На правах рукописи

ВАЛОВИК Дмитрий Викторович

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ 2008

Работа выполнена на кафедре
математики и математического моделирования
Пензенского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Смирнов Юрий Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Ильинский Анатолий Серафимович;

доктор физико-математических наук, доцент
Карчевский Евгений Михайлович;

Ведущая организация: **Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), г. Москва**

Защита диссертации состоится 4 декабря 2008 г., в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова–Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова–Ленина.

Автореферат разослан «___» ____________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент **Е. К. Липачев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена решению нелинейной краевой задачи на собственные значения распространяющихся ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра.

Актуальность темы

Изучение задач распространения электромагнитных волн в нелинейных средах является актуальным в связи с тем, что эти явления находят широкое применение в физике плазмы, в современной микроэлектронике, в оптике, в лазерной технике. Кроме того, они представляют и самостоятельный математический интерес, поскольку такие задачи являются нелинейными краевыми задачами на собственные значения, общие методы решения которых недостаточно разработаны. Таким образом, прогресс в аналитическом исследовании подобных задач важен и с теоретической, и с практической точек зрения. Разработка численных методов для решения задач этого класса также является актуальной. Результаты аналитического исследования могут существенно помочь при разработке численных методов. Данное направление было и является предметом исследования многих авторов (В. П. Силин, П. Н. Елеонский, K. M. Leung, H. W. Shurmann, В. С. Серов, Ю. В. Шестопалов, Ю. Г. Смирнов).

Цель работы:

– исследование задачи распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра;

– формулировка краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн и исследование ее разрешимости;

– формулировки и доказательства теорем о существовании и локализации собственных значений краевой задачи, а также теорем о предельном переходе к случаю линейной среды в слое и о первом приближении для собственных значений относительно параметра нелинейности.

Научная новизна:

– впервые получено дисперсионное уравнение для задачи распространения электромагнитных ТМ-волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра. Введены понятия собственного значения и собственной функции для нелинейной краевой задачи;

– предложен метод сведения нелинейной краевой задачи на собственные значения к дисперсионному уравнению и доказана теорема об эквивалентности решений краевой задачи и решений дисперсионного уравнения;

– доказаны теоремы о существовании и локализации собственных значений краевой задачи на основе изучения дисперсионного уравнения, а также теоремы о предельном переходе к случаю линейной среды в слое и о первом приближении для собственных значений;

– с помощью дисперсионного уравнения приближенно вычислены собственные значения и собственные функции краевой задачи.

Практическая значимость

Большое практическое значение в представленной работе имеет полученное дисперсионное уравнение, анализ которого позволяет не только доказать существование решений краевой задачи (а значит и исходной задачи о распространении волн), но и исследовать свойства распространяющихся ТМ-волн в зависимости от различных параметров. Кроме того, полученное дисперсионное уравнение легко поддается численному решению на компьютере. Систему дифференциальных уравнений задачи также можно записать в виде, удобном для численных расчетов. Таким образом, имеется возможность вычислять не только собственные значения краевой задачи, но и собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, а следовательно, изучать структуру поля электромагнитной волны.

Реализация и внедрение полученных результатов

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и математического моделирования ПГУ: РФФИ 06-07-89063а.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

– Международной конференции «Days on diffraction» (Saint Petersburg, Russia, 2007);

– научном семинаре кафедры математики и математического моделирования Пензенского государственного университета (2008);

– научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова–Ленина (2008).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 8 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата, две работы – из списка журналов, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, содержащего 60 наименований. Работа изложена на 100 страницах машинописного текста, содержит 9 графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

Во введении приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты работы.

Первая глава

Эта глава посвящена постановке задачи для распространяющихся поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра. Из системы уравнений Максвелла выводится система дифференциальных уравнений, для которой в дальнейшем ставится краевая задача. В этой главе также находится алгебраический первый интеграл для указанной системы уравнений и доказывается формальная интегрируемость системы уравнений в квадратурах.

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой с нелинейностью типа Керра, расположенный между двумя полубесконечными полупространствами $x<0$ и $x>h$ в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 1). Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1 \ge \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \ge \varepsilon_0$, соответственно, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

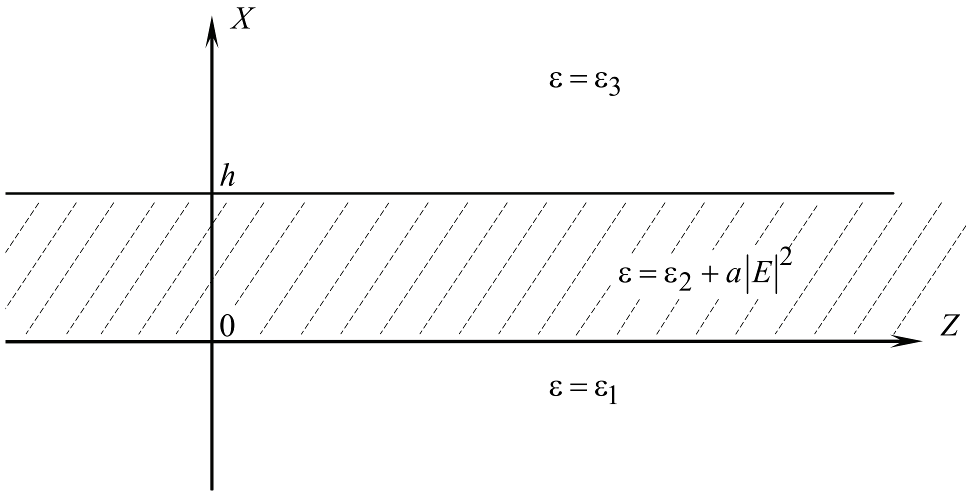

Рис. 1

Диэлектрическая проницаемость ε внутри слоя $0<x<h$ определяется по закону Керра:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2,$$

где $a>0$ и $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ – константы. Здесь ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε; a – коэффициент нелинейности.

Требуется отыскать собственные значения задачи, отвечающие поверхностным волнам, распространяющимся вдоль границ слоя $0 < x < h$, т.е. собственным волнам структуры. Мы будем искать волны, гармонически зависящие от третьей координаты, и называть их собственными волнами структуры. Следует иметь в виду, что система дифференциальных уравнений, описывающая задачу, является нелинейной как относительно входящих в нее функций $X(x)$ и $Z(x)$, соответствующих компонентам поля, так и относительно спектрального параметра γ. Краевые условия, вытекающие из условий сопряжения, также являются нелинейными относительно искомого спектрального параметра.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – комплексные амплитуды, удовлетворяющие условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \to \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Рассмотрим ТМ-поляризованные волны $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$, $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$. Обозначим $\dfrac{\partial}{\partial x} \equiv (\ldots)'$ и, предполагая, что компоненты поля гармонически зависят от *z*, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\gamma H_y(x) &= i\omega\varepsilon E_x(x); \\ H_y'(x) &= -i\omega\varepsilon E_z(x); \\ i\gamma E_x(x) - E_z'(x) &= i\omega\mu H_y(x), \end{aligned} \tag{2}$$

здесь γ – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной волны. Дальше будем считать γ действительным (так что $|\mathbf{E}|^2$ не зависит от *z*).

Вводя обозначения $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$ с $\mu = \mu_0$ и выполняя нормировку в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = kx\,,\ \frac{d}{dx} = k\frac{d}{d\tilde{x}}\,,\ \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k},\ \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}\ (j = 1, 2, 3),\ \tilde{a} = \frac{a}{\varepsilon_0}\,,$$

мы переобозначаем $E_z \equiv Z(\tilde{x})$ и $iE_x \equiv X(\tilde{x})$.

Опуская значок тильды, из системы (2) получаем следующую систему в нормализованной форме:

$$\begin{gathered}
-\frac{d^2 Z}{dx^2} + \gamma\frac{dX}{dx} = \varepsilon Z,\\
-\frac{dZ}{dx} + \gamma X = \frac{\varepsilon}{\gamma}X.
\end{gathered} \tag{3}$$

Будем искать те значения спектрального параметра γ, которые отвечают действительным решениям *X*, *Z* системы (3), где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1,\ x < 0,\\ \varepsilon_2 + a\left(X^2 + Z^2\right),\ 0 < x < h,\\ \varepsilon_3,\ x > h. \end{cases} \tag{4}$$

Также будем полагать, что функции $X(x)$, $Z(x)$ дифференцируемы в слое так, что

$$\begin{gathered}
X(x) \in C(-\infty;\ 0] \cap C[0;h] \cap [h;\ +\infty) \cap\\
\cap C^1(-\infty;0) \cap C^1(0;h) \cap C^1(h;+\infty);\\
Z(x) \in C(-\infty;+\infty) \cap C^2(-\infty;0) \cap C^2(0;h) \cap C^2(h;+\infty).
\end{gathered} \tag{5}$$

Считаем, что γ удовлетворяет условию $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$.

Решение уравнений Максвелла будем искать во всем пространстве.

Для полупространств $x < 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $x > h$, $\varepsilon = \varepsilon_3$ решение системы (3) не представляет трудностей.

Внутри слоя $0 < x < h$ система (3) становится нелинейной и допускает алгебраический первый интеграл:

$$X^2\left(2\left(\varepsilon_2 + aX^2 + aZ^2\right)\left(\varepsilon_2 + aX^2 + aZ^2 - \gamma^2\right) - a\gamma^2 X^2\right) + \\ + \gamma^2 Z^2\left(2\varepsilon_2 + aZ^2\right) = \frac{\gamma^6}{a}\left(C_1 - \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}\right)^2\right), \tag{6}$$

где C_1 – константа интегрирования.

Вторая глава

Во второй главе рассмотрена постановка краевой задачи (задачи сопряжения) для системы дифференциальных уравнений, полученной из системы (3).

Сформулируем для этой системы определение собственного значения и собственной функции.

Внутри слоя $0 < x < h$, $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2$ система имеет вид

$$\frac{dX}{dx} = \frac{Z}{\gamma}\frac{2a\left(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a\left(X^2 + Z^2\right)\right)X^2 + \gamma^2\left(\varepsilon_2 + a\left(X^2 + Z^2\right)\right)}{\varepsilon_2 + 3aX^2 + aZ^2}Z; \\ \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{\gamma}\left(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a\left(X^2 + Z^2\right)\right)X. \tag{7}$$

Условия сопряжения дают

$$\left[\varepsilon X\right]_{x=0} = 0,\ \left[\varepsilon X\right]_{x=h} = 0,\ \left[Z\right]_{x=0} = 0,\ \left[Z\right]_{x=h} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор первого порядка $\frac{d}{dx}$ и определим оператор D:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Пусть F и $G(F,\gamma)$ обозначают векторы-столбцы:

$$F\big(X(x), Z(x)\big) = \begin{pmatrix} X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$$

и

$$G(F,\gamma) = \begin{pmatrix} G_1(F,\gamma) \\ G_2(F,\gamma) \end{pmatrix},$$

где $X(x)$ и $Z(x)$ являются искомыми функциями, а G_1 и G_2 являются правыми частями уравнений системы (7). Число γ является спектральным параметром. Также будем рассматривать вектор-столбец $N(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$.

Перепишем задачу, используя введенные обозначения.

Для полупространства $x < 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 X \\ Z \end{pmatrix}$ получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \tag{9}$$

Внутри слоя $0 < x < h$, $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2$, $N = \begin{pmatrix} \left(\varepsilon_2 + a\left(X^2 + Z^2\right)\right) X \\ Z \end{pmatrix}$, и система принимает вид

$$L(F,\gamma) \equiv DF - G(F,\gamma) = 0. \tag{10}$$

Для полупространства $x > h$, $\varepsilon = \varepsilon_3$, $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 X \\ Z \end{pmatrix}$ получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \tag{11}$$

Условия сопряжения (8) приводят к условиям

$$\left[N(x)\right]_{x=0} = 0,\ \left[N(x)\right]_{x=h} = 0, \tag{12}$$

где $\left[f(x)\right]_{x=x_0} = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, что для вектора обозначает переход к пределу по каждой компоненте вектора.

Сформулируем краевую задачу (задачу сопряжения). Требуется найти ненулевой вектор F и соответствующие собственные значения γ, такие, что F удовлетворяет уравнениям (9)–(11) и условиям сопряжения (12). Кроме того, компоненты вектора F удовлетворяют условию

$$X(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ и } Z(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x|\to\infty. \tag{13}$$

Определение 1. Число $\gamma=\gamma_0$, при котором существует ненулевое решение F задачи (9)–(11) при условиях (12) и (13), будем называть собственным значением задачи. Решение F, которое соответствует собственному значению, будем называть собственным вектором задачи, а компоненты $X(x)$ и $Z(x)$ вектора F – собственными функциями.

Найденное дисперсионное уравнение имеет вид

$$-\int\limits_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}} f d\eta+(N+1)T=h, \tag{14}$$

где $f\equiv f(\eta)=\dfrac{\tau}{\gamma^2\tau^2+\eta^2(\tau-1)}$, $T=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f d\eta$,

$$\tau(x)=\frac{\varepsilon_2+a\left(X^2(x)+Z^2(x)\right)}{\gamma^2},\ \eta(x)=\gamma\tau(x)\frac{X(x)}{Z(x)} \tag{15}$$

и $N\ge 0$ является целым числом. Кроме того, функции τ и η связаны алгебраическим уравнением (первым интегралом) $\eta^2=\dfrac{\gamma^2\tau^2\left(\tau^2-C_1\right)}{C_1+3\tau^2-2\tau^3-2\tau(2-\tau)\tau_0}$, где C_1 – постоянная интегрирования. Легко показать, что все необходимые интегралы сходятся.

Постоянная интегрирования C_1 вычисляется из условий сопряжения и равна

$$C_1 = \tau^2(h) - \frac{2\varepsilon_3^2 \tau(h)\left(2-\tau(h)\right)\left(\tau(h)-\tau_0\right)}{\varepsilon_3^2 + \gamma^2\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)\tau^2(h)},$$

где $\tau(h) = \dfrac{H_y^{(h)}}{\gamma X(h)}$, $H_y^{(h)} = -E_z^{(h)} \dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}$, $E_z^{(h)}$ – начальное условие (падающее поле), а $X(h)$ является корнем уравнения третьей степени:

$$X^3(h) + \frac{\varepsilon_2 + a\left(E_z^{(h)}\right)^2}{a} X(h) - \frac{\gamma H_y^{(h)}}{a} = 0:$$

$$X(h) = \left(\frac{\gamma H_y^{(h)}}{2a} + \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{\varepsilon_2}{a} + \left(E_z^{(h)}\right)^2\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2\left(H_y^{(h)}\right)^2}\right)^{1/3} +$$

$$+\left(\frac{\gamma H_y^{(h)}}{2a} - \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{\varepsilon_2}{a} + \left(E_z^{(h)}\right)^2\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2\left(H_y^{(h)}\right)^2}\right)^{1/3}.$$

Формула (14) есть дисперсионное уравнение, справедливое для любого h. Нужно отметить, что когда $N \neq 0$, то возникает несколько уравнений при различных значениях N. Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Все полученные γ будут составлять множество постоянных распространения, на которых, и только на которых, будут распространяться волны в слое при данном h. На самом деле N будет принимать все целые значения от 0 до $\left[\dfrac{h}{T}\right]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Теорема 1. Краевая задача на собственные значения (9)–(11) с условиями (12) и (13) имеет решение – собственное значение, тогда и только тогда, когда это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (14).

Дисперсионное уравнение в случае линейной среды в слое выглядит следующим образом:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}\left(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}+\varepsilon_3\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}\right)}{\varepsilon_1\varepsilon_3\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)-\varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}\right)+ \\ +\left(N+1\right)\pi=h\sqrt{\varepsilon_2-\gamma^2}. \tag{16}$$

Тогда справедлива

Теорема 2. Пусть $\gamma=\gamma\left(a\right)$ является решением краевой задачи на собственные значения (9)–(11) с условиями (12) и (13).

Тогда

$$\gamma\left(0\right)=\lim_{a\to 0}\gamma\left(a\right)$$

является решением дисперсионного уравнения (16).

Используя дисперсионное уравнение, можно найти первое приближение к собственным числам.

Пусть

$$J\left(a,\gamma\right)=h, \tag{17}$$

где $J\left(a,\gamma\right)$ – левая часть уравнения (14).

Выражение (17) определяет неявную функцию $\gamma\equiv\gamma\left(a\right)$. Поскольку эта функция является дифференцируемой в окрестности точки $a=0$, ее разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\gamma\equiv\gamma\left(a\right)=\gamma\left(0\right)+\left.\frac{d\gamma\left(a\right)}{da}\right|_{a=0}a+O\left(a^2\right)=\gamma_0+\gamma_1 a+O\left(a^2\right), \tag{18}$$

где γ_0 является решением уравнения (16), рассматриваемого как уравнение относительно γ. И имеет место

Теорема 3. Пусть краевая задача на собственные значения (9)–(11) с условиями (12) и (13) имеет решения $\gamma=\gamma\left(a\right)$.

Тогда

$$\gamma(a) = \gamma(0) + \gamma_1 a + O\left(a^2\right), \tag{19}$$

где $\gamma(0)$ – решение дисперсионного уравнения (16), а γ_1 выражается следующей формулой:

$$\gamma_1 \equiv \left.\frac{d\gamma(a)}{da}\right|_{a=0} = \frac{\left(\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)+\varepsilon_3^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\right)\left(E_z^{(h)}\right)^2}{8\gamma\varepsilon_2^3\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)}\frac{P_1}{Q_1}, \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} P_1 = 2\varepsilon_2^2\left(\varepsilon_2-2\gamma^2\right)\times \\ \times\left(-\frac{\varepsilon_1\sqrt{\left(\gamma^2-\varepsilon_1\right)^3}}{\left(\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_1\right)+\varepsilon_1^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\right)^2}-\frac{\varepsilon_3\sqrt{\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)^3}}{\left(\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)+\varepsilon_3^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\right)^2}\right)+ \\ +\left(3\varepsilon_2+2\gamma^2\right)\left(\varepsilon_2-2\gamma^2\right)\times \\ \times\left(-\frac{\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}{\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_1\right)+\varepsilon_1^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)}-\frac{\varepsilon_3\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}{\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)+\varepsilon_3^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)}\right)+ \\ +\frac{3\varepsilon_2^2-4\gamma^2\varepsilon_2+4\gamma^4}{\varepsilon_2}h. \end{gathered} \tag{21}$$

и

$$\begin{gathered} Q_1 = \frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}\left(\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_1\right)+\varepsilon_1^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\right)}+ \\ +\frac{\varepsilon_3\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)}{\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2\left(\gamma^2-\varepsilon_3\right)+\varepsilon_3^2\left(\varepsilon_2-\gamma^2\right)\right)}+\frac{h}{\varepsilon_2}. \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, дисперсионное уравнение позволяет вычислять приближенные значения собственных чисел.

На основе полученных результатов, сформулируем теоремы о существовании и локализации собственных значений рассматриваемой краевой задачи. Пусть функция $J \equiv J(a, \gamma, N)$ обозначает левую часть уравнения (14). Отметим, что $\inf\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, N) > 0$, а $\sup\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, N) < \infty$ для любого целого неотрицательного конечного N. Более того, из самого вида дисперсионного уравнения следует, что при уменьшении N значения нижней и верхней границ уменьшаются, а при увеличении N – увеличиваются.

Теорема 4. Пусть

$$h_1^{(0)} = \inf\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, 0),\ h_2^{(0)} = \sup\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, 0),$$

тогда для любого $h \in \left(h_1^{(0)}, h_2^{(0)} \right)$ существует, по крайней мере, одно собственное значение задачи (9)–(11) с условиями (12) и (13).

Теорема 5. Пусть

$$h_1^{(k)} = \inf\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k),\ h_2^{(k)} = \sup\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k),$$

и пусть $h \in \left(h_1^{(k)}, h_2^{(k)} \right)$ для всех $k = \overline{0, N}$, тогда существует, по крайней мере, $N+1$ собственных значений задачи (9)–(11) с условиями (12) и (13).

Теорема 6. Пусть

$$h_1^{(k)} = \inf\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k),\ h_2^{(k)} = \sup\limits_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k)$$

и h таково, что найдутся такие i и j, что $h_2^{(i)} < h$, а $h_2^{(i+1)} > h$ и $h_1^{(j)} < h$, а $h_1^{(j+1)} > h$, тогда существует, по крайней мере, $j - i$ собственных значений задачи (9)–(11) с условиями (12) и (13).

Рассмотренный метод применим к аналогичной задаче в случае анизотропного нелинейного слоя. Для такого случая рассмотрены постановка задачи, решение системы дифференциальных уравнений, условия сопряжения и выведено дисперсионное уравнение для собственных значений.

Третья глава

Данная глава посвящена численным результатам и обсуждению некоторых свойств дисперсионного уравнения. Проведено сравнение между решениями дисперсионного уравнения в случае линейной среды в слое, нелинейного дисперсионного уравнения, а также первого приближения для собственных значений. Результаты расчетов проиллюстрированы графиками соответствующих зависимостей. Также проведены расчеты поведения решений нелинейного дисперсионного уравнения при различных значениях параметров. Проведено вычисление собственных значений в зависимости от толщины слоя, коэффициента нелинейности и начальных данных. Кроме того, рассматривается случай, когда краевая задача имеет три собственных значения: вычислены собственные значения и построены графики собственных функций для каждого из них.

На рис. 2 представлены графики решений дисперсионного уравнения как функции h. Сплошная линия характеризует решение дисперсионного уравнения для случая линейной среды в слое (16), штриховая – расчеты по первому приближению (20), а пунктирная – решения дисперсионного уравнения для случая нелинейной среды в слое (14). Расчеты проведены при следующих значениях параметров и начальных данных: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_3 = 9$, $E_z^{(h)} = 1$. В случае первого приближения и дисперсионного уравнения в случае нелинейной среды в слое a было взято равным 0,1.

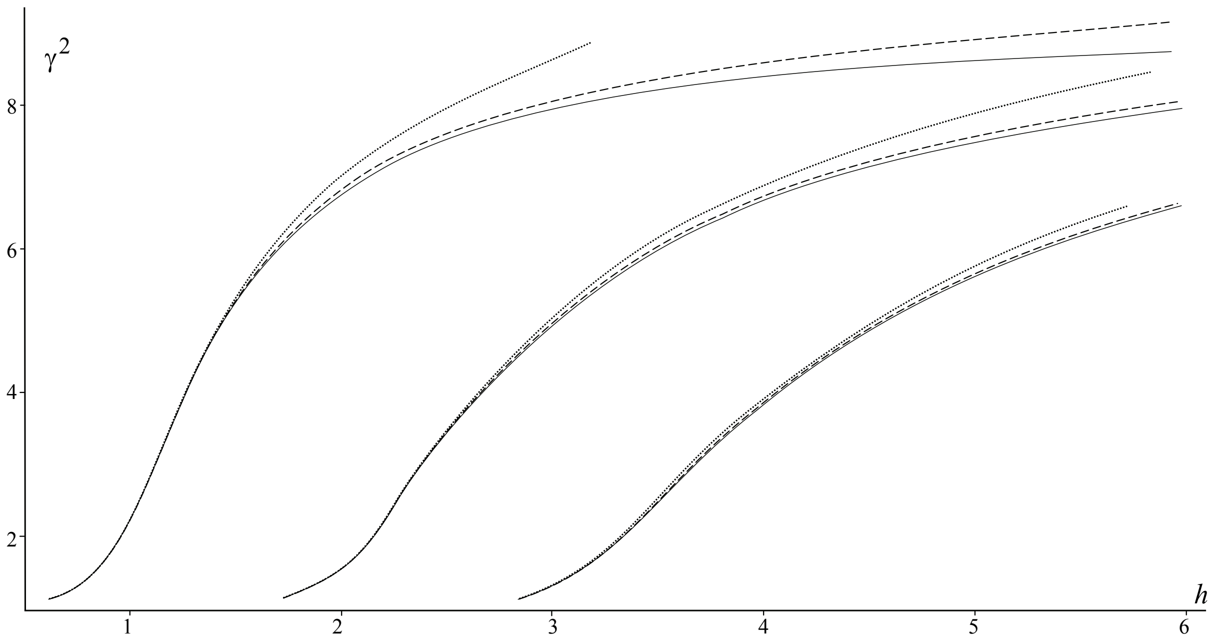

Рис. 2

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Впервые получено дисперсионное уравнение, позволяющее делать заключение о существовании решений краевой задачи на собственные значения. Доказаны теоремы о существовании и локализации собственных значений нелинейной краевой задачи.

2. Решение краевой задачи на собственные значения распространяющихся TM-волн в нелинейном слое было проведено методом сведения ее к эквивалентному дисперсионному уравнению. Доказана теорема эквивалентности решения краевой задачи на собственные значения и дисперсионного уравнения.

3. Найдена асимптотика первого порядка для собственных значений в зависимости от коэффициента нелинейности. Выполнены численные расчеты собственных значений, соответствующих им собственных функций краевой задачи и проведено сравнение с результатами расчетов по первому приближению.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Валовик, Д. В. Электромагнитная задача дифракции ТМ-волн на нелинейном полубесконечном слое / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 2. – С. 19–25.

2. Валовик, Д. В. Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 35–45.

3. Валовик, Д. В. Нелинейная задача на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 10. – С. 70–74.

4. Валовик, Д. В. Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 8. – С. 934–940.

5. Валовик, Д. В. Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном анизотропном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 51–59.

6. Валовик, Д. В. О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. ??. – № 12. – С. ??–??.

7. Валовик Д. В. О существовании решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 86–94.

8. Valovik D. V. Analysis of the TM-wave propagation in nonlinear dielectric layer planar waveguides with Kerr nonlinearity / D. V. Valovik, Yu. G. Smirnov // Days on diffraction: International Conference Saint Petersburg, Russia, 29 May–1 June, 2007. – P. 81.

ВАЛОВИК Дмитрий Викторович

Нелинейная краевая задача
на собственные значения
для системы дифференциальных уравнений
распространяющихся электромагнитных
ТМ-волн в нелинейном слое

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения

Редактор Ю. В. Коломиец
Технический редактор А. Г. Темникова

Подписано в печать 12.08.08. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,16
Заказ № 1213. Тираж 100.

Отпечатано в Информационно-издательском центре ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33

центр