузки $q(\zeta), m(\zeta), \varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ определяются из системы сингулярных интегральных уравнений, которые получаются при подстановке (5), (8) в краевые условия (6), (9) на контуре Γ и в условии контакта (7). При записи системы сингулярных интегральных уравнений необходимо учитывать предельные значения некоторых потенциалов при стремлении точки t к контуру Γ изнутри области. В локальной системе координат определены ядра потенциалов, входящих в интегральные уравнения для задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака-Власова, а в глобальной – изгиба и плоского напряженного состояния ортотропной пластины, определены предельные значения этих потенциалов на границе области. Анализ предельных значений потенциалов проводится на основе методики, в соответствии с которой каждой точке контура Γ сопоставляется местная система координат.

Для основных видов граничных условий приведены интегральные уравнения метода компенсирующих нагрузок для задач изгиба и плоского напряженного состояния ортотропной пластины и изгиба изотропной пластины на упругом основании Пастернака-Власова. Ядра граничных интегральных уравнений содержат особенности типа $\ln r, r^{-1}$ и r^{-2} при $r \rightarrow 0$. Интегралы с особенностями типа r^{-1} определяются в смысле главного значения по Коши, а интегралы с особенностями типа r^{-2} – в смысле конечного значения по Адамару.

При численной реализации алгоритма контур Γ , а для контактной задачи и область под штампом, разбиваются на элементы, в пределах которых компен-

сирующие нагрузки и контактное напряжение считаются постоянными. Граничные элементы представляются либо в виде отрезка прямой, либо в виде дуги окружности. Точки коллокации располагаем в узлах элементов, а для контактной задачи в центре тяжести подобластей, на которые разбивается область под штампом. Интегралы по элементам, не содержащие особенностей, вычисляются по восьмиузловой формуле Гаусса. Сингулярные интегралы вычисляются аналитически.

В третьей главе рассматривается применение непрямого МГЭ к решению задач изгиба ортотропных и лежащих на упругом основании изотропных пластин со сложным очертанием контура под действием термомеханического нагружения. Приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы. На примере шарнирно опертой круглой пластины и вписанного в контур пластины многоугольника исследуется “парадокс Саподжяна”. Рассматривается возможность использования предложенной методики для пластин со слабо выраженными ортотропными свойствами (практически изотропных). Исследуется влияние представления частного решения (в виде аналитической функции и квадратурах) на окончательный результат решения задач.

Для отработки методики решена задача изгиба жестко заделанной круглой ортотропной пластины радиуса r , находящейся под действием равномерно распределенного давления интенсивности $q = 0.1$ (МПа). Механические характеристики пластины (материал 1): $E_1 = 1.2 \cdot 10^4$ (МПа), $E_2 = 0.6 \cdot 10^4$ (МПа), $\tilde{G} = 0.7 \cdot 10^3$ (МПа), $\nu_1 = 0.071$, $\nu_2 = 0.036$, а геометрические - $r = 0.1$ (м), $h = 0.01$ (м). В таблице 1 приведены результаты, позволяющие исследовать сходимость численного решения непрямым МГЭ при равномерном разбиении контура пластины на 40, 80 и 100 элементов (элементы – дуги окружности) в сравнении с точным решением Лехницкого С.Г. в некоторых точках области и границы.

Таблица 1

Корд.-ты (x/r; y/r)	$\frac{w}{h} \cdot 10^2$				$\frac{M_x}{qr^2} \cdot 10^2$			$\frac{M_y}{qr^2} \cdot 10^2$		
	40 ГЭ	80 ГЭ	100 ГЭ	точное	80 ГЭ	100 ГЭ	точное	80 ГЭ	100 ГЭ	точное
(0;0)	2.591	2.594	2.595	2.596	10.783	10.779	10.775	5.570	5.573	5.575
(0.2;0)	2.390	2.391	2.392	2.393	9.5130	9.5123	9.5112	5.326	5.329	5.322
(0.4;0)	1.830	1.831	1.831	1.832	5.7186	5.7190	5.7196	4.5621	4.5637	4.4647
(0;1)	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.7240	-0.7280	-0.7287	-10.409	-10.410	-10.411
(1;0)					-20.820	-20.821	-20.821	-0.7384	-0.7390	-0.7392
(0;0.8)	0.338	0.337	0.336	0.336	3.4109	3.4117	3.4126	-4.6541	-4.6553	-4.6558
(0.8;0)	0.3361	0.3363	0.3364	0.3364	-9.443	-9.445	-9.446	1.529	1.532	1.534

Приводятся результаты решения задач изгиба ортотропных и изотропных пластин, лежащих на упругом основании с различной формой контура и граничными условиями.

Рассматривается решение задач изгиба многосвязных ортотропных и изотропных пластин на упругом основании под действием термомеханического нагружения.

В качестве примера решена задача изгиба двухсвязной изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера с различными граничными условиями на отдельных участках, и находящейся под действием термомеханического нагружения (сосредоточенной силы P , приложенной в начале координат и линейного по толщине температурного поля $T(z) = \frac{\Delta T}{h} \cdot z$) (рис. 2). Параметры пластины и поля: $h = 0.01$ (м), $a = 0.1$ (м), $E = 2 \cdot 10^5$ (МПа), $\nu = 0,3$, $k_z = 15400$ (МН/м³), $P = 5000$ (Н), $\Delta T = 100$ (град), $\alpha_t = 0.125 \cdot 10^{-4}$ (град⁻¹).

На рис. 3 приведена поверхность распределения прогиба w с линиями уровня.

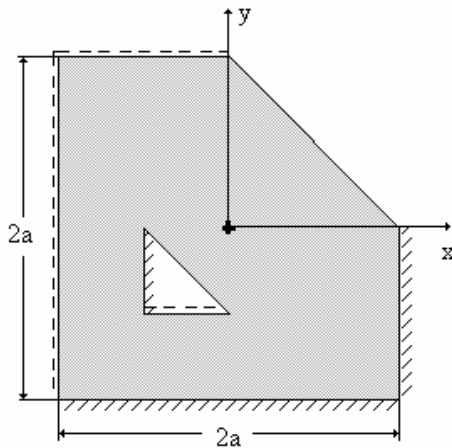


Рис. 2

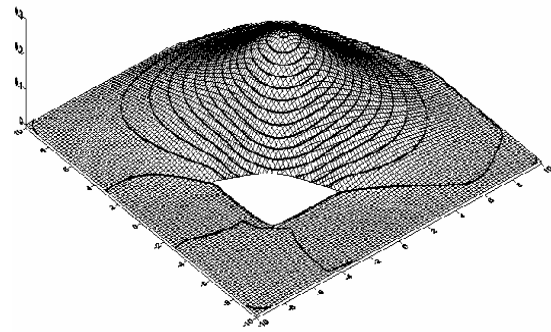


Рис. 3

Рассматривается решение задач изгиба ортотропных и изотропных пластин под действием произвольно распределенных (по некоторой области и закону) нагрузок, а также специальных нагрузок (сосредоточенных моментов и “изгибных” температурных источников).

Рассмотрена шарнирно опертая по контуру круглая ортотропная пластина, находящаяся под действием сосредоточенного изгибающего момента интенсивности $m = 100$ (Н*м), приложенного в начале координат, направленного вдоль оси x . Механические характеристики пластины взяты для материала 1, геометрические - $r = 0.1$ (м), $h = 0.01$ (м). Контур пластины равномерно разбивался на 40 граничных элементов. На рис. 4 приведено распределение прогиба w пластины.

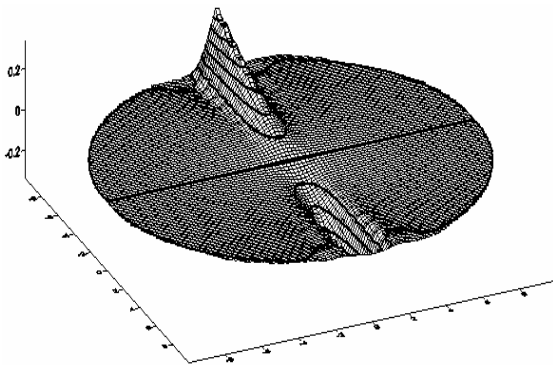


Рис. 4

$K_z = 15400$ (МН/м³), (основание – песок и гравий), $E = 2 \cdot 10^5$ (МПа), $\nu = 0,3$.

Квадратная в плане двухсвязная изотропная пластина с угловым вырезом размером a и круговым вырезом радиуса r с граничными условиями шарнирного закрепления (пунктирная линия), жесткой заделки (наклонная линия) и свободного края (нет линии) (рис. 5) лежит на упругом основании Винклера. Для решения были приняты следующие значения параметров: $a = 0.1$ (м), $b = a$, $r = 0.01$ (м), $h = 0.01$ (м), $K_z = 15400$ (МН/м³), (основание – песок и гравий), $E = 2 \cdot 10^5$ (МПа), $\nu = 0,3$.

Пластина находится под действием сосредоточенного “изгибного” температурного источника интенсивности $m = 1000$ (град), приложенного в начале координат. Коэффициент температурного расширения материала принят следующим: $\alpha_t = 0,125 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$. Контур пластины был равномерно разбит на 100 граничных элементов. На рис. 6 приведено распределение прогиба w рассматриваемой пластины.

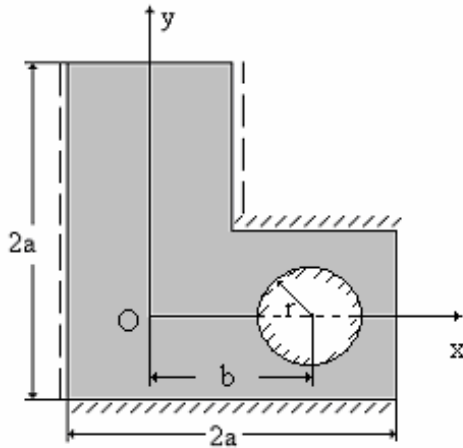


Рис. 5

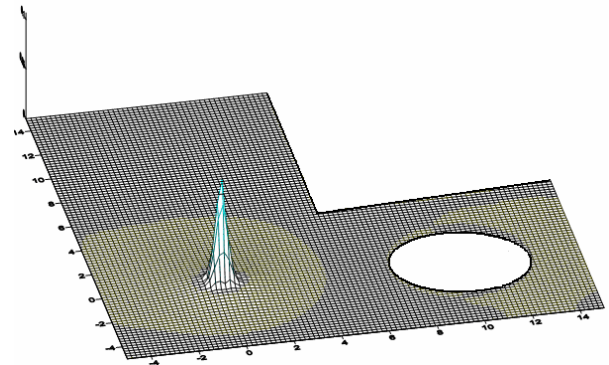


Рис. 6

Рассматривается решение контактной задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера, деформирование которой происходит под действием штампа.

Жестко заделанная квадратная изотропная пластина со стороной $a = 0.1$ (м), лежащая на упругом основании Винклера, находится под действием симметрично расположенного относительно пластины квадратного штампа со стороной $b = 0.04$ (м). Для решения были приняты следующие значения параметров: $h = 0.01$ (м), $K_z = 15400$ (МН/м 3), (основание – песок и гравий), $E = 2 \cdot 10^5$ (МПа), $\nu = 0,3$. Контур пластины разбивался на 40 граничных элементов, а область под штампом - на 64 подобласти. На рис. 7 показано распределение прогиба w , а на рис. 8 – распределение контактных напряжений σ с помощью линий уровня.

Рис. 7

Рис. 8

В четвертой главе рассматривается решение задач линейного и нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек непрямым МГЭ под действием термомеханического нагружения. Прямые и непрямыми МГЭ решаются

задачи линейного деформирования цилиндрических панелей ступенчато-переменной жесткости под действием термомеханического нагружения. Непрямым МГЭ решается задача изгиба пластинки непрерывно-переменной жесткости.

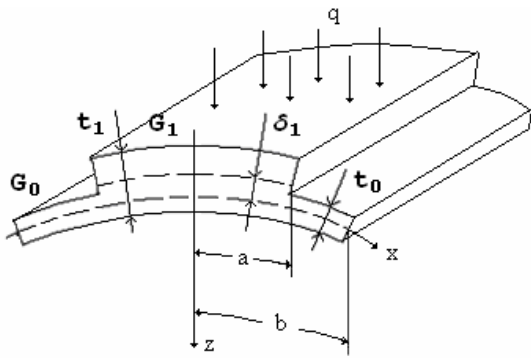


Рис. 9

Прямым и непрямым МГЭ получено решение задачи линейного деформирования шарнирно опертой цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости в рамках гипотез Кирхгофа-Лява, находящейся под действием термомеханического нагружения. В данном случае матрицы фундаментальных решений систем дифференциальных уравнений для каждой из подобластей будут отличаться лишь величинами жесткостей.

Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры:

$$\bar{x} = \frac{x}{b}; \quad \bar{a} = \frac{a}{b}; \quad \bar{k}_1 = \frac{4b^2}{Rt_0}; \quad \bar{t} = \frac{t_1}{t_0}; \quad \bar{w} = \frac{wR}{b^2}; \quad \bar{p} = \frac{pRb^2}{D_0}; \quad \bar{\sigma}^u = \frac{\sigma^u b^2}{Et_0^2}.$$

Рассмотрена пологая цилиндрическая панель (рис. 9) со следующими параметрами: $\bar{k}_1 = 50$, $\bar{a} = 0.5$, $t_0 = 0.01$ (м), $\nu = 0.3$, $E = 2 \cdot 10^5$ (МПа), $\bar{p} = 27.3$.

Рассмотрим 4 панели со следующими свойствами:

- 1) $\bar{t} = 1$, $\delta_1 = 0$ (м);
- 2) $\bar{t} = 2$, $\delta_1 = -0.005$ (м);
- 3) $\bar{t} = 3$, $\delta_1 = -0.01$ (м);
- 4) $\bar{t} = 4$, $\delta_1 = -0.015$ (м).

Отрицательный эксцентриситет δ_1 соответствует панели с гладкой нижней ограничивающей поверхностью.

На рис. 10-11 сплошными линиями изображены результаты, полученные МГЭ, а точками – аналитическое решение, распределения прогибов и изгибных напряжений для вышеприведенных четырех типов панелей.

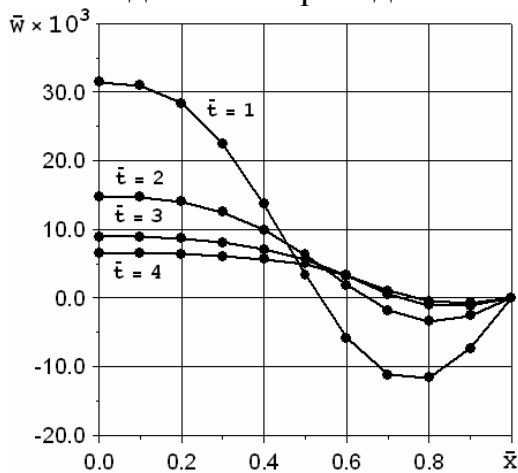


Рис. 10

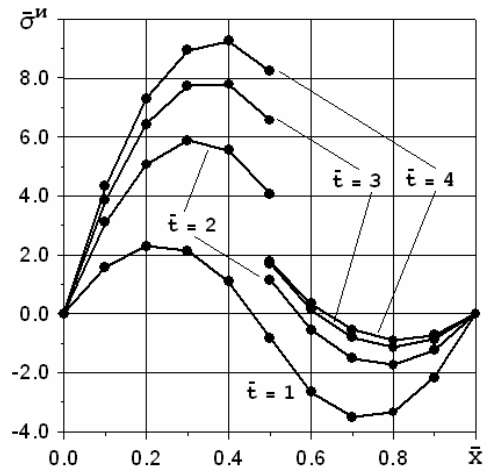


Рис. 11

Аналогично решается задача деформирования длинной пологой цилиндрической панели с учетом поперечного сдвига.

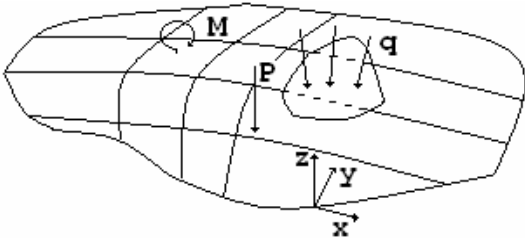


Рис. 12

В настоящее время широкое использование МГЭ для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) как изотропных, так и в особенности ортотропных оболочек (рис. 12) сопряжено со значительными вычислительными трудностями, свя-

занными с невозможностью определения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в явном аналитическом виде для оболочек произвольной геометрии (если для изотропных оболочек частного вида такие фундаментальные решения существуют, то для ортотропных оболочек они вообще отсутствуют). Для преодоления указанной проблемы в настоящей главе предлагается итерационный процесс решения геометрически нелинейных задач изгиба пологих ортотропных оболочек со сложным контуром при термомеханическом нагружении, основанный на решении непрямом МГЭ линейных задач изгиба и плоского напряженного состояния ортотропной пластины.

Система нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях для ортотропной оболочки постоянной толщины, находящейся под действием поперечной нагрузки p_z , записывается в виде:

$$\begin{aligned} B_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (v_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] &= l_1(w); \\ B_1 \left[(v_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] &= l_2(w); \\ D_1 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] &= l_3(u, v, w) + p_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где $l_1(w)$, $l_2(w)$, $l_3(u, v, w)$ – нелинейные дифференциальные операторы, в которые входят кривизны.

На контуре Γ , ограничивающем оболочку, рассматриваются следующие граничные условия:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, u = 0, v = 0 \text{ – жесткая заделка,} \quad (11)$$

$$w = 0, M_n = 0, u = 0, v = 0 \text{ – шарнирное закрепление,}$$

Процесс последовательных приближений для решения системы (10) принимается в виде (по рекомендации Корнишина М.С.):

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha_u (u - u^{(k)}); \\ v^{(k+1)} &= v^{(k)} + \alpha_v (v - v^{(k)}); \\ w^{(k+1)} &= w^{(k)} + \alpha_w (w - w^{(k)}); \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (12)$$

где α_u , α_v , α_w ($0 < \alpha_u \leq 1$, $0 < \alpha_v \leq 1$, $0 < \alpha_w \leq 1$) – параметры, обеспечивающие сходимость итерационного процесса (параметры релаксации).

Вектор $U(u, v, w)$ определяется из решения системы линейных уравнений, описывающих изгиб и растяжение ортотропной пластины:

$$\begin{aligned}
B_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(v_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] &= l_1(w^{(k)}); \\
B_1 \left[\left(v_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] &= l_2(w^{(k)}); \\
D_1 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] &= l_3(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) + p_z,
\end{aligned} \tag{13}$$

с граничными условиями (11).

По методу компенсирующих нагрузок решение системы (13) ищется в виде (5) и (8), где функции $u^r(t)$, $v^r(t)$, $w^r(t)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
u^r(t) &= \int_{\Omega} \left[G_{11}(t, \zeta) l_1(w^{(k)}(\zeta)) + G_{12}(t, \zeta) l_2(w^{(k)}(\zeta)) \right] d\Omega(\zeta); \\
v^r(t) &= \int_{\Omega} \left[G_{21}(t, \zeta) l_1(w^{(k)}(\zeta)) + G_{22}(t, \zeta) l_2(w^{(k)}(\zeta)) \right] d\Omega(\zeta); \\
w^r(t) &= \int_{\Omega} G(t, \zeta) \left[l_3(u^{(k)}(\zeta), v^{(k)}(\zeta), w^{(k)}(\zeta)) + p_z(\zeta) \right] d\Omega(\zeta),
\end{aligned} \tag{14}$$

где $d\Omega$ – элемент площади плана оболочки.

Разрешающая система сингулярных интегральных уравнений с неизвестными компенсирующими нагрузками получается при удовлетворении граничным условиям на участках контура Γ .

Перемещения и усилия в области Ω и на контуре Γ определяется соотношениями вида (5), (8). При определении усилий на контуре Γ необходимо учитывать разрывы, возникающие за счет предельных значений потенциала двойного слоя.

Ядра граничных интегральных уравнений содержат особенности, ранее приведенные для линейных задач.

При численной реализации алгоритма контур Γ аппроксимируется отрезками прямых линий или дугами окружностей и разбивается на граничные элементы, в пределах которых компенсирующие нагрузки считаются постоянными. Интегралы, не содержащие особенностей, вычисляются на элементах контура по восьмиузловой формуле Гаусса. Сингулярные интегралы вычисляются аналитически. Функции u^r , v^r , w^r определяются интегральными операторами со слабой особенностью (интегрирование проводится по срединной поверхности Ω).

Условие окончания итерационного процесса (12) принимается в следующем виде:

$$\|U - U^{(k)}\| / \|U^{(k)}\| < \varepsilon, \tag{15}$$

где $\|U\|^2 = \sum_i \left[u^2(t_i) + v^2(t_i) + w^2(t_i) \right]$ – принятая норма; ε – малая положительная величина; $U^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$.

При решении нелинейных задач применяется метод продолжения по параметру, в качестве которого принят прогиб в заданной точке оболочки.

Рассмотрены примеры решения геометрически нелинейных ортотропных пластин и пологих оболочек.

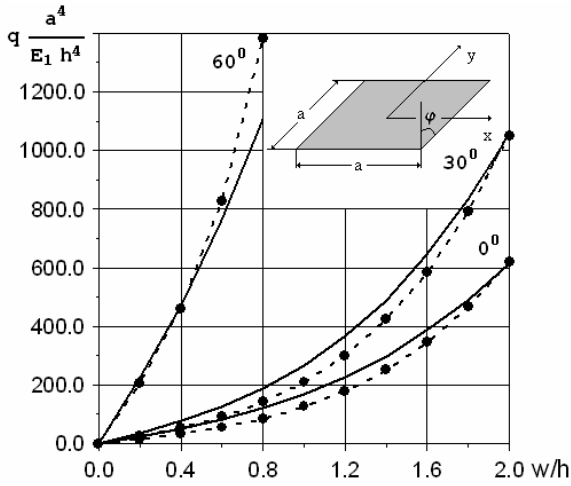


Рис. 13

На рис. 13 показаны результаты исследования влияния угла скоса на прогиб параллелограммных пластин. Представлены зависимости “максимальный прогиб - нагрузка” в центре параллелограммной пластины, полученные МГЭ по предложенной методике (линия пунктирная с точками) и теоретико-экспериментальным методом (сплошная линия), полученные Костиным В.А., Нехотяевым В.В., Задориным В.А. При решении задачи МГЭ контур пластины был разбит на 20 одинаковых по длине элементов. Релаксационные параметры и невязка приняты в виде: $\alpha_u = \alpha_v = \alpha_w = 0.2$; $\varepsilon = 0.001$. Итерационный процесс сходился за 5-13 итераций.

Квадратная в плане полая сферическая оболочка с шарнирно закрепленными краями с размером стороны $2a$ находится под действием равномерно распределенного нормального давления интенсивности q .

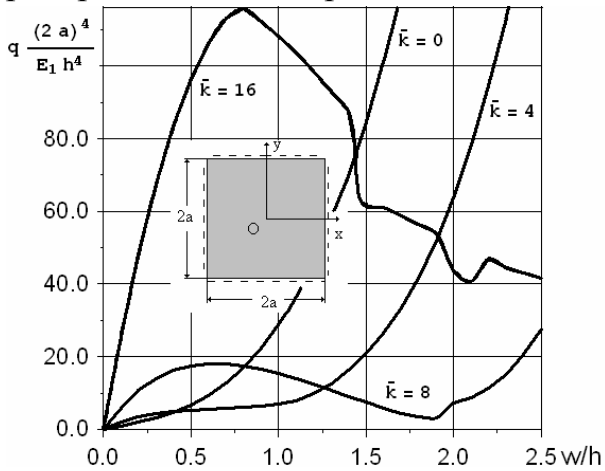


Рис. 14

Контур разбивался на 28 элементов. Длина стороны: $a = 0.1$ (м). Параметры релаксации принимались равными: $\alpha_u = \alpha_v = 0.3$; $\alpha_w = 0.1$ при точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Итерационный процесс сходился за 5-68 итераций. Механические характеристики материала приняты как для материала 1.

На рис. 14 приведены зависимости “максимальный прогиб - нагрузка” в центре оболочек с кривизнами

$\bar{k} = 0; 4; 8; 16$, где $\bar{k} = \frac{(2a)^2}{Rh}$. При $\bar{k} = 0; 4$ ха-

рактеристические кривые носят монотонный характер. При $\bar{k} = 8; 16$, как видно из рис. 14, оболочка теряет устойчивость хлопком.

Исследована возможность использования метода аналогии Саченкова А.В, позволяющего ряд результатов для изотропных пластин и оболочек свести к

расчету ортотропных. Показано, что представленная аналогия для рассмотренных задач дает погрешность по прогибам порядка 8 %.

Пологая сферическая оболочка (рис. 15) с жестко заделанными краями с размером стороны $2a$ находится под действием равномерно распределенного нормального давления интенсивности p .

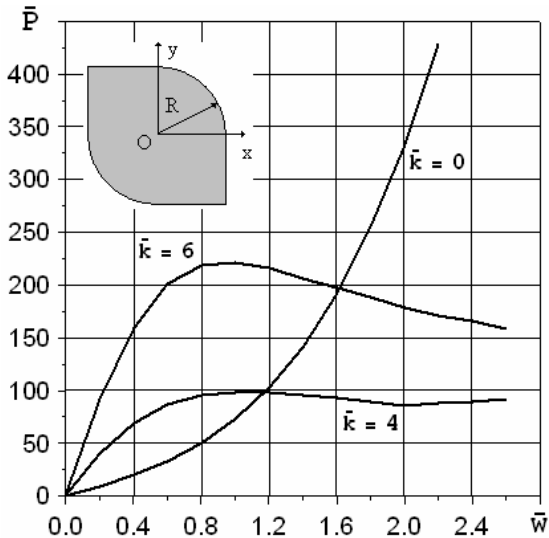


Рис. 15

Параметры кривизны и нагрузки примем в виде: $\bar{k} = k \frac{(2R)^2}{h} = 16$; $\bar{p} = p \frac{(2R)^4}{E_1 h^4}$;

$\bar{w} = \frac{w}{h}$; $R = 0.1$ (м). Контур разбивался на 42 элемента (элементы – прямые линии и дуги окружности). Механические характеристики материала приняты как для материала 1.

На рис. 15 представлены зависимости “максимальный прогиб - нагрузка” для трех случаев $\bar{k} = 0; 4; 6$, полученных при разбиении контура на 42 элемента. При решении принималось: $\alpha_u = \alpha_v = 0.5$; $\alpha_w = 0.1$; $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приводятся результаты решения задач линейного и нелинейного деформирования ортотропных пологих оболочек при действии распределенных и локальных нагрузок со сложной формой контура при различных граничных условиях.

Приведено исследование по выбору оптимальных параметров релаксации. Исследована сходимость решения с ростом числа граничных элементов, возможность ускорения сходимости итерационного процесса, увеличения диапазона кривизн. Исследовано влияние линейного по толщине температурного поля на величину критических нагрузок. Исследован изгиб прямолинейно- и криволинейно-ортотропных оболочек при варьировании направления максимальной жесткости.

На основе обобщения предложенной методики были решены обратные нелинейные задачи изгиба (следуя Муштари Х.М. и Ганиеву Н.С. под обратной задачей будем понимать, например, следующую задачу: определить начальную форму срединной поверхности оболочки, которая под действием известной нагрузки принимает после деформации заданную форму) ортотропных пластин и пологих оболочек, а также линейная задача изгиба двухслойной пластины.

Заключение

1. Получены фундаментальные решения задач деформирования длинных цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига; фундаментальные решения задач изгиба ортотропных и лежащих на сложном упругом основании изотропных пластин; фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, которая является гибким днищем в сосуде; матрицы фундаментальных решений задачи о плосконапряженном состоянии ортотропной пластины и изгиба трансверсально-изотропной пластины; фундаментальные

решения изгиба двух- и трехслойных пластин; фундаментальные решения осесимметричного деформирования криволинейно-ортотропных сферической и конической оболочек вращения.

2. Получены интегральные уравнения непрямого МГЭ, разработан алгоритм и составлена программа для задач изгиба и плосконапряженного состояния ортотропных пластин, задачи изгиба лежащих на сложном упругом основании Пастернака-Власова изотропных пластин сложной формы, а также контактной задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера. Проведено аналитическое вычисление интегралов с особенностями типа Коши и Адамара.

3. Разработан алгоритм решения прямым и непрямым МГЭ линейных задач изгиба пластин и пологих цилиндрических панелей с учетом и без учета поперечного сдвига непрерывной и ступенчато-переменной жесткости, находящихся под действием термомеханического нагружения, основанный на применении соответствующих матриц фундаментальных решений.

4. Предложен итерационный процесс для решения непрямым МГЭ линейных и нелинейных задач деформирования ортотропных пологих оболочек произвольной формы при действии термомеханического нагружения, основанный на применении матрицы фундаментального решения плосконапряженного состояния и фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины.

5. Разработана методика решения обратных и многослойных задач на основе предложенного итерационного процесса.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

Публикация в рекомендованном ВАК издании:

1) Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании/ П.Г. Великанов // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика.- Т. 8, вып. 1. – 2008. – С. 36-42.

Публикации в других изданиях:

2) Грибов А.П. Матрица фундаментальных решений для плоского напряженного состояния ортотропной пластины/ А.П. Грибов, П.Г. Великанов// XXI Международная конференция. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. - СПб. 2005. – С. 78 –80.

3) Артюхин Ю.П. Непрямой метод граничных элементов для задачи температурного изгиба односвязных ортотропных пластин/ Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов // Сб. докладов конференции “Актуальные проблемы науки и образования”.- Зеленодольск. 2006.– С. 94 – 97.

4) Куканов Н.И. Температурный изгиб односвязных и многосвязных изотропных пластин непрямым методом граничных элементов/ Н.И. Куканов, П.Г. Великанов // Актуальные проблемы современной науки: Труды 2-го Международного форума. Естественные науки.- Ч. 1-3.- Самара: Изд-во СГТУ. 2006.– С. 178-183.

5) Артюхин Ю.П. Расчет непрямым методом граничных элементов задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на двухпараметрическом упругом основании/ Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов // Математическое моделирование и крае-

вые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием.- Ч. 1.- Самара: СГТУ. 2007.– С. 27-30.

6) Великанов П.Г. Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений/ П.Г. Великанов // Актуальные проблемы современной науки: Труды 3-го Международного форума. Естественные науки.- Ч. 3.- Самара: Изд-во СГТУ. 2007.– С. 15-19.

7) Великанов П.Г. Исследование изгиба НМГЭ многосвязных изотропных пластин, лежащих на упругом основании типа Винклера и находящихся под действием термомеханического нагружения/ П.Г. Великанов, С.А. Малкин, Н.И. Куканов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского.- Т. 36. Казанское математическое общество. “Лобачевские чтения - 2007”.- Казань: Изд-во Казанск. математич. общества, Изд-во КГУ, 2007. – С. 44-46.

8) Артюхин Ю.П. Решение задач нелинейного деформирования ортотропных пластин методом граничных элементов/ Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тезисы докладов XXII Международной конференции. - СПб. 2007. – С. 16-18.

9) Артюхин Ю.П. Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения/ Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Материалы Всероссийского семинара, посвященного столетию Аминова М.Ш. – Казань. 2008. – С. 22-23.

10) Артюхин Ю.П. Метод аналогии Саченкова А.В. и непрямой МГЭ в решении задачи о больших прогибах ортотропных пластин и пологих оболочек/ Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов // Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек: Материалы Международного семинара, посвященного памяти заслуженного деятеля науки ТАССР Саченкова А.В. – Казань. 2008.– С. 22-24.

Великанов Петр Геннадьевич

**РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать .2008. Формат 60x84/16.

Бумага писчая. Усл. печ. л. 1,16. Уч.- изд. л. 1,00.

Тираж 100 экз. Заказ

Типография КГУ . 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.