

Стехина Кристина Николаевна

**Задачи сопряжения для уравнений
плоской теории упругости
в слоистых областях**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент

Тумаков Дмитрий Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор

Даутов Рафаил Замилович

кандидат физико-математических наук,
доцент

Плецинская Ирина Евгеньевна

Ведущая организация: Пензенский государственный
университет

Защита состоится 29 октября 2009 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 21 сентября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета канд. физ.-мат. наук, доцент

Е.К. Липачёв

Общая характеристика работы

В диссертации исследованы граничные задачи и задачи сопряжения для систем уравнений плоской теории упругости, которые используются при описании процессов распространения и дифракции упругих волн в волноводных структурах.

Цель работы

Целью настоящей работы является исследование множества собственных волн упругой полосы и полуоткрытого упругого волновода и разработка методов решения задач дифракции на неоднородностях в упругих волноводных структурах.

Актуальность темы

К задачам сопряжения для уравнений Ламе и системы уравнений плоской динамической теории упругости приводится широкий класс задач теории распространения и дифракции упругих волн. Можно выделить как наиболее важные два направления – сейсмологию и акустоэлектронику. Исследованию граничных задач для уравнений с частными производными, описывающих процессы, протекающие в различных волноводных структурах, посвящено много публикаций. Существенно, что различные по физической природе волновые процессы описываются близкими уравнениями, а иногда даже одними и теми же.

Методы исследования

В диссертации основным методом исследования граничных задач и задач сопряжения для уравнений с частными производными яв-

ляется спектральный метод. Частные решения задач на собственные значения в слоистых средах построены методом разделения переменных. Для поиска корней характеристических уравнений использованы итерационный метод Ньютона и метод, основанный на теореме Коши о логарифмических вычетах. При исследовании задач дифракции упругих волн использован метод частичных областей. В численных алгоритмах решения задач дифракции использован метод усечения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ).

Научная новизна

Подробно исследованы корни характеристических уравнений. Доказана полнота системы собственных волн плоского упругого волновода с фиксированными границами. Задачи дифракции в плоском упругом волноводе сведены к БСЛАУ. Исследованы волновые процессы в полуоткрытых волноводах, имеющих не только дискретный, но и непрерывный спектр.

Достоверность результатов работы

Все утверждения диссертации получены строгими математическими методами, для контроля рассмотрены некоторые частные случаи, в которых решения задач найдены численно с помощью простых алгоритмов.

Практическое значение

Результаты диссертации имеют в основном теоретический характер. В то же время разработанные методы и алгоритмы решения исследованных в работе граничных задач могут быть использованы на практике при расчете полей в различных волноводных структурах.

В частности, результаты, полученные для плоских и полукрытых упругих волноводов, могут быть применены при решении задач сейсмики и акустики.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на Международном семинаре "Супервычисления и математическое моделирование" (Саров, 3–7 октября 2006 г.), на Пятой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2006" (Казань, 16–18 декабря 2006 г.), на Шестой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2007" (Казань, 16–19 декабря 2007 г.), at the 12th International Conferences on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ) (Odesa, Ukraine June 29 – July 2, 2008), на Итоговых научных конференциях КГУ, на семинарах кафедры прикладной математики и отдела прикладной математической физики НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе одна статья в издании из списка ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, десяти параграфов, объединенных в две главы, и списка использованных источников. Общий объем работы – 117 страниц. В списке литературы 89 наименований.

Автор выражает благодарность научному руководителю кандидату физ.-мат. наук, доценту Д.Н. Тумакову за постановку задач и помощь при проведении исследований, а также доктору физ.-мат. наук,

заведующему отделом ПМФ, профессору Н.Б. Плещинскому за постоянное внимание к работе.

Краткое содержание работы

Во **введении** дан обзор литературы по теме диссертации, изложено краткое содержание работы, а также сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

В **первой главе** исследованы задачи о собственных волнах упругих волноводных структур. Рассмотрены две волноводные структуры – плоский и полуоткрытый упругие волноводы.

Первый параграф является вспомогательным и имеет, в основном, реферативный характер. Здесь сформулированы основные уравнения плоской динамической теории упругости, уравнения движения, закон Гука и следующая из них система уравнений Ламе. Вводятся понятия продольной и поперечной упругих волн. Приведены некоторые варианты возможных граничных условий. Сформулированы условия сопряжения для случая слоистых сред. Приведены формулы для вычисления плотности энергии и плотности потока энергии плоской упругой волны. Рассмотрен один из методов поиска элементарных собственных волн уравнения Гельмгольца в полосе. Даны определения положительно и отрицательно ориентированных волн.

Во *втором параграфе* рассмотрен плоский упругий волновод. Собственные волны (моды) плоского волновода представляют собой ненулевые решения системы уравнений Ламе

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho\omega^2 u_x + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \rho\omega^2 u_y = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям на его стенках; для волновода с жестко закрепленными границами

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u_x(x, h) = 0, \quad u_y(x, h) = 0. \quad (3)$$

Выведены характеристические уравнения для плоского волновода с различными вариантами условий на границах, в частности для волновода с жестко закрепленными границами

$$\begin{aligned} &(\alpha^4 + \gamma_1^2(\alpha)\gamma_2^2(\alpha))(1 - e^{2ih\gamma_1(\alpha)})(1 - e^{2ih\gamma_2(\alpha)}) + \\ &+ 2\alpha^2\gamma_1(\alpha)\gamma_2(\alpha)(1 + e^{2ih\gamma_1(\alpha)})(1 + e^{2ih\gamma_2(\alpha)}) - \\ &- 8\alpha^2\gamma_1(\alpha)\gamma_2(\alpha)e^{ih(\gamma_1(\alpha)+\gamma_2(\alpha))} = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma_j(\alpha) = \sqrt{k_j^2 - \alpha^2}$, k_j – волновые числа.

Установлено, что такая волноводная структура имеет дискретный набор собственных волн. Методом разделения переменных найдены моды плоского упругого волновода, их перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} u_x(y) &= -\alpha A e^{i\gamma_1 y} + \alpha B e^{-i\gamma_1 y} + \gamma_2 C e^{i\gamma_2 y} + \gamma_2 D e^{-i\gamma_2 y}, \\ u_y(y) &= \gamma_1 A e^{i\gamma_1 y} + \gamma_1 B e^{-i\gamma_1 y} + \alpha C e^{i\gamma_2 y} - \alpha D e^{-i\gamma_2 y}, \end{aligned}$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные (три из них определяются из граничных условий).

В *третьем параграфе* описаны методы вычисления корней характеристических уравнений: итерационный метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений и метод, основанный на теореме

Коши о логарифмических вычетах. Проведен анализ найденных корней характеристического уравнения для плоского волновода с фиксированными границами. Установлено, что эти корни образуют бесконечное счетное множество. При малых частотах корни в каждом квадранте расположены по ветви, подобной параболе. При больших частотах тенденция поведения корней такова, что вблизи начала координат возникают некоторые возмущения. Старшие корни образуют "завитки" с возвратом на мнимую ось, и, начиная с некоторого номера n , располагаются по ветви, подобно параболе. Найденны частоты, при которых возникают вещественные моды.

В четвертом параграфе рассмотрен вопрос об ортогональности волноводных мод плоского упругого волновода.

Система уравнений плоской динамической теории упругости, с учетом гармонической зависимости от времени, а также выбранной зависимости от продольной координаты $e^{-i\alpha x}$, преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
-i\alpha \sigma_x(\alpha) + \tau'(\alpha) + \rho\omega^2 u_x(\alpha) &= 0, \\
-i\alpha \tau(\alpha) + \sigma_y'(\alpha) + \rho\omega^2 u_y(\alpha) &= 0, \\
\sigma_x(\alpha) + i\alpha (\lambda + 2\mu)u_x(\alpha) - \lambda u_y'(\alpha) &= 0, \\
\sigma_y(\alpha) + i\alpha \lambda u_x(\alpha) - (\lambda + 2\mu)u_y'(\alpha) &= 0, \\
\tau(\alpha) - \mu u_x'(\alpha) + i\alpha \mu u_y(\alpha) &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Получены аналоги тождества Лагранжа и формулы Грина.

Лемма 4.1. Для функций $u_x(y)$, $u_y(y)$, $\sigma_x(y)$, $\sigma_y(y)$ и $\tau(y)$, являющихся решением системы уравнений (4), справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&\left[\tau(\alpha)u_x^*(\beta) - u_x(\alpha)\tau^*(\beta) + \sigma_y(\alpha)u_y^*(\beta) - u_y(\alpha)\sigma_y^*(\beta) \right]' - \\
&\quad - (\beta^* - \alpha) i \left[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + \right. \\
&\quad \left. + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Лемма 4.2. Для функций $u_x(y)$, $u_y(y)$, $\sigma_x(y)$, $\sigma_y(y)$ и $\tau(y)$, являющихся решением системы уравнений (4), удовлетворяющих гранич-

ным условиям (2), (3), справедлива формула

$$\int_0^h \left[u_x(\alpha) \sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha) u_x^*(\beta) + u_y(\alpha) \tau^*(\beta) - \tau(\alpha) u_y^*(\beta) \right] dy =$$

$$= \frac{i}{\alpha - \beta^*} \left[\tau(\alpha) u_x^*(\beta) - u_x(\alpha) \tau^*(\beta) + \sigma_y(\alpha) u_y^*(\beta) - u_y(\alpha) \sigma_y^*(\beta) \right].$$

Введено скалярное произведение мод плоского упругого волновода

$$\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = \int_0^h \left[u_x(\alpha) \sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha) u_x^*(\beta) + \right. \quad (5)$$

$$\left. + u_y(\alpha) \tau^*(\beta) - \tau(\alpha) u_y^*(\beta) \right] dy,$$

здесь $w(\alpha) = (u_x(\alpha), u_y(\alpha), \sigma_x(\alpha), \sigma_y(\alpha), \tau(\alpha))$. При этом произведение волноводной моды на саму себя пропорционально потоку энергии, которую мода переносит через поперечное сечение волновода. Доказана

Теорема 4.1. *Собственные волны плоского упругого волновода образуют ортогональную систему волн относительно скалярного произведения (5).*

В пятом параграфе доказано, что моды плоского упругого волновода с фиксированными границами образуют полную систему функций – в том смысле, что любая волна в волноводе может быть представлена линейной комбинацией собственных волн. Основным результатом параграфа является утверждение:

Теорема 5.1. *Любое решение (волну) $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ системы уравнений Ламе (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), (3), можно представить в виде линейной комбинации собственных функций (собственных волн) задачи (1), (2), (3), то есть*

$$u_x(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} C^j u_x^j(x, y), \quad u_y(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} C^j u_y^j(x, y)$$

где C^j – произвольные постоянные.

В шестом параграфе рассмотрен полуоткрытый бесконечный упругий волновод. Исследована задача на собственные значения: найти значения параметра α , при которых система уравнений (1) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u_x(x, h+0) &= u_x(x, h-0), & u_y(x, h+0) &= u_y(x, h-0), \\ \sigma_y(x, h+0) &= \sigma_y(x, h-0), & \tau(x, h+0) &= \tau(x, h-0), \end{aligned} \quad (6)$$

граничным условиям

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (7)$$

и условиям на бесконечности (при $y \rightarrow +\infty$ все компоненты решения системы уравнений (1) должны быть ограничены).

Доказана теорема о структуре спектра полуоткрытого волновода.

Теорема 6.1. *Движущиеся вправо собственные волны полуоткрытого упругого волновода существуют при значениях параметра α , принадлежащих отрицательной полуоси мнимой оси, интервалам $(-k_{11}, 0)$, $(-k_{12}, -k_{11})$ (непрерывный спектр) и конечном числе значений α из интервала $(-k_{22}, -k_{12})$ (дискретный спектр).*

Здесь k_{ij} – волновые числа, $i = 1, 2$ – номер среды, $j = 1, 2$.

Найдены все моды указанной волноводной структуры, относящиеся как к дискретному, так и к непрерывному спектру. Суперпозиция всех мод представлена в виде суммы интегралов по сложному контуру на комплексной плоскости и конечной суммы мод, соответствующих дискретному спектру. Для перемещений

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \int_{\Gamma} [B_2(\alpha)\check{u}_x(y; \alpha) + D_2(\alpha)\hat{u}_x(y; \alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ &+ \int_{-k_{12}}^{-k_{11}} B_2(\alpha)\tilde{u}_x(y; \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \sum_{n=1}^N B_{2n}u_{xn}(y; \alpha_n) e^{-i\alpha_n x}, \end{aligned}$$

$$u_y(x, y) = \int_{\Gamma} [B_2(\alpha)\check{u}_y(y; \alpha) + D_2(\alpha)\hat{u}_y(y; \alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ + \int_{-k_{12}}^{-k_{11}} B_2(\alpha)\check{u}_y(y; \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \sum_{n=1}^N B_{2n}u_{yn}(y; \alpha_n) e^{-i\alpha_n x},$$

здесь $B_2(\alpha)$, $D_2(\alpha)$ – произвольные функции, B_{2n} – произвольная постоянная. Знаком Γ ("ключка") обозначен сложный контур на комплексной плоскости, состоящий из мнимой отрицательной полуоси и интервала $(-k_{11}, 0)$.

На основе аналога формулы Грина

$$\int_0^{+\infty} \left[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta) \right] dy = \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} i \frac{\tau(\alpha)u_x^*(\beta) - u_x(\alpha)\tau^*(\beta) + \sigma_y(\alpha)u_y^*(\beta) - u_y(\alpha)\sigma_y^*(\beta)}{\alpha - \beta^*}$$

(лемма 6.1) введено скалярное произведение мод полуоткрытого упругого волновода

$$\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = \int_0^{+\infty} \left[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta) \right] dy. \quad (8)$$

Доказана

Теорема 6.2. *Собственные волны полуоткрытого упругого образуют ортогональную систему волн относительно скалярного произведения (8).*

Пусть любая волна в рассматриваемой волноводной структуре представляет собой наложение мод (разлагается по собственным волнам)

$$\mathbf{w}(x, y) = \int_{\Gamma} [C(\alpha)\check{w}(y; \alpha) + A(\alpha)\hat{w}(y; \alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ + \int_{-k_{12}}^{-k_{11}} C(\alpha)\check{w}(y; \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \sum_{n=1}^N C_n w_n(y; \alpha_n) e^{-i\alpha_n x},$$

где $A(\alpha)$, $C(\alpha)$ – произвольные функции, C_n – произвольная постоянная.

Во **второй главе** исследованы двумерные задачи дифракции упругой гармонической волны на неоднородностях в закрытых и полукрытых упругих волноводах. Разработаны методы решения этих задач.

В *седьмом параграфе* исследована задача о возбуждении плоского упругого волновода: найти положительно ориентированное поле в волноводе по заданному его значению (следу) на сечении волновода.

Показано, что ее решение эквивалентно решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения потенциальной функции по собственным волнам. Приближенное решение последней найдено методом Гаусса.

В *восьмом параграфе* рассмотрена задача дифракции упругой волны на стыке двух плоских упругих полубесконечных волноводов: найти решение системы уравнений Ламе (1), удовлетворяющее граничным условиям на стенках волновода (2), (3), условиям сопряжения на стыке

$$\begin{aligned} u_x(0-0, y) &= u_x(0+0, y), & u_y(0-0, y) &= u_y(0+0, y), \\ \sigma_x(0-0, y) &= \sigma_x(0+0, y), & \tau(0-0, y) &= \tau(0+0, y), \end{aligned}$$

и условию излучения. Обозначим через $\mathbf{w}^0(x, y)$ потенциальную вектор-функцию набегающей волны, $\mathbf{w}^+(x, y)$, $\mathbf{w}^-(x, y)$ – потенциальные вектор-функции преломленного ($x > 0$) и отраженного ($x < 0$) поля, где $\mathbf{w}(x, y) = \{u_x(x, y), u_y(x, y), \sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau(x, y)\}$,

Доказана

Теорема 8.1. *Задача дифракции упругой волны на вертикальной границе раздела сред в плоском упругом волноводе эквивалентна*

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{w}_n^+(x, y), \mathbf{w}_m^-(x, y) \rangle \langle \mathbf{w}_m^-(x, y), \mathbf{w}_l^+(x, y) \rangle}{\|\mathbf{w}_m^-(x, y)\|} + \\
 & + C_l^+ \|\mathbf{w}_l^+(x, y)\| = \langle \mathbf{w}^0(x, y), \mathbf{w}_l^+(x, y) \rangle - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{w}^0(x, y), \mathbf{w}_m^-(x, y) \rangle}{\|\mathbf{w}_m^-(x, y)\|}, \quad l = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Предложен численный алгоритм решения усеченной системы уравнений, приведены результаты расчета для одного из вариантов сопряжения волноводов.

В *девятом параграфе* рассмотрена задача дифракции упругой волны на дефекте в плоском волноводе (на вертикальной границе раздела сред с тонким абсолютно жестким включением). Найти решение системы уравнений Ламе (1), при $x > 0$, $0 < y < h$ и при $x < 0$, $0 < y < h$ в классе уходящих на бесконечность решений, удовлетворяющих граничным условиям на стенках волновода (2), (3) и смешанным условиям сопряжения, на жестком включении

$$\begin{aligned}
 u_x(0-0, y) &= 0, & u_y(0-0, y) &= 0, \\
 u_x(0+0, y) &= 0, & u_y(0+0, y) &= 0, \quad y \in M,
 \end{aligned}$$

и вне него

$$\begin{aligned}
 u_x(0-0, y) &= u_x(0+0, y), & u_y(0-0, y) &= u_y(0+0, y), \\
 \sigma_x(0-0, y) &= \sigma_x(0+0, y), & \tau(0-0, y) &= \tau(0+0, y), \quad y \in N.
 \end{aligned}$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 9.1. *Задача дифракции упругой волны на вертикальной перегородке в плоском упругом волноводе эквивалентна БСЛАУ относительно коэффициентов разложения потенциальной функции по собственным волнам.*

Приведены описание численного алгоритма решения усеченной системы линейных алгебраических уравнений и результаты вычислительного эксперимента.

В *десятом параграфе* дана постановка задачи дифракции упругой волны на стыке полуоткрытых полубесконечных волноводов: в областях D_1 , D_2^- , D_2^+ найти решение системы уравнений Ламе (1) с кусочно постоянными коэффициентами ρ , λ и μ , удовлетворяющее граничным условиям (7), условиям сопряжения (6) и

$$\begin{aligned} u_x(0-0, y) &= u_x(0+0, y), & u_y(0-0, y) &= u_y(0+0, y), \\ \sigma_x(0-0, y) &= \sigma_x(0+0, y), & \tau(0-0, y) &= \tau(0+0, y), \end{aligned}$$

а также условиям на бесконечности: искомое решение должно быть ограничено при $y \rightarrow +\infty$ и распространяться (как волна) в направлениях $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. Здесь $D_2^- = \{(x, y) : x < 0, 0 < y < h\}$, $D_2^+ = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < h\}$, $D_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y > h\}$.

В *одиннадцатом параграфе* задача сопряжения полуоткрытых волноводов рассмотрена в приближении волноводных мод. Доказана

Теорема 10.1. *В приближении волноводных мод задача дифракции упругой волны на вертикальной границе раздела сред в полуоткрытом упругом волноводе эквивалентна СЛАУ*

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{N^+} C_n^+ \sum_{m=1}^{N^-} \frac{\langle \mathbf{w}_n^+(x, y), \mathbf{w}_m^-(x, y) \rangle \langle \mathbf{w}_m^-(x, y), \mathbf{w}_l^+(x, y) \rangle}{\|\mathbf{w}_m^-(x, y)\|} + \\ + C_l^+ \|\mathbf{w}_l^+(x, y)\| = \langle \mathbf{w}^0(x, y), \mathbf{w}_l^+(x, y) \rangle - \end{aligned} \quad (9)$$

$$- \sum_{m=1}^{N^-} \frac{\langle \mathbf{w}^0(x, y), \mathbf{w}_m^-(x, y) \rangle}{\|\mathbf{w}_m^-(x, y)\|}, \quad l = 1..N^+.$$

Предложен алгоритм решения системы уравнений (9) построенный на основе метода Гаусса.

Основные результаты диссертации

1. Найдены собственные волны плоского упругого волновода с фиксированными границами и доказано, что система таких собственных волн является ортогональной и полной.

2. Задачи дифракции упругой волны на стыке двух плоских волноводов и на дефекте в плоском волноводе сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Предложены численные алгоритмы их решения.

3. Найдены собственные волны дискретного и непрерывного спектра полуоткрытого упругого волновода. Доказано, что система таких собственных волн является ортогональной. Предложен приближенный метод решения задачи сопряжения полуоткрытых упругих волноводов.

Список публикаций по теме диссертации

1. Вдовина К.Н. *Комплексные постоянные распространения упругого волновода для случая границы с трением* / К.Н. Вдовина // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 34. Лобачевские чтения – 2006. Матер. Пятой мол. науч. шк.-конф. (Казань, 28 нояб. – 2 дек., 2006 г.). – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2006. – С. 36–38.

2. Вдовина К.Н. *О комплексных постоянных распространения упругого волновода* / К.Н. Вдовина // Межд. семинар. Супервычисления и мат. моделирование: Тез. докл. (Саров, 3–7 окт., 2006 г.). – Саров:

РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2006. – С. 32–33.

3. Вдовина К.Н. *О собственных волнах упругого полукрытого волновода* / К.Н. Вдовина // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 36. Лобачевские чтения – 2007. Матер. Шестой мол. науч. шк.-конф. (Казань, 16–19 дек., 2007 г.). – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2007. – С. 41–44.

4. Вдовина К.Н. *Об ортогональности собственных волн полукрытого упругого волновода* / К.Н. Вдовина, Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков // Изв. вузов. Математика. – 2008. – №9. – С. 69–75.

5. Вдовина К.Н. *Собственные волны полукрытых волноводных структур и задачи дифракции волн на стыках волноводов* / К.Н. Вдовина, И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков // НИИ математики и механики Казанского университета. 2003–2007 гг. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. – С. 248–262.

6. Стехина К.Н. *Дифракция упругой волны на границе раздела сред в плоском упругом волноводе* / К.Н. Стехина // СамДиф – 2009: конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". Тезисы докладов. (Самара, 29 июня – 2 июля, 2009 г.). – Самара: Изд-во "Универс групп" , 2009. – С. 58–59.

7. Стехина К.Н. *Дифракция упругих волн на дефектах в плоском упругом волноводе* / К.Н. Стехина, Д.Н. Тумаков // Препринт ПМФ-09-03. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2009. – 34 с.

8. Vdovina K.N. *Eigen waves of semi-opened waveguide structures* / K.N. Vdovina, I.N. Pleshcinskii, N.B. Pleshcinskii, D.N. Tumakov // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2008. (Odesa, Ukraine, June 29 – July 2, 2008). Odesa, 2008. – P. 492–494.