На правах рукописи

Хисматуллин Айрат Шамилевич

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ B - ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико – математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа
математического факультета
Татарского государственного гуманитарно - педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Мухлисов Фоат Габдуллович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Зарубин Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук,
доцент
Бурмистров Борис Николаевич

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится "__4__" __декабря__ г. в "______"часов на заседании диссертационного совета Д.212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, Ул. Профессора Нужина, д. 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. Н. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "____" октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф. - м. н., доцент Липачев Е. К.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Вырождающиеся и сингулярные эллиптические уравнения представляют собой один из наиболее важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Необходимость изучения таких уравнений обусловлена многочисленными их приложениями в газовой динамике, теории оболочек, теории упругости, механике сплошной среды и др. К числу первых в этой области относится работа М. В. Келдыша (1951), где впервые указаны случаи, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий. После М. В. Келдыша постановки краевых задач были распространены на широкие классы уравнений С. М. Никольским, А. В. Бицадзе, Л. Д. Кудрявцевым, И. А. Киприяновым, П. И. Лизоркиным, М. И. Вишиком, В. В. Грушиным, Х. Трибелем, Ф. Г. Мухлисовым и многими другими. Некоторые результаты в данной области отражены в монографиях А. В. Бицадзе, М. М. Смирнова и Х. Трибеля, там же имеется обширная библиография.

Одним из интенсивно развивающихся направлений здесь является исследование краевых задач для эллиптических уравнений с оператором Бесселя.

Уравнение эллиптического типа, по одной или нескольким переменным которых действуют операторы Бесселя и их решения ищутся в классе четных по этим переменным функций, И. А. Киприяновым были названы B - эллиптическими.

Первые работы по B - эллиптическим уравнениям относятся к уравнению вида

$$\triangle_B u = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + B_{x_p} u = 0, \tag{1}$$

где $B_{x_p} = x_p^{-k} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x^k \frac{\partial}{\partial x_p} \right)$ - оператор Бесселя, $k > 0$ - постоянная.

В 1948 г. А. Вайнштейном были построены фундаментальные решения уравнения (1) при $p = 2$ и изучены их свойства. В этом же году И. Н. Векуа доказал корректность постановки задачи Дирихле для уравнения (1) при $p = 2$ и $0 < k < 1$ в полуплоскости $y > 0$. Эта работа послужила основой для дальнейших исследований М. Н. Олевского, С. П. Пулькина, В. Ф. Волкодавова, Ю. П. Кривенкова и др.

Период наиболее интенсивного развития теории B - эллиптических уравнений приходится на последние три десятилетия. Начало этому положила фундаментальная работа И. А. Киприянова (1967), где была создана теория весовых пространств, которая впоследствии была применена к изучению краевых задач для B - эллиптических уравнений с граничными условиями на нехарактеристической части границы. На характеристической части ставились однородные условия типа условий четности.

Далее, в работах Н. Р. Раджабова построены поверхностные потенциалы простого и двойного слоев и применены к исследованию краевых задач для уравнения (1) при условиях, когда нехарактеристическая часть границы есть поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. А. Ю. Сазоновым эти результаты обобщены на общие линейные B - эллиптические уравнения с переменными коэффициентами при тех же ограничениях на нехарактеристическую часть границы области.

Число опубликованных к настоящему времени работ по вышеуказанным двум направлениям значительно.

Вопросы же о существовании и единственности решения краевых задач для вырождающихся B - эллиптических уравнений до последнего времени оставались открытыми.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач для вырождающихся B - эллиптических уравнений

$$T_B(u) = y^m B_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

где $m > 0, k > 0$;

$$E_B(u) = B_x u + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

где $m > 4$, $k > \frac{m}{m-2}$;

$$L_B(u) = B_x u + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{4}$$

где $0 < \alpha < 1$, $k > 0$.

Цель работы. Постановка краевых задач для уравнений (2) - (4) и доказательство существования их единственного решения.

Методы исследования. В работе применяются результаты и методы классической теории потенциала, теории функции действительной переменной, дифференциальных и интегральных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Построены фундаментальные решения вырождающихся B - эллиптических уравнений (2) - (4).

2. Изучены основные свойства решений этих уравнений и, в частности, принцип максимума и их поведение при $y \to 0$.

3. Даны постановки краевых задач для вышеуказанных уравнений и доказаны теоремы о единственности их решения.

4. Построены потенциалы простого и двойного слоев и исследованы их свойства и, в частности, доказаны теоремы о предельных значениях потенциала двойного слоя и конормальной производной потенциала простого слоя на границе области.

5. Доказаны теоремы о существовании решения краевых задач для вышеуказанных уравнений методом потенциалов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для многомерных вырождающихся эллиптических уравнений и B - эллиптических уравнений и найти приложение в осесимметрических задачах теории потенциала, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Апробация работы. Данные результаты обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно - педагогического университета (руководитель – Мухлисов Ф. Г.). Основные результаты работы докладывались на научной конференции, посвященной 125-летию Казанского государственного педагогического университета (Казань, 2001); третьей Всероссийской молодежной научной школы - конференции "Лобачевские чтения - 2003"(Казань, 2003); Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики"(Казань, 2004); пятой Международной конференции молодых ученых и студентов "Актуальные проблемы современной науки"(Казань, 2004); семинаре, посвященном 60-летию профессора В.Н. Врагова (Новосибирск, 2005); Четвертой молодежной научной школы-конференции (Казань, 2005); третьей Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2006); на научно-практических конференциях на кафедре математического анализа ТГГПУ и при кафедре дифференциальных уравнений КГУ; Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, Россия, 5-12 октября 2008).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [9].

Структура и объем работы. Диссертация содержит 107 страниц и состоит из введения, трех глав, разбитых на 16 параграфов и списка литературы из 51 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введение дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко охарактеризованы результаты автора, изложенные в последующих главах.

В первой главе доказывается существование единственного решения основных краевых задач для вырождающегося B - эллиптического уравнения (2).

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (2), которое имеет логарифмическую особенность.

В §2 дается интегральное представление решения уравнения (2), на основе этого представления изучаются его свойства и, в частности, доказывается теорема о принципе максимума.

В §3 дается постановка основных краевых задач для уравнения (2) и доказывается единственность их решения. Рассматриваются следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D^{+}}\right)\cap C_B^2\left(D^{+}\right);$$

$$T_B\left(u\right)=0,\quad \left(x,y\right)\in D^{+};$$

$$u(x,y)=o(1) \text{ при } y\to 0;$$

$$u|_{\Gamma^{+}}=\varphi\left(\xi,\eta\right),\quad \varphi\left(\xi,\eta\right)\in C_0\left(\Gamma^{+}\right),$$

где $C_m(\Gamma^{+})$ - множество функций $\varphi\left(\xi,\eta\right)$ из $C\left(\Gamma^{+}\right)$, удовлетворяющих условию $\varphi\left(\xi,\eta\right)=o(\eta^m)$ при $\eta\to 0$, $C_B^2\left(D^{+}\right)$ - множество четных по x функций из $C^2\left(D^{+}\right)$.

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D^+}_e\right)\cap C_B^2\left(D_e^+\right);$$

$$T_B\left(u\right)=0,\quad \left(x,y\right)\in D_e^+;$$

$$u=o(1)\text{ при }y\to 0;$$

$$u=o\left(1\right)\text{ при }r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty;$$

$$u|_{\Gamma^+}=\psi\left(\xi,\eta\right),\quad \psi\left(\xi,\eta\right)\in C_0\left(\Gamma^+\right).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right)\in C_B^2\left(D^+\right)\cap C^1\left(D^+\cup\Gamma^+\cup\Gamma_0\right)\cap C\left(\bar{D}^+\right);$$

$$T_B\left(u\right)=0,\quad \left(x,y\right)\in D^+;$$

$$u=o(1)\text{ при }y\to 0;$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma^+}=f\left(\xi,\eta\right),\quad f\left(\xi,\eta\right)\in C_0\left(\Gamma^+\right),$$

где $A\left[\right]=y^m cos(n,x)\frac{\partial}{\partial x}+cos(n,y)\frac{\partial}{\partial y}$ - конормальная производная, n - внешняя нормаль к границе Γ^+.

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right)\in C^1\left(D_e^+\cup\Gamma^+\cup\Gamma_{oe}\right)\cap C_B^2\left(D_e^+\right)\cap C\left(\bar{D}_e^+\right);$$

$$T_B\left(u\right)=0,\quad \left(x,y\right)\in D_e^+;$$

$$u=O\left(\rho_0^{-(k+\alpha_1)}\right),\quad A\left[u\right]=O\left(\rho_0^{-(k+1+\alpha_2)}\right)\text{при}\quad r\to\infty,$$

$$\text{где }\rho_0=\sqrt{x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}},0<\alpha_j<1,j=1,2;$$

$$u=o(1)\text{ при }y\to 0;$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma^+} = g\left(\xi,\eta\right), \quad g\left(\xi,\eta\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right).$$

В §4 с помощью фундаментального решения $\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$ уравнения (2) строятся потенциалы простого и двойного слоев:

$$v\left(x,y\right) = \int\limits_{\Gamma^+} \mu\left(\xi,\eta\right)\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\xi^k d\Gamma^+,$$

$$w\left(x,y\right) = \int\limits_{\Gamma^+} \nu\left(\xi,\eta\right) A_p\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^k d\Gamma^+.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциала двойного слоя и конормальной производной потенциала простого слоя на границе Γ^+ области D^+.

Теорема 1. *Пусть Γ^+ – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если $\nu\left(\xi,\eta\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right)$, то для потенциала двойного слоя справедливы следующие предельные соотношения:*

$$w_i\left(x_0,y_0\right) = -\frac{1}{2}\nu\left(x_0,y_0\right) + \overline{w\left(x_0,y_0\right)},$$

$$w_e\left(x_0,y_0\right) = \frac{1}{2}\nu\left(x_0,y_0\right) + \overline{w\left(x_0,y_0\right)},$$

где $w_i\left(x_0,y_0\right)$ и $w_e\left(x_0,y_0\right)$ означают предельные значения потенциала в точке $\left(x_0,y_0\right) \in \Gamma^+$ при $\left(x,y\right) \to \left(x_0,y_0\right)$ соответственно изнутри и извне Γ^+, а $\overline{w\left(x_0,y_0\right)}$ - прямое значение потенциала $w\left(x,y\right)$ на Γ^+.

Теорема 2. *Пусть Γ^+ – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если $\mu \in C_0\left(\Gamma^+\right)$, то для конормальной производной потенциала простого слоя справедливы следующие предельные соотношения:*

$$A_{M_0}\left[v\left(x_0,y_0\right)\right]_i = \frac{1}{2}\mu\left(x_0,y_0\right) + \overline{A_{M_0}\left[v\left(x_0,y_0\right)\right]},$$

$$A_{M_0}\left[v\left(x_0, y_0\right)\right]_e = -\frac{1}{2}\mu\left(x_0, y_0\right) + \overline{A_{M_0}\left[v\left(x_0, y_0\right)\right]},$$

где $A_{M_0}\left[v\left(x_0, y_0\right)\right]_i$ *и* $A_{M_0}\left[v\left(x_0, y_0\right)\right]_e$ *означают предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $M_0\left(x_0, y_0\right)$ *при* $(x, y) \to \left(x_0, y_0\right)$ *соответственно изнутри и извне* Γ^+, *а* $\overline{A_{M_0}\left[v\left(x_0, y_0\right)\right]}$ *- прямое значение конормальной производной этого потенциала на* Γ^+.

В §5 краевые задачи для уравнения (2) сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

Если интегральные уравнения краевых задач разрешимы, то разрешимы и сами краевые задачи. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 3. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $g\left(x, y\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right)$ *разрешима задача* N_e *и ее решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 4. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $\varphi\left(x, y\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right)$ *разрешима задача* D_i*и это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 5. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $\psi\left(x, y\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right)$ *разрешима задача* D_e *и это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 6. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $f\left(x, y\right) \in C_0\left(\Gamma^+\right)$ *разрешима задача* N_i *и решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

Во второй главе разбираются вопросы о существовании единственного решения краевых задач для вырождающегося B - эллиптического уравнения второго рода (3)

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (3).

В §2 дается интегральное представление решения этого уравнения.

В §3 изучаются свойства решения уравнения (3) и, в частности, доказывается, что любое решение уравнения (3) в области D^+ из $C^1\left(\bar{D}^+\right) \cap C_B^2\left(D^+\right)$ с граничным данным из $C_m(\Gamma^+)$ принадлежит к классу $C_m(\bar{D}^+)$ при любом $m > 4$, где $C_m(\bar{D}^+)$ - множество функций $u\left(x,y\right)$ из $C(\bar{D}^+)$, удовлетворяющих условию $u\left(x,y\right) = o\left(y^m\right)$ при $y \to 0$.

В §4 дается постановка основных краевых задач для уравнения (3) и доказывается единственность их решения.

Рассматриваются следующие краевые задачи.

Внутренняя задача DE (Задача DE_i). Найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right) \in C_m\left(\bar{D}^+\right) \cap C_B^2\left(D^+\right);$$

$$E_B\left(u\right) = 0, \quad \left(x,y\right) \in D^+;$$

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi\left(\xi,\eta\right), \quad \varphi\left(\xi,\eta\right) \in C_m\left(\Gamma^+\right).$$

Внешняя задача DE (Задача DE_e). Найти функцию $u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\left(x,y\right) \in C_m\left(\bar{D}_e^+\right) \cap C_B^2\left(D_e^+\right);$$

$$E_B\left(u\right) = 0, \quad \left(x,y\right) \in D_e^+;$$

$$u = o\left(1\right) \text{ при } \rho_0 \to \infty,$$

где $\rho_0^2 = x^2 + \frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$;

$$u|_{\Gamma^+} = \psi\left(\xi,\eta\right), \quad \psi\left(\xi,\eta\right) \in C_m\left(\Gamma^+\right).$$

Внутренняя задача NE (Задача NE_i). Найти функцию $u\,(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\,(x,y) \in C_B^2\left(D^+\right) \cap C^1\left(D^+ \cup \Gamma^+\right) \cap C_m\left(\bar{D}^+\right);$$

$$E_B\,(u) = 0, \quad (x,y) \in D^+;$$

$$A\,[u]|_{\Gamma^+} = f\,(\xi,\eta)\,, \quad f\,(\xi,\eta) \in C_m\left(\Gamma^+\right).$$

где $A\,[] = y^{-m} cos(n,x)\frac{\partial}{\partial x} + cos(n,y)\frac{\partial}{\partial y}$ - конормальная производная, n - единичный вектор внешней нормали к границе Γ^+.

Внешняя задача NE (Задача NE_e). Найти функцию $u\,(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\,(x,y) \in C^1\left(D_e^+ \cup \Gamma^+\right) \cap C_B^2\left(D_e^+\right) \cap C_m\left(\bar{D}_e^+\right);$$

$$E_B\,(u) = 0, \quad (x,y) \in D_e^+;$$

$$u = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{m}{2(m-2)}\right)}\right) \text{при} \quad \rho_0 \to \infty;$$

$$A\,[u]|_{\Gamma^+} = g\,(\xi,\eta)\,, \quad g\,(\xi,\eta) \in C_m\left(\Gamma^+\right).$$

В §5 вводятся потенциалы простого и двойного слоев:

$$v\,(x,y) = \int\limits_{\Gamma^+} \mu\,(\xi,\eta)\,\varepsilon\,(\xi,\eta;x,y)\,\xi^k d\Gamma^+,$$

$$w\,(x,y) = \int\limits_{\Gamma^+} \nu\,(\xi,\eta)\,A_p\left[\varepsilon\,(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k d\Gamma^+.$$

В §1 было доказано, что фундаментальное решение имеет логарифмическую особенность. Поэтому потенциалы на границе Γ^+ ведут себя так же, как логарифмические потенциалы, т. е. имеют место следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть Γ^+ - кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если $\nu\,(\xi,\eta) \in C_m\,(\Gamma^+)$, то для потенциала двойного слоя справедливы предельные соотношения*

$$w_i\,(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}\nu\,(x_0,y_0) + \overline{w\,(x_0,y_0)},$$

$$w_e(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\nu(x_0,y_0)+\overline{w(x_0,y_0)},$$

где $w_i(x_0,y_0)$ *и* $w_e(x_0,y_0)$ *означают предельные значения потенциала* $w(x,y)$ *в точке* $(x_0,y_0)\in\Gamma^+$ *при* $(x,y)\to(x_0,y_0)$ *соответственно изнутри и извне* Γ^+, *а* $\overline{w(x_0,y_0)}$ *- прямое значение потенциала* $w(x,y)$ *в точке* (x_0,y_0).

Теорема 8. *Пусть* Γ^+*- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если плотность* $\mu(\xi,\eta)\in C_m(\Gamma^+)$, *то предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя выражаются формулами*

$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i=\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0)+\overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$

$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e=-\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0)+\overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$

где $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i$ *и* $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e$ *означают предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $M_0(x_0,y_0)\in\Gamma^+$ *при* $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ *соответственно изнутри и извне* Γ^+, *а* $\overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]}$ *- прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.*

В §6 задачи DE_i, DE_e, NE_i и NE_e сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 9. *Если* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $g(x,y)\in C_m(\Gamma^+)$ *разрешима задача* NE_e *и ее решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 10. *Если* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $\varphi(x,y)\in C_m(\Gamma^+)$ *разрешима задача* DE_i*и это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 11. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $\psi(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ *разрешима задача* DE_e *и это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 12. *Ėсли* Γ^+ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при* $f(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ *разрешима задача* NE_i *и решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

В третьей главе исследуются основные краевые задачи для вырождающегося самосопряженного $B-$ эллиптического уравнения (4).

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (4) и изучаются его свойства.

В §2 дается интегральное представление решения уравнения (4) и на основе этого представления доказывается теорема о принципе максимума для решения этого уравнения.

В §3 дается постановка краевых задач для уравнения (4) и доказывается единственность их решения.

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C\left(\bar{D^+}\right) \cap C_B^2\left(D^+\right);$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D^+;$$

$$u = o(1) \text{ при } y \to 0;$$

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(\xi,\eta), \quad \varphi(\xi,\eta) \in C_0\left(\Gamma^+\right).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C\left(\bar{D^+}_e\right) \cap C_B^2\left(D_e^+\right);$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D_e^+;$$

$$u = o(1) \text{ при } y \to 0;$$

$$u = o\left(1\right) \text{ при } r \to \infty;$$

$$u|_{\Gamma^{+}} = \psi\left(\xi, \eta\right), \quad \psi\left(\xi, \eta\right) \in C_0\left(\Gamma^{+}\right).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Найти функцию $u\left(x, y\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\left(x, y\right) \in C_B^2\left(D^{+}\right) \cap C^1\left(D^{+} \cup \Gamma^{+}\right) \cap C\left(\bar{D}^{+}\right);$$

$$L_B\left(u\right) = 0, \quad \left(x, y\right) \in D^{+};$$

$$u = o(1) \text{ при } y \to 0;$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma^{+}} = f\left(\xi, \eta\right), \quad f\left(\xi, \eta\right) \in C_0\left(\Gamma^{+}\right).$$

где $A\left[\right] = cos(n, x)\frac{\partial}{\partial x} + y^{\alpha} cos(n, y)\frac{\partial}{\partial y}$ - конормальная производная, $n-$ единичный вектор внешней нормали к границе Γ^{+}.

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Найти функцию $u\left(x, y\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\left(x, y\right) \in C^1\left(D_e^{+} \cup \Gamma^{+}\right) \cap C_B^2\left(D_e^{+}\right) \cap C\left(\bar{D}_e^{+}\right);$$

$$L_B\left(u\right) = 0, \quad \left(x, y\right) \in D_e^{+};$$

$$u = O\left(r^{-k}\right) \quad \text{при} \quad r = \to \infty;$$

$$u = o(1) \text{ при } y \to 0;$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma^{+}} = g\left(\xi, \eta\right), \quad g\left(\xi, \eta\right) \in C_0\left(\Gamma^{+}\right).$$

В §4 вводятся потенциалы простого и двойного слоев:

$$v\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma^{+}} \mu\left(\xi, \eta\right) \varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right) \xi^k d\Gamma^{+},$$

$$w\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma^{+}} \nu\left(\xi, \eta\right) A_p\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)\right] \xi^k d\Gamma^{+}.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности доказываются теоремы о предельном значении потенциала двойного слоя и конормальной производной потенциала простого слоя на границе Γ^+ области D^+.

Теорема 13. *Пусть Γ^+ – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если $\nu(\xi,\eta) \in C_0(\Gamma^+)$, то для потенциала двойного слоя справедливы предельные соотношения*

$$w_i(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}\nu(x_0,y_0) + \overline{w(x_0,y_0)},$$

$$w_e(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\nu(x_0,y_0) + \overline{w(x_0,y_0)},$$

где $w_i(x_0,y_0)$ и $w_e(x_0,y_0)$ означают предельные значения потенциала в точке $(x_0,y_0) \in \Gamma^+$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ^+, а $\overline{w(x_0,y_0)}$ - прямое значение потенциала $w(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Теорема 14. *Пусть Γ^+ – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если плотность $\mu(\xi,\eta) \in C_0(\Gamma^+)$, то предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя выражается формулами*

$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i = \frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$

$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e = -\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$

где $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i$ и $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e$ означают предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma^+$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ^+, а $\overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]}$ - прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.

В §5 краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 15. *Ёсли Γ^+ - кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\varphi(x,y) \in C_0(\Gamma^+)$ разрешима задача D_iи это решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 16. *Ёсли Γ^+ - кривая Ляпунова, образует с координатными осями прямой угол и $\psi(x,y) \in C_0(\Gamma^+)$, то разрешима задача D_e и это решение может быть представлено в виде*

$$u(x,y) = \int\limits_{\Gamma^+} \nu(\xi,\eta)\, A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right] \xi^k d\Gamma^+ + \frac{1}{\left(r_0^2\right)^\gamma} \int\limits_{\Gamma^+} \nu(\xi,\eta)\, \xi^k d\Gamma^+,$$

где $\gamma = \frac{k}{2} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}$.

Теорема 17. *Ёсли Γ^+ - кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, функция $f(x,y) \in C_0(\Gamma^+)$ и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(\xi,\eta)\, \xi^k d\Gamma^+ = 0,$$

то разрешима задача N_i и решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.

Теорема 18. *Ёсли Γ^+ - кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $g(x,y) \in C_0(\Gamma^+)$ разрешима задача N_e и ее решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Ф. Г. Мухлисову за помощь и советы, которые он оказывал мне в период написания этой работы.

Публикации автора по теме диссертации.

1. Хисматуллин А. Ш. О потенциалах одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя / А. Ш. Хисматуллин // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского т. 21.(материалы третьей всероссийской молодежной научной школы конференции) Казань: "Унипресс"2003. – с. 230 – 231.

2. Хисматуллин А. Ш. Исследование краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя методом потенциалов / А. Ш. Хисматуллин, Ф. Г. Мухлисов // Вестник Казанского государственного педагогического университета. Математика. – 2004. – №2. – с. 3 – 14.

3. Хисматуллин А. Ш. Фундаментальные решения одного вырождающегося -эллиптического уравнения / А. Ш. Хисматуллин, Ф. Г. Мухлисов // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского (Материалы международной научной конференции) т. 25. Казань: Издательство Казанского математического общества – 2004 – с. 197 – 198.

4. Хисматуллин А. Ш. Исследование краевых задач для одного вырождающегося -эллиптического уравнения методом потенциалов / А. Ш. Хисматуллин, Ф. Г. Мухлисов // Труды 5-ой международной конференции молодых ученых и студентов. "Актуальные проблемы современной науки". – Части 1, 2. – СамГТУ, – Самара 2004. – с. 87 – 90.

5. Хисматуллин А. Ш. Интегральное представление решения для вырождающегося -эллиптического уравнения 2-го рода / А. Ш. Хисматуллин // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского (Материалы Четвертой молодежной научной

школы конференции) – т. 31. – Казань: "УНИПРЕСС", – 2005. – с. 164 – 166.

6. Хисматуллин А. Ш. Решение краевых задач для одного вырождающегося -эллиптического уравнения 2-го рода методом потенциалов / А. Ш. Хисматуллин, Ф. Г. Мухлисов // Неклассические уравнения математической физики. (Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В. Н. Врагова). – Новосибирск. – Издательство Института математики – 2005. – с. 186 – 202.

7. Хисматуллин А. Ш. Фундаментальные решения одного вырождающегося -эллиптического уравнения 2-го рода / А. Ш. Хисматуллин // Труды третьей всероссийской научной конференции. Математическое моделирование и краевые задачи. – ч. 3. – СамГТУ. – Самара, – 2006. – с. 218 – 221.

8. Хисматуллин А. Ш. Решение краевых задач для одного вырождающегося -эллиптического уравнения с 2-го рода методом потенциалов / А. Ш. Хисматуллин // Известия вузов. Математика. — 2007. – №1. – с.63 – 75.

9. Хисматуллин А. Ш. Фундаментальное решение одного сингулярного -эллиптического уравнения / А. Ш. Хисматуллин // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. – Новосибирск. – Институт математики СО РАН. – 2008. – с. 225.