На правах рукописи

Аристархова Анна Вячеславовна

КОНТАКТНО-АВТОДУАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена в Московском педагогическом государственном университете на кафедре геометрии математического факультета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор КИРИЧЕНКО ВАДИМ ФЕДОРОВИЧ
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент ТОЛСТИХИНА ГАЛИНА АРКАДЬЕВНА кандидат физико-математических наук, доцент ЛИПАГИНА ЛАРИСА ВЛАДИМИРОВНА
Ведущая организация:	Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

Защита состоится 17 декабря в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: Россия, 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 27 октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика диссертационной работы

Актуальность работы. Настоящая работа, с одной стороны, посвящена 5-мерным многообразиям, снабженным почти контактной метрической структурой. Теория же структур, указанного типа, занимает видное место в ряду дифференциально-геометрических структур, изучаемых на данный момент, в силу приложений к современной математической физике (например, к классической механике, к теории геометрического квантования и др.), а также в силу богатства геометрического содержания самой этой теории и ее связей с другими разделами современной геометрии (например, с теорией гиперповерхностей римановых многообразий). Более полувека не иссякает интерес ученых и просто исследователей к теории многообразий, наделенных почти контактными (метрическими) структурами, которые являются естественным обобщением контактных (метрических) структур. В самом деле, основополагающими для данной теории явились работы С. Чженя, Дж. Грея, В. Бутби, Х. Вана и С. Сасаки, появившиеся в 50-ые годы XX века; впоследствии, исследования в этом направлении были представлены многочисленными и разнообразными (в методах, подходах и результатах) работами, которые объединяет лишь то, что изучению преимущественно подвергались исключительно некоторые классы почти контактных метрических и контактных многообразий, несмотря, например, на практически необозримую классификацию первых. Так, наиболее изученными, а также интересными (с точки зрения дальнейшего повествования) являются такие подклассы почти контактных метрических многообразий, как квази-сасакиевы, косимплектические, сасакиевы многообразия и многообразия Кенмоцу.

Класс квази-сасакиевых многообразий был введен в рассмотрение Д. Блэром, а, впоследствии, изучался с различных точек зрения многими авторами. Так, к примеру, Блэр установил, что не существует квази-сасакиевой структуры четного ранга, что вектор ξ является вектором Киллинга и что с точностью до гомотетии квази-сасакиево многообразие постоянной кривизны является сасакиевым или косимплектическим; он же нашел условия, при которых квази-сасакиево многообразие является прямым произведением сасакиева и келерова многообразий. В свою очередь, Канемаки, доказал некоторые достаточные условия по поводу того, когда квази-сасакиево многообразие имеет указанное строение локально. Позже наиболее полное описание упомянутого вопроса было дано Кириченко В.Ф. и Рустановым А.Р. в терминах дополнительных свойств симметрии тензора римановой кривизны квази-сасакиевых многообразий; они же выделили несколько интересных классов квази-сасакиевых многообразий и изучили их, используя полную группу структурных уравнений квази-сасакиевых многообразий. Подробно был исследован так называемый класс CR_1 квази-сасакиевых многообразий, исчерпывающее описание локального строения которых также дали Кириченко В.Ф. и Рустанов А.Р., приведя к тому же полные классификации квази-сасакиевых многообразий класса CR_1 постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны и квази-сасакиевых многообразий данного класса, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, что существенно обобщило известные результаты Танно, касающиеся классификации сасакиевых пространственных форм, а также углубило результаты Огиуэ и Исихары, касающиеся почти контактных метрических многообразий, в частности многообразий Сасаки, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей.

Рассмотрение класса квази-сасакиевых многообразий в настоящей работе обусловлено тем, что он включает в себя два наиболее изученных класса почти контактных метрических многообразий – класса косимплектических и класса сасакиевых многообразий, которые в эрмитовой геометрии являются контактными аналогами келеровых многообразий. При этом, известно, что косимплектические и сасакиевы структуры, характеризующиеся для любых гладких векторных полей X и Y тождествами $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ и $\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X$ (где ∇ – риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, а Φ – структурный эндоморфизм), соответственно, являются «граничными» подклассами квази-сасакиевых структур. В действительности последнее объясняется совершенно естественным образом, так как для косимплектических структур $\mathrm{rang}\ \eta = 1$ (т.е. $d\eta = 0$), а для сасакиевых – $\mathrm{rang}\ \eta = 2n+1$ (т.е. $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$), где η – контактная форма на соответствующем многообразии M^{2n+1}.

В 1971 году Кенмоцу ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризуемых для любых гладких векторных полей X и Y тождеством $\nabla_X(\Phi)Y = \langle\Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X$, формально похожим на определяющее тождество сасакиевых структур, но фактически характеризующим структуры (в определенном смысле) противоположные сасакиевым. Впоследствии, такие почти контактные метрические структуры были названы структурами Кенмоцу. Отметим, что Кенмоцу изучил замечательные свойства введенных им структур и привел их примеры. Позднее Синха и Шриваштава изучали многообразия Кенмоцу постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны, а Кобаяши М. определил свойства контактных нормальных подмногообразий и контактных родовых нормальных подмногообразий в многообразиях Кенмоцу. Исчерпывающее описание многообразий, наделенных структурой Кенмоцу, дал Кириченко В.Ф.; он не только исследовал локальное строение указанных многообразий, тем самым приведя их изящный пример (используя теорию локально конформных преобразований), но и получил полную классификацию данных многообразий точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны, указав случай глобального постоянства этой кривизны на рассматриваемых многообразиях.

Наконец, с другой стороны, настоящая работа посвящена изучению обобщения такого понятия, как автодуальность, определенного, в принципе, на 4-мерных ориентированных римановых многообразиях, наделенных рядом особенностей. Отметим, что, с точки зрения римановой геометрии, размерность 4 – первая (в сравнении с размерностями 2 и 3), в которой тензор кривизны, являющийся тензором валентности четыре, не определяется ни скалярной кривизной (как при $n = 2$), ни тензором Риччи (как при $n \leq 3$). К тому же, группа $SO(4, \mathbb{R})$ является единственной неполупростой группой $SO(n, \mathbb{R})$ (при $n \geq 3$), что приводит нас к важнейшей особенности 4-мерного ориентированного риманова многообразия M, заключающейся в специфическом строении структурной группы главного расслоения ориентированных ортонормированных реперов над таким многообразием – группы Ли $SO(4, \mathbb{R}) = (SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$. Индуцированное действие этой группы на расслоении кососимметричных 2-форм над многообразием M разлагает $C^\infty(M)$-модуль $\Lambda_2(M)$ дифференциальных 2-форм на этом многообразии в прямую сумму двух 3-мерных подмодулей: $\Lambda_2(M) = \Lambda^+(M) \oplus \Lambda^-(M)$ – подмодулей автодуальных 2-форм и антиавтодуальных 2-форм, соответственно (здесь размерность модулей сечений понимается как размерность слоев соответствующих расслоений). На этой основе, с помощью тензора Вейля конформной кривизны, рассматриваемого как симметричный автоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$, как известно, и строится теория *конформно полуплоских многообразий*, называемая *автодуальной геометрией*.

Конформно полуплоские, т.е. автодуальные либо антиавтодуальные, (4-мерные) многообразия играют достаточно значимую роль в современной науке в силу связи их геометрии с геометрией эйнштейновых многообразий (с которой, в свою очередь, связаны имена выдающихся геометров) и с твисторной геометрией (имеющей непосредственное приложение в теории гравитации и в теории полей Янга-Миллса). Так, например, известная теорема Пенроуза-Атьи-Хитчина-Сингера утверждает, что каноническая почти комплексная структура пространства твисторов 4-мерного ориентированного риманова многообразия интегрируема тогда и только тогда, когда это многообразие конформно полуплоско. Хитчин доказал, что если к тому же указанное многообразие – компактное многообразие Эйнштейна положительной скалярной кривизны, то оно изометрично $\mathbb{S}^4$ либо $\mathbb{C}P^2$ со стандартными метриками. Кроме того, Хитчин доказал, что 4-мерное ориентированное компактное риманово многообразие имеет келерово пространство твисторов тогда и только тогда, когда это многообразие конформно эквивалентно $\mathbb{S}^4$ либо $\mathbb{C}P^2$ с их стандартными конформными структурами. Чен, Бургиньон и Дердзински получили классификацию компактных автодуальных келеровых многообразий (интересно, что Чен, Бургиньон и Дердзински получили указанный результат независимо друг от друга, используя совершенно разные методы), а Ито – классификацию автодуальных многообразий Келера-Эйнштейна и исчерпывающую характеристику компактных автодуальных келеровых многообразий. Недавние исследования Арсеньевой О.Е. и Кириченко В.Ф. существенно обобщили и дополнили результаты Хитчина, Бургиньона, Дердзински, Чена, Ито, а также Коды. Так, Арсеньева О.Е. получила полную классификацию автодуальных обобщенных келеровых многообразий постоянной скалярной кривизны, а также доказала, что обобщенное келерово многообразие антиавтодуально тогда и только тогда, когда его скалярная кривизна равна нулю. Совместная же работа Арсеньевой О.Е. и Кириченко В.Ф. «Автодуальная геометрия эрмитовых поверхностей» содержит ряд красивых и неожиданных результатов, касающихся геометрии конформно полуплоских эрмитовых поверхностей (т.е. 4-мерных почти эрмитовых многообразий со знакоопределенной метрикой и интегрируемой почти комплексной структурой) как классического, так и гиперболического типа (обобщенных эрмитовых поверхностей); там же приведена полная классификация компактных автодуальных эрмитовых RK-поверхностей, являющихся обобщенными многообразиями Хопфа, решающая проблему Чена в этом классе эрмитовых многообразий.

Таким образом, приведенный обзор исследований как некоторых классов почти контактных метрических многообразий, так и конформно полуплоских многообразий, ни в коей мере не претендующий на полноту, показывает насколько эти проблемы занимали и занимают умы геометров, продолжающих их активное изучение. Однако, до настоящего времени не были подняты вопросы, связанные с возможностью обобщения на 5-мерный случай понятий автодуальных и антиавтодуальных 2-форм, играющих фундаментальную роль в 4-мерной римановой геометрии. В частности, не рассматривалась возможность обобщения понятий автодуальных и антиавтодуальных многообразий на случай 5-мерных римановых многообразий, снабженных почти контактной структурой (согласованной с метрикой); также не высказывалась идея рассмотрения теории, основанной на замене тензора Вейля на тензор Римана-Кристоффеля в рамках автодуальной геометрии, обобщенной на 5-мерный случай. К сказанному хочется добавить еще и то, что выдающийся ученый А.Л. Бессе (во введении книги «Четырехмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе. 1978/79» под его редакцией) заметил: «Когда инерция мышления подталкивает меня перейти к исследованиям в размерности 5, мой внутренний голос протестует. Я склонен с ним согласиться».

В настоящей же работе подробно исследуются указанные проблемы; а именно, в данной работе известная конструкция конформно полуплоских (4-мерных) многообразий распространяется на 5-мерные римановы многообразия, снабженные почти контактной метрической структурой, а следовательно, и 4-мерным гиперраспределением. На этой основе, с помощью тензора Вейля, вводится в рассмотрение контактный аналог конформно полуплоских многооборазий. Построенная таким образом конструкция оказалась богатой геометрическим содержанием, что было продемонстрировано на примере квази-сасакиевых, косимплектических и сасакиевых многообразий, а также на примере многообразий Кенмоцу. Более того, разработанный в работе формализм для тензора Вейля был применен к тензору Римана-Кристоффеля, что позволило получить ряд интересных результатов, касающихся указанных многообразий.

Цель диссертационной работы заключается в построении теории контактно-конформно-полуплоских (т.е. контактно-автодуальных либо контактно-антиавтодуальных) почти контактных метрических многообразий, называемой в дальнейшем контактно-автодуальной геометрией, и в изучении контактно-автодуальной геометрии некоторых классов 5-мерных почти контактных метрических многообразий. При этом, **основными задачами исследования** являются следующие:

1) Обобщение концепции автодуальных и антиавтодуальных 2-форм на случай 5-мерных почти контактных метрических многообразий, а также определение внутренним образом понятий контактно-автодуальных, контактно-антиавтодуальных и контактно-конформно-полуплоских (т.е. контактно-автодуальных либо контактно-антиавтодуальных) почти контактных метрических многообразий.

2) Изучение контактно-автодуальной геометрии квази-сасакиевых, косимплектиче-

ских, сасакиевых многообразий, а также многообразий Кенмоцу.

3) Определение естественным образом понятий контактно R-автодуальных, контактно R-антиавтодуальных и контактно-полуплоских (т.е. контактно R-автодуальных либо контактно R-антиавтодуальных) почти контактных метрических многообразий, путем замены тензора C Вейля на тензор R Римана-Кристоффеля в рамках разработанного формализма для тензора C.

4) Изучение контактно R-автодуальной геометрии квази-сасакиевых, косимплектических, сасакиевых многообразий, а также многообразий Кенмоцу.

5) Определение понятий псевдо-конформно-плоских и псевдоплоских почти контактных метрических многообразий, а также их изучение на примере квази-сасакиевых, косимплектических, сасакиевых многообразий и многообразий Кенмоцу.

Научная новизна. Основные результаты настоящего диссертационного исследования являются новыми. Выделим важнейшие из них.

1) В первой главе введено обобщение автодуальных и антиавтодуальных 2-форм на случай 5-мерных почти контактных метрических многообразий, а также на пространстве присоединенной G-структуры указанных многообразий подсчитаны их компоненты. Посредством последнего удалось внутренним образом определить понятия контактно-автодуальных, контактно-антиавтодуальных и контактно-конформно-полуплоских почти контактных метрических многообразий. При этом, применяя построенную конструкцию к тензору Римана-Кристоффеля, естественным образом были определены понятия контактно R-автодуальных, контактно R-антиавтодуальных и контактно-полуплоских почти контактных метрических многообразий.

2) Во второй главе изучена контактно-автодуальная геометрия квази-сасакиевых, косимплектических и сасакиевых многообразий. А именно, установлены аналитический критерий контактной автодуальности и признак контактной антиавтодуальности квази-сасакиевых многообразий. С помощью указанного критерия контактной автодуальности был получен ряд результатов, касающихся сасакиевых и косимплектических многообразий, важнейшими из которых являются полные классификации контактно-автодуальных сасакиевых и контактно-автодуальных косимплектических многообразий. Учитывая признак контактной антиавтодуальности квази-сасакиевых многообразий, было доказано, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является риччи-плоским многообразием, и, что 5-мерное сасакиево много-

образие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 4$. Кроме того, введя в рассмотрение псевдо-конформно-плоские многообразия, было доказано, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие класса CR_1 псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско; в качестве очевидных следствий последнего факта, было получено, что 5-мерные косимплектические и сасакиевы многообразия псевдо-конформно-плоски тогда и только тогда, когда они конформно плоски.

3) В третьей главе изучена контактно R-автодуальная геометрия квази-сасакиевых, косимплектических и сасакиевых многообразий. Именно, установлены аналитические критерии контактной R-автодуальности и контактной R-антиавтодуальности квази-сасакиевых многообразий. С помощью критерия контактной R-автодуальности квази-сасакиевых многообразий были получены полные классификации контактно R-автодуальных сасакиевых и контактно R-автодуальных косимплектических многообразий. С учетом же критерия контактной R-антиавтодуальности квази-сасакиевых многообразий, было доказано, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно R-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является риччи-плоским многообразием, и, что контактно R-антиавтодуальных сасакиевых многообразий не существует. Далее, введя в рассмотрение псевдоплоские многообразия, был получен аналитический критерий псевдоплоскости квази-сасакиева многообразия, т. е. было доказано, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие класса CR_1 с нильпотентным характеристическим гомоморфизмом $\mathcal{B}$ (т.е. $\mathcal{B}^2 = 0$) псевдоплоско тогда и только тогда, когда оно плоско. Также доказано, что 5-мерное сасакиево многообразие не может быть псевдоплоским.

4) В четвертой главе исследованы контактно-автодуальная и контактно R-автодуальная геометрии многообразий Кенмоцу. Получена полная классификация контактно-автодуальных многообразий Кенмоцу и доказано, что 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = -4$. Установлен критерий конформной псевдоплоскости многообразий Кенмоцу, утверждающий, что 5-мерное многообразие Кенмоцу псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско. В заключение, было доказано, что 5-мерное многообразие Кенмоцу не может быть ни контактно R-автодуальным, ни контактно R-антиавтодуальным, а значит, не может быть и псевдоплоским многообразием.

Практическая и теоретическая значимости. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения контактно-автодуальной геометрии подходящих многообразий, в соответствующих разделах дифференциальной геометрии и математической физики, а также для чтения спецкурсов, для написания курсовых, дипломных и диссертационных работ в высших учебных заведениях, где проводятся исследования по сходной тематике.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре по дифференциально-геометрическим структурам на многообразиях кафедры геометрии (рук. д. ф.-м. н., проф. Кириченко В.Ф.) Московского Педагогического Государственного Университета (Россия, Москва, апрель 2009 г.), на V общероссийской научной конференции «Актуальные вопросы науки и образования» (Россия, Москва, май 2009 г.), на международной конференции «Геометрия в Одессе – 2009» (Украина, Одесса, май 2009 г.), на международной научной конференции «Лаптевские чтения – 2009» (Россия, Москва-Тверь, август 2009 г.), на международной конференции «Геометрия в Астрахани – 2009» (Россия, Астрахань, сентябрь 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 1 статья в рецензируемом журнале [1], рекомендованным ВАК РФ, 4 работы в виде тезисов докладов научных конференций [2–5] и 3 работы, депонированные в ВИНИТИ РАН [6–8].

Структура и объем диссертации. Диссертационное исследование состоит из введения, 4 глав, включающих 17 параграфов, списка литературы и списка публикаций автора. Работа изложена на 94 страницах машинописного текста.

Краткое содержание диссертационной работы

Введение содержит исторический обзор исследований по теме диссертации, а также обоснование ее актуальности. Здесь же сформулированы цель и основные задачи настоящего исследования, новизна которого отражена в приведенных основных результатах работы. Далее, во введении указаны практическая и теоретическая значимости работы, ее апробация и публикации автора по теме исследования. Завершает введение краткое содержание диссертационного исследования.

Первая глава «Основные понятия», состоящая из 4 параграфов, посвящена разработке основных понятий и аппарата теории контактно-конформно-полуплоских многообразий, которая является обобщением классической автодуальной геометрии на 5-мерный случай.

В первом параграфе «Почти контактные метрические многообразия» излагаются хорошо известные понятия и факты контактной геометрии, которые используются в настоящем исследовании по мере необходимости.

Во втором параграфе «Автодуальные и антиавтодуальные формы на почти контактных метрических многообразиях» разработано обобщение теории автодуальных и антиавтодуальных 2-форм, на случай 5-мерных почти контактных метрических многообразий, кульминацией которого явилось доказательство леммы, уточняющей компоненты рассматриваемых форм на пространстве присоединенной G-структуры. Именно, в условиях того, что $(M,\ \eta,\ \xi,\ \Phi,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – 5-мерное ориентированное почти контактное метрическое многообразие, $\mathfrak{l}=\mathrm{id}-\eta\otimes\xi=-\Phi^2$ – естественный проектор на контактное распределение $\mathfrak{L}=\mathrm{Im}\ \Phi=\mathrm{Ker}\ \eta$, $\Lambda_2(\mathfrak{L})=\Lambda^+(\mathfrak{L})\oplus\Lambda^-(\mathfrak{L})$ – прямая сумма двух 3-мерных подмодулей автодуальных 2-форм и антиавтодуальных 2-форм модуля $\Lambda_2(\mathfrak{L})$, 2-форма $\mathfrak{l}^*(\omega)\in\Lambda_2(M)$ – антиувлечение 2-формы $\omega\in\Lambda_2(\mathfrak{L})$ при отображении $\mathfrak{l}$, а $\sqrt{-1}$ – мнимая единица поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел, было доказано, что если 2-форма $\omega\in\Lambda_2(\mathfrak{L})$, то в A-репере:

1) $\omega\in\Lambda^+(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\left((\mathfrak{l}^*\omega)_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&x+z\sqrt{-1}&y\sqrt{-1}&0\\0&-x-z\sqrt{-1}&0&0&y\sqrt{-1}\\0&-y\sqrt{-1}&0&0&x-z\sqrt{-1}\\0&0&-y\sqrt{-1}&-x+z\sqrt{-1}&0\end{pmatrix};$$

2) $\omega\in\Lambda^-(\mathfrak{L})$ тогда и только тогда, когда для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\left((\mathfrak{l}^*\omega)_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&y\sqrt{-1}&x+z\sqrt{-1}\\0&0&0&-x+z\sqrt{-1}&-y\sqrt{-1}\\0&-y\sqrt{-1}&x-z\sqrt{-1}&0&0\\0&-x-z\sqrt{-1}&y\sqrt{-1}&0&0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что здесь и далее индексы a,b,c,d,f,h пробегают значения от 1 до 2, где, например, $\hat{a}=a+2$; а индексы i,j,k,l – значения от 0 до 4, то есть $0,1,2,\hat{1},\hat{2}$. Кроме того, условимся, что индексы $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ пробегают значения $1,2,\hat{1},\hat{2}$.

В третьем параграфе «Контактно-конформно-полуплоские почти контактные метрические многообразия» внутренним образом вводятся в рассмотрение контактно-конформно-полуплоские почти контактные метрические многообразия. Заметив, что тензор C Вейля можно рассматривать как эндоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$, и что эндоморфизм C внутренним образом определяет эндоморфизм $\mathfrak{C}$ модуля $\Lambda_2(\mathfrak{L})$, задаваемый одной из трех эквивалентных формул: 1) $\mathfrak{C} = i^* \circ C \circ \mathfrak{l}^*$, 2) $\mathfrak{C}(\omega) = C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}$, 3) $\mathfrak{C}(\omega)_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta kl}(\mathfrak{l}^*\omega)^{kl}$, где i – естественное вложение $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}(M)$, а $C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}$ – сужение 2-формы $C(\mathfrak{l}^*\omega) \in \Lambda_2(M)$ на $\mathfrak{L}$, были сформулированы определения контактно-автодуальных, контактно-антиавтодуальных и контактно-конформно-полуплоских почти контактных метрических многообразий. А именно, 5-мерное почти контактное метрическое многообразие было названо *контактно-автодуальным* (короче, *$\mathcal{C}$-автодуальным*) *многообразием*, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$. Аналогично, 5-мерное почти контактное метрическое многообразие было названо *контактно-антиавтодуальным* (короче, *$\mathcal{C}$-антиавтодуальным*) *многообразием*, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$. И наконец, контактно-автодуальное либо контактно-антиавтодуальное почти контактное метрическое многообразие было названо *контактно-конформно-полуплоским* (короче, *$\mathcal{C}$-конформно-полуплоским*) многообразием.

В четвертом параграфе «Контактно-полуплоские почти контактные метрические многообразия» были определены понятия контактно R-автодуальных (короче, $\mathcal{C}R$-автодуальных), контактно R-антиавтодуальных (короче, $\mathcal{C}R$-антиавтодуальных) и контактно-полуплоских (короче, $\mathcal{C}$-полуплоских) почти контактных метрических многообразий, путем применения формализма, разработанного для тензора Вейля, к тензору Римана-Кристоффеля.

Вторая глава «Контактно-автодуальная геометрия квази-сасакиевых, косимплектических и сасакиевых многообразий», состоящая из 5 параграфов, посвящена изучению контактно-конформно-полуплоских многообразий указанных (в названии главы) типов.

В *первом параграфе «Пятимерные квази-сасакиевы многообразия»* приводятся некоторые известные факты и определение квази-сасакиевых многообразий, а также ряд их примеров и полная группа структурных уравнений. Кроме этого, на пространстве присоединенной G-структуры указанных многообразий вычислены существенные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, тензора Риччи и тензора Вейля, а также указана формула, по которой подсчитывается скалярная кривизна $\varkappa$ квази-сасакиевых многообразий.

Второй параграф «Геометрия контактно-конформно-полуплоских квази-сасакиевых многообразий» состоит из двух пунктов; в первом пункте «Контактно-автодуальные квази-сасакиевы многообразия», учитывая выше указанную лемму, доказан аналитический критерий контактной автодуальности квази-сасакиевых многообразий, утверждающий, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры

$$A^{ac}_{bd} = 2B^a_b B^c_d + B^a_d B^c_b + \left(B^a_h B^h_b - B^a_b B^h_h\right)\delta^c_d + \left(B^c_h B^h_b - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^c_b\right)\delta^a_d +$$

$$+\left(B^a_h B^h_d - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^a_d\right)\delta^c_b - \frac{1}{3}\left(B^f_h B^h_f + \frac{\varkappa}{4}\right)\tilde{\delta}^{ac}_{bd},$$

где $\tilde{\delta}^{ac}_{bd} = \delta^a_b\delta^c_d + \delta^a_d\delta^c_b$, $\{B^a_b\}$ – набор компонент комплексного тензорного поля B типа (1,1) на квази-сасакиевом многообразии M, которое называется структурным тензором первого рода, а $\left\{A^{ad}_{bc}\right\}$ – система функций, определяющая тензорное поле A типа (2,2), называемое структурным тензором второго рода или тензором голоморфной секционной кривизны квази-сасакиева многообразия M; во втором пункте «Контактно-антиавтодуальные квази-сасакиевы многообразия» второго параграфа доказан признак контактной антиавтодуальности квази-сасакиевых многообразий, заключающийся в том, что если 5-мерное квази-сасакиево многообразие контактно-антиавтодуально, то его скалярная кривизна $\varkappa$ на пространстве присоединенной G-структуры вычисляется по формуле вида: $\varkappa = 2B^b_a B^a_b - 6B^a_a B^b_b$.

Третий параграф «Геометрия контактно-конформно-полуплоских косимплектических многообразий» начинается с того, что в первом пункте «Контактно-автодуальные косимплектические многообразия» приводятся известное определение косимплектических многообразий и их примеры, а также указаны формула, по которой подсчитывается скалярная кривизна $\varkappa$ 5-мерных косимплектических многообразий, и существенные компоненты классических тензоров. В рамках этого же пункта был доказан аналитический критерий контактной автодуальности косимплектических многообразий, утверждающий, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $A^{ad}_{bc} = -\frac{\varkappa}{12}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c + \delta^a_c\delta^d_b$. С учетом последнего факта, выяснилось, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием глобально постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны; и наконец, с учетом полученных результатов, был сделан окончательный вывод, представляющий собой полную классификацию контактно-автодуальных косимплектических многообразий. Именно, 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий, снабженному канонической косимплектической структурой: 1) $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$; 2) $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}$; 3) $\mathbb{C}H^2 \times \mathbb{R}$ (где $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}H^2$ – комплексное евклидово, комплексное проективное и комплексное гиперболическое 2-мерные пространства, соответственно). Во втором пункте «Контактно-антиавтодуальные косимплектические многообразия» был установлен интересный критерий контактной-антиавтодуальности косимплектических многообразий: 5-мерное косимплектическое многообразие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является риччи-плоским многообразием.

Четвертый параграф «Геометрия контактно-конформно-полуплоских сасакиевых многообразий» также как предыдущий состоит из двух пунктов. В первом пункте «Контактно-автодуальные сасакиевы многообразия» сначала немного рассказывается о сасакиевых многообразиях (определение, примеры, спектры классических тензоров), а затем, исследуя исключительно контактно-автодуальные многообразия указанного типа, было доказано, что 5-мерное сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется соотношение $A^{ad}_{bc} = -\frac{\varkappa+4}{12}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c + \delta^a_c\delta^d_b$. Далее, выяснив, что контактная автодуальность 5-мерного сасакиева многообразия равносильна глобальному постоянству Ф-голоморфной секционной кривизны $\mathbf{c}$ этого многообразия, была получена полная классификация контактно-автодуальных сасакиевых многообразий. Именно, 5-мерное сасакиево многообразие контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий: 1) при $\mathbf{c} > -3$ – 5-мерной сфере $\mathbb{S}^5$, снабженной канонической сасакиевой структурой или структурой, полученной из канонической преобразованием D-гомотетии; 2) при $\mathbf{c} = -3$ – пространству главного T^1-расслоения над 4-мерным тором, снабженным стандартной плоской келеровой структурой, рассматриваемой как структура Ходжа; 3) при $\mathbf{c} < -3$ – 5-мерной сфере $\mathbb{S}^5$, снабженной структурой, полученной из канонической преобразованием D-инверсии. Во втором пункте «Контактно-антиавтодуальные сасакиевы многообразия» четвертого параграфа был установлен красивый критерий контактной антиавтодуальности сасакиевых многообразий: 5-мерное сасакиево многообразие контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 4$.

Пятый параграф «Псевдо-конформно-плоские квази-сасакиевы, косимплектические и сасакиевы многообразия» посвящен исследованию одновременно контактно-автодуальных и контактно-антиавтодуальных многообразий указанного типа. Так, было установлено, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие класса CR_1 псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско; в качестве очевидных следствий последнего факта, было доказано, что псевдо-конформная плоскость 5-мерных косимплектических и сасакиевых многообразий равносильна их конформной плоскости.

Третья глава «Контактно *R*-автодуальная геометрия квази-сасакиевых, косимплектических и сасакиевых многообразий» состоит из 4 параграфов и содержит исследования так называемых контактно-полуплоских многообразий (указанного в названии главы) типа.

Первый параграф «Геометрия контактно-полуплоских квази-сасакиевых многообразий» посвящен изучению контактно R-автодуальных и контактно R-антиавтодуальных квази-сасакиевых многообразий. В первом пункте «Контактно R-автодуальные квази-сасакиевы многообразия» первого параграфа был найден аналитический критерий CR-автодуальности данных многообразий: 5-мерное квази-сасакиево многообразие контактно R-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется тождество $A^{ac}_{bd} = 2B^a_b B^c_d + B^a_d B^c_b + \left(B^a_h B^h_b - B^a_b B^h_h\right)\delta^c_d$. Во втором же пункте «Контактно R-антиавтодуальные квази-сасакиевы многообразия» доказан критерий их CR-антиавтодуальности, утверждающий, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие контактно R-антиавтодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняются следующие соотношения: 1) $A^{ac}_{bc} = 2B^a_b B^c_c + B^a_c B^c_b$; 2) $B^c_a B^d_b = B^d_a B^c_b$.

Второй параграф называется *«Геометрия контактно-полуплоских косимплектических многообразий»*. В его первом пункте «Контактно R-автодуальные косимплектические многообразия» выясняется, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно R-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $A^{ad}_{bc} = 0$. Указанное утверждение позволило установить, что контактная R-автодуальность 5-мерных косимплектических многообразий равносильна локальной плоскости этих многообразий; благодаря последнему факту было доказано, что 5-мерное косимплектическое многообразие контактно R-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно многообразию $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$, снабженному канонической косимплектической структурой.

Во втором пункте «Контактно R-антиавтодуальные косимплектические многообразия» было доказано, что контактная R-антиавтодуальность 5-мерного косимплектического многообразия равносильна его риччи-плоскости.

Несколько неожиданными явились результаты *третьего параграфа «Геометрия контактно-полуплоских сасакиевых многообразий»*. В первом пункте «Контактно R-автодуальные сасакиевы многообразия» указанного параграфа был установлен аналитический критерий CR-автодуальности сасакиевых многообразий, с помощью которого доказано, что 5-мерное сасакиево многообразие контактно R-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $\mathbf{c} = -1$. С учетом последнего, был сделан вывод, что 5-мерное сасакиево многообразие контактно R-автодуально тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно 5-мерной сфере $\mathbb{S}^5$, снабженной структурой, полученной из канонической сасакиевой структуры подходящим преобразованием D-гомотетии. Результатом второго пункта «Контактно R-антиавтодуальные сасакиевы многообразия» является то, что контактно R-антиавтодуальных сасакиевых многообразий не существует.

Заключительным параграфом третьей главы является *четвертый параграф «Псевдоплоские квази-сасакиевы, косимплектические и сасакиевы многообразия»*. В этом параграфе был получен аналитический критерий псевдоплоскости квази-сасакиева многообразия, т. е. было доказано, что 5-мерное квази-сасакиево многообразие класса CR_1 с нильпотентным характеристическим гомоморфизмом $\mathcal{B}$ псевдоплоско тогда и только тогда, когда оно плоско. Естественным следствием указанного критерия явилось то, что 5-мерное косимплектическое многообразие псевдоплоско тогда и только тогда, когда оно локально плоско. В частности, здесь же было доказано, что 5-мерное сасакиево многообразие не может быть псевдоплоским.

Четвертая глава «Контактно-автодуальная и контактно $\boldsymbol{R}$-автодуальная геометрии многообразий Кенмоцу» состоит из 4 параграфов.

Первый параграф «Пятимерные многообразия Кенмоцу» содержит определение указанных многообразий, их примеры, полную группу структурных уравнений и несколько хорошо известных фактов. При этом, на пространстве присоединенной G-структуры указанных многообразий вычислены существенные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, тензора Риччи и тензора Вейля, а также указана формула, по которой подсчитывается скалярная кривизна $\varkappa$ 5-мерных многообразий Кенмоцу.

Второй параграф «Геометрия контактно-конформно-полуплоских многообразий Кенмоцу» состоит из двух пунктов; в первом пункте «Контактно-автодуальные многообразия Кенмоцу» было доказано, что 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется следующее соотношение $A^{ac}_{bd} = -\frac{20+\varkappa}{12}\tilde{\delta}^{ac}_{bd}$, где $\tilde{\delta}^{ac}_{bd} = \delta^a_b\delta^c_d + \delta^a_d\delta^c_b$. С учетом найденного результата, удалось доказать, что контактная автодуальность 5-мерных многообразий Кенмоцу равносильна точечному постоянству Ф-голоморфной секционной кривизны данного многообразия; посредством последнего получена полная классификация контактно-автодуальных многообразий Кенмоцу. Именно, доказано, что 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий, снабженному канонической косимплектической структурой: 1) $\mathbb{C}^2\times\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{C}P^2\times\mathbb{R}$; 3) $\mathbb{C}H^2\times\mathbb{R}$. Во втором пункте «Контактно-антиавтодуальные многообразия Кенмоцу» доказано, что 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = -4$.

В *третьем параграфе «Псевдо-конформно-плоские многообразия Кенмоцу»* установлен критерий конформной псевдо-плоскости многообразий Кенмоцу, утверждающий, что 5-мерное многообразие Кенмоцу псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.

Интересно, что в заключительном *четвертом параграфе «Контактно-полуплоские многообразия Кенмоцу»* удалось доказать, что 5-мерное многообразие Кенмоцу не может быть ни контактно R-автодуальным, ни контактно R-антиавтодуальным, а значит, не может быть и псевдоплоским многообразием.

Список литературы включает 51 наименование работ (отечественных и зарубежных авторов), используемых для написания данного диссертационного исследования.

Список публикаций автора содержит 8 опубликованных печатных работ автора по теме настоящей диссертации.

В заключение, автору хотелось бы от всей души поблагодарить своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Вадима Федоровича Кириченко за идею исследования и постоянную поддержку в ее разработке, за такт, понимание и искреннее участие, которое невозможно описать существующими словами.

Список публикаций автора

[1] *Аристархова, А. В.* О псевдоконформно-плоских и псевдоплоских квази-сасакиевых многообразиях / А. В. Аристархова // *Известия вузов. Математика.* — 2009. — № 12. — С. 69–73.

[2] *Аристархова, А. В.* О контактно конформно полуплоских многообразиях Кенмоцу / А. В. Аристархова // *Современные наукоемкие технологии. Материалы V общероссийской научной конференции "Актуальные вопросы науки и образования". Физико-математические науки.* — 2009. — № 6. — С. 6–7.

[3] *Аристархова, А. В.* О контактно-автодуальной геометрии 5-мерных квази-сасакиевых многообразий / А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко // *Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе – 2009".* — 2009. — С. 40–41.

[4] *Аристархова, А. В.* О контактно конформно полуплоских пятимерных квази-сасакиевых многообразиях / А. В. Аристархова // *Тезисы докладов международной научной конференции "Лаптевские чтения – 2009".* — 2009. — С. 7–8.

[5] *Аристархова, А. В.* Контактно-автодуальные многообразия Кенмоцу / А. В. Аристархова // *Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Астрахани – 2009".* — 2009. — С. 5–6.

[6] *Аристархова, А. В.* О *CR*-автодуальной геометрии некоторых классов почти контактных метрических многообразий / А. В. Аристархова // *МПГУ, М., Деп. в ВИНИТИ РАН 22.06.09.* — 2009. — № 391-В2009. — С. 18.

[7] *Аристархова, А. В.* Критерий контактной автодуальности квази-сасакиевых многообразий / А. В. Аристархова // *МПГУ, М., Деп. в ВИНИТИ РАН 22.06.09.* — 2009. — № 392-В2009. — С. 14.

[8] *Аристархова, А. В.* Псевдо-конформно-плоские и псевдоплоские 5-мерные квази-сасакиевы многообразия / А. В. Аристархова // *МПГУ, М., Деп. в ВИНИТИ РАН 22.06.09.* — 2009. — № 393-В2009. — С. 18.