На правах рукописи

Пиджакова Любовь Михайловна

ТРИ-ТКАНИ С КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫМИ ТЕНЗОРАМИ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань 2009

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Шелехов Александр Михайлович

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
Толстихина Галина Аркадьевна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Кириченко Вадим Федорович
доктор физико-математических наук, профессор
Степанов Сергей Евгеньевич

Ведущая организация: Чувашский государственный университет

Защита состоится 8 октября 2009 года в 14ч. 30мин. на заседании Диссертационного совета Д 212. 081. 10 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина г.Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория три-тканей — сравнительно молодой раздел дифференциальной геометрии. Впервые три-ткани начали изучать в 1926-1928 годах участники гамбургского геометрического семинара под руководством известного математика 20 века Вильгельма Бляшке. Они определили различные типы конфигураций на криволинейной ткани и показали, что каждой конфигурации соответствует некоторое алгебраическое тождество. Результаты этих исследований были опубликованы в [7], библиографию см. в [6]. В 1936 году появилась работа Черна [15], в которой он методом внешних форм Э. Картана изучает геометрию многомерных три-тканей, образованных тремя семействами r-мерных поверхностей в $2r$-мерном пространстве.

Следующий этап в исследовании многомерных три-тканей связан с развитием метода внешних форм в работах С.П. Финикова, Г.Ф. Лаптева, А.В. Васильева и других российских математиков [8], [9], [14]. В 1969 году была опубликована работа М.А. Акивиса [1], в которой записаны структурные уравнения многомерной три-ткани и определены важнейшие специальные классы тканей. Далее последовала серия работ по теории тканей как самого М.А. Акивиса, так и его коллег и учеников: В.В. Гольдберга, А.М. Шелехова, А.Д. Иванова, Г.А. Клековкина, В.В. Тимошенко, В.С. Болодурина, Г.А. Толстихиной и многих других. К настоящему времени в данной области получен целый ряд фундаментальных результатов, которые отражены в обзорах и монографиях [2] – [6], [13], [16], [17].

Основные исследования ведутся по трем направлениям:

1) изучение специальных классов тканей, определяемых специаль-

ными соотношениями на тензоры кривизны и кручения;

2) исследование дифференциально-геометрических структур и аффинных связностей, определяемых тканями;

3) изучение локальных свойств тканей с помощью ее локальных координатных луп.

Одной из основных проблем теории тканей является проблема классификации. Каждый класс тканей характеризуется особым типом канонически присоединенной к ткани аффинной связности (связности Черна) [6]. В терминах связности Черна были даны тензорные характеристики известных тканей: трансверсально-геодезических, изоклинных, Томсена (T), Рейдемейстера (R), Бола (B), Муфанг (M), шестиугольных (H) и других.

Исследование специальных классов тканей, один из которых рассмотрен в диссертации, имеет важное прикладное значение. Так, физические приложения теории тканей связаны с тем обстоятельством, что три-ткань представляет собой геометрический аналог локальной гладкой квазигруппы или лупы, вообще говоря, неассоциативной. Возможности применения квазигрупповых идей в различных областях теоретической физики (теория поля, общая теория относительности и др.) проанализированы, в частности, в [11]. Оказывается, что практически все возникающие в физике структуры, связанные с квазигруппами и лупами, в определенном смысле близки к группам Ли. Поэтому представляет интерес изучение тканей, наиболее близких по своим свойствам к групповым. Такими являются и рассматриваемые три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Таким образом, тема исследования является актуальной.

Цель диссертационной работы. В настоящей работе рассматриваются три-ткани на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии, тензоры кривизны и кручения которых ковариантно постоянны в связности Черна. Такие ткани мы обозначаем W^{∇}. Цель работы состоит в исследовании алгебраических и геометрических свойств три-тканей W^{∇}.

Основные задачи исследования:

– найти общий вид структурных уравнений тканей W^{∇} и характеризующие их тензорные соотношения;

– исследовать дифференциально-геометрические структуры, индуцируемые тканью W^{∇} на многообразии M;

– найти структурные и конечные уравнения некоторых специальных многомерных тканей W^{∇};

– описать основные свойства и исследовать геометрическое строение четырехмерных тканей W^{∇}.

Методы исследования. Теория тканей тесно связана со многими областями современной математики (теорией связностей, теорией расслоенных пространств, классической и проективной геометрией, алгебраической теорией групп, теорией групп Ли и т.д.), потому в ней используются разнообразные методы, применяемые в этих областях. Большинство основных результатов в этой теории получены методом внешних форм и подвижного репера Картана. Этот метод используется и в настоящей работе. Рассмотрения имеют, в основном, локальный характер.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Найдены структурные уравнения $2r$-мерных тканей W^∇ и соотношения, связывающие компоненты тензоров кривизны и кручения таких тканей.

2. Доказано, что многообразие, несущее ткань W^∇, является (локальным) однородным пространством, а ткань W^∇ — G-тканью. Описана структура этого однородного пространства.

3. Найдены структурные и конечные уравнения единственной негрупповой четырехмерной ткани W^∇, описаны ее алгебраические и геометрические свойства.

4. Найдены структурные и конечные уравнения единственной изоклинной ткани W^∇.

5. Исследованы три-ткани W^∇ с тензором кривизны минимального ранга. Найдены уравнения некоторых специальных три-тканей W^∇ с тензором кривизны минимального ранга.

Теоретическое и прикладное значение. Результаты, полученные в диссертации, являются теоретическими. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов в рамках специализации по геометрии тканей и по некоторым разделам физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на геометрических семинарах кафедры функционального анализа и геометрии ТвГУ (рук. проф. А.М. Шелехов), кафедры геометрии МПГУ (рук. проф. В.Ф. Кириченко), на Международной конференции "Геометрия в Одессе-2008"(19–24 мая 2008 г., Одесса).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 104 страницах машинописного текста, состоит из введения, трех глав, включающих 11 параграфов, и списка цитируемой литературы. Список литературы содержит 27 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается общая характеристика работы, формулируются цели и задачи диссертационного исследования, приводятся основные результаты.

В первой главе излагаются сведения из теории многомерных три-тканей, необходимые для дальнейшего изложения.

В первом параграфе приведено определение многомерной три-ткани, записаны ее структурные уравнения и соотношения, связывающие основные тензоры ткани.

Второй параграф посвящен известным специальным классам многомерных тканей, которые будут использованы в дальнейшем (изоклинные, изоклинно-геодезические, A-ткани, ткани с симметричным тензором кривизны). Здесь же приводятся тензорные условия, характеризующие эти классы три-тканей.

В третьем параграфе дано определение три-ткани W^∇ – основного объекта изучения в диссертационной работе. Так обозначены ткани, тензор кручения $a = \left(a^i_{jk}\right)$ и тензор кривизны $b = \left(b^i_{jk\ell}\right)$, $i, j, k, \ell = \overline{1, r}$, которых ковариантно постоянны относительно канонической аффинной связности Черна: $\nabla a = 0$, $\nabla b = 0$.

Ткани W^∇ мы рассматриваем с точностью до локальных диффеоморфизмов на базах слоений ткани. Тройка таких преобразований называется изотопическим преобразованием или изотопией [5].

В третьем параграфе записаны тензорные соотношения, характеризующие рассматриваемый класс тканей. Доказана

Теорема 1.8. *Тензор кручения $a = (a^i_{jk})$ три-ткани W^∇ удовлетворяет тождеству Якоби $a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]} = 0$, ее тензор кривизны $b = (b^i_{jk\ell})$ симметричен по всем нижним индексам, и эти тензоры связаны следующими соотношениями:*

$$a^m_{jk}b^i_{mpq} - a^i_{mk}b^m_{jpq} - a^i_{jm}b^m_{kpq} = 0,$$

$$b^m_{jk\ell}b^i_{mpq} - b^m_{jpq}b^i_{mk\ell} = b^m_{kpq}b^i_{jm\ell} + b^m_{\ell pq}b^i_{jkm},$$

$$a^i_{mk}b^m_{jpq} + a^i_{jm}b^m_{kpq} = 0.$$

Отметим, что ткани с вполне симметричным тензором кривизны исследовались в [18], они обозначены T_s. Более подробно в работе [12] изучались четырехмерные ткани этого класса.

Полученные тензорные соотношения интерпретированы в терминах касательной W-алгебры ткани. Напомним [6], что в касательном пространстве T_e единицы e всякой координатной лупы $\ell(x, y)$ три-ткани, связанной с точкой (x, y) многобразия M, несущего три-ткань W, можно ввести две операции – бинарную и тернарную:

$$[\xi\eta]^i = a^i_{jk}(x, y)\xi^j\eta^k, \quad (\xi\eta\zeta)^i = b^i_{jk\ell}(x, y)\xi^j\eta^k\zeta^\ell,$$

$\xi, \eta, \zeta \in T_e$. Эти операции называются соответственно *коммутатором* и *ассоциатором* и обозначаются A и B соответственно. Коммутатор и ассоциатор связаны обобщенным тождеством Якоби:

$$[[\xi\eta]\zeta] + [[\eta\zeta]\xi] + [[\zeta\xi]\eta] = (\xi\eta\zeta) + (\eta\zeta\xi) + (\zeta\xi\eta) - (\xi\zeta\eta) - (\eta\xi\zeta) - (\zeta\eta\xi),$$

и образуют вместе *W-алгебру* или алгебру Акивиса [6].

Таким образом, с тканью W связано расслоение W-алгебр, которое называется *W-алгеброй ткани W*. В дальнейшем для краткости будем писать a^i_{jk} вместо $a^i_{jk}(x,y)$ и т.д., подразумевая, что все функции рассматриваются в текущей точке (x,y) многообразия M, несущего три-ткань W.

Рассмотрим оператор $\overline{b} = \overline{b}(\xi,\eta) = \big(b^i_j(\xi,\eta)\big)$, определенный следующим образом:

$$b^i_j(\xi,\eta) = b^i_{jk\ell}\xi^k\eta^\ell,$$

где ξ, η – произвольные векторы из T_e. Доказаны следующие утверждения.

Предложение 1.1. *Операторы вида $\overline{b}(\xi,\eta)$ являются дифференцированиями бинарной алгебры A.*

Предложение 1.2. *Операторы $\overline{b}(\xi,\eta)$ являются дифференцированиями тернарной алгебры B.*

Следствие. *Операторы вида $\overline{b}(\xi,\eta)$ являются дифференцированиями W-алгебры ткани W^∇.*

Предложение 1.3. *Векторы $a(\xi,\eta)$ входят в правое ядро тернарной алгебры B.*

Предложение 1.4. *Область значений производной алгебры A' входит в правое ядро тернарной алгебры B, определяемой тензором b.*

В этом же параграфе проведена канонизация репера и доказана

Теорема 1.10. *Пусть A — бинарная алгебра три-ткани W^∇, A' — ее производная алгебра. Три-ткань W^∇ является групповой тканью, если* $\dim A' = r$. *Если* $\dim A' = \rho < r$, *то ткань W^∇ является полупрямым произведением групповой подткани $\widetilde{W}$ размерности ρ и фактор-ткани $W^\nabla/\widetilde{W}$, которая является изоклинно-геодезической тканью с ковариантно постоянным тензором кривизны.*

Напомним [6], что изоклинно-геодезическими называются три-ткани, для которых $a^i_{jk} = 0$.

В четвертом параграфе первой главы изучено строение многообразия M, несущего три-ткань W^∇. Как следует из определения ткани W^∇, многобразие ткани является локальным редуктивным пространством специального вида, а связность Черна — его канонической связностью. Мы находим соответствующую однородную структуру G/H, структурные уравнения группы Ли G и ее подгруппы H (**Теорема 1.12.**).

Далее доказана

Теорема 1.13. *Ткань W^∇ является G-тканью, определенной на однородном пространстве G/H.*

(G-тканями называются ткани, которые допускают транзитивную группу автоморфизмов.)

Во второй главе доказывается существование единственной негрупповой четырехмерной изоклинно-геодезической ткани W^∇ и рассматриваются ее свойства. Такая три-ткань обозначена W_4^∇.

В **2.1** доказано, что адаптированные реперы ткани W_4^∇ можно выбрать так, что ее тензор кривизны будет иметь единственную ненулевую компоненту b^2_{111}, которую можно привести к единице. Тогда структурные уравнения четырехмерной ткани W_4^∇ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega_1^2, \\ & d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^2 \\ & d\omega_1^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Доказана

Теорема 2.2. *Существует единственная (с точностью до изотопии) негрупповая четырехмерная три-ткань* W_4^∇ *с ковариантно постоянным тензором кривизны и нулевым тензором кручения. Многообразие ткани* W_4^∇ *является однородным пространством* G/H*, где* $\dim G = 5$, $\dim H = 1$. *Уравнения ткани* W_4^∇ *приводятся к виду:*

$$z^1 = u^1 + v^1, \quad z^2 = u^2 + v^2 - \frac{1}{2} v^1 (u^1)^2. \tag{0.2}$$

Здесь G — некоторая пятимерная группа, структурные уравнения которой есть уравнения (0.1), H — одномерная подгруппа группы G, определенная системой уравнений $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$.

Во втором параграфе найдены уравнения изоклинных поверхностей три-ткани W_4^∇ и уравнения конуса Сегре, образованного касательными плоскостями к изоклинным поверхностям в некоторой точке M_0.

В третьем параграфе путем интегрирования структурных уравнений найдены конечные уравнения пятимерной группы G, определяющей ткань W_4^∇ и уравнения инволютивного автоморфизма, определяющего симметрическую структуру. Записано действие группы G на себе, как группы преобразований, а также ее действие на четырехмерном многообразии M. Здесь же найдены структурные уравнения алгебры A и доказаны

Теорема 2.4. *Пятимерная алгебра Ли A группы G, определяющая три-ткань W_4^∇, является нильпотентной алгеброй типа $g_{5,4}$* [10].

Теорема 2.5. *Всякая пятимерная антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая условиям:*

$$A' = \{e_3, e_4, e_5\}, \quad \widetilde{A}_3 \equiv [A'A] = \{e_3, e_4\}, \quad \widetilde{A}_4 \equiv [[A'A]A] = 0,$$

является алгеброй A $(g_{5,4})$.

Здесь же показано, что группа G может быть получена расширением одной абелевой группы с помощью другой абелевой группы. Для этого был найден вид гомоморфизма $\varphi : G_1 \to AutG_0/IntG_0$, где G_0 и G_1 — абелевы группы.

В четвертом параграфе изучается симметрическая структура многообразия $M = G/H$, несущего три-ткань W_4^∇. В частности, найден в явном виде соответствующий инволютивный автоморфизм группы G. В **2.4** структурные уравнения однородного пространства M мы записываем в каноническом виде, то есть как структурные уравнения соответствующей канонической аффинной связности.

В **2.5** рассматриваются так называемые A-свойства ткани W_4^∇.

Согласно [17], три-ткань W называется A-*тканью*, если каждая ее координатная лупа $\ell(a,b)$ является A-лупой. Это означает, что в лупе $\ell(a,b)$ операторы $\ell_{x,y} = L_{xy}^{-1} \circ L_x \circ L_y$, $r_{x,y} = R_x \circ R_x \circ R_{xy}^{-1}$ и $m_{x,y} = L_x^{-1} \circ R_y^{-1} \circ L_x \circ R_y$ являются автоморфизмами (здесь L_x и R_x — операторы левого и правого сдвигов в лупе соответственно). Три-ткань W называется *сопряженно замкнутой*, если всякая ее координатная лупа является сопряженно замкнутой лупой, то есть композиции левых и правых сдвигов в лупе вида $L_x \circ L_y \circ L_x^{-1}$, $R_x^{-1} \circ R_y \circ R_x$ являются левым и правым сдвигами соответственно.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.6. *Три-ткань* W_4^∇ *является A-тканью.*

Теорема 2.7. *Три-ткань* W_4^∇ *является сопряженно замкнутой тканью.*

Третья глава посвящена специальным классам три-тканей с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения.

В первом параграфе рассматриваются ткани W^∇ с тензором кривизны минимального ранга, то есть с тензором кривизны следующего строения: $b^i_{jk\ell} = \mu^i b_j c_k d_\ell$. Для такого тензора в силу его симметричности по нижним индексам получаем:

$$b^i_{jk\ell} = \mu^i b_j b_k b_\ell. \tag{0.3}$$

Доказана

Теорема 3.2. *Структурные уравнения три-ткани* W^∇ *с тензором кривизны минимального ранга, компоненты тензора кривизны которой имеют специальное строение* (0.3), *могут быть приведены к следующему виду:*

$$\begin{gathered}
d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} + 2a^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{k}} + c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}}\underset{1}{\omega}^{\widehat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{k}}, \\
d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} - 2a^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{k}} - c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}}\underset{2}{\omega}^{\widehat{j}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{k}}, \\
d\omega_1^{\widehat{i}} = c^{\widehat{i}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1, \quad da^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}} = c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}}\omega_1^{\widehat{j}}, \quad \widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k} = \overline{2, r},
\end{gathered}$$

причем $c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}}$, $c^{\widehat{j}}$ *– постоянные и выполняются соотношения* $c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}} c^{\widehat{j}} = 0$.

Ткани W^∇ с тензором кривизны минимального ранга, для которых $c^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}} = 0$, мы назвали *специальными тканями* W^∇. Показано, что структурные уравнения таких тканей приводятся к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} + c^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{k}},\\
&d\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} - c^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{k}},\\
&d\omega_1^{\widehat{i}} = c^{\widehat{i}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

Доказано, что специальные ткани W^{∇} определены на однородном пространстве $M = G/H$, $\dim G = 3r - 1$, $\dim H = r - 1$, причем H является абелевой группой.

В первом параграфе третьей главы найдены также конечные уравнения для двух типов специальных многомерных три-тканей. Во-первых, рассмотрены ткани, для которых матрица $\left(c^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\right)$ имеет диагональный вид, то есть $c^{\widehat{i}}_{1\widehat{i}} \neq 0$, а все остальные элементы равны нулю. Для таких тканей записаны структурные уравнения и доказана

Теорема 3.3. *В некоторых локальных координатах уравнения специальной три-ткани W^{∇} с диагональной матрицей $\left(c^{\widehat{i}}_{1\widehat{i}}\right)$ приводятся к следующему виду:*

$$
z^1 = x^1 + y^1, \quad z^{\widehat{i}} = e^{c^{\widehat{i}}_{1\widehat{i}}y^1}x^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}} - \left(\frac{1}{6}(x^1)^3 + \frac{1}{2}(x^1)^2y^1\right).
$$

Семейство таких тканей зависит от $r - 1$ постоянных $c^{\widehat{i}}_{1\widehat{i}}$.

Во-вторых, рассмотрены специальные ткани, для которых матрица

$\left(c^{\widehat{i}}_{1\widehat{k}}\right)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}. \tag{0.5}$$

Доказана

Теорема 3.4. *В некоторых локальных координатах уравнения специальной ткани W^{∇} с матрицей (0.5) приводятся к следующему виду:*

$$z^1 = x^1 + y^1,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - c^2 \frac{(x^1)^2}{2!} y^1,$$

$$z^3 = x^3 + y^3 - y^2 x^1 - \left(c^3 \frac{(x^1)^2}{2!} - c^2 \frac{2(x^1)^3}{3!} \right) y^1,$$

$$z^4 = x^4 + y^4 - y^3 x^1 + y^2 \frac{(x^1)^2}{2!} - \left(c^4 \frac{(x^1)^2}{2!} - c^3 \frac{2(x^1)^3}{3!} + c^2 \frac{3(x^1)^4}{4!} \right) y^1,$$

$$\dots$$

$$z^r = x^r + y^r - y^{r-1} x^1 + y^{r-2} \frac{(x^1)^2}{2!} - \dots + (-1)^{r-2} y^2 \frac{(x^1)^{r-2}}{(r-2)!} -$$

$$- \left(c^r \frac{(x^1)^2}{2!} - c^{r-1} \frac{2(x^1)^3}{3!} + \dots + (-1)^{r-2} c^2 \frac{(r-1)(x^1)^r}{r!} \right) y^1.$$

Семейство таких тканей задается набором $r-2$ постоянных $c^{\widehat{a}}$.

Во втором параграфе рассматриваются изоклинные три-ткани с ковариантно постоянными основными тензорами (ткани W_0^{∇}). Напомним [6], что изоклинные ткани характеризуются специальным строением тензора кручения:

$$a^i_{jk} = \frac{1}{2}(\delta^i_k a_j - \delta^i_j a_k).$$

Используя этот факт, мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Тензор кривизны изоклинной три-ткани* W_0^∇ *является тензором минимального ранга.*

Как и в первом параграфе, мы специализируем репер ткани W_0^∇ и находим ее структурные уравнения. Доказана

Теорема 3.6. *Изоклинные ткани с ковариантно-постоянными тензорами кривизны и кручения (ткани* W_0^∇*) существуют. Этот класс тканей допускает такое семейство адаптированных реперов, в которых тензор* b *имеет вид* $b^{\widehat{i}}_{111} = \mu^i$*, причем величины* μ^i *являются постоянными, а все остальные компоненты равны нулю. Структурные уравнения ткани* W_0^∇ *приводятся к следующему виду:*

$$
\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} + \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{i}},\\
&d\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\widehat{i}} - \underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}},\\
&d\omega_1^{\widehat{i}} = \mu^{\widehat{i}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1,
\end{aligned}
$$

Путем интегрирования структурных уравнений ткани W_0^∇ найдены ее уравнения в некоторых локальных координатах (**Теорема 3.7**):

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^{\widehat{i}} = e^{y^1}(x^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}} + x^1 y^1). \tag{0.6}$$

В этом же параграфе отмечен следующий факт: несмотря на то, что для ткани W_0^∇ выполняются тензорные соотношения

$$A_m: \quad \underset{1}{c}^i_{m\ell kj} + \underset{2}{c}^i_{\ell jmk} = 0, \tag{0.7}$$

характеризующие четвертую дифференциальную окрестность A_m-ткани [17], эта ткань не является A_m-тканью. А именно, используя уравнения ткани W_0^∇ (0.6), мы показываем, что оператор $m_{x,y}$ (см. выше) не является автоморфизмом в координатной лупе ткани W_0^∇. Таким образом, доказана

Теорема 3.8. *Тензорные соотношения* (0.7), *характеризующие дифференциальную окрестность четвертого порядка A_m-тканей, не являются достаточными для того, чтобы произвольная три-ткань была A_m-тканью.*

Список литературы

[1] Акивис, М.А. О три-тканях многомерных поверхностей/ М.А. Акивис// Тр.геом.сем. ВИНИТИ АН СССР.— 1969.— Т. 2.— С. 7–31.

[2] Акивис, М.А. Дифференциальная геометрия тканей/ М.А. Акивис// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1983.— Т. 15.— С. 187–213.

[3] Akivis, M.A. Algebraic aspects of web geometry/ M.A. Akivis, V.V. Goldberg// Comment. Math. Univ. Carolin.— 41(2).— 2000.— p. 205-236.

[4] Akivis, M.A. Differential geometry of web, Chapter 1 in Handbook of Differential Geometry/ M.A. Akivis, V.V. Goldberg// Elsevier Science B.V.— 2000.— p. 1-152.

[5] Акивис, М.А. Основы теории тканей/ М.А. Акивис, А.М. Шелехов// Калинин.— 1981.— 88 с.

[6] Akivis, M.A. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs/ M.A. Akivis, A.M. Shelekhov// Kluwer Academic Publishers.— Dordrecht/ Boston/ London.— 1992.— xvii+358 pp.

[7] Бляшке, В. Введение в геометрию тканей/ В. Бляшке// М.: ГИФМЛ.— 1959.— 144 С.

[8] Васильев, А.М. Теория дифференциально-геометрических струк-

тур/ А.М. Васильев// М.: Изд-во МГУ.— 1987.— 190 С.

[9] Лаптев, Г.Ф. Основные инфинитизимальные структуры высших порядков на гладком многобразии/ Г.Ф. Лаптев// Труды геометрического семинара.— М.— Т. 1.— 1966.— с. 139-189.

[10] Мубаракзянов, Г.М. Классификация вещественных пятимерных алгебр Ли/ Г.М. Мубаракзянов// Изв. вузов.— № 3.— 1963.

[11] Нестеров, А.И. Квазигрупповые идеи в физике/ А.И. Нестеров// В сб. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики.— Тарту.— 1990.— Т. 66.— С. 107–120.

[12] Толстихина, Г.А. О четырехмерных тканях с симметричным тензором кривизны/ Г.А. Толстихина// Ткани и квазигруппы.— Калинин.— 1981.— С. 12–22.

[13] Толстихина, Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей/ Г.А. Толстихина// Современная математика и ее приложения.— Т. 32(2005).— С. 29-116.

[14] Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана/ С.П. Фиников// М.— 1947.

[15] Черн, С.С. (Chern S.S.) Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbf{R}_{2r}$/ С.С. Черн// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.— 11(1,2).— 1936.— P. 333–358. (Zbl. 13., p. 418.)

[16] Шелехов, А.М. Дифференциально-геометрические объекты высших порядков многомерной три-ткани/ А.М. Шелехов// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1987.— Т. 19.— С. 101–154.

[17] Шелехов, А.М. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания/ А.М. Шелехов// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1989.— Т. 21.— С. 109–154.

[18] Шелехов, А.М. О три-тканях с симметричным тензором кривизны/ А.М. Шелехов// Сиб. мат. ж.— 1981.— С. 210–219.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Пиджакова, Л.М. On properties of four-dimensional torsion-free three-webs with covariantly constant curvature tensor/ Л.М. Пиджакова, А.М. Шелехов// Webs and Quasigroups.— Tver.— 2000.— С. 77-84.

[2] Пиджакова, Л.М. Об одном классе изоклинных три-тканей/ Л.М. Пиджакова// Изв. вузов. Математика.— №11.— 2008.— С. 60-67.

[3] Пиджакова, Л.М. Редуктивная структура, связанная с тканью W^{∇}/ Л.М. Пиджакова// Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2008".— Одесса, с 19 мая по 24 мая 2008.— С. 114.

[4] Шелехов, А.М. A remark on A-webs/ А.М. Шелехов, Л.М. Пиджакова// Webs and Quasigroups.— Tver.— 1998-1999.— С. 71-75.

[5] Шелехов, А.М. On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors/А.М. Шелехов, Л.М. Пиджакова // Webs and Quasigroups.— Tver.— 1998-1999.— С. 92-103.